УНИВЕРЗИТЕТ " КИРИЛ И МЕТОДИЈ" - СКОПЈЕ

Д-р Новак Ивановски, вонреден професор
Д-р Никола Речковски, вонреден професор

ПРЕДАВАЊА ПО МАТЕМАТИКА III

(редови , аналитички функции , Лапласов и
Фуриеови трансформации)

Скопје, 1984

Одобрено со решение на ректорот бр.11-2465 од 14.11.1983 година како ПОСТОЈАН УЧЕБНИК.

Рецензенти:
Проф.д-р Илија Шапкарев
Проф.д-р Драган Димитровски

Лектура
Оливера Павловска

Умножено на офсет техника во Универзитетската печатница-Скопје
Тираж 1.000 примероци

Предговор

Оваа книга претставува дел од предавањата по математика III за студентите на Машинскиот факултет во Скопје (без делот за диференцијални равенки) , што авторите ги држат повеќе години.

Сметаме дека овие предавања можат да бидат користени од студентите и на другите технички факултети, на кои се предава материјалот од оваа книга, како и од студентите на Математичкиот факултет и Факултетот за физика. Одговорите на некои задачи ги даде асистент м-р Боро Пиперевски .

Авторите

I ГЛАВА

БРОЈНИ РЕДОВИ

1. ОСНОВНИ ОСОБИНИ НА БРОЈНИТЕ РЕДОВИ

Дефиниција 1. Нека е дадена низата $A=(a_n)_{n=0}^{\infty}$ од реални броеви. Ред или, поточно, ред генериран од низата A е низата $S=(S_n)$ определена на следниот начин

$$S_0 = a_0$$
$$S_1 = a_0 + a_1$$
$$\dots\dots\dots$$
$$S_n = S_{n-1}+a_n = a_0+\dots+a_{n-1}+a_n.$$

Редот $S=(S_n)_{n=0}$ вообичаено е да се означува и со $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ или Σa_n. Ова се само ознаки, симболи, кои не дефинираат никаков број.

Ако низата $S=(S_n)$ е конвергентна велиме дека редот Σa_n е конвергентен, а неговата граница s се вика сума на редот.

Нека се дадени два реда Σa_n и Σb_n. Редот $\Sigma(a_n \pm b_n)$ се вика збир, односно разлика на дадените редови.

Нека е даден редот Σa_n и бројот α. Производ на дадениот ред со бројот α е редот $\Sigma \alpha a_n = \alpha \Sigma a_n$.

Бидејќи редовите се низи, за нив важи следната теорема.

Теорема 1. а) Ако Σa_n и Σb_n се конвергентни со суми a,b соодветно, тогаш редовите $\Sigma(a_n+b_n)$ и $\Sigma(a_n-b_n)$ се конвергентни и нивните суми се a+b, a-b соодветно.

б) Ако Σa_n е конвергентен ред со граница a, тогаш и редот $\Sigma \alpha a_n$ е конвергентен и има сума αa.

Доказот на оваа теорема се остава за вежба (задача 15).

Сега ќе дадеме еден многу прост потребен услов за дадениот ред да биде конвергентен. Меѓутоа, тој услов не е и доволен.

Лема 1. Ако редот Σa_n е конвергентен тогаш $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Доказ. Од дефиницијата за конвергенција на ред имаме дека низата (S_n) е конвергентна. Но, бидејќи $a_n = S_n - S_{n-1}$,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0$$

Наредната теорема има голема важност во теоријата на редовите.

Теорема 2. Нека (a_n) е низа од ненегативни броеви, т.е. нека $a_n \geq 0$ за секое n. Тогаш редот Σa_n ќе биде конвергентен ако и само ако членовите на низата (s_n) се ограничени $(s_n=a_0+a_1+\ldots+a_n)$.

Доказ. Бидејќи $a_n \geq 0$ затоа $s_0 \leq s_1 \leq \ldots \leq s_n \leq ..$ т.е. имаме една монотоно растечка низа, која е ограничена оддесно. Од теоријата на низите познато е дека монотоно растечката низа што е ограничена оддесно е конвергентна и притоа границата и е супремумот од нејзините членови. Според тоа:

$$s = \sup_n s_n$$

Сега само ќе го пренесеме општиот Кошиев критериум за конвергенција кај редовите без доказ.

Теорема 3. (Кошиев критериум за редови). Тогаш редот Σa_n конвергира, ако и само ако, за секој кој и да било број $\varepsilon > 0$ постои природен број $N(\varepsilon)$ таков што

$$|s_m - s_n| = |a_{n+1} + \ldots + a_m| < \varepsilon, \text{ за } m,n \geq N(\varepsilon)$$

Овде претпоставуваме дека $m \geq n$.

Поимот за апсолутна конвергенција на редови е од голема важност. Се определува на следниот начин.

Дефиниција 2. За редот Σa_n велиме дека е апсолутно конвергентен, ако е конвергентен редот од апсолутните вредности, т.е. ако $\Sigma |a_n|$ конвергира.

Теорема 4. Ако редот Σa_n е апсолутно конвергентен, тогаш е и обично конвергентен.

Доказ. По претпоставка, редот $\Sigma |a_n|$ е конвергентен. По Кошиевиот критериум за редови за дадено $\varepsilon > 0$, постои $N(\varepsilon)$ таков што за $m,n > N(\varepsilon)$ важи $|a_{n+1}| + \ldots + |a_m| < \varepsilon$.

Но, знаеме дека е:

$$|a_{n+1}+\ldots+a_m| \leq |a_{n+1}|+\ldots+|a_m|$$

од каде добиваме $|a_{n+1}+\ldots+a_m| < \varepsilon$, што значи дека е исполнет Кошиевиот критериум за Σa_n.

Сега ќе дадеме неколку примери.

Пример 1. Ја разгледуваме реалната низа $A=(a^n)$, која го дава геометрискиот ред

$$1 + a + a^2 + \ldots + a^n + \ldots = \Sigma a^n$$

Потребен услов за конвергенција е $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, што е можно ако $|a| < 1$. Ако е $m \geq n$ имаме:

$$a^{n+1}+\ldots+a^m = \frac{a^{n+1}-a^{m+1}}{1-a}$$

од каде добиваме

$$|s_n-s_m| = |a^{n+1}+\ldots+a^m| \leq \frac{|a^{n+1}+a^{m+1}|}{|1-a|}$$

Но, ако $|a| < 1$, тогаш a^{n+1} и a^{m+1} се стремат кон 0, кога m, $n \to \infty$. Тоа пак значи дека важи Кошиевиот критериум за конвергенција на редовите, додека за $|a| > 1$ не е исполнет ниту потребниот услов $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, што значи дека во тој случај геометрискиот ред е дивергентен.

Пример 2. Го разгледуваме хармонискиот ред $\Sigma\frac{1}{n}$, $\lim \frac{1}{n} = 0$, т.е. исполнет е потребниот услов. Меѓутоа, ќе покажеме дека дадениот ред е дивергентен. Бидејќи членовите на хармонискиот ред се позитивни, доволно е да покажеме дека неговите парцијални (S_n) не се ограничени одгесно. Навистина

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2},$$

$$S_2{}^2 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = S_2 + \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} > S_2 + 2\cdot\frac{1}{4} = S_2 + \frac{1}{2}.$$

Со математичка индукција утврдуваме дека за $k_r = 2^r$ имаме:

$$S_{k_r} = S_{k_{r-1}} + 2^{r-1}\cdot\frac{1}{2^r} = S_{k_{r-1}} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{r-1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{r}{2}.$$

Според тоа, низата (S_{k_r}) не е ограничена.

Пример 3. Сега ќе го разгледаме p-редот $\Sigma\frac{1}{n^p}$ каде $0<p\le 1$ при што го користиме елементарното неравенство $\frac{1}{n}\le\frac{1}{n^p}$ а тоа покажува дека p-редот за $0<p\le 1$ е дивергентен.

Членовите на низата $S=(S_n)$ се викаат уште парцијални суми на редот.

Пример 4. Го разгледуваме p-редот за $p > 1$. Бидејќи парцијалните суми се монотоно растечки, доволно е да покажеме дека секоја нивна подниза е ограничена. Ако е $k_1=2^1-1$, $S_{k_1}=1$:

Ако $k_2=2^2-1=3$, имаме:

$$S_{k_2} = \frac{1}{1} + (\frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p}) < 1 + \frac{2}{2^p} = 1 + \frac{1}{2^{p-1}}.$$

Ако е $k_3=2^3-1$, имаме:

$$S_{k_3} = S_{k_2} + (\frac{1}{4^p}+\dots+\frac{1}{7^p}) < S_{k_2} + \frac{4}{4^p} < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}}.$$

Нека $a = \frac{1}{2^{p-1}}$; бидејќи $p > 1$, затоа $0<a<1$. Со математичка индукција наоѓаме дека за $k_r = 2^r-1$, се добива

$$0 < S_{k_r} < 1 + a + a^2+\dots+a^{r-1},$$

што значи дека бројот $\frac{1}{1-a}$ е горна граница за парцијалните суми S_{k_r}.

2. ПРЕГРУПИРАЊЕ НА РЕДОВИТЕ

Да се прегрупира еден ред Σa_n значи да се сменат местата на членовите на редот. На пример, од хармонискиот ред $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$ со менување, добиваме вакви редови:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n-1}+\dots$$

или

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\dots+\dots$$

Дефиниција 3. Редот Σb_m е добиен со прегрупирање од редот Σa_n, ако постои обратно еднозначна функција f од $\mathbb{N}$ на N, таква што $b_m = a_{f(m)}$ за секое $m\in N$.

Според една теорема на Риман, ако редот Σa_n е конвергентен, а редот $\Sigma|a_n|$ дивергентен, со прегрупирање можат да се добијат редови кои за суми ќе имаат однапред зададени броеви.

Меѓутоа, за редовите што се апсолутно конвергентни важи наредната теорема.

Теорема 5. (Теорема за прегрупирање). Нека Σa_n е апсолутно конвергентен ред. Тогаш секој ред што се добива со прегрупирање на дадениот ред е апсолутно конвергентен, со истата граница како и дадениот ред.

Доказ. Нека редот Σb_m е прегрупиран од редот Σa_m. Нека K е една горна граница за парцијалните суми на редот $\Sigma|a_m|$. Ако $t_r = b_1+b_2+\ldots+b_r$ е парцијална сума за редот Σb_m, тогаш очигледно имаме:

$$|b_1|+\ldots+|b_r| = |a_{f(1)}|+\ldots+|a_{f(r)}| \le K.$$

Според тоа, редот Σb_m е апсолутно конвергентен. Нека сумата на редот Σb_m е b, а сумата на редот Σa_m е a. Ќе покажеме дека a=b. Ако е $\varepsilon > 0$, нека $N(\varepsilon)$ е такво што од $m,n \ge N(\varepsilon) \Rightarrow$ $|a-s_n| < \varepsilon$ и $\sum\limits_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$. Избираме парцијална сума t_r од редот Σb_m таква што сите $a_1,a_2,\ldots,a_n$ се појавуваат во t_r. Потоа го избираме $m > n$ така големо што секое b_k кое се појавува во t_r да се содржи во s_m.

Тогаш

$$|a-b| \le |a-s_m|+|s_m-t_r| + |t_r-b| < \varepsilon+ \sum_{n+1}^{m} |a_k| + \varepsilon < 3\varepsilon.$$

Бидејќи ε е кој и да било позитивен број, a=b.

3. ДВОЈНИ РЕДОВИ

Понекогаш е потребно да се разгледуваат бесконечните суми што зависат од два целобројни индекса. Тие се викаат двојни редови. Теоријата на таквите двојни редови се развива со сведување на двојни низи. Да претпоставиме дека на секој пар (i,j) од NxN му е придружен број a_{ij}. Дефинираме парцијална сума:

$$s_{mn} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}$$

За двојниот ред што симболички го означуваме со Σa_{ij} ќе велиме дека конвергира кон бројот а, ако за секој $\varepsilon > 0$ постои природен број $N(\varepsilon)$, таков што, ако $m \geq N(\varepsilon)$ и $n \geq N(\varepsilon)$, тогаш $|a-s_{mn}| < \varepsilon$. За двојниот ред ќе велиме дека е апсолутно конвергентен, ако е конвергентен редот $\sum_{i,j}|a_{ij}|$.

Двојниот ред $\sum_{i,j} a_{ij}$ е апсолутно конвергентен, ако и само ако множеството

$$\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|:m,n \quad N\}$$

е ограничено одгоре. Сумата е еднаква на супремумот на $\sum_{i,j}|a_{ij}|$. Доказот е аналоген како кај обичните редови.

Овде ќе разгледуваме главно апсолутно конвергентен дојни редови. Следниот резултат е едноставен, но затоа дава практичен критериум за апсолутна конвергенција на двојните редови.

Лема. Претпоставуваме дека итерираните редови $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|$ конвергираат. Тогаш двојниот ред е апсолутно конвергентен.

Доказ. По претпоставка, секој ред $\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|$ конвергира кон ненегативен број a_j. Од своја страна, пак, редот Σa_j конвергира кон бројот А.

Очигледно е дека бројот А е горна граница на множеството:

$$\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|:m,n \quad N\}.$$

Теорема 6. Претпоставуваме дека двојниот ред Σa_{ij} е апсолутно конвергентен кон бројот а. Тогаш двата итерирани реда $\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}$, $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}$ конвергираат кон истата граница.

Доказ. По претпоставка постои позитивен реален број А што е горна граница за множеството $\{\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}|:m,n \in N$. Ако n е фиксен, разгледуваме дека $\sum_{i=1}^{n}|a_{ij}| \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_{ij} \leq A$ за секој $m \in N$.

Според тоа, за секој $n \in N$ обичниот ред $\sum_{i=1}^{\infty}a_{in}$ апсолутно конвергира кон некој број a_n.

Нека е $\varepsilon > 0$, и нека $N(\varepsilon)$ е такво што ако $m,n \geq N(\varepsilon)$ тогаш $|s_{mn}-a| < \varepsilon$. Но, од релацијата

$$s_{mn} = \sum_{i=1}^{m} a_{i1} + \sum_{i=1}^{m} a_{i2} + \ldots + \sum_{i=1}^{m} a_{in}$$

добиваме

$$\lim_{m\to\infty}(s_{mn}) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i1} + \sum_{i=1}^{\infty} a_{i2} + \ldots + \sum_{i=1}^{\infty} a_{in} = a_1 + \ldots + a_n.$$

Ако пуштиме $m\to\infty$ во релацијата $|s_{mn}-a| < \varepsilon$ ќе добиеме:

$$\left|\sum_{j=1}^{n} a_j - a\right| \leq \varepsilon \text{ ако } n \geq N(\varepsilon).$$

Тоа значи дека првиот итериран ред конвергира кон a. Аналогно се покажува и за другиот итериран ред.

Постои и друг метод за сумирање на двојни редови, имено, по дијагоналата $i+j=n$.

Торема 7. Претпоставуваме дека двојниот ред Σa_{ij} конвергира апсолутно кон a. Ако дефинираме

$$t_k = \sum_{i+j+k} a_{ij} = a_{1,k-1} + a_{2,k-2} + \ldots + a_{k-1,1},$$

тогаш редот Σt_k апсолутно конвергира кон бројот a.

Доказ. Нека A е супремум на множеството$\{ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} : m,n \; N\}$. Имаме

$$\sum_{k=1}^{n} |t_k| \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \leq A$$

тоа значи дека Σt_k е апсолутно конвергентен. Останува да покажеме дека Σt_k конвергира кон a. Нека $\varepsilon > 0$ и нека N е таков што:

$$A-\varepsilon < \sum_{j=1}^{N} \sum_{i=1}^{N} |a_{ij}| \leq A.$$

Ако $m,n \geq N$, тогаш $|s_{nn}-s_{NN}|$ не е поголемо од $\Sigma|a_{ij}|$ по индексите (i,j) такви што $M < i \leq m$ или $M < j \leq n$. Според тоа, $|s_{mn}-s_{NN}| < \varepsilon : m,n \geq N$. Ако побараме лимес кога $m,n\to\infty$ добиваме $|a-s_{NN}| < \varepsilon$. Аналогно, ако $n \geq 2N$, $|\sum_{k=1}^{n} t_k - s_{NN}| < \varepsilon$, од каде добиваме $a = \Sigma t_k$.

4. КОШИЕВ ПРОИЗВОД

Еден начин за добивање на ред од два дадени реда е и таканаречениот Кошиев производ.

Дефиницијa 4. Нека се дадени два реда Σa_i и Σb_i. Нивниот Кошиев производ е редот C_i определен на следниов начин:

$$C_i = a_0 b_1 + a_1 b_{i-1} + \ldots + a_i b_0 .$$

Ако дадените редови се конвергентни, нивниот Кошиев производ не мора да биде конвергентен. На пример, редот

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$$

е конвергентен (ќе видиме подоцна). Кошиевиот производ на самиот со себе е ред чиј n-ти член е:

$$(-1)^n \frac{1}{\sqrt{1}\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{1}} \quad \text{но}$$

$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n+1}\cdot\sqrt{1}} > \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{n+1} = \frac{n+1}{n} = 1$$

Не е исполнет потребниот услов.

Теорема 8. Ако редовите $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$, $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ се апсолутно конвергентни со сумите a,b соодветно, нивниот Кошиев производ е конвергентен со сумата $a \cdot b$.

Доказ. Ако $i,j=0,1,2\ldots$ нека $a_{ij}=a_i b_j$. Од претпоставката следува дека итерираниот ред

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_{ij}$$

е конвергентен. Погоре покажавме дека двојниот ред $\sum_{i,j} a_{ij}$ е апсолутно конвергентен. Неговата граница ќе ја означиме со C. Покажавме, исто така, дека редовите

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij}, \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i+j=k} a_{ij}$$

се конвергентни со иста сума C. Очигледно, сумата на редот

$\sum\limits_{j=0}^{\infty}\ \sum\limits_{i=0}^{\infty} a_{ij}$ е еднаква на $a\cdot b$, додека

$$\sum_{k=0}^{\infty}\ \sum_{i+j=k}^{\infty} a_{ij}$$

е Кошиев производ на редовите $\Sigma a_i . \Sigma b_i$.

Мартенс покажал дека ако од два конвергентни реда барем едниот е апсолутно конвергентен, тогаш и нивниот Кошиев производ е конвергентен ред.

5. ЗАДАЧИ

1. Нека Σa_n е даден ред и нека Σb_n е ред чии членови се оние од редот a_n освен што $a_n=0$ се исфрлени. Да се покаже дека Σa_n конвергира кон A, ако и само ако, Σb_n конвергира кон A.

2. Конвергентноста на даден ред не се изменува, ако му се изменат конечно многу членови. Дали се менува неговата сума?

3. Покажи дека со групирање на членовите на конвергентен ред со ставање во загради на по конечно многу членови се изменува вредноста на неговата сума. Меѓутоа, групирањето на членовите кај дивергентен ред може да произведе конвергенција.

4. Ако еден ред од реални броеви е условно конвергентен, тогаш редот од позитивните членови и редот од негативните членови се дивергентни.

5. Покажи дека

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)} = \frac{1}{\alpha}, \quad \alpha > 0.$$

6. Ако Σa_n е конвергентен ред од реални броеви, дали мора и Σa_n^2 да биде конвергентен?

7. Нека Σa_n е ред со позитивни членови и нека $b_n = \frac{a_1+\ldots+a_n}{n}$. Покажи дека Σb_n е дивергентен ред секогаш.

8. Нека a_n е конвергентен ред со сума a и нека C_n, n N се дефинирани со $C_n = \frac{a_1+2a_2+\ldots+ a_n}{n(n+1)}$ тогаш ΣC_n е конвергентен со сума a.

9. Нека Σa_n е ред чии членови се позитивни броеви што монотоно се стремат кон нула. Докажи дека редот Σa_n конвергира, ако и само ако, конвергира редот $\Sigma 2^n a_{2^n}$.

10. Користејќи го претходниот критериум, да се испита конвергенцијата на следниве редови:

а) $\Sigma \frac{1}{n^p}$; б) $\Sigma \frac{1}{n\log n}$; в) $\Sigma \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)}$.

11. Покажи дека, ако $c > 0$, се конвергентни следниве редови:

$$\frac{1}{n(\log n)^c} . \frac{1}{n(\log n)(\log\log n)^c}.$$

12. Нека Σa_{mn} е двоен ред определен со:

$$a_{mn} = \begin{cases} +1 & \text{ако } m-n=1 \\ -0 & \text{ако } m-n=-1 \\ 0 & \text{во другите случаи} \end{cases}$$

Покажи дека постојат двете итерирани суми; тие не се еднакви, но двојната сума не постои. Меѓутоа $\lim\limits_{n\to\infty} S_{nn}$ постои.

13. Покажи дека, ако двојниот и итерираните суми на редот Σa_{mn} постојат, тие се еднакви. Покажи дека, ако постои двојната сума, не мора да постојат итерираните. Дури, постоењето на двојната сума не повлекува $\lim\limits_{n\to\infty} a_{mn} = 0$ за секое m.

14. Покажи дека ако $p > 1$ и $q > 1$, тогаш двојните редови $\Sigma\Sigma \frac{1}{m^p n^q}$ и $\Sigma\Sigma \frac{1}{(m+n)^p}$ се конвергентни.

15. Да се докаже теорема 1. (Упатство: S_n за редот $\Sigma(a_n+b_n)$ е $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k + \sum\limits_{k=1}^{n} b_k = S'_n + S''_n$.

Но $S'_n \to S' \cdot S''_n \to S'' \Rightarrow S_n = S'_n + S''_n \to S' + S''$ итн.)

II Г Л А В А

КРИТЕРИУМИ ЗА КОНВЕРГЕНЦИЈА НА РЕДОВИТЕ

Во овој дел ќе дадеме некои критериуми за конвергенција на редови. Пред сé, тоа се критериуми за апсолутна конвергенција на даден ред.

1. КРИТЕРИУМИ НА СПОРЕДУВАЊЕ

<u>Теорема 1</u>. Нека Σa_n и Σb_n се два реда со ненегативни членови. Претпоставуваме дека постои природен број K, таков што за $n > K$ важи $a_n \leq b_n$. Тогаш, од конвергенцијата на редот b_n следува конвергенцијата на редот a_n.

<u>Доказ</u>. *)Ако е $m \geq n \geq \max\{K, N(\varepsilon)\}$, тогаш $a_{n+1}+\ldots+ +a_m < b_{n+1}+\ldots+b_m$ од каде произлегува доказот.

<u>Теорема 2</u> (Граничен критериум на споредување).

Нека Σa_n и Σb_n се два реда со ненегативни членови.

а) Ако $\lim\limits_{n} \frac{a_n}{b_n} = \ell \neq 0$ постои, тогаш Σa_n е конвергентен, ако и само ако Σb_n е конвергентен.

б) Ако

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

и редот Σb_n е конвергентен, па тогаш и Σa_n е конвергентен.

<u>Доказ</u>. а) Од условот следува дека за некој реален број $c > 0$ и $\ell - c > 0$ постои природен број K, таков што

$$\ell-c < \frac{a_n}{b_n} < \ell+c \quad \text{за} \quad n > K$$

$$(\ell-c)b_n < a_n < (\ell+c)b_n$$

Применувајќи го критериумот на споредување, добиваме дека од конвергенцијата на редот Σb_n следува конвергенцијата на ре-

---

*) $N(\varepsilon)$: за $\varepsilon > 0$, според Кошиевиот критериум, постои $N(\varepsilon)$ такво што $b_{n+1}+\ldots+b_m < \varepsilon$; $n,m \geq N(\varepsilon)$.

дот Σa_n, и обратно. Доказот под б) е сличен и се остава како вежба.

Сега ќе дадеме еден важен критериум на Коши.

Теорема 3 (Кошиев критериум).

а) Ако Σa_n е даден ред и ако постои ненегативен број $r<1$ и природен број к, таков што

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq r \quad \text{за} \quad n \geq к,$$

тогаш редот Σa_n е апсолутно конвергентен.

б) Ако постои број $r > 1$ и природен број к, таков што

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} \geq r \quad \text{за} \quad n \geq к,$$

тогаш редот Σa_n е дивергентен.

Доказ. Од условот под а) имаме $|a_n| \leq r^n$, па од критериумот за споредување следува апослутната конвергенција на редот.

б) Ако е исполнет условот под б), тогаш $|a_n| \geq r^n$, бидејќи $r > 1$, $|a_n| \to \infty$, кога $n \to \infty$, што значи дека не е исполнет потребниот услов за конвергенција на редови.

Последица. Нека Σa_n е даден и нека $r = \lim\limits_{n\to\infty}(|a_n|^{\frac{1}{n}})$, секогаш кога постои тој лимес. Тогаш редот Σa_n е апсолутно конвергентен, ако е $r < 1$, а е дивергентен за $r > 1$, додека за $r = 1$ е неодреден (не дава одговор).

Од особините на гранична вредност, за $r < r_1 < 1$ следува постоење на природен број K, таков што

$|a_n|^{\frac{1}{n}} \leq r_1$, за $n \geq K$. Во тој случај редот е апсолутно конвергентен.

Ако е $r > 1$, тогаш за $1 < r_1 < r$ постои природен број K, таков што за $n \geq K$,

$|a_n|^{\frac{1}{n}} \geq r_1$, од каде се гледа дека редот е дивергентен.

Теорема 4 (Критериум на Даламбер).

а) Ако редот Σa_n е со произволни членови и ако постои број $r<1$ и природен број К, таков што

$$\frac{|a_n+1|}{|a_n|} \leq r \quad \text{за} \quad n \geq K,$$

тогаш редот е конвергентен.

б) Ако постои број $r > 1$ и природен број К, таков што

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq r \quad \text{за} \quad n \geq K,$$

тогаш редот Σa_n е дивергентен.

Доказ. Од условот под а) следува:

$$|a_{k+1}| \leq r \quad |a_k|$$

$$|a_{k+2}| \leq r \quad |a_{k+1}| \leq r^2 |a_k| \quad \text{итн.}$$

$$|a_{k+m}| \leq r^m \; |a_k| \quad \text{за} \quad m \geq 1.$$

Оттука за $n \geq K$ следува $\Sigma |a_n| \leq |a_k| \Sigma r^n$, од каде следува апсолутната конвергенција.

б) Ако е исполнет условот под б), на сличен начин се покажува дека $|a_{k+m}| \geq r^m |a_k|$ за $m \geq 1$ од каде се гледа $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| \neq 0$.

Последица. Нека Σa_n е даден ред и нека ставиме:

$$r = \lim_{r\to\infty} \frac{|a_n+1|}{|a_n|},$$

секогаш кога постои. Тогаш редот Σa_n е апсолутно конвергентен кога е $r<1$, а е дивергентен кога е $r > 1$.

Доказ. Нека границата постои и нека е $r<1$. Ако r_1 го задоволува условот $r<r_1<1$, тогаш постои природен број К, таков што:

$\frac{|a_n+1|}{|a_n|} < r_1$ за $n \geq K$. Од тука следува доказот. Ако е

$r > 1$ и $1<r_2<r$, постои природен број К, таков што:

$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > r_2$ за $n \geq K$, од каде следува дека редот е дивергентен.

<u>Теорема 5</u> (Критериум на Раабе).

а) Ако Σa_n е еден броен ред и ако постојат реален број $a > 1$ и природен број K, такви што

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq 1 - \frac{a}{n} \quad \text{за} \quad n \geq K,$$

тогаш редот е апсолутно конвергентен.

б) Ако постојат реален број $a \leq 1$ и природен број K, такви што

$$\frac{|a_n+1|}{|a_n|} \geq 1 - \frac{a}{n} \quad \text{за} \quad n \geq K,$$

тогаш редот Σa_n не е апсолутно конвергентен.

<u>Доказ</u>. а) Ако е исполнет условот под а) имаме:

$$K|a_{k+1}| \leq K|a_k|-a|a_k| \text{ за } k \geq K$$

или

$$K|a_{k+1}| \leq K|a_k|-|a_k|+|a_k|-a|a_k|$$

$$K|a_{k+1}| \leq (K-1)|a_k|-|a_k|(a^{-1})$$

бидејќи $a > 1$, $a-1 > 0$ и

(*) $$(K-1)|a_k|-K|a_{k+1}| \geq (a-1)|a_k| > 0 \text{ за } k \geq K$$

Оттука следува дека низата $(K|a_{k+1}|)$ е монотоно опаднувачка за $k \geq K$.

Собирајќи ја релацијата под (*) за $k=K,\ldots,n$, добиваме:

$$(K-1)|a_k|-n|a_{n+1}| \geq (a-1)(|a_k|+\ldots+|a_n|)$$

или

$$|a_k|+\ldots+|a_n| \leq \frac{K-1}{a-1}|a_k|,$$

што значи дека парцијалните суми на редот $\Sigma|a_n|$ се ограничени.

б) Ако е исполнет условот под б), тогаш за $n \geq K$, бидејќи $a \leq 1$

$$n|a_{n+1}| \geq (n-a)|a_n| \geq (n-1)|a_n|,$$

што значи низата $(n|a_{n+1}|)$ е растечка за $n \geq K$ и постои позитивен број C, таков што:

$$|a_{n+1}| > \frac{c}{n}, \quad n \geq K.$$

Бидејќи хармонискиот ред е дивергентен, Σa_n не може да биде апсолутно конвергентен.

Последица. а) Нека Σa_n е ред со ненегативни членови и нека ставиме:

$$a = \lim(n(1 - \frac{|a_n+1|}{|a_n|})),$$

секогаш кога постои лимесот. Тогаш редот Σa_n е апсолутно конвергентен за $a > 1$ и не е апсолутно конвергентен за $a < 1$.

Доказ. Да претпоставиме дека лимесот постои и $a > 1$. Ако a_1 е кој и да било број $a > a_1 > 1$, постои природен број K, таков што:

$$a_1 < n(1 - \frac{|a_n+1|}{|a_n|} \quad \text{за} \quad n \geq K$$

Оттука следува:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} < 1 - \frac{a_1}{n} \quad \text{за} \quad n \geq K.$$

Доказот под б) се изведува аналогно и се остава како вежба.

Теорема 6 (Интегрален критериум).

Нека f е позитивна, нерастечка, непрекината функција, дефинирана на множеството $\{f:t \geq 1\}$. Тогаш редот $\Sigma(f(n))$ конвергира, ако и само ако постои интегралот:

$$\int_0^\infty f(t)dt = \lim_n(\int_0^n f(t)dt).$$

Во случај на конвергенција, парцијалните суми $s_n = \sum_{к=1}^{n} (f(к))$ и сумата s од $\sum_{к=1}^{\infty} (f(к))$ ја задоволуваат релацијата:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t)dt \leq s-s_n \leq \int_n^{\infty} f(t)dt$$

Доказ. Бидејќи f е позитивна, непрекината и нерастечка на интервалот $[к-1,к]$, следува:

(*) $$f(k) \leq \int_{k-1}^{k} f(t)dt \leq f(k-1).$$

Собирајќи го тоа неравенство за к=2,3,..., добиваме:

$$s_n - f(1) \leq \int_1^n f(t)dt \leq s_{n-1}$$

што значи дека или постојат и двата лимеса:

$$\lim(s_n); \quad \lim \int_1^n f(t)dt)$$

или и двата не постојат.

Со собирање на релацијата под (*) за к=n+1,...,m добиваме:

$$s_m - s_n \leq \int_n^m f(t)dt \leq s_{m-1} - s_{n-1}$$

од каде што следува:

$$\int_{n+1}^{m+1} f(t)dt \leq s_m - s_n \leq \int_n^m f(t)dt$$

Ако пуштиме $n\to\infty$ ќе добиеме:

$$\int_{n+1}^{\infty} f(t)dt \leq s - s_n \leq \int_n^{\infty} f(t)dt$$

Пример 1. Знаејќи дека е дивергентен хармонискиот ред $\Sigma\frac{1}{n}$, за $p \leq 1$, од очигледното неравенство $n^p \leq n$ имаме $\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p}$, што покажува дека редот $\Sigma\frac{1}{n^p}$ е дивергентен.

Пример 2. Со разложување лесно се покажува дека е конвергентен редот:

$$\Sigma\frac{1}{n(n+1)} = \Sigma(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})$$

Го разгледуваме редот:

$$\Sigma\frac{1}{n^2}; \quad \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n(n+1)}}{\frac{1}{n^2}} = 1.$$

Според тоа, редот $\Sigma\frac{1}{n^2}$ е конвергентен. Понатаму, исто така се покажува дека редот $\Sigma\frac{1}{n^p}$ е конвергентен за $p \geq 2$, на пример, со интегралниот критериум, ако се земе $f(x) = \frac{1}{x^p}$, $x \geq 1$.

2. УСЛОВНА КОНВЕРГЕНЦИЈА

Постојат редови што се конвергентни, но не апсолутно. На пример $\Sigma\frac{(-1)^n}{n}$ е конвергентен, но не е апсолутно конвергентен. Редовите кои не се апсолутно конвергентни се викаат условно конвергентни.

За добивање критериуми за условно конвергентните редови голема важност има таканаречената Абелова лема за парцијално сумирање.

Абелова лема. Нека Σa_n, Σb_n се два дадени реда и нека парцијалните збирови на редот Σb_n ги означиме со (s_k).

Ако е $m \geq n$, тогаш:

$$\sum_{n}^{m} a_j b_j = (a_{m+1}s_n - a_n s_{n-1}) + \sum_{j=n}^{m} (a_j - a_{j+1}) s_j .$$

Доказ.

$$\sum_{n}^{m} a_j b_j = \sum_{n}^{m} a_j (s_j - s_{j-1}) = \sum_{j=n}^{m} s_j (a_j - a_{j+1}) - a_n s_{n-1} + a_{m+1} s_m .$$

Абеловата лема ќе ја применуваме на редови од обликот $\Sigma a_n b_n$.

Теорема 7 (Критериум на Дирихле).

Нека се дадени два реда Σa_n, Σb_n, при што парцијалните суми на редот Σb_n се ограничени.

а) Ако низата (a_n) конвергира кон 0 и ако е конвергентен редот $\Sigma |a_n - a_{n+1}|$, тогаш редот $\Sigma a_n b_n$ е конвергентен.

б) Специјално, ако (a_n) е низа што монотоно опаѓа кон нулата, тогаш редот е конвергентен.

Доказ. а) Нека $|s_j| < \beta$ за секое j. Користејќи ја Абеловата лема ја имаме следнава оценка:

$$\left|\sum_{j=n}^{m} a_j b_j\right| \leq \left|a_{m+1}s_m - a_n s_{n-1} + \sum_{j=n}^{m} (a_j - a_{j+1}) s_j\right| \leq$$

$$\leq |a_{m+1}||s_m| + |a_n||s_{n-1}| + \sum_{n}^{m} |a_j - a_{j+1}||s_j| \leq$$

$$\leq \beta\left(|a_{m+1}| + |a_n| + \sum_{n}^{m} |a_j - a_{j+1}|\right)$$

б) $\sum_{n}^{m} |a_j - a_{j+1}| = \sum_{n}^{m} a_j - a_{j+1} = a_n - a_{m+1}$.

Од претпоставката следува дека сите членови се стремат кон 0, кога $m,n\to\infty$. И од општиот Кошиев критериум следува конвергенцијата на редот.

Теорема 8 (Критериум на Абел).

Претпоставуваме дека редот Σb_n е конвергентен, додека низата (a_n) е монотона и конвергентна. Тогаш редот $\Sigma a_n b_n$ е конвергентен.

Доказ. Овде ќе земеме дека низата (a_n), монотоно растејќи, конвергира кон бројот a. Бидејќи парцијалните суми на редот Σb_n се стремат кон сумата s, за дадено $\varepsilon > 0$ постои $N(\varepsilon)$, такво што за $m \geq n \geq N(\varepsilon)$ имаме:

$$|a_{m+1}S_m - a_n S_{n-1}| \leq |a_{m+1}s_m - as| + |as - a_n s_{n-1}| < 2\varepsilon.$$

Понатаму, ако β е таков што $|s_k| < \beta$, за секое $K \in N$ имаме:

$$\Sigma(a_j - a_{j+1})s_j| \leq \beta\, |a_n - a_{m+1}|$$

Оттука следува дека редот $\Sigma a_n b_n$ е конвергентен.

Постои една посебна класа на условно конвергентни редови, при кои наизменично се менуваат позитивните и негативните членови. Тоа се таканаречените алтернативни редови, така на пример редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Во врска со конвергенцијата на алтернативните редови важи критериумот на Лајбниц.

Теорема 9 (Лајбницов критериум).

Нека (a_n) е опаднувачка низа од позитивни броеви, кои се стремат кон 0. Тогаш алтернативниот ред $\Sigma(-1)^n a_n$ е конвергентен. Освен тоа, ако s е сумата на тој ред, а s_n се парцијалните суми, ја имаме следнава оценка:

$$|s - s_n| \leq a_{n+1}$$

Доказ. Конвергенцијата следува според критериумот на Дирихле, земајќи $b_n=(-1)^n$. Што се однесува до оценката, за m>n имаме:

$$|s_m-s_n| = |\sum_{n+1}^{m} (-1)^{1+i}a_i| =$$

$$= |(-1)^{n+1}(a_{n+1}-2a_{n+2}+\ldots+(-1)^{m-n-1}a_m)| =$$

$$= |a_{n+1}-a_{n+2}+\ldots+(-1)^{m-n-1}a_m|$$

Со индукција се убедуваме дека $|S_m-S_n| \le a_{n+1}$, ако $m \to \infty$,

$$|S-S_n| \le a_{n+1}.$$

Пример 1. Редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$$

е условно конвергентен. Тоа непосредно следува од критериумот на Лајбниц.

Пример 2. Нека x е реален број различен од $2\pi k$, каде што k е цел број. Тогаш, бидејќи

$$2\cos kx \sin \frac{x}{2} = \sin(k - \frac{1}{2})x - \sin(K + \frac{1}{2})x,$$

следува:

$$2\sin \frac{x}{2}\{\cos x+\ldots+\cos nx\} = \sin \frac{1}{2} x - \sin(n + \frac{1}{2})x$$

така што:

$$\cos x +\ldots+ \cos nx = \frac{\sin\frac{1}{2}x - \sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin \frac{x}{2}}$$

Според тоа, $|\cos x+\ldots+\cos nx| = \frac{|\sin\frac{1}{2}x-\sin(n+\frac{1}{2})x|}{2|\sin \frac{x}{2}|} \le$

$$\le \frac{|\sin\frac{1}{2}x + \sin(n+\frac{1}{2})x|}{2|\sin \frac{x}{2}|},$$ т.е.

$$|\cos x +\ldots+ \cos nx| \le \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}$$

Оттука, според критериумот на Дирихле, следува дека редот $\sum\frac{\cos nx}{n}$ е конвергентен за $x \neq 2k\pi$, к - цел број.

Пример 3. Нека е $x \neq 2\pi k$, k - цел број.

Бидејќи

$$2\sin kx \cdot \sin\frac{1}{2}x = \cos(k-\frac{1}{2})x - \cos(k+\frac{1}{2})x,$$

следува:

$$2\sin\frac{1}{2}x\,[\sin x + \ldots + \sin nx] = \cos\frac{1}{2}x - \cos(n+\frac{1}{2})x$$

од каде.

$$|\sin x + \ldots + \sin nx| \leq \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}$$

И пак, по критериумот на Дирихле, заклучуваме дека редот $\Sigma\frac{\sin nx}{n}$ е конвергентен за $x \neq 2\pi k$, k - цел број.

3. ЗАДАЧИ

1. Редот Σa_n е конвергентен. Да се испита конвергенцијата на редовите:

$$\Sigma\frac{a_n}{n},\quad \Sigma a_n \sin n,\quad \Sigma\frac{a_n}{n}\ (a_n \geq 0),\quad \Sigma\frac{a_n}{1+|a_n|}$$

2. Да се испита конвергенцијата на редовите:

$$\Sigma\frac{1}{(n+1)(n+2)},\quad \Sigma\frac{n}{2^n},\quad \Sigma\frac{n!}{n^n},\quad \Sigma\frac{(-1)^n n}{n+1}.$$

3. Да се испита конвергенцијата на редовите:

$$\Sigma\left[\log n\right]^{-p},\quad \Sigma\left[n\log n\right]^{-1}\quad \Sigma e^{-\log n}$$

4. Да се покаже дека, ако a,b се позитивни броеви, тогаш редот

$$\Sigma(a_n+b)^p$$

е конвергентен за $p > 1$ и дивергентен за $p \leq 1$.

5. Да се покаже дека редот

$$(\frac{1}{2})^p + (\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4})^p + (\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2.4.6})^p + \ldots$$

е конвергентен за $p > 2$ и дивергентен за $p \leq 2$.

6. Ако $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ е конвергентен ред со позитивни членови, нека $r_n = \sum_{k=n} a_k$. Тогаш и редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$ е конвергентен. Докажи!

Решение. Знаеме дека остатокот $r_n = \sum_{k=n}^{\infty} a_k$ се стреми кон 0 кога $n \to \infty$. Нека $b_n = \frac{a_n}{\sqrt{r_n}}$. Имаме

$$b_n = \frac{(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+1}})(r_n+\sqrt{r_{n+1}})}{\sqrt{r_n}} = (\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+1}})\cdot\left(1+\frac{\sqrt{r_{n+1}}}{r_n}\right) \le$$

$$\le 2(\sqrt{r_n}-\sqrt{r_{n+1}}).$$

Оттука се добива:

$$s_n = \sum_{i=1}^{n} b_i \le 2\left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{r_1}-\sqrt{r_{i+1}}\right) = 2(\sqrt{r_1}-\sqrt{r_{n+1}}) \le 2\sqrt{r_1}$$

Користејќи ја теоремата за споредување на конвергентни редови се добива бараниот резултат, бидејќи низата (s_n) е монотоно растечка и ограничена.

III ГЛАВА

РЕДОВИ ОД ФУНКЦИИ

1. НИЗИ ОД ФУНКЦИИ

Пред да преминеме на дефинирање на функционалните редови ќе ги изнесеме основните поими од функционалните низи.

Дефиниција. Нека членовите на следнава низа

$$f_1, f_2, f_3, \ldots \tag{1}$$

се функции, сите дефинирани на некое множество D од реалните броеви. Тогаш се вели дека (1) претставува низа од функции или функционална низа дефинирана на множеството D. За фиксно $x \in D$ добиваме бројна низа

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{2}$$

која може да биде конвергентна или дивергентна. Ако за секој $x \in D$ бројната низа (2) е конвергентна, тогаш велиме дека функционалната низа (1) конвергира или, поточно, обично конвергира (по точка) на множеството D. Границите на бројната низа (2) за различни вредности на $x \in D$, всушност, претставуваат функција $f(x)$, која можеме да ја викаме гранична функција за низата (1). Симболички пишуваме:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad x \in D. \tag{3}$$

Напишаното под (3) можеме и вака да го искажеме: ако $x \in D$ е фиксно и ако е зададено $\varepsilon > 0$, постои индекс $n_o(x,\varepsilon)$ (зависи од x и од ε), таков што за $n \geq n_o$ ќе важи:

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{4}$$

Понатаму ќе биде поставено прашањето за независност на n_o од $x \in D$ и за зависност само од ε.

На пример, ако $f_n(x) = \frac{x}{n}$, $n=1,2,3,\ldots$ и $x \in R$, ја имаме функционалната низа:

$$\frac{x}{1}, \frac{x_2}{2}, \frac{x}{3}, \ldots, \frac{x}{n}, \ldots$$

Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = x \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

за секое $x \in R$, тоа значи дека граничната функција $f(x)$ во овој случај е идентично еднаква на нула. Нека се задржиме малку повеќе на овој едноставен пример. Ако $x_o \in R$ го фиксираме и ако е дадено $\varepsilon > 0$, тогаш:

$$\left|\frac{x_o}{n} - 0\right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \frac{|x_o|}{n} < \varepsilon, \text{ т.е. } n > \frac{|x_o|}{\varepsilon}$$

па би земале, на пример, $n_o = \left[\frac{|x_o|}{\varepsilon}\right]+1$, каде што [ ] означува цел дел од бројот. Очигледно е дека за друго $x \in R$ и n_o ќе се разликува. Според тоа, за функционалната низа (5), за дадено $\varepsilon > 0$, не можеме да избереме такво n_o што ќе важи за секое $x \in R$, т.е. $|\frac{x}{n}| < \varepsilon$ за $n \geq n_o$, независно од x. Меѓутоа, ако функционалната низа

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$$

$x \in D$ е таква што конвергира кон функцијата $f(x)$ и, освен тоа, за дадено $\varepsilon > 0$ може да се најде n_o кое зависи само од ε но не зависи од x, т.е. важи

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \quad \text{за} \quad n \geq n_o \quad \text{и} \quad x \in D,$$

тогаш велиме дека функционалната низа конвергира рамномерно (униформно) на множеството D. На пример, низата (5) на целата бројна права не конвергира рамномерно, додека на секој ограничен интервал $[a,b]$ конвергира рамномерно. Тоа му се остава за доказ на читателот.

Рамномерно конвергентните низи од функции имаат многу важни особини. Ќе дадеме некои од нив.

Теорема 1. Нека низата (1) е составена од непрекинати функции. Ако конвергенцијата е рамномерна, тогаш граничната функција е непрекината.

Доказ. Нека земеме точка $x_o \in D$. Заради рамномерната конвергенција за дадено $\varepsilon > 0$ постои n_o таков што:

$$|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon/3 \quad \text{за} \quad n \geq n_0.$$

Специјално:

$$|f_{n_0}(x)-f(x)|<\varepsilon/3.$$

Функцијата $f_{n_0}(x)$ е непрекината во точката x_0; тоа значи дека постои $\delta > 0$ таков што:

$$|f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0)|<\varepsilon/3 \quad \text{за} \quad |x-x_0| < \delta.$$

Имаме:

$$|f(x)-f(x_0)| = |f(x)-f_{n_0}(x)+f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x)-f_{n_0}(x_0) +$$
$$+ f_n(x_0)-f(x_0)| \leq |f_{n_0}(x)-f(x)|+|f_{n_0}(x) -$$
$$- f_{n_0}(x_0)|+|f_{n_0}(x_0)-f(x_0)| < \varepsilon/3+\varepsilon/3+\varepsilon/3 = \varepsilon$$

за $|x-x_0| < \delta$. Со тоа докажавме дека $f(x)$ е непрекината функција.

Теорема 2. Нека функциите од низата (1) се интеграбилни на ограничениот интервал $[a,b]$ и нека таа рамномерно конвергира кон функцијата $f(x)$. Тогаш функцијата $f(x)$ е исто така интеграбилна на $[a,b]$ и притоа важи:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)dx.$$

Доказ. Претпоставуваме дека граничната функција $f(x)$ е интеграбилна на $[a,b]$. Од рамномерната конвергенција на низата следува дека за дадено $\varepsilon > 0$ постои индекс n_0, таков што:

$$|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon, \quad n \geq n_0$$

Тогаш:

$$|\int_a^b f_n(x)-\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx \leq$$
$$\leq \int_a^b \varepsilon dx \quad (\text{за } n \geq n_0) = \varepsilon(b-a))$$

што значи дека:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Овде нема да се докажува дека функцијата $f(x)$ е интеграбилна. Сега ќе изнесеме уште една теорема без доказ.

Теорема 3. Ако функциите од низата (1) конвергираат во некоја точка x_o и ако низата од нивните изводи

$$f_1'(x), f_2'(x), \ldots, f_n'(x), \ldots$$

конвергира рамномерно, тогаш низата (1) ќе конвергира рамномерно кон граничната функција $f(x)$ и притоа важи:

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x).$$

Теорема 4. (Кошиев критериум за рамномерна конвергенција на низи од функции).

Нека е зададена низата од функции (1). Низата (1) рамномерно конвергира на множеството D, ако и само ако, за дадено $\varepsilon > 0$ може да се определи индекс n_o, таков што да важи:

$$|f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon, \quad \text{за} \quad n,m \geq n_o \qquad (6)$$

за секој x D.

Доказ. Ако зададената низа од функции рамномерно конвергира кон функцијата $f(x)$, тоа значи дека за $\varepsilon > 0$ постои индекс $n_o(\varepsilon)$, таков што:

$$|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon/2 \quad \text{за} \quad n \geq n_o$$

Јасно е дека е исполнето:

$$|f_m(x)-f(x)| < \varepsilon/2 \quad \text{за} \quad m \geq n_o.$$

Затоа е:

$$|f_n(x)-f_m(x)| = |f_m(x)-f(x)+f(x)-f_n(x)| \leq$$

$$\leq |f_m(x)-f(x)| + |f(x)-f_n(x)| < \varepsilon/2+\varepsilon/2 = \varepsilon$$

што значи дека е исполнет условот (6).

Да претпоставиме дека е исполнет условот (6).

Ако земеме $x \in D$ да биде фиксно, тогаш (6) не е ништо друго туку Кошиев критериум за конвергенција на бројна низа. Затоа постои

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x).$$

Но, како x можеме да гоземеме кое и да било од множествата D; следователно, f(x) е определена на D. Уште еднаш го испишуваме неравенството (6):

$$|f_n(x)-f_m(x)| < \varepsilon \quad \text{за} \quad n,m \geq n_o, \quad x \in D.$$

Нека за момент x го замислиме фиксно, а m го пуштиме да се стреми кон бесконечност. Тогаш добиваме:

$$|f_n(x)-f(x)| \leq \varepsilon, \quad n \geq n_o.$$

Последното веќе покажува рамномерна конвергенција на низата, бидејќи x е кој и да било од D.

2. ДЕФИНИЦИЈА НА ФУНКЦИОНАЛНИТЕ РЕДОВИ

Дефиниција 1. Нека $(f_n(x))$ е низа од функции дефинирани на некое множество од реалните броеви. Низата од парцијалните суми $(s_n(x))$ е дефинирана со:

$$\begin{aligned} s_1(x) &= f_1(x) \\ s_2(x) &= f_1(x)+f_2(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_{n+1}(x) &= s_n(x)+f_{n+1}(x) = \\ &= f_1(x)+\ldots+f_n(x)+f_{n+1}(x) \end{aligned}$$

и се вика ред, поточно функционален ред, а се означува со:

$$\Sigma f_n \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Ако функционалниот ред конвергира за секое $x \in D$, тогаш со него е дефинирана функцијата s(x), што претставува сума на редот:

$$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x).$$

Дефиниција 2. Ако редот $\Sigma|f_n(x)|$ е конвергентен за секое $x \in D$, тогаш велиме дека редот Σf_n е апсолутно конвергентен. Ако низата $(s_n(x))$ рамномерно конвергира на D кон функцијата s(x), тогаш велиме дека редот е рамномерно конвергентен.

Постојат аналогни особини за рамномерно конвергентни редови, како и за рамномерно конвергентни низи од функции.

Теорема 1´. Ако $f_n(x)$ се непрекинати функции на D и ако конвергенцијата е рамномерна, тогаш функсијата сума, исто така, е непрекината функција на D.

Доказот на оваа теорема е ист како и доказот на теорема 1.

Овде ќе спомнеме уште две теореми што се дадени кај низите.

Теорема 2´. Ако редот Σf_n од интеграбилни функции на интервалот $[a,b]$ рамномерно конвергира кон интеграбилната функција $f(x)$, тогаш

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x)dx$$

Теорема 3´. За секое $n \in N$, нека $f_n(x)$ се реалнозначни функции дефинирани на интервалот $J=[a,b]$, кои се диференцијабилни на J. Претпоставуваме дека редот $\Sigma f_n(x)$ конвергира барем за една точка од интервалот и дека редот $\Sigma f_n(x)$ е рамномерно конвергентен. Тогаш постои реално значна функција $s(x)$, дефинирана на J, и таква што редот $\Sigma f_n(x)$ рамномерно конвергира кон $s(x)$. Притоа, $s(x)$ има извод и:

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x).$$

3. КРИТЕРИУМИ ЗА РАМНОМЕРНА КОНВЕРГЕНЦИЈА

Теорема 4´ (Кошиев критериум).

Функционалниот ред $\Sigma f_n(x)$ е рамномерно конвергентен на множеството D, ако и само ако, за секое $\varepsilon > 0$ постои број $M(\varepsilon)$, таков што ако $m \geq n \geq M(\varepsilon)$, тогаш:

$$|f_n(x)+\ldots+f_m(x)| < \varepsilon, \quad \text{за секое } x \in D.$$

Теорема 5´ (Ваерштрасов критериум за рамномерна конвергенција)

Функционалниот ред $\Sigma f_n(x)$ е рамномерно конвергентен на множеството D, ако постои броен конвергентен ред ΣM_n, при што $|f_n(x)| \leq M_n$ за секое n и секое $x \in D$.

Доказ. Ако е $m \geq n$, ја имаме следнава релација:

$$|f_n(x)+\ldots+f_m(x)| \leq |f_n(x)| + \ldots + |f_m(x)| \leq M_n+\ldots+M_m.$$

Врз основа на Кошиевиот критериум следува точноста на Ваерштрасовиот критериум.

Теорема 6 (Критериум на Дирихле).

Нека $\Sigma f_n(x)$ е функционален ред дефиниран на некое множество D, и нека парцијалните суми $s_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$, $n \in \mathbb{N}$ се ограничени на D, т.е. $|s_n(x)| \le M$, за секое $x \in D$ и секое $n \in N$. Нека (ϕ_n) е монотоно опаднувачка низа од функции дефинирани на D, кои рамномерно конвергираат кон 0 на D. Тогаш редот $\Sigma \phi_n(x) f_n(x)$ рамномерно конвергира на D.

Доказ. Доказот на овој критериум непосредно следува од Дирихлеовиот критериум кај бројните редови.

Теорема 7 (Абелов критериум).

Нека $\Sigma f_n(x)$ е функционален ред дефиниран на множеството D. Нека $(\phi_n(x))$ е ограничена и монотона низа од реално значни функции определени на D. Тогаш редот $\Sigma f_n(x) \phi_n(x)$ конвергира рамномерно на множеството D.

Доказ. Доказот следува од критериумот на Абел за бројни редови.

Пример 1. Да го разгледаме редот

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Ако е $D = \{x : x \;\; R, |x| \le 1$ бидејќи $|\frac{x^n}{n^2}| \le \frac{1}{n^2}\}$, врз основа на Ваерштрасовиот критериум добиваме дека дадениот функционален ред е рамномерно конвергентен на интегралот $[-1,1]$.

Пример 2. Го разгледуваме редот $\Sigma \frac{\sin(nx)}{n}$ каде што $x \in [a,b]$ и интервалот $[a,b]$ се содржат во интервалот $(0,2\pi)$. Тогаш парцијалните суми ќе бидат:

$$|s_n(x)| = |\sum_{k=1}^{n} \sin kx| \le \frac{1}{\sin \frac{\lambda}{2}}$$

од каде гледаме дека тие се рамномерно ограничени. Бидејќи $(\frac{1}{n})$ монотоно опаѓа кон 0, врз основа на критериумот на Дирихле заклучуваме дека дадениот ред на интервалот $[a,b]$ рамномерно конвергира.

4. СТЕПЕНСКИ РЕДОВИ

Степенските редови се една класа од функционалните редови.

Дефиниција 3. За функционалнит ред $\Sigma f_n(x)$ ќе велиме дека е степенски ред околу точката c, ако $f_n(x) = a_n(x-c)^n$. Според тоа, степенскиот ред има облик:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n.$$

Ако c=0, ќе добиеме $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Ние ќе ги испитуваме степенските редови во облик $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, бидејќи на нив, со проста замена, се сведува секој степенски ред. Проблемот што се поставува во врска со степенските и воопшто со функционалните редови е, за кои вредности на x, степенскиот ред е конвергентен. Очигледно, секој степенски ред $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е конвергентен за x=0.

Сега ќе покажеме дека за секој степенски ред $\Sigma a_n x^n$ постои ненегативен број ρ, таков што за $|x| < \rho$, редот е конвергентен.

Нека е даден функционалниот ред $\Sigma a_n x^n$. Асоцираме ред $\Sigma |a_n| r^n$, $r \geq 0$. Сумата на редот $\Sigma |a_n| r^n$ е ненегативен број или бесконечност. Множеството од сите броеви $r \geq 0$ за кои $\sum_{n\geq 0} |a_n| r^n < +\infty$, очигледно формира интервал, чиј лев крај е нула, и тој интервал не е празен зашто барем нулата секогаш ја содржи. Тој интервал може да биде отворен или затворен од десната страна, конечен или бесконечен, може да се сведува и само на нулата. Во сите случаи со ρ ја означуваме должината на тој интервал; според тоа, ρ означува конечен број или пак бесконечност $+\infty$. Бројот ρ се вика радиус на конвергенција за степенски ред.

Теорема 8. а) За секое $r < \rho$ редот $\Sigma a_n x^n$ рамномерно конвергира на интервалот $[-r,r]$.

б) Редот $\Sigma a_n x^n$ е дивергентен за секое x по апсолутна вредност поголемо од ρ, т.е. $|x| > \rho$; за x, такво што $|x|=\rho$, во општ случај не можеме ништо да тврдиме.

Доказот на горната теорема произлегува од лемата на Абел.

<u>Лема на Абел</u>. Нека реалните броеви r и r_o се такви што $0 < r < r_o$. Ако постои конечен број $M > 0$, таков што $|a_n|r_o^n \leq M$ за сите $n \geq 0$, тогаш редот $\Sigma a_n x^n$ конвергира за $|x| \leq r$.

Навистина, $|a_n x^n| \leq |a_n|r^n \leq M(\frac{r}{r_o})^n$, а редот со општ член $\varepsilon_n = M(\frac{r}{r_o})^n$ е геометриски ред со количник помал од еден.

Сега ќе го покажеме тврдењето под а). Нека е $r < \rho$. Го избираме r_o, такво што $r < r_o < \rho$; бидејќи редот $\Sigma|a_n|r_o^n$ е конвергентен, сите негови членови не се поголеми од некој фиксен број $M > 0$, па, според Абеловата лема, следува рамномерната конвергенција на интервалот $[-r,r]$. Останува да го докажеме тврдењето под б). Нека е $|x| > \rho$. Можеме да избираме број n, таков што $|a_n x^n|$ да биде произволно голем. Во спротивно, според лемата на Абел, редот $\Sigma|a_n|r'^n$ ќе биде конвергентен за $\rho<r'<|x|$, што противречи на изборот на ρ.

Сега ќе покажеме како се определува радиусот на конвергенција.

5. ТЕОРЕМА НА АДАМАР ЗА ОПРЕДЕЛУВАЊЕ РАДИУСОТ НА КОНВЕРГЕНЦИЈА

Ќе ја докажеме следнава формула:

$$\frac{1}{\rho} = \lim_{n\to\infty}|a_n|^{\frac{1}{n}}$$

Да се потсетиме на случајот кога е дадена низа (u_n) од реални броеви:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\, u_n = \lim_{p\to\infty}(\sup_{n\geq p} u_n)$$

За да ја докажеме формулата ќе го искористиме следниов критериум за конвергенција: Нека е дадена низа од броеви $v_n \geq 0$; ако $\lim v_n^{\frac{1}{n}} < 1$, тогаш $\sum\limits_n v_n < +\infty$; ако $\lim v_n^{\frac{1}{n}} > 1$, тогаш $\sum\limits_n v_n = +\infty$ (се докажува со споредување на редот Σv_n со геометриската прогресија). Ставаме $v_n = |a_n|r^n$. Тогаш:

$$\lim_{n\to\infty} v_n^{1/n} = r(\lim_{n\to\infty}|a_n|^{1/n}).$$

Следователно, редот $\Sigma|a_n|r^n$ конвергира при $\lim|a_n|^{1/n} < \frac{1}{r}$ и дивергира при $\lim|a_n|^{1/n} > \frac{1}{r}$. Со тоа е докажана формулата на Адамар.

6. СОБИРАЊЕ И МНОЖЕЊЕ НА КОНВЕРГЕНТНИ СТЕПЕНСКИ РЕДОВИ

Теорема 9. Нека се дадени два степенски реда:

$$\Sigma a_n x^n \quad \text{и} \quad \Sigma b_n x^n$$

чии радиуси на конвергенција се поголеми или еднакви на ρ. Нека

$$\Sigma c_n x^n = \Sigma a_n x^n + \Sigma b_n x^n \quad \text{и}$$

$$\Sigma d_n x^n = \Sigma a_n x^n \cdot \Sigma b_n x^n \quad \text{(Кошиев производ)}$$

Тогаш:

а) редовите $\Sigma c_n x^n$ и $\Sigma d_n x^n$ имаат радиус на конвергенција не помал од ρ,

б) за $|x| < \rho$ важи:

$$\Sigma c_n x^n = \Sigma a_n x^n + \Sigma b_n x^n$$

$$\Sigma d_n x^n = \Sigma a_n x^n . \Sigma b_n x^n$$

Доказ. Нека

$$A(x) = \Sigma a_n x^n; \quad B(x) = \Sigma b_n x^n;$$

$$C(x) = \Sigma c_n x^n; \quad D(x) = \Sigma d_n x^n$$

Ставаме:

$$\gamma_n = |a_n| + |b_n|; \quad \delta_n = \sum_{0\le p\le n} |a_p| \cdot |b_{n-p}|$$

Тогаш очигледно:

$$|c_n| \le \gamma_n; \quad |d_n| \le \delta_n .$$

Ако $r < \rho$, редовите $\Sigma |a_n| r^n$ и $\Sigma |b_n| r^n$ се конвергентни.

Затоа:

$$\Sigma \gamma_n r^n = (\sum_{n\ge 0} |a_n| r^n) + (\sum_{n\ge 0} |b_n| r^n) < +\infty$$

$$\sum_{n\ge 0} \delta_n r^n = (\sum_{p\ge 0} |a_p| r^p) \cdot (\sum_{2\ge 0} |b_2| r^2) < +\infty$$

Следователно, редовите

$$\sum_{n\geq 0} |C_n| r^n \quad \text{и} \quad \sum_{n\geq 0} |d_n| r^n$$

се конвергентни. Бидејќи тоа важи за секое $r < \rho$, следува дека радиусот на конвергенција за редовите $\Sigma C_n x^n$ и $\Sigma d_n x^n$ не е помал од ρ.

Останува да се докаже тврдењето под б).

Точноста на $C(x)=A(x)+B(x)$ е очигледна, додека $D(x)=A(x)$, $B(x)$ произлегува од наредната теорема.

Теорема 10. Нека Σu_n и Σv_n се два апсолутно конвергентни реда. Ставаме $w_n = \sum_{p\leq n} u_p v_{n-p}$.

Редот $\sum_{n\geq 0} w_n$ конвергира апсолутно и неговата сума е еднаква на производот:

$$\Big(\sum_{p\geq 0} u_p\Big)\cdot\Big(\sum_{q\geq 0} v_q\Big).$$

Навистина, ако ставиме

$$a_p = \sum_{n\geq p} |u_n|, \quad b_q = \sum_{n\geq q} |v_n|;$$

ја имаме следнава релација:

$$\sum_{n\geq 0} |w_n| \leq \sum_{p\geq 0}\sum_{q\geq 0} |u_p|\cdot|v_q| = a_0\cdot b_0$$

Освен тоа, ако е $m \geq 2n$, тогаш апсолутната вредност на разликата

$$\sum_{k\leq m} w_k - \Big(\sum_{k\leq n} u_k\Big)\cdot\Big(\sum_{k\leq n} v_k\Big)$$

не е поголема од сумата на сите производи $|u_p||v_q|$ во кои барем еден од индексите p,q е поголем од n. Следователно, таа апсолутна вредност не е поголема од $\alpha_0\beta_{n+1}+\alpha_{n+1}\beta_0$ и, според тоа, се стреми кон 0, кога n се стреми кон бескрајност. Според тоа $\sum_{k\leq m} w_k$, кога $m\to\infty$ се стреми кон производот на бесконечните суми $\sum_{n\geq 0} u_n$ и $\sum_{n\geq 0} v_n$.

7. ИЗВОД НА КОНВЕРГЕНТЕН СТЕПЕНСКИ РЕД

Теорема 11. Нека $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е степенски ред со радиус на конвергенција ρ. Редот $\sum_{n=1} n a_n x^{n-1}$ има ист радиус на конвергенција и притоа е:

$$s'(x) = \sum_{n=1} n a_n x^{n-1}$$

Доказ. Нека ставиме $|a_n| = \alpha_n$ и нека ρ, односно ρ' се радиуси на конвергенција соодветно на $\sum_{n=0} a_n x^n$, односно $\sum_{n=1} n a_n x^{n-1}$.

Ако е $r < \rho'$, тогаш редот $\sum_{n=1} n a_n r^{n-1}$ е конвергентен. Следователно:

$$\sum_{n\geq 1} \alpha_n r^n \leq r\left(\sum_{n\geq 1} n\alpha_n r^{n-1}\right) < +\infty$$

што значи:

$$r \leq \rho \quad \text{т.е.} \quad \rho' \leq \rho$$

Обратно, нека r е број помал од ρ. Избираме r', такво што, $r < r' < \rho$. Тогаш:

$$n\alpha_n r^{n-1} = \frac{1}{r'}(\alpha_n r'^{n}) \cdot n\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}$$

Бидејќи е $r' < \rho$, постои број $M > 0$, таков што $\alpha_n r'^{n} \leq M$ за секое n, од каде:

$$n\alpha_n r^{n-1} \leq \frac{M}{r'^{n}}\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}$$

И, бидејќи редот $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{r}{r'}\right)^{n-1}$ е конвергентен, и редот $\sum_{n=1} n\alpha_n r^{n-1}$ е ковергентен; следствено, $r \leq \rho'$, т.е. $\rho \leq \rho'$.
Од добиените две неравенства следува дека $\rho = \rho'$.

Останува да покажеме дека

$$s'(x) = \sum_{n=1} n a_n x^{n-1}$$

Нека е $|x| < \rho$. Избираме r такво што $|x| < r < \rho$, и ставаме $0 < |h| \leq r - |x|$. Тогаш $s(x+h)$ е определено и важи равенството:

$$\frac{s(x+h)-s(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} =$$

$$= \frac{\Sigma a_n[(x+h)^n - x^n]}{h} - \Sigma na_n x^{n-1} =$$

$$= \frac{\Sigma a_n[(x+h)^n - x^n]}{h} - \Sigma na_n x^{n-1} =$$

$$= \frac{h\Sigma a_n\left[(x+h)^{n-1}+x(x+h)^{n-2}+\ldots+x^{n-1}\right]}{h} - \Sigma na_n x^{n-1} =$$

$$= \sum_{n=1} a_n\left[(x+h)^{n-1}+x(x+h)^{n-2}+\ldots+x^{n-1}-nx^{n-1}\right]$$

бидејќи x и x+h не го надминуваат r, имаме:

$$|a_n\left[(x+h)^{n-1}+x(x+h)^{n-2}+\ldots+x^{n-1}-nx^{n-1}\right]| \le 2n\ {}_n r^{n-1};$$

бидејќи

$$r < \rho \quad \sum_{n=1} n\alpha_n r^{n-1} < +\infty$$

следователно, за кое и да било $\varepsilon > 0$ постои број n_o таков што:

$$\sum_{n \ge n_o} 2n\alpha_n r^{n-1} \le \frac{\varepsilon}{2}.$$

Од друга страна, конечната сума

$$\sum_{1}^{n_o=1} a_n\left[(x+h)^{n-1}+x(x+h)^{n-2}+\ldots+x^{n-1}-nx^{n-1}\right]$$

за доволно мало h може да се направи помала од $\frac{\varepsilon}{2}$. Според тоа, за доволно мало h и избрано n_o, исполнето е неравенството:

$$\left|\frac{s(x+h)-s(x)}{h} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1}\right| \le \varepsilon.$$

Аналогно се покажува дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1}$ има извод за $|x| < \rho$ еднаков на редот $\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2}$ со радиус на конвергенција ρ итн.

Тоа значи дека степенскиот ред $\Sigma a_n x^n$ со радиус на конвергенција ρ можеме да го диференцираме, член по член, произволен број пати и притоа да добиваме редови со ист радиус на конвергенција.

8. ОПРЕДЕЛУВАЊЕ КОЕФИЦИЕНТИТЕ НА СТЕПЕНСКИ РЕД

Нека е даден степенски ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ со радиус на конвергенција ρ.

Тогаш:

$$a_n = \frac{1}{n!} s^{(n)}(0).$$

Навистина,

$$s^{(n)}_{(x)} = n!a_n + T_n(x), \quad T_n(x) = \sum_{n=k+1}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\, x^{n-k}$$

при што:

$$T_n(0) = 0.$$

Затоа е:

$$s^{(n)}(0) = n!a_n$$

од каде:

$$a_n = \frac{1}{n!} s^{(n)}(0).$$

9. ЗАДАЧИ

1. Да се определи радиусот на конвергенцијата на следниве степенски редови:

а) $\sum \frac{n}{n+1} x^n$

б) $\sum \alpha^n x^n, \quad \alpha \neq 0$

в) $\sum \frac{(2n)!}{2^n} x^n$

г) $\sum \frac{x^n}{n^\alpha}, \ \alpha > 0$

д) $\sum \frac{(n+r)!}{n!(n+s)!}$

2. Да се испита конвергенцијата на краевите од интервалот на конвергенција за следниве редови:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$;

б) $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{\log n}$

в) $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$.

3. Да се определат сумите на следниве редови:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^{n+1}$

б) $\sum_{1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$

в) $\sum_{1}^{\infty} \frac{nx^4}{n+1}$

г) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{4n+1}$

IV ГЛАВА

ТАЈЛОРОВИ РЕДОВИ

1. ДЕФИНИЦИЈА И ОСНОВНИ ОСОБИНИ

Нека функцијата f(x) е бесконечно диференцијабилна на интервалот (a-R, a+R > 0). Според Тајлоровата теорема, за секој природен број n имаме:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1},$$

каде што $|x-a| < R$, а остатокот R_{n+1} има облик:

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\zeta)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \quad |\zeta-a| < |x-a|$$

Непосредно следува теоремата.

Теорема 1. Ако функцијата f(x) е бесконечно диференцијабилна на интервалот $-R < x-a < R$, и ако

$$R_{n+1} \to 0 \quad \text{кога} \quad n \to \infty \quad \text{за секое } x \quad (a-R,a+R),$$

тогаш:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \quad \text{за} \quad |x-a| < R.$$

Доказ. Бидејќи $R_{n+1} \to 0$, $n \to \infty$, произлегува дека може да се најде број M, таков што $|f^{(n)}(a)| \leq M$, за секое n. Оттука е јасно дека редот

$$\sum_{1=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

за $|x-a| < R$ ќе биде конвергентен.

Пример 1. Ја разгледуваме функцијата

$$f(x) = e^x, \quad a=0, \quad f^{(n)}(x) = e^x, \quad f^{(n)}(0) = 1.$$

За секое x:

$$R_{n+1} = \frac{e^{\zeta}}{(n+1)!} x^{n+1} \to 0, \text{ ако } n \to \infty$$

Според тоа:

$$e^x = 1 \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad \text{за секое } x.$$

Слично се наоѓа дека

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad \text{за секое } x.$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{за секое } x.$$

Нека функцијата $f(x)$ има облик:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-\alpha)^n \quad \text{за} \quad |x-\alpha| < R.$$

Тогаш велиме дека функцијата $f(x)$ може да се развие во степенски ред во околината на точката α. Од теоремата за диференцирање на степенски редови имаме:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n (x-\alpha)^{n-k}$$

Ставајќи наместо x, α имаме:

$$f^{(k)}(\alpha) = k(k-1)\dots 1 a_k$$

т.е.

$$a_k = \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}, \quad \text{што значи}$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} (x-\alpha)^n.$$

Горното можеме да го дадеме со наредната теорема.

Теорема 2. Ако една функција $f(x)$ може да се развие во степенски ред околу точката α, тој степенски ред е Тајлоров ред за функцијата $f(x)$ околу α.

Теоремата 2 има една интересна примена.

Теорема 3. Да претпоставиме дека два степенски реда $\Sigma a_n (x-\alpha)^n$ и $\Sigma b_n (x-\alpha)^n$ се конвергентни за $|x-\alpha| < R$ и нека е:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-\alpha)^n \quad \text{ako} \quad |x-\alpha| < R,$$

Тогаш:

$$a_n = b_n \quad \text{за секое } n.$$

Доказ. Нека $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-\alpha)^n$. Тогаш $a_n = \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!} = b_n$ од исти причини.

Теоремата 3 уште се вика теорема за единственост на степенските редови.

На секоја бесконечно диференцијабилна функција немаТајлоров ред. Да ја разгледаме функцијата

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & : \ x \neq 0 \\ 0 & : \ x = 0 \end{cases}$$

Дадената функција е бесконечно диференцијабилна за секое x. Всушност, со индукција може да се провери дека

$$f^{(n)}(x) = e^{-1/x^2} Q_n(\tfrac{1}{x}) \quad \text{за } x \neq 0, \text{ каде што } Q_n(t)$$

е полином од n-ти степен. Тоа повлекува дека $\frac{1}{x} f^{(n)}(x) \to 0$, за $x \to 0$. Но, тогаш, по индукција, $f^{(n)}(0)$ постои и е еднаков на 0. Кога f(x) би имала Тајлоров ред околу $\alpha=0$, тогаш:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$$

за секое x од некој интервал $|x| < R$, што е невозможно.

2. ЗАМЕНУВАЊЕ НА СТЕПЕНСКИ РЕД ВО РЕД

Теорема 4.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (|x| < R)$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad (|x| < S).$$

Ако $|b_0| < R$, постои $\rho > 0$ такво што

$$f(g(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \qquad (|x| < \rho),$$

каде што коефициентите c_n се добиваат со формална замена: дефинирајќи ги броевите p_{kn} $(k,n=0,1,2...)$ со

$$g^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_{kn}x^n, \qquad g^k(x) = \underbrace{g(x)\dots g(x)}_{k\text{-пати}}$$

$$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_k p_{kn}.$$

Доказ. (1) Да претпоставиме дека ξ е такво што $\sum_{n=0}^{\infty} |b_n \xi^n| < R$. Тоа е можно зашто $g(0)=b_o$, а по претпоставка $|b_o| < R$. Тогаш, $|g(\xi)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |b_n \xi^n| < R$ и затоа таквото $g(\xi)$ може да се замени во $f(x)$:

$$f(g(\xi)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g^k(\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\sum_{n=0}^{\infty} p_{nk}\xi^n) = \sum_{k=0}^{\infty} (\sum_{n=0}^{\infty} a_k p_{kn}\xi^n),$$

p_{kn} се коефициенти од k-тиот Кошиев производ на $g(\xi)$. Ако редот на сумирањето може да се промени ќе имаме:

$$f(g(\xi)) = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{k=0}^{\infty} a_k p_{kn}\xi^n) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \xi^n.$$

Од двојните редови знаеме дека редот на сумирањето може да се промени, ако

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |a_k p_{kn} \xi^n|$$

конвергира. Тоа сега ќе го покажеме.

Степенскиот ред $\Sigma|b_n|x^n$ има ист радиус на конвергенција S како $\Sigma b_n x^n$. Нека

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n|x^n \qquad (|x| < S).$$

Тогаш

$$h^k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_{kn}x^n$$

каде

$$q_{kn} = \sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} |b_{n_1}|\dots|b_{n_k}| \geq |\sum_{n_1+n_2+\dots+n_k=n} b_{n_1}\dots b_{n_k}| = |p_{k_n}|$$

Сега $\Sigma|a_k|x^k$ има радиус на конвергенција R,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_{kn}|\xi^n| = h^k(|\xi|) \text{ и } \quad h(|\xi|) = \sum_{n=0}^{\infty} |b_n \xi^n| < R.$$

Затоа $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|a_k|(\sum\limits_{n=0}^{\infty}q_{kn}|\xi^n|)$ конвергира.

Бидејќи $|p_{kn}\xi^n| \le q_{kn}|\xi^n|$, следува:

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|(\sum_{n=0}^{\infty}|p_{kn}\xi^n|) = \sum_{k=0}^{\infty}(\sum_{n=0}^{\infty}|a_kp_{kn}\xi^n|)$$

и се добива конвергенцијата.

(2) Функцијата $h(x)$ е непрекината за $|x| < S$. Бидејќи е $h(0)=|b_o| < R$, постои $\rho > 0$ такво што:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|b_nx^n| = h(|x|) < R$$

за сите x $(-\rho,\rho)$.

Ако $R=\infty$, тогаш неравенството $|\Sigma b_nx^n| < R$ е задоволено за сите x $(-S,S)$ и следователно $\rho=S$.

3. РЕЦИПРОЧНА ВРЕДНОСТ НА СТЕПЕНСКИ РЕД

Теорема 5. Нека

$$\phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\alpha_nx^n \qquad (|x| < S).$$

Ако $\alpha_o\neq 0$ постои $\rho > 0$, такво што:

$$\frac{1}{\phi(x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_nx^n \qquad (|x| < \rho)$$

каде што коефициентите β_n се определуваат од следниве равенки

$$\alpha_o\beta_o = 1,$$

$$\alpha_o\beta_1+\alpha_1\beta_o = 0,$$

$$\alpha_o\beta_2+\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_o = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Доказ. Нека ставиме

$$f(x) = \frac{1}{\alpha_o+x} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\alpha_o^{n+1}}x^n \qquad (|x| < |\alpha_o|).$$

Тогаш

$$f(g(x)) = \frac{1}{\alpha_o+g(x)} = \frac{1}{\phi(x)}$$

и $\frac{1}{\phi(x)}$ може да се развие во степенски ред $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\beta_nx^n$ за сите x за кои

$$\sum_{n=1}^{\infty} |d_n x^n| \ < \ |\alpha_o|.$$

Бидејќи $\sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n x^n| = 0$, горното неравенство ќе биде исполнето во некој интервал $(-\rho,\rho)$, $\rho > 0$.

Кога $|x| < \rho$

$$(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n x^n)(\sum_{n=0}^{\infty} \beta_n x^n) = \phi(x)\cdot\frac{1}{\phi(x)} = 1$$

и следователно, заради единственоста на коефициентите кај степенските редови, имаме:

$$\alpha_o\beta_o = 1, \quad \sum_{k=0}^{n} \alpha_k\beta_{n-k} = 0 \quad (n=1,2,\dots)$$

4. ЗАДАЧИ

1. Да се докаже дека $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \dots \quad (|x| < 1)$

$$-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x}{4} \qquad (|x| < 1).$$

2. Да се покаже дека за секое реално α и $|x| < 1$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \dots$$

(овој ред се вика биномен ред).

3. Да се определи Тајлоровиот ред за функциите:

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt; \qquad \sigma(x) = \int_0^x e^{-t^2}dt.$$

4. Да се најде Тајлоровиот развој $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ за функцијата:

$$\frac{d}{d^x}\,\frac{e^x-1}{x}$$

и од тука да се изведе:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}.$$

V ГЛАВА

ФУРИЕОВИ РЕДОВИ

1. ПОИМ ЗА ФУРИЕОВ РЕД

Дефиниција 1. Секој израз од обликот

$$\frac{1}{2} a_o + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \qquad (1)$$

се вика тригонометриски полином од n-ти ред. Јасно дека секој тригонометриски полином определува една непрекината периодична функција:

$$T_n(x) = \frac{1}{2} a_o + \sum_{1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx. \qquad (2)$$

Функционални ред со облик

$$a_o + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (3)$$

се вика тригонометриски ред. За некои вредности на аргументот x редот може да конвергира, а за некои да дивергира. Ако тригонометрискиот ред (3) е рамномерно конвергентен, тогаш тој определува некоја непрекината и периодична функција f(x):

$$f(x) = \frac{1}{2} a_o + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \qquad (4)$$

Непрекинатоста на функцијата f(x) произлегува од една позната особина на рамномерно конвергентните редови, додека периодичноста може да се покаже вака:

$$f(x) = \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2} a_o + \sum_{1}^{N} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{2} a_o + \sum_{1}^{N} a_n \cos n(x+2\pi) + b_n \sin n(k+2\pi)\right) = f(x+2\pi).$$

Нека ја интегрираме функцијата под (4) во интервалот $[-\pi,\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{1}{2} a_o + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) dx$$

Заради рамномерната конвергенција можеме да интегрираме член по член, па добиваме:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_o dx + \sum_{1} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos ndxn + \sum_{1} b_n \int \sin nnxdx$$

Но, лесно се проверува дека е:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nxdx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nxdx = 0 \quad \text{за} \quad n \neq 0$$

и n-цел број.

Исто така

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx . \cos mxdx = 0; \qquad m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \cos nxdx = \pi$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cdot \sin mxdx = 0$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx . \sin mxdx = 0, \qquad m \neq n$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cdot \sin nxdx = \pi$$

Сите овие интеграли лесно се проверуваат.

Според тоа имаме:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{2} \cdot a_o \qquad \text{т.е.}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = a_o \cdot \pi \qquad \text{од каде}$$

$$a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx.$$

Множејќи ја левата и десната страна на равенството (4) со coskx добиваме:

$$f(x)\cos kx = \frac{1}{2} a_o \cos kx + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx \cdot \cos kx + \qquad (5)$$
$$+ b_n \sin nx \cdot \cos kx.$$

Добиениот ред е пак рамномерно конвергентен. Тоа може да се докаже, на пример, со општиот Кошиев критериум. Навистина, зради рамномерната конвергенција на редот (4) имаме:

$$|s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon, \qquad m,n \geq N(\varepsilon)$$

каде што

$$\varepsilon > 0; \quad \text{а} \quad s_n(x) \quad \text{и} \quad s_m(x)$$

се парцијални суми. Но, исто така,

$$|s_m(x)\cdot\cos kx - s_n(x)\cdot\cos kx| =$$
$$= |\cos kx|\,|s_m(x) - s_n(x)| \le$$
$$\le |s_m(x) - s_n(x)| < \varepsilon$$

Според тоа, редот под (5) можеме да го интегрираме член по член на интервалот $[-\pi,\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2} a_o \cos kx dx + \sum_{1}^{\infty} a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\cdot$$
$$\cdot \cos kx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\cdot\cos kx dx$$

Користејќи ги особините на горе дадените интеграли добиваме:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 kx dx = a_k\cdot\pi$$

од каде:

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx.$$

Множејќи го равенството под (4) со sinkx и постапувајќи наполно исто, добиваме:

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx.$$

Според тоа, ако даден тригонометриски ред $\frac{1}{2} a_o + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx$ е рамномерно конвергентен, тогаш неговите коефициенти a_o, a_n, b_n, задолжително се дадени со формулите:

$$a_o = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx$$
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx. \qquad (6)$$

Само од причина за симетричност на формулите под (6) слободниот член се зема во вид $\frac{1}{2} a_o$.

Дефиниција 2. Нека сега е дадена функција f(x) на интервалот $[-\pi,\pi]$, на кој е апсолутно интеграбилна. Во тој случај постојат интегралите под (6). Со коефициентите a_o, a_n, b_n, определени со формулите под (6), формално можеме да напишеме тригонометриски ред:

$$\frac{1}{2} a_o + \sum_1^\infty a_n\cos nx + b_n\sin nx.$$

Ваквиот тригонометриски ред се вика <u>Фуриеов ред за функцијата f(x)</u> и тоа се означува со:

$$f(x) \sim \frac{1}{2} a_o + \sum_1^\infty a_n\cos nx + b_n\sin nx. \qquad (7)$$

Коефициентите a_n,b_n се викаат <u>Фуриеови коефициенти</u>. Обраќаме внимание на читателот дека не секој тригонометриски ред претставува Фуриеов ред. На пример, тригонометрискиот ред

$$\sum_{n=2}^\infty \frac{\sin nx}{\log n},$$

кој е конвергентен, не претставува Фуриеов ред. Во тоа ќе се убедиме подоцна.

Во (7) не пишуваме знак за равенство зашто има случаи кога добиениот Фуриеов ред од дадена функција f(x) не е конвергентен или пак може да се случи да конвергира но не кон дадената функција. Таквите проблеми поправо ја сочинуваат суштината на теоријата на Фуриеовите редови. Понатаму, некои од нив ќе проучиме во извесна мера, но секако не детално и ригорозно, зашто за тоа се потребни подлабоки предзнаења од математичката анализа.

<u>Пример 1</u>. Нека се дадени функциите:

$f_1(x)$ и $f_2(x)$.

$f_1(x) = 0$ за секое x $[-\pi,\pi]$

$f_2(x) = 0$ за x $[-\pi,\pi]$ и $x \neq 0$

За $x = 0$, $f_2(0) = 1$.

Лесно се покажува дека Фуриеовите коефициенти и на едната и на другата функција се еднакви на нула. Тоа значи дека две различни функции имаат ист Фуриеов ред. Освен тоа, Фуриеовиот ред на функцијата f(x) е конвергентен. Тој е поправо

$$0 + 0 + \ldots$$

но не конвергира кон $f_2(x)$ зашто $f_2(0) = 1 \neq 0$.

2. КОМПЛЕКСНА ФОРМА НА ФУРИЕОВ РЕД

Користејќи ги Ојлеровите формули

$$\cos nx = \frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}, \quad \sin nx = \frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}$$

и заменувајќи ги во Фуриеовиот ред

$$\frac{1}{2} a_o + \sum_{1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

добиваме:

$$\frac{a_o}{2} + \frac{1}{2} \sum_{1}^{\infty} [a_n (e^{inx}+e^{-inx}) - ib_n (e^{inx}-e^{-inx})] =$$

$$= \frac{a_o}{2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[(a_n - ib_n) e^{inx} + (a_n + ib_n) e^{-inx} \right]$$

Ако ставиме

$$\frac{a_o}{2} = c_o, \quad \frac{a_n - ib_n}{2} = C_n; \quad \frac{a_n + ib_n}{2} = C_{-n}$$

се добива:

$$C_o + \sum_{1}^{\infty} C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx}$$

или во посиметричен облик:

$$\sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \tag{8}$$

при што се земаат симетрични парцијални суми, т.е.

$$\sum_{-N}^{N} C_n e^{inx}.$$

За C_n, користејќи ги горните замени, се добива:

$$C_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx, \quad n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots$$

Обликот под (8) се вика комплексна форма на Фуриеовиот ред.

На Фуриеовиот ред може да му се даде и друга форма. Имено, ако за $n \geq 1$

$h_n = a_n{}^2 + b_n{}^2$, за $h_n \neq 0$; постои агол ϕ_n, таков што $\sin\phi_n = \frac{a_n}{h_n}$, $\cos\phi_n = \frac{b_n}{h_n}$ за $h_n = 0$; земаме $\phi_n = 0$. Јасно, $a_n \cos nx + b_n \sin nx = h_n (\cos nx \sin\phi_n + \sin nx \cos\phi_n) =$ $= h_n \sin(nx+\phi_n)$. Според тоа, избирајќи ϕ_o и h_o, така што

$h_o\sin\phi_o = \frac{a_o}{2}$, добиваме:

$$\sum_{n=0}^{\infty} h_n\sin(nx+\phi_n). \qquad (9)$$

Обликот под (9) се вика фазна форма на Фуриеовиот ред.

3. КОНВЕРГЕНЦИЈА НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ РЕДОВИ

Ќе дадеме некои критериуми за конвергенција на тригонометриските редови.

Најнапред еден критериум за рамномерна конвергенција на целата реална оска.

Теорема 1. Нека е даден тригонометриски ред:

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx \qquad (1)$$

при што е конвергентен бројниот ред:

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{1}^{\infty} |a_n| + |b_n|$$

Тогаш тригонометрискиот ред (1) апсолутно и рамномерно конвергира на целата реална оска.

Доказ. Бидејќи

$$|a_n\cos nx+b_n\sin nx|\leq|a_n||\cos nx|+|b_n||\sin nx| \leq |a_n|+|b_n|$$

произлегува, врз основа на критериумот на Ваерштрас за рамномерна конвергенција, дека дадениот тригонометриски ред е рамномерно конвергентен. Според тоа, тој ја определува непрекинатата и периодична функција:

$$f(x) = \frac{a_o}{2} + \Sigma a_n\cos nx + b_n\sin nx.$$

Освен тоа, веќе знаеме дека е тој Фуриеов ред за функцијата f(x).

Теорема 2. Нека е дадена низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ која конвергира кон 0, т.е. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ и $\Sigma|a_n-a_{n+1}|$ - постои. Тогаш редот

$$\frac{a_o}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n\cos nx$$

конвергира рамномерно на секој интервал $[c,d]$ каде што или $-\pi\leq c<d<0$ или $0<c<d\leq\pi$.

Доказ. Да земеме $0<c<d\leq\pi$. За $x \in [c,d]$ имаме:

$$\left|\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{k} \cos nx\right| = \left|\frac{\sin(k+\frac{1}{2})}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{2\sin\frac{c}{2}}$$

Ја разгледуваме сумата:

$$\sum_{n}^{m} a_k \cos kx$$

која, со помош на Абеловата лема, можеме да ја напишеме во следниов облик:

$$\sum_{n}^{m} a_k \cos kx = (a_{m+1}s_m - a_n s_{n-1}) + \sum_{n}^{m} (a_k - a_{k+1}) s_k$$

каде што:

$$s_k = \frac{1}{2} + \cos x + \ldots + \cos kx.$$

$$\left|\sum_{n}^{m} a_k \cos kx\right| = \left|a_{m+1}s_m - a_n s_{n-1} + \sum_{n}^{m} (a_k - a_{k+1}) s_k\right| \leq$$

$$\leq |a_{m+1}|\,|s_m| + |a_n|\,|s_{n-1}| + \sum_{n}^{m} |a_k - a_{k+1}|\,|s_k| \leq$$

$$\leq |a_{m+1}| \cdot \frac{1}{2\sin\frac{c}{2}} + |a_n| \frac{1}{2\sin\frac{c}{2}} + \frac{1}{2\sin\frac{c}{2}} \sum_{n}^{m} |a_k - a_{k+1}|$$

Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \text{и} \quad \sum^{\infty} |a_k - a_{k+1}| \text{ - постои}$$

следува дека за доволно големи m,n сумата $\left|\sum_{n}^{m} a_k \cos kx\right|$ можеме да ја направиме произволно мала за секое $x \in [c,d]$.

Наполно аналогно се покажува и за $-\pi\leq c<d<0$.

Теорема 3. Нека низата $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергира кон 0, т.е. $\lim b_n = 0$, и $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}|$ - постои. Тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$ конвергира рамномерно на секој интервал $[c,d]$ каде што или $-\pi\leq c<d<0$ или $0<c<d\leq\pi$.

Доказ. Доказот на оваа теорема тече како и во претходната со таа разлика што треба да се оцени сумата

$$\sum_{n=1}^{k} \sin nx$$

Но,

$$\left|\sum_{n=1}^{k} \sin nx\right| = \left|\frac{\cos\frac{x}{2} - \cos(k+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\right| \leq$$

$$\leq \frac{|\cos\frac{x}{2} + \cos(k+\frac{1}{2})x|}{|2\sin\frac{x}{2}|} \leq \frac{1}{\sin\frac{c}{2}}$$

Теорема 4. Нека низата $\{C_n\}_{-\infty}^{+\infty}$ е таква што $\lim_{n\to\infty} C_n = \lim_{n\to\infty} C_{-n} = 0$ и, освен тоа, $\sum_{-\infty}^{\infty} |C_n - C_{n+1}|$ - постои. Тогаш редот $\sum_{-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}$ конвергира рамномерно на секој интервал $[c,d]$ каде што или $-\pi\leq c<d<0$ или $0<c<d\leq\pi$.

Доказ. За горниот ред се земаат симетрични парцијални суми, т.е.

$$\left|\sum_{-k}^{k} e^{inx}\right| = \left|\sum_{-k}^{k} \cos nx + i\sin nx\right| =$$

$$= \left|\sum_{-k}^{-1} \cos nx + i\sin nx + 1 + \sum_{1}^{k} \cos nx + i\sin nx\right| =$$

$$= \left|1 + 2\sum_{1}^{k} \cos nx\right| = 2\left|\frac{1}{2} + \sum_{1}^{k} \cos nx\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{c}{2}}$$

Според тоа, добиваме:

$$\left|\sum_{-m}^{-n} C_n e^{inx} + \sum_{n}^{m} C_n e^{inx}\right| =$$

$$= \left|\sum_{n}^{m} C_n e^{inx} + C_{-n} e^{-inx}\right| =$$

$$= \left|\sum_{n}^{m} \cos nx\cdot(C_n + C_{n-1}) + i\sin nx(C_n - C_{-n})\right| \leq$$

$$\leq \left|\sum_{n}^{m} \cos nxx(C_n + C_{-n})\right| + \left|\sum_{n}^{m} \sin nx(C_n - C_{-n}\right|$$

од каде понатаму следува доказот, на ист начин како во претходните случаи, со тоа што наместо a_n имаме C_n+C_{-n}, а наместо b_n; C_n-C_{-n}.

Теорема 5. Нека низите $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ конвергираат кон 0 и нека постојат сумите

$$\sum_{1}^{\infty} |a_n - a_{n+1}|, \qquad \sum_{1}^{\infty} |b_n - b_{n+1}| \tag{1}$$

Тогаш редовите

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \cos nx \tag{2}$$

и $$\sum_{1}^{\infty} (-1)^n b_n \sin nx \qquad (3)$$

конвергираат рамномерно на секој интервал $[c,d]$, при што $-\pi<c<d<\pi$.

Доказ. Прво нека интервалот $[c,d]$ се содржи во интервалот $[0,\pi]$. Ставајќи $x=y+\pi$, добиваме:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \cos n(y+\pi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ny$$

и аналогно добиваме:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin ny$$

Но, кога $c\leq x<d$, $c-\pi\leq y\leq d-\pi$, што значи $-\pi\leq c-\pi<d-\pi<0$, врз база на претходните разгледувања произлегува дека навистина редовите (2) и (3) рамномерно конвергираат на интервалот $[c,d]$.

Нека сега интервалот $[c,d]$ биде содржан во интервалот $(-\pi,0)$. Тогаш ја користиме смената $x=y-\pi$ и добиваме редови со облик:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos ny \text{ и}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin ny$$

На крајот нека интервалот $[c,d]$ се содржи во интервалот $(-\pi,\pi)$ и нека $c<0<d$. Како што веќе покажавме, дадените редови се рамномерно конвергентни на интервалите $[c,0]$ и $[0,d]$, па според тоа и на нивната унија $[c,d]$.

Аналогна теорема може да се докаже за редот $\sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n c_n e^{inx}$.

4. КОНВЕРГЕНЦИЈА НА ФУРИЕОВИ РЕДОВИ

Најнапред ќе докажеме една многу важна теорема за односот на непрекинатата функција на интервалот $[-\pi,\pi]$ и нејзините Фуриеови коефициенти.

Теорема 6. Нека $f(x)$ и $g(x)$ се две непрекинати функции на интервалот $[-\pi,\pi]$, кои имаат исти Фуриеови коефициенти. Тогаш $f(x) = g(x)$ за $x \in [-\pi,\pi]$.

Доказ. Нека $h(x)=f(x)-g(x)$. Од условот на теоремата произлегува дека Фуриеовите коефициенти на $h(x)$ се сите еднакви на нула. Тоа значи:

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)\cos nx dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_{-\pi}^{\pi} h(x)\sin nx dx = 0$$

$$\text{за} \quad n=0,1,2,\ldots$$

Тоа значи дека:

$$\int_{-\pi}^{\pi} h(x)T_n(x)dx = 0,$$

каде што

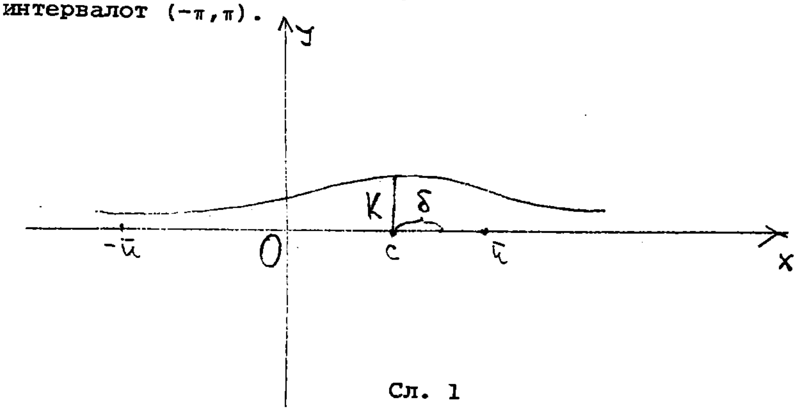
$$T_n(x)$$

е кој и да било тригонометриски полином, т.е.

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_1^n a_k\cos kx + b_k\sin kx$$

Ќе покажеме дека $h \equiv 0$. Да претпоставиме дека $h(x) \neq 0$ барем во една точка, на пример во с, во која $h(c) = к$; претпоставуваме дека $к > 0$, зашто во спротивно би ја зеле функцијата $-h(x)$. Ќе земеме дека точката с се наоѓа во внатрешноста на интервалот. Тоа секогаш можеме да го сториме поради непрекинатоста на функцијата.

Според тоа, постои с $(-\pi,\pi)$ таква што $h(c) = K > 0$. Бидејќи $h(x)$ е непрекината на интервалот $[-\pi,\pi]$, постои позитивен број $\delta > 0$, таков што $h(x) \geq \frac{K}{2}$, x $[c-\delta,c+\delta]$, при што $\delta > 0$ го избираме така што интервалот $J_\delta = [c-\delta,c+\delta]$ целосно се содржи во интервалот $(-\pi,\pi)$.



Сл. 1

Ја разгледуваме функцијата:

$$p(x) = 1 + \cos(x-c) - \cos\delta .$$

За $x \in J_\delta$ имаме $p(x) \geq 1$, зашто $\cos(x-c) \geq \cos\delta$ за $|x-c| \leq \delta$; надвор од тој интервал имаме $|p(x)| > 1$. Ставаме $T_n(x) = [p(x)]^n$. Јасно, $T_n(x)$ е еден тригонометриски полином зашто $p(x)=1+\cos x.\cos c-\sin x\cdot\sin c-\cos\delta$ па со помош на Ојлеровите формули

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x$$

се убедуваме во тоа. Според тоа,

$$0 = \int_{-\pi}^{\pi} h(x)T_n(x)dx = \int_{c-\delta}^{c+\delta} h(x)T_n(x)dx + \int_{-\pi}^{c-\delta} + \int_{c+\delta}^{\pi} \geq \int_{c-\delta}^{c+\delta} \left| \int_{-\pi}^{c-\delta} + \int_{c+\delta}^{\pi} \right| .$$

Бидејќи $|p(x)| < 1$ за x надвор од J_δ, имаме , $\lim_{n\to\infty} T_n(x) = [\lim_{n\to\infty} p(x)]^n = 0$. Во овој случај можеме да прејдеме со лимесот во интегралот зашто $|h(x)T_n(x)| \leq |h(x)|$, па следователно:

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{c-\delta} h(x)T_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_{c+\delta}^{\pi} h(x)T_n(x)dx = 0.$$

Оттука следува дека можеме да избереме такво n што

$$\left| \int_{-\pi}^{c-\delta} h(x)T_n(x)dx + \int_{c+\delta}^{\pi} h(x)T_n(x)dx \right| < \frac{K\delta}{2} \qquad (*)$$

Нека го фиксираме тоа . За $x \in J_\delta$ имаме $h(x) \geq \frac{K}{2}$, а $T_n(x) = [p(x)]^n \geq 1$. Следователно:

$$\int_{c-\delta}^{c+\delta} h(x)T_n(x)dx \geq \frac{K}{2}\cdot 2\delta = K\delta . \qquad (**)$$

Земајќи ги предвид оценките (*) и (**) добиваме:

$$0 \geq K\delta - \frac{K\delta}{2} = \frac{K\delta}{2} > 0,$$

што е контрадикција. Според тоа, мора $h(x)=0$ за сите x $[-\pi,\pi]$, т.е. $f=g$.

Врз основа на претходната теорема ќе ја докажеме наредната.

Теорема 7. Нека f(x) е непрекината функција на $[-\pi,\pi]$ и нека соодветниот Фуриеов ред конвергира рамномерно на $[-\pi,\pi]$. Тогаш функцијата сума на тој ред s(x) е еднаква на f(x), насекаде на интервалот $[-\pi,\pi]$ и нужно следува $f(-\pi)=f(\pi)$.

Доказ. Нека

$$s(x) = \frac{a_c}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx.$$

Функцијата s(x) е непрекината на интервалот $[-\pi,\pi]$ и периодична, т.е. $s(-\pi)=s(\pi)$. Освен тоа, ние знаеме дека Фуриеовите коефициенти на s(x) се исти со оние на f(x). Па, од претходната теорема следува дека $s(x)=f(x)$ на $[-\pi,\pi]$.

Пример. Функцијата $f(x)=|x|-\frac{\pi}{2}$ е непрекината и $f(-\pi)=f(\pi)$, па од порано знаеме дека нејзиниот Фуриеов ред е:

$$-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}\quad\frac{\cos 3x}{3^2}\quad\frac{\cos 5c}{5^2}+\dots\right]$$

за секое $x \in [-\pi,\pi]$. Од докажаната теорема следува дека важи:

$$|x|-\frac{\pi}{2} = -\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos x}{1^2}\quad\frac{\cos 3x}{3^2}\quad\frac{\cos 5x}{5^2}+\dots\right]$$

Сега ќе докажеме една теорема на Фуриеов ред.

Теорема 8. Нека $-\pi=\alpha_0<\alpha_1<\dots<\alpha_\ell=\pi$. Нека f(x) е непрекината функција на интервалот $[-\pi,\pi]$, $f(-\pi)=f(\pi)$ и нека постои непрекинат извод на секој интервал $[\alpha_i,\alpha_{i+1}]$, $i=0,1,\dots,\ell-1$, при што во точката $-\pi$ се подразбира извод оддесно, а во π извод одлево. Ако $a_0,a_1,a_2,\dots,b_1,b_2,\dots$ се Фуриеови коефициенти за f(x), а $a_0',a_1',a_2',\dots,b_1',b_2',\dots$ се Фуриеови коефициенти за $f'(x)$, тогаш $a_0'=0$, $a_n'=nb_n, b_n'=-na_n$ $(n=1,2,\dots)$.

ЗАБЕЛЕШКА

Во точките α_i изводите на функцијата f(x) одлево и оддесно можат да бидат различни, но Фуриеовите коефициенти на $f'(x)$ нема да зависат од вредноста на функцијата $f'(x)$ во овие точки.

Доказ (на теоремата). Од

$$\pi nb_n = n\int_{-a}^{a} f(x)\sin nx dx = n\sum_{i=1}^{\ell}\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x)\sin nx dx.$$

Со парцијална интеграција добиваме:

$$n\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f(x)\sin nx dx = \int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i} f'(x)\cos nx dx - f(\alpha_i)\cos n\alpha_i +$$

$$+ f(\alpha_{i-1})\cos n\alpha_{i-1}.$$

Затоа, сумирајќи, добиваме:

$$\pi n b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx - \left[f(\alpha_\ell) - f(\alpha_0)\right]\cos n\pi =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\cos nx dx = \pi a_n'.$$

тоа значи дека $a_n'=nb_n$. Аналогно се покажува дека $b_n'=na_n$ и $a_0' = 0$.

Пример. Нека

$$f(x) = \int_0^x (|t| - \tfrac{\pi}{2})dt = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2}x, \text{ за } x\in[0,\pi] \\ -\frac{x^2}{2} - \frac{\pi}{2}x, \text{ за } x\in[-\pi,0] \end{cases}$$

т.е. $f(x) = \frac{x^2}{2}\operatorname{sgn}x - \frac{\pi}{2}x$. Очигледно, $f'(x)=|x|-\frac{\pi}{2}$, што значи го исполнува условот на теоремата. Според тоа,

$$\frac{x^2}{2}\operatorname{sgn}x - \frac{\pi}{2} = -\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \dots\right)$$

Теорема 9. Нека $-\pi=\alpha_0<\alpha_1<\dots<\alpha_{\ell-1}<\alpha_\ell=\pi$. Нека $f(x)$ е непрекината на секој отворен интервал (α_i,α_{i+1}), $i=0,1,\dots,\ell-1$ и нека постојат конечните лимеси $f(\alpha_i-0)$ и $f(\alpha_i+0)$. Освен тоа, нека $f(x)$ има извод $f'(x)$ на секој интервал (α_i,α_{i+1}) и нека притоа $\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|dx$ биде конечен. Тогаш постои константа $K>0$ таква што за Фуриеовите коефициенти a_n и b_n на функцијата $f(x)$ ја имаме оценката:

$$|a_n| + |b_n| \le \frac{K}{n} \qquad (n=1,2,\dots)$$

земаме

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|dx = \sum_{i=1}^{\ell}\int_{\alpha_{i-1}}^{\alpha_i}|f'(x)|dx).$$

<u>Доказ</u>. Нека прво ја oцениме вредноста на

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \qquad n \geq 1$$

Ставаме:

$$x_k = \frac{k}{n}\pi, \quad \text{за} \quad k=-n,-n+1,\ldots,-1,0,1,\ldots,n$$

па добиваме:

$$\pi a_n = \sum_{k=-n+1}^{n} \int_{k_{x-1}}^{k_x} f(x)\cos nx dx.$$

Нека со P ги означиме сите оние к, такви што $[x_{k-1},x_k]$ содржи барем една точка од $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell$; множеството P содржи најмногу $2\ell+1$. Со R ги означуваме другите точки, па тогаш:

$$\pi a_n = \sum_{k \quad P} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\cos nx dx + \sum_{k \quad R} \int_{k_{x-1}}^{x_k} f(x)\cos nx dx.$$

Ако к ∈ P, тогаш:

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\cos nx dx \right| \leq \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f(x)|dx$$

Но, од условот на теоремата следува дека може да се најде $M > 0$, такво што $|f(x)| \leq M$. Според тоа, за к ∈ P имаме:

$$\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\cos nx dx \right| \leq |x_k - x_{k-1}| \cdot M = \frac{\pi}{n} \cdot M \quad \text{и}$$

$$\left| \sum_{k \quad P} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\cos nx dx \right| \leq \frac{2\ell\pi}{n} M$$

Ако к ∈ R, бидејќи изводот е интеграбилен на $[x_{k-1},x_k]$, со парцијална интеграција добиваме:

$$\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\cos nx dx = -\frac{1}{\pi} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f'(x)\sin nx dx$$

Според тоа, имаме:

$$\left| \sum_{k \quad R} \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(x)\cos nx dx \right| \leq \frac{1}{n} \sum_{k \quad R} \int_{x_{k-1}}^{x_k} |f'(x)|dx \leq \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) dx,$$

и конечно:

$$\pi|a_n| \leq \frac{1}{n}\left[2\ell\pi M + \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|dx\right]$$

Аналогно можеме да ги оцениме коефициентите b_n, па на крајот ќе добиеме:

$$|a_n| + |b_n| \le \frac{k}{n},$$

каде што:

$$K = 2\left[2\ell M + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f'(x)|dx\right]$$

Сега можеме да докажеме една многу важна теорема.

Теорема 10. Нека $f(x)$ е непрекината на интервалот $[-\pi,\pi]$ и $f(-\pi)=f(\pi)$ и нека на интервалите $[\alpha_{i-1},\alpha_i]$, каде што $-\pi=\alpha_o<\dots<\alpha_\ell=\pi$, има непрекинат извод. Освен тоа, нека на интервалите (α_{i-1},α_i) има непрекинат втор извод $f''(x)$ и, конечно, нека $\int_{-\pi}^{\pi}|f''(x)|dx$ постои. Тогаш постои константа K, таква што:

$$|a_n| + |b_n| \le \frac{K}{n^2} \qquad (n=1,2,\dots),$$

па Фуриеовиот ред на функцијата $f(x)$ конвергира рамномерно кон $f(x)$ на интервалот $[-\pi,\pi]$.

Доказ. Врз база на погоре докажаните теореми имаме дека

$$|a_n'| + |b_n'| \le \frac{K}{n}.$$

Од друга страна,

$$a_n' = nb_n', \qquad b_n' = -na_n$$

така што:

$$|a_n| + |b_n| \le \frac{K}{n^2}$$

Но, бидејќи редот $\sum_1^\infty \frac{K}{n^2}$ е конвергентен, според Ваерштрасовиот критериум, следува доказот.

5. ФУРИЕОВИ РЕДОВИ СО ПЕРИОД 2ℓ

На интервалот од видот $(-\ell,\ell)$, системот од функции

$$1,\ \cos\frac{\pi x}{\ell},\ \ \sin\frac{\pi x}{\ell},\ \ \cos\frac{2\pi x}{\ell},\ \ \sin\frac{2\pi x}{\ell},\ldots,\cos\frac{n\pi x}{\ell},\ \sin\frac{n\pi x}{\ell},\ldots \qquad (1)$$

е ортогонален. Тоа значи дека:

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{m\pi x}{\ell}\ \sin\frac{n\pi x}{\ell}\ dx = 0$$

Исто така:

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\frac{m\pi x}{\ell}\ \cos\frac{n\pi x}{\ell}\ dx = 0, \qquad \int_{-\ell}^{\ell} \sin\frac{m\pi x}{\ell}\ \sin\frac{n\pi x}{\ell}\ dx = 0$$

за $m\neq n$,

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\ \frac{n\pi x}{\ell}\quad \cos\ \frac{n\pi x}{\ell}\ dx \neq 0,$$

додека:

$$\int_{-\ell}^{\ell} \cos\ \frac{n\pi x}{\ell}\quad \cos\ \frac{n\pi x}{\ell}\ dx \neq 0,$$

$$\int_{-\ell}^{\ell} \sin\ \frac{n\pi x}{\ell}\quad \sin\ \frac{n\pi x}{\ell}\ dx \neq 0$$

Доказот се изведува со едноставна смена на променливите.

Освен тоа, може да се покаже, слично како на интервалот $(-\pi,\pi)$, дека системот (1) е комплетен.

Нека сега е дадена функција $f(x)$ определена на интервалот $(-\ell,\ell)$. Коефициентите

$$a_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\ \frac{n\pi x}{\ell}.dx, \qquad b_n = \frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\ \frac{n\pi x}{\ell}\ dx,$$

каде што $n=0,1,2,\ldots$, се викаат Фуриеови коефициенти со период 2ℓ за функцијата $f(x)$. Тоа значи дека Фуриеовиот ред ќе изгледа:

$$f(x) \sim \frac{a_o}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n\cos\ \frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\ \frac{n\pi x}{\ell}.$$

Се разбира, и тука можат да се поставaт исти теореми во врска со конвергенцијата како за Фуриеовите редови со период 2π. На нив нема да се задржуваме од проста причина што, ставајќи

$$t = \frac{\pi x}{\ell},$$

во редот

$$\frac{a_o}{2} + \sum_1^\infty a_n\cos\frac{n\pi x}{\ell} + b_n\sin\frac{n\pi x}{\ell},$$

добиваме:

$$\frac{a_o}{2} + \sum_1^\infty a_n\cos nt + b_n\sin nnt.$$

6. РАЗВИВАЊЕ НА ФУНКЦИИ НА ПОЛУИНТЕРВАЛ

Ако некоја функција f(x), определена на интервалот $[0,\pi]$, сакаме да ја развиеме во Фуриеов ред, на пример, само по косинусите, тогаш постапуваме на следниов начин:

-ја доопределуваме функцијата на интервалот $[-\pi,\pi]$ ставајќи

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{за} \quad 0\le x<\pi \\ f(-x), & \text{за} \quad -\pi\le x<0. \end{cases}$$

Очигледно, функцијата g(x) е парна и, според тоа,

$$b_n = 0$$

што значи g(x), односно на интервалот $[0,\pi]$

$$f(x) \sim \frac{a_o}{2} + \sum_1^\infty \cos nx.$$

Ако пак функцијата ја прошириме до непарна, тогаш $a_n=0$, па ќе имаме:

$$f(x) \sim \sum_1^\infty b_n\sin nx$$

Се разбира, во тој случај се става:

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{за} \quad 0\le x<\pi \\ -f(x), & \text{за} \quad -\pi\le x<0. \end{cases}$$

7. ИНТЕГРАЛ НА ДИРИХЛЕ

Нека функцијата $y=f(x)$ е периодична функција со период 2π и апсолутно интеграбилна на интервалот $[-\pi,\pi]$.

Ја развиваме во Фуриеов ред, т.е.

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{\infty} a_n\cos nx + b_n\sin nx,$$

каде:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt, \qquad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt$$

Разгледуваме n-та парцијална сума од Фуриеов ред, т.е.

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{1}^{n} a_k\cos kx + b_k\sin kx$$

Користејќи ги формулите за коефициентите a_k и b_k добиваме:

$$s_n(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt + \frac{1}{\pi}\sum_{1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\cdot\cos kt\cdot f(t)dt +$$

$$+ \int_{-\pi}^{\pi}\sin kx\cdot\sin kt\cdot f(t)dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2} f(t) + \sum_{1}^{n}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)$$

$$\cos kx\cos kt + \sin kx.\sin kt\,dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)xt\left[\frac{1}{2} + \sum_{1}^{n}\cos k(x-t)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{1}^{n}\cos k(x-t)\right]dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cdot\frac{\sin(n+1/2)(x-t)}{2\sin\frac{x-t}{2}}\,dt$$

Со смената $x-t=u$ добиваме:

$$= \frac{1}{\pi}\int_{k-\pi}^{x+\pi} f(x-u)\,\frac{\sin(n+1/2)u}{2\sin\frac{u}{2}}\,du$$

Поради периодичноста на подинтегралната функција, претходниот интеграл е еднаков на:

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x-u)\ \frac{\sin(n+1/2)u}{2\sin\frac{u}{2}}\, du =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x-u)\ \frac{\sin(n+1/2)u}{2\sin\frac{u}{2}}\, du + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x-u)\ \frac{\sin(n+1/2)u}{2\sin\frac{u}{2}}\, du$$

Извршувајќи ја смената u=-t во првиот и u=t во вториот интеграл, добиваме:

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x+t)\ \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x-t) \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} [f(x+t)+f(x-t)]\ \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin\frac{t}{2}}\, dt.$$

Интегралот

$$\frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} [f(x+t)+f(x-t)] D_n(t)dt$$

каде што е

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin\frac{t}{2}} \quad \text{(јадро на Дирихле)}$$

се вика интеграл на Дирихле.

Знаеме дека

$$D_n(t) = \frac{1}{2} \cos t + \ldots + \cos nt.$$

Ако интегрираме лево и десно, ќе добиеме:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dt + \sum_{1}^{n} \int_{0}^{\pi} \cos kt dt = \frac{1}{2}\, 2\pi+0 = \pi.$$

Добиваме:

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \pi$$

или:

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)dt = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\pi} D_n(t)dt$$

Ако помножиме со некој број s добиваме:

$$s = \frac{2}{\pi} \cdot s \int_{0}^{\pi} D_n(t)dt$$

што значи:

$$s_n(x)-s = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi[f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)dt - \frac{2}{\pi}\cdot s\int_0^\pi D_n(t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi[f(x+t)+f(x-t)-2s]D_n(t)dt$$

Според тоа, проблемот за конвергенција на $s_n(x)$ кон бројот s го сведовме на испитување на интегралот

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)-2s]D_n(t)dt.$$

За испитувањето на интегралот

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)-2s]D_n(t)dt$$

најважна улога има теоремата на Риман-Лебег.

<u>Теорема 11</u> (Теорема на Риман-Лабег).

Ако функцијата f(x) е апсолутно интеграбилна на интервалот

(a,b)

тогаш

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx \to 0, \qquad \int_a^b f(x)\sin\lambda x dx \to 0$$

кога

$$\lambda \to \infty$$

<u>Доказ</u>. Да го разгледаме интегралот по косинусот; интегралот по синусот аналогно се покажува.

Ако смееме да примениме парцијална интеграција (ако f(x) има на пример непрекинат извод), ќе добиеме:

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx = f(x).\frac{\sin\lambda x}{\lambda}\int_a^b - \frac{1}{\pi}\int_a^b f'(x)\sin\lambda x dx$$

од каде се гледа дека:

$$\int_a^b f(x)\cos\lambda x dx \to 0, \quad \text{ako} \quad \lambda \to \infty$$

зашто

$$\int_a^b f'(x)\sin\lambda x dx \quad \text{е број.}$$

Теоремата може да се докаже и во општ случај, но овде го испуштаме доказот.

Од Риман-Лабеговата теорема произлегува, на пример, дека Фуриеовите коефициенти a_n, b_n се стремат кон 0, ако $n \to \infty$.

Теорема 12 (Критериуми на конвергенција).

Да ставиме $g(t)=f(x+t)+f(x-t)-2s$, ($f(t)$ - интеграбилна). Тогаш

$$s_n \to s$$

ако

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi g(t)\cdot D_n(t)dt = 0. \quad (S_n - s = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi g(t)\cdot D_n(t)dt \text{ стр.54}).$$

Но, бидејќи:

$$\int_0^\pi g(t)D_n(t)dt = \int_0^\delta g(t)D_n(t)dt + \int_0^\pi g(t)D_n(t)dt$$

и освен тоа:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\delta^\pi g(t)D_n(t)dt = 0$$

зашто функцијата $\frac{g(t)}{\sin\frac{t}{2}}$ е интеграбилна на интервалот $[\delta,\pi]$, од теоремата на Риман-Лабег непосредно следува:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\delta^\pi \frac{g(t)}{2\sin\frac{t}{2}}.\sin(n + \frac{1}{2}tdt = 0.$$

Произлегува дека пресудна улога ќе игра интегралот

$$\int_0^\delta g(t)D_n(t)dt$$

Според тоа, ако за функцијата $f(x)$ може да се најде таква околина за точката x, $(x-\delta, x+\delta)$, во која функцијата

$$\frac{g(t)}{\sin\frac{t}{2}}$$

ќе биде апсолутно интеграбилна, според теоремата на Риман-Лебег, добиваме дека:

$$\int_0^\pi g(t)D_n(t)dt \to 0 \quad \text{кога} \quad n\to\infty.$$

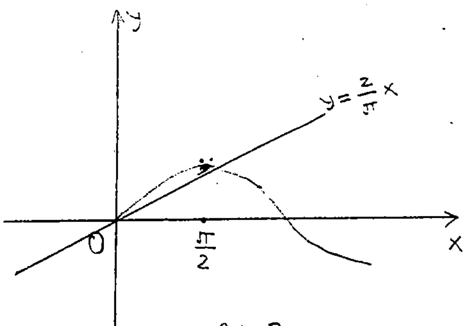
Бидејќи на интервалот $[0,\frac{\pi}{2}]$

$$\sin x \geq \frac{2}{\pi}x\ ,$$

добиваме:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin\frac{t}{2}}\, g(t)dt = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\delta \frac{\sin(n+1/2)t}{t}\, g(t)dt = 0$$



Сл. 2

Сега сме во можност да поставиме некои критериуми на конвергенција. Најнепосредно се добива критериумот на Дин.

Теорема 13 (Критериум на Дин).

Ако функцијата $\frac{g(t)}{t}$ е апсолутно интеграбилна на интервалот $[0,\delta]$, тогаш $s_n(x) \to s$.

Да забележиме дека е битна апсолутната интеграбилност за да можеме да ја примениме теоремата на Риман-Лебег.

Теорема 14 (Критериум на Дирихле).

Ако функцијата $f(x)$ има лев и десен извод во точката x, тогаш Фуриеовиот ред на таа функција конвергира кон $\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)]$. Се разбира, ако $f(x+0)=f(x-0)=f(x)$, тогаш $s_n(x) \to f(x)$ во точката x.

Доказ.

$$s_n(x) - \frac{1}{2}[f(x+0)+f(x-0)] = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)-f(x+0) - f(x-0)]D_n(t)dt.$$

Погоре видовме дека е доволно да се разгледа интегралот

$$\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)]\frac{\sin(n+1/2)t}{t}\,dt =$$

$$= \int_0^\pi \frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\cdot\sin(n+\tfrac{1}{2})tdt + \int_0^\pi \frac{f(x-t)-f(x-0}{t}\,\sin(n+\tfrac{1}{2})tdt$$

Но, $\lim_{t\to 0} \frac{f(x+t)+f(x+0)}{t} = f'(x+0)$

што значи $\left|\frac{f(x+t)-f(x+0)}{t}\right| \le C$ за $0 < t \le \delta$, $\delta > 0$.

Врз основа на теоремата на Риман-Лебег заклучуваме дека:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} [f(x+t)+f(x-t)-f(x+0)-f(x-0)]\frac{\sin(n+1/2)t}{t}\,dt = 0.$$

8. ИНТЕГРИРАЊЕ НА ФУРИЕОВИ РЕДОВИ

Овдека ќе покажеме дека еден Фуриеов ред може да се интегрира член по член, дури и кога е дивергентен. Тоа значи дека на тој начин пак се добива Фуриеов ред.

Теорема 15. Ако a_n, b_n се Фуриеови коефициенти за функцијата f, тогаш

$$\frac{1}{2} a_o + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nx + b_n(1-\cos nx)}{n} = \int_0^x f(t)dt.$$

Доказ. Овдека ќе претпоставиме непрекинатост на функцијата f. Нека ставиме:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{1}{2} a_o x$$

Функцијата F има непрекинат извод. Исто така, бидејќи

$$F(x+2\ )-F(x) = \int_x^{x+2\pi} f(t)dt - a_o\pi = a_o\pi - a_o\pi = 0,$$

се добива дека F има период 2π.

Според теоремата на Дирихле, Фуриеовиот ред од F конвергира кон $F(x)$ за сите x.

Фуриеовите коефициенти A_n, B_n од F се:

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x)\cos nx,$$

со парцијална интеграција:

$$= \frac{1}{\pi} \left[F(x)\frac{\sin nx}{n}\right|_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} \{f(x) - \frac{1}{2}a_o\}\sin nx dx$$

$$= -\frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx + \frac{1}{2} a_o \int_0^{2\pi} \sin nx dx = -\frac{bn}{n}$$

и $$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin nx dx \quad \text{(со парцијална интеграција)}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{F(x)\cos nx}{n}\right|_0^{2\pi} + \frac{1}{n}\int_0^{2\pi}\{f(x)-\frac{1}{2}a_0\}\cos nx dx$$

$$= \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx = \frac{a_n}{n}$$

Така имаме:

$$F(x) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx - b_n\cos nx}{n}.$$

Ставајќи x=0, добиваме:

$$F(0) = 0 = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{b_n}{n} \Longrightarrow \frac{1}{2}A_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}.$$

Сега, ако земеме наместо $\frac{1}{2}A_0$, во Фуриеовиот ред за A_0 ќе добиеме:

$$\frac{1}{2}a_0 x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n\sin nx + b_n(1-\cos nx)}{n} = \int_0^x f(t)dt.$$

Последица. Редот $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$ е конвергентен.

Навистина, $\frac{1}{2}A_0 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n}$.

Врз база на оваа последица ќе покажеме дека не секој тригонометриски ред има Фуриеов ред, дури и да конвергира секаде. На пример, редот

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{\log n}$$

конвергира за секое x. И, кога би бил Фуриеов ред, тогаш $b_n = \log n$ $(n \geq 2)$; но, во тој случај, бројниот ред $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\log n}$ треба да е конвергентен, а тој е дивергентен. Може да се покаже, на пример, со интегралниот критериум.

Може да се покаже дека Фуриеовиот ред за функцијата

$$\int_0^x f(t)dt,$$

кој формално се добива од Фуриеовиот ред од f со интегрирање член по член, е рамномерно конвергентен за сите x. Тука не го даваме доказот.

9. АПРОКСИМАЦИЈА ВО СРЕДНО. ПАРСЕВАЛОВА ТЕОРЕМА

Во овој дел ќе покажеме дека Фуриеовите суми s_n даваат убава апроксимација (приближување) кон функцијата f, ако се мерат со:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{f(x)-s_n(x)\}^2 dx.$$

Од сите тригонометриски полиноми T_n од степен не поголем од n, Фуриеовите суми s_n го минимизираат интегралот:

$$\int (f-s_n)^2$$

Доказот на оваа особина ќе го изведеме во поопшти услови.

10. ОРТОГОНАЛНИ И ОРТОНОРМИРАНИ МНОЖЕСТВА

Дефиниција 1. Функциите ϕ_n за n=1,2,..., кои се Риман-интеграбилни на интервалот $[a,b]$, велиме дека се ортогонално множество од функции, ако

$$\int_a^b \phi_m(x)\cdot\phi_n(x)dx = 0. \qquad (m\neq n)$$

Ако уште важи

$$\int_a^b (\phi_n(x))^2 dx = 1 \qquad (n=1,2,\ldots),$$

тогаш множеството (системот) ϕ_n се вика ортонормирано.

Дефиниција 2. Бројот

$$c_n = \int_a^b f(x)\phi_n(x)dx$$

е n-ти Фуриеов коефициент за функцијата f во однос на ортонормираното множество ϕ_n, а

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n\phi$$

е Фуриеов ред за f. Ние ќе ставиме: $s_n = \sum_1^n c_r\phi_r$

Директно се проверува дека тригонометриските функции

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \qquad (n=1,2,\ldots)$$

се ортонормиран систем на $[-\pi,\pi]$.

Теорема 16. Ако $t_n = \sum_1^n d_r\phi_r$, тогаш, за фиксно n и произволно d_r, интегралот

$$\int_a^b \{f(x)-t_n(x)\}^2dx$$

има најмала вредност кога

$$d_r = c_r = \int_a^b f(x)\phi_r(x)dx \quad \text{за} \quad r=1,2,\dots,n$$

Доказ.

$$\int_a^b (f-\sum_{r=1}^n d_r{}_r)^2 - \int_a^b(f-\sum_{r=1}^n c_r\phi_r)^2 =$$

$$= -2\int_a^b f\sum_{r=1}^n d_r\phi_r + \int_a^b(\sum_{r=1}^n d_r\phi_r)^2+2\int_a^b f\sum_{r=1}^n c_r\phi_r - \int_a^b(\sum_{r=1}^n c_r\phi_r)^2$$

Заради ортогоналноста на ϕ_r добиваме:

$$= 2\sum_{r=1}^n d_r\int_a^b f\ {}_r + \sum_{r=1}^n d_r^2 - 2\sum_{r=1}^n c_r\int_a^b f\phi_2 + \sum_{r=1}^n c_r^2$$

$$= -2\sum_{r=1}^n c_rd_r + \sum_{r=1}^n d_r^2 - 2\sum_{r=1}^n c_r^2 + \sum_{r=1}^n c_r^2 = \sum_{r=1}^n (c_r-d_r)^2$$

Последната сума никогаш не е ненегативна, па затоа:

$$\int_a^b (f-d_r\phi_r)^2 \geq \int_a^b (f-\sum_{r=1}^n c_r\phi_r)^2.$$

Теорема 17 (Парселово неравенство).

$$\sum_1^\infty c_r^2 \leq \int_a^b f^2$$

Доказ.

$$0 \leq \int_a^b (f-s_n)^2 = \int_a^b f - \sum_{r=1}^n c_r^2$$

од каде што имаме:

$$\sum_1^n c_r^2 < \int_a^b f^2$$

За секое , следователно, ако n → ∞ , имаме:

$$\sum_1^\infty c_r^2 \leq \int_a^b f^2.$$

Последица 1. Во тригонометрискиот случај имаме:

$$\frac{1}{2} a_o^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2+b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx.$$

Доказ.

$$c_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos ncdx = \frac{\sqrt{\pi}}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nxdx = \sqrt{\pi}a_n$$

г.е. $a_n = \frac{c_n}{\sqrt{\pi}}$, аналогно $b_m = \frac{c_m}{\sqrt{\pi}}$

Затоа:

$$\frac{}{2} a_o^2 + \Sigma\pi a_n^2 + \pi b_n^2 \leq \int_a^b f^2(x)$$

т.е. $\frac{1}{2} a_o^2 + \sum_{1}^{\infty} (a_n^2+b_n^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_a^b f^2(x)dx.$

Последица 2. Ако n → ∞, тогаш $c_n \to 0$.

Тоа произлегува оттаму што редот $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2$ конвергира.

Теорема 18 (Парсевалово равенство). Ако a_n, b_n се Фуриеови коефициенти за функцијата f, тогаш:

$$\frac{1}{2} a_o^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2+b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx$$

Доказ. Како во претходната теорема (за тригонометриските функции), имаме:

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2 - \pi\{a_o^2 + \sum_{1}^{k} (a_r+b_r)\} = \int_{-\pi}^{\pi} (f-s_k)^2$$

(s_k е Фуриеова парцијална сума.)

Да претпоставиме дека f е непрекината функција. Тогаш, според Ваерштрасовата теорема за апроксимација со полиноми, постои тригонометриски полином σ_n, за кој:

$$|f(x)-\sigma_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2\pi}, \qquad \text{за сите } x.$$

Следователно имаме:

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f-\sigma_n)^2dx \leq \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dx = \varepsilon.$$

Бидејќи Фуриеовите парцијални суми даваат најубава апроксимација

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f-s_k)^2dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} (f-\sigma_n)^2dx < \varepsilon,$$

затоа имаме:

$$0 \leq \int_{-\pi}^{\pi} f^2 - \pi\{\frac{1}{2} a_o^2 + \sum_1^k (a_r^2 + b_r^2) = \int_{-\pi}^{\pi} (f-s_k)^2 < \varepsilon$$

т.е. $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \leq \pi\{\frac{a_o^2}{2} + \sum_1^k (a_r^2+b_r^2)\}+\varepsilon<\pi\{\frac{a_o^2}{2} + \sum_1^\infty (a_r^2+b_r^2)\}+\varepsilon\}$

бидејќи ε е произволно мало: $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)dx \leq \pi\{\frac{a_o^2}{2} + \sum_1^\infty (a_r^2+b_r^2)\}$.

Имајќи ја предвид последицата 1, го добиваме Парсеваловото равенство.

11. ЗАДАЧИ

1. Да се покаже дека следниве тригонометриски редови се Фуриеови:

а) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos nx}{\log n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$

2. Да се развие во Фуриеов ред функцијата:

$f(x) = e^{\alpha x}$ α – реален број

во интервалот $[-\pi,\pi]$.

3. Покажи дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$, каде што $0 < \alpha \leq 1$, конвергира за секое x $(-\pi,\pi)$, но не конвергира апсолутно.

4. Нека $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$, за $x\neq 0$ и $f(0)=0$. Да се покаже дека оваа фуккција е непрекината секаде, но не ги задоволува условите на Дирихле.

5. Функцијата

$$\phi(x) = \begin{matrix} -1: & \text{за} & x & (-\pi,0) \\ 1: & \text{за} & x & (0,\pi) \end{matrix}$$

не ги задоволува условите на Дирихле. Кон што конвергира Фуриеовиот ред во нулата?

6. Да се покаже дека функцијата $f(x) = \frac{E(x)}{1+x^2}$ има бесконечно многу прекини, но сепак ги задоволува условите на Дирихле. ($E(x)$ означува цел дел од x.)

7. Нека (a_n,b_n) се Фуриеови коефициенти за f и нека (c_n,d_n) се Фуриеови коефициенти за g. Да се докаже дека

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b fg = \frac{a_o b_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n c_n + b_n d_n)$$

8. Со Парсеваловата теорема или на друг начин да се покаже дека е:

$$\sum_1^\infty \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_1^\infty \frac{1}{(2n-1)^6} = \frac{\pi^6}{960}.$$

VI ГЛАВА

КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

1. ДЕФИНИЦИЈА И ОСНОВНИ ОСОБИНИ НА КОМПЛЕКСНИТЕ БРОЕВИ

Сметаме дека читателот е запознат со основните особини на комплексните броеви, така што, заради комплетност, ќе дадеме дефиниција на комплексните броеви и ќе се осврнеме на некои нивни особини кои се потребни за понатамошно проучување на особините на аналитичките функции.

Множеството на комплексни броеви е множество од подредени парови реални броеви (a,b). За два комплексни броја (a_1,b_1) и (a_2,b_2) велиме дека се еднакви ако се $a_1=b_1$ и $a_2=b_2$. Бројот $(o,1)$ ќе биде означен со i.

Под <u>збир</u> на комплексните броеви $\alpha=(a,b)$ и $\beta=(c,d)$ се подразбира бројот $(a+c,b+d)$ и се означува со $\alpha+\beta$. Веднаш забележуваме дека важи асоцијативниот и комутативниот закон за собирање на комплексните броеви бидејќи тие се исполнети за реалните броеви. Натаму е $(a,o)+(o,o)=(a,b)$.

Под <u>производ</u> на комплексните броеви $\alpha=(a,b)$ и $\beta=(c,d)$ се подразбира комплексниот број $(ac-bd,ad+bc)$ и се означува со $\alpha\cdot\beta$ т.е. $\alpha\cdot\beta=(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$

Без тешкотии се покажува комутативниот и асоцијативниот закон за операцијата множење на комплексни броеви.

Под <u>разлика</u> на комплексните броеви $\alpha=(a,b)$ и $\beta=(c,d)$ се подразбира комплексниот број $(a-c,b-d)$ и се означува со $\alpha-\beta$.

Ако $\alpha=(a,b)$ и $\beta=(c,d)$ се два комплексни броја, такви што $c\neq o$ и $d\neq o$ тогаш комплексниот број

$$\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

е количник меѓу броевите α и β и се означува со $\frac{\alpha}{\beta}$ т.е..

$$\frac{\alpha}{\beta} = (\frac{ac+bd}{c^2+d^2}, \frac{bc-ad}{c^2+d^2}) .$$

Ако се посматра подмножеството од комплексни броеви со облик (a,o) , каде што a е реален број, тогаш, врз основа на дефиницијата на операциите на собирање и множење на комплексни броеви, имаме $(a,o)+(b,o)=(a+b,o)$ и $(a,o)\cdot(b,o)=(ab,o)$.Гледаме дека двојките $\{(a,o) : a\in R\}$ се собираат и множат на ист начин како и реалните броеви. Затоа понатаму подредениот пар (a,o) ќе биде идентификуван со реалниот број a и ќе запишуваме (a,o)= a. Бројот (o,o) е нула и ги има познатите особини што ги има нулата во множеството на реални броеви.

Ќе покажеме дека равенката $x^2= -1$ секогаш има решение во множеството на комплексни броеви. Имено, множејќи го комплексниот број (o,1) самиот со себе, се добива :

$$(o,1)\cdot(o,1) = (o\cdot o-1\cdot 1, o\cdot 1 +1\cdot o) =(-1,o) =-1 .$$

Комплексниот број$\alpha=(a,b)$ ќе биде претставен на следниов начин:

$$\alpha = (a,b) = (a,o)+(o,b)= a+ (b,o)(o,1) =a +ib.$$

Бројот a се вика реален дел на комплексниот број α , а бројот b имагинарен дел на комплексниот број α и се означува со $a=Re\alpha$, $b=Im\,\alpha$ соодветно. Записот$\alpha=a+ib$ се вика алгебарска форма на комплексниот број α. Операциите собирање,вадење, множење и делење на комплексните броеви се запишуваат , исто така, во следниве видови $(a+ib)+(c+id) =a+c +i(b+d)$

$$(a+ib)\cdot(c+id) = ac-bd +i(ad+bc)$$

$$\frac{a+ib}{c+id} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} +i \frac{bc-ad}{c^2+d^2}.$$

Комплексните броеви a+ib и a-ib се викаат конјугирано комплексни броеви. Ако со α е означен комплексниот број a+ib , тогаш комплексниот број a-ib се означува со $\bar{\alpha}$.

Збирот на два конјугирано комплексни броја е реален број. Навистина ;

$$\alpha+\overline{\alpha}= a+ib+a-ib = 2a = 2\mathrm{Re}\alpha.$$

Меѓутоа

$$\alpha-\overline{\alpha}= a+ib-(a-ib)=a-a +ib +ib=2ib=2\mathrm{Im}\alpha\cdot i$$

Уште повеќе:

$$\overline{\alpha+\beta}= (\overline{a+ib +c+id}) = a+c -(b+d)i=a-ib +c-id= \overline{\alpha}+\overline{\beta} \quad .$$

Без тешкотија се проверуваат точностса на равенствата:

$$\overline{\alpha-\beta}=\overline{\alpha}-\overline{\beta}, \qquad \overline{\alpha\beta}=\overline{\alpha}\cdot\overline{\beta}, \quad \left(\frac{\overline{\alpha}}{\beta}\right)=\frac{\overline{\alpha}}{\overline{\beta}}\,.$$

Истакнуваме дека за комплексните броеви важи дистрибутивниот закон, т.е. ако α, β и γ се три комплексни броеви, тогаш важи:

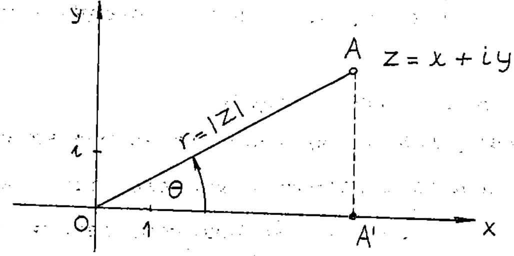
$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma, \qquad (\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma\,.$$

Во досегашното изнесување на особините на комплексните броеви видовме дека множеството од комплексните броеви ги има познатите особини на реалните броеви, меѓутоа постојат особини на реалните броеви кои не ги поседуваат комплексните броеви. Познато е дека множеството на реални броеви е подредено, т.е. ако a и b се реални броеви, тогаш и само тогаш еден од следните три искази е точен:

$$a<b\,, \qquad a=b \qquad \text{или} \qquad a>b\,.$$

Релацијата за подредување во множеството на реални броеви е во согласност со операциите собирање и множење, т.е. ако $0<a$ и $0<b$; $a,b\in R$, тогаш $0<ab$. Ќе покажеме дека во множеството на комплексни броеви не е можно да се воведе релација за подредување која ќе биде во согласност со операциите собирање и множење. За да го покажеме последното претпоставуваме спротивно, т.е. дека постои релација за подредување во множеството на комплексни броеви. Нека , на пример, $0<i$. Тогаш би добиле $0<i\cdot i$, односно $0<-1$, што претставува апсурд.

На сличен начи не доведува до апсурд претпоставката $o>1$.
За полесно проучување на натамошните особини на комплексните броеви, тие ќе бидат претставени геометриски како точки од една рамнина, која ќе ја викаме комплексна или Гаусова рамнина. На секоја точка $M(x,y)$ и одговара комплексниот број $z=x+iy$, и обратно. Точките од комплексната рамнина ќе бидат идентификувани со комплексните броеви и честопати во натамошниот текст поимите точка и комплексен број ќе бидат синоними. На множество од реални броеви му одговараат точките од апсцисната оска, а на множество од чисто имагинарни броеви (комплексни броеви чиј реален дел е еднаков на нула) му одговара ординатната оска која во понатамошниот текст ќе се вика имагинарна оска . Исто така , за геометриското толкување на комплексните броеви, како синоними ќе се користат векторите во рамнината .
Ако точката $A(x,y)$ што го претставува комплексниот број $z=x+iy$ се сврзе со координатниот почеток, тогаш должината на отсечката $\overline{OA}$ се вика <u>модул</u> на комплексниот број z и се означува со $|z|$ или со r . Од сликата 3 се гледа дека $|z|=r=\sqrt{x^2+y^2}$.



Сл.3

Аголот што го зафаќа векторот $\overrightarrow{OA}$ со позитивниот дел на x-оската се вика <u>аргумент</u> и се означува со Θ . Ако на аргументот Θ му се додаде агол од $2k\pi$ ($k=o,1,-1,2,-2, . . .$) се добива истата точка.

Аргументот ќе биде позитивен ако со позитивно вртење полуоската Ох преминува во полуправата определена со точките О и А , на која лежи комплексниот број z . Аргументот ќе биде негативен ако со негативно вртење позитивната полуоска преминува во полуправата ОА . Од триаголникот ОАА' се добива :

$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta \qquad (1)$$

од каде што комплексниот број $z=x+iy$ може да се запише во облик:

$$z=x+iy=r\cos\theta+i\sin\theta = r(\cos\theta+i\ \sin\theta). \qquad (2)$$

Од сликата се гледа дека :

$$tg\theta=\frac{y}{x} \quad .$$

Претставувањето (2) се вика тригонометриски облик на комплексниот број z . Равенките (1) ја даваат врската меѓу алгебарската и тригонометриската форма на комплексниот број z .

Забележуваме дека една и само една вредност на аргументот на комплексниот број z го задоволува условот $0\leq\theta<2\pi$.

Таа вредност се вика <u>главна вредност</u> на аргументот на комплексниот број и се означува со arg z . Другите вредности на аргументот на комплексниот број z , кои се добиваат со додавање на $2k\pi$ на главната вредност на аргументот на z , се означуваат со Arg z, т.е.

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi \ : \ k=0,1,-1,2,\ldots$$

Точно е равенството $z\cdot\bar{z}=|z|^2$. Навистина, $z\bar{z}=(x+iy)(x-iy)=|z|^2$. Главната вредност на аргументот е дадена со формулата:

$$\arg z=\begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} & : y\geq 0,\ x>0 \\ \pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x} & : \quad x<0 \\ 2\pi+\operatorname{arctg}\frac{y}{x} & : y<0,\ x>0 \\ \frac{\pi}{2} & : x=0,\ y>0 \\ \frac{3\pi}{2} & : x=0,\ y<0 \ . \end{cases} \qquad (3)$$

Нека $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ се два комплексни броја, со множење се добива $z_1\cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\cdot$

$$\cdot r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2) = r_1r_2(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2+$$

$$+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2))= r_1r_2\ (\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)).$$

Од горе покажаното се добива следново правило за множење на комплексни броеви: комплексните броеви се множат ако се помножат модулите на броевите и ако аргументите се соберат. Исказот аргументот од производот на два комплексни броја да е еднаков на збирот на аргументите на тие броеви треба да се сфати како

$\mathrm{Arg}z_1z_2= \mathrm{Arg}z_1 +\mathrm{Arg}\ z_2$, додека пак за главната вредност на аргументот на производот на комплексните броеви важи :

$$\arg(z_1z_2) = \arg z_1 + \arg z_2$$

ако $\arg z_1+\arg z_2 < 2\pi$,

односно $\arg(z_1z_2)=\arg z_1+\arg z_2-2\pi$ во случај да е $\arg z_1+\arg z_2 > 2\pi$,или,накусо,може да се напише

$$\arg(z_1z_2)=\arg z_1 + \arg z_2 \qquad (\text{модуло } 2\pi).$$

Ако се зададени n комплексни броеви

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1),\ .\ .\ .\ ,\ z_n=r_n(\cos\theta_n+i\sin\theta_n)\ ,$$

тогаш за нивниот производ имаме : $z_1\cdot z_2\dots z_n =$

$$=r_1\cdot r_2\cdots r_n(\cos(\theta_1+\theta_2+\dots+\theta_n)+i\sin(\theta_1+\theta_2+\dots\ \theta_n))\ .$$

Последното равенство се докажува со помош на математичка индукција. Ако $r_1=r_2=\dots=r_n =r$ и $\theta_1 = \theta_2 =\dots =\theta_n = \theta$ тогаш добиваме :

$$(r(\cos\theta +i\sin\theta))^n = r^n(\cos n\theta +i\sin n\theta). \qquad (4)$$

Формулата (4) се вика Муаврова формула. Нека се дадени комплексните броеви $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$, $z_2 =r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$, $z_2\neq 0$, $z = \frac{z_1}{z_2}$, од каде што за $z= r(\cos\theta+i\sin\theta)$ се добива :

$$z_1=z\cdot z_2\ ;\quad r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1) =rr_2(\cos(\theta +\theta_2)+i\sin(\theta+\theta_2))\ ,$$

така што е:

$$r = \frac{r_1}{r_2} \quad , \qquad \theta = \theta_1 - \theta_2 \quad .$$

Го добиваме следното правило за делење на комплексни броеви. Модулот од количникот на два комплексни броја е еднаков на количникот од модулите, а аргументот од количникот на два комплексни броја е еднаков на разликата од аргументите на комплексните броеви. Напоменуваме дека за аргументот важат истите забелешки направени за аргументот од производот на броеви.

Ако $\alpha = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ е зададен комплексен број, под n-ти корен на комплексниот број α се подразбираат комплексните броеви z кои имаат особина да е $z^n = \alpha$. Тогаш: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$,

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta) = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) \ .$$

Изедначувајќи ги модулите и аргументите од левата и десната страна на последното равенство се добива :

$$r^n = \rho \quad , \quad n\theta = \varphi + 2k\pi$$

односно:

$$r = \sqrt[n]{\rho} \quad , \ \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad , \ k = o, 1, -1, 2, -2, \ldots$$

На прв поглед се добива дека n-тиот корен на комплексниот број α има бесконечно многу вредности. Ако p и q се цели броеви, такви што $p - q = sn$ имаме :

$$\frac{\varphi + 2p\pi}{n} - \frac{\varphi + 2q\pi}{n} = \frac{2(p-q)\pi}{n} = 2s\pi$$

од каде што се добива дека синусите и косинусите имаат исти вредности, односно корените што одговараат за к=p и к=q се еднакви.

Со формулата

$$\sqrt[n]{\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \quad (5)$$

се дадени сите n-ти корени на комплексниот број α ако се стави к=o,1,2,. . ., n-1.

Нека се зададени комплексните броеви

$$z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1) \quad \text{и} \quad z_2=r_2(\cos\theta_2+ i\sin\theta_2) .$$

За модулот на збирот на комплексните броеви z_1 и z_2 имаме :

$$|z_1+z_2|^2=(r_1 \cos\theta_1+ r_2\cos\theta_2)^2+(r_1\sin\theta_1+r_2\sin\theta_2)^2 = r_1^2 \cos^2\theta_1 +$$
$$+r_2^2\cos^2\theta_2+2r_1r_2\cos\theta_1\cos\theta_2+r_1^2\sin^2\theta_1+r_2^2\sin^2\theta_2+2r_1r_2\sin\theta_1\sin\theta_2 =$$
$$= r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2\cos(\theta_1-\theta_2) .$$

Бидејќи $\cos(\theta_1-\theta_2)$ варира меѓу -1 и 1 , последниот израз ќе има најголема вредност кога $\theta_1-\theta_2 =0$ и таа вредност ќе биде еднаква на:

$$r_1^2 + r_2^2 + 2r_1r_2 = (r_1+r_2)^2$$

а најмала вредност кога $\theta_1-\theta_2 =\pi$ и таа вредност ќе биде:

$$r_1-r_2= |z_1| - |z_2|$$

од каде се добива:

$$|z_1+z_2| \leq |z_1| +|z_2| \quad ; \quad |z_1+ z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big| \quad ,$$

што значи дека модулот на збирот од два комплексни броја е помал или еднаков на збирот од модулите на тие броеви, а модулот од разликата на тие два броја е поголем или еднаков на разликата на модулите на тие броеви.

Забележуваме дека неравенството за модулот на збирот на два комплексни броја може да се обопшти за произволен број конечни собироци, т.е. важи неравенството :

$$|z_1+z_2+\dots +z_n| \leq |z_1|+|z_2| + \dots +|z_n| \quad .$$

Растојанието меѓу две точки z_1 и z_2 во комплексната рамнина се дефинира со:

$$d(z_1,z_2) = |z_1- z_2|= \sqrt{(x_1-x_2)^2+ (y_1-y_2)^2}$$

ако $\quad z_1=x_1+iy_1 \quad , \quad z_2=x_2+iy_2$.

2. НИЗИ ОД КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Низа од комплексни броеви е пресликување од множеството на природни броеви во множеството на комплексни броеви. Нека со φ го означиме пресликувањето од N во C (со C е означено множеството на комплексни броеви).

Ако $\varphi(n)=z(n)$, пишуваме $z(n)=z_n$. Комплексниот број е познат ако е познат реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број, т.е. имаме $z_n=x_n+iy_n$. Така, на секоја низа од комплексни броеви (z_n) и́ одговараат две реални низи (x_n) и (y_n) .

За низата комплексни броеви (z_n) велиме дека конвергира кон комплексниот број z и пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$, ако за секој $\varepsilon>o$ постои природен број $n_o=n_o(\varepsilon)$,таков што:

$$|z_n-z|<\varepsilon$$

при $n\geqslant n_o$.

Имајќи предвид дека $|x_n-x|\leqslant|z_n-z|$ и $|y_n-y|\leqslant|z_n-z|$ при $n\geqslant n_o$, добиваме дека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$, т.е. ако низата од комплексни броеви (z_n) конвергира кон комплексниот број $z=x+iy$, тогаш низите од реални ,односно од имагинарни делови се конвергентни на низата (z_n).

Ќе покажеме дека важи и обратно, т.е. нека $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$, што значи дека за секој позитивен број ε постои природен број n_1 , таков што :

$$|x_n-x|<\varepsilon/\sqrt{2}\ , \quad |y_n-y|<\varepsilon/\sqrt{2} \qquad \text{за} \quad n\geqslant n_1=n_1(\varepsilon) .$$

Тогаш е :

$$|z_n-z| =|x_n+iy_n-x-iy|= \sqrt{(x_n-x)^2+(y_n-y)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2}+\frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon$$

за $n\geqslant n_1$ т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} z_n= z$.

Докажана е наредната теорема.

Теорема 1.

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + iy_n) = x+iy$$

е точно , ако и само ако , се точни равенствата :

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \qquad \text{и} \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y$$

Непосредно од теорема 1 можеме да го извлечеме Кошиевиот принцип за конвергенција на низа од комплексни броеви.

Теорема 2. (Кошиев принцип за конвергенција на низи од комплексни броеви).

Низата од комплексни броеви (z_n) е конвергентна , ако и само ако е Кошиева , т.е. ако за секој $\varepsilon>o$ постои природен број $n_o=n_o(\varepsilon)$, таков што $|z_n-z_m|<\varepsilon$ за сите $n,m\geqslant n_o=n_o(\varepsilon)$.

Ги спомену ваме теоремите за операции со конвергентни низи од комплексни броеви, чиј доказ е наполно ист како кај низите од реални броеви.

Теорема 3. Нека $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$ и $\lim\limits_{n\to\infty} z_n' = z'$.

Тогаш е :

1) $$\lim_{n\to\infty}(z_n + z_n') = \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} z_n' = z+z'$$

2) $$\lim_{n\to\infty} (z_n - z_n') = \lim_{n\to\infty} z_n - \lim_{n\to\infty} z_n' = z-z'$$

3) $$\lim_{n\to\infty} (z_n.z_n') = \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} z_n' = z.z'$$

4) $$\lim_{n\to\infty} \frac{z_n}{z_n'} = \frac{z}{z'} \qquad \text{ако} \qquad z' \neq o .$$

Дефиниција. Под ε-околина на точката z_0 се подразбира множеството од точки z од комплексната рамнина за кои важи $|z - z_0| < \varepsilon$.

Значи, ε- околината претставува " отворен" круг со центар во z_0 и радиус ε.

Под околина на точката z_0 се подразбира секое множество M кое ја содржи точката z_0 заедно со некоја ε-околина на таа точка. Во натамошниот текст ε-околината на точката z_0 ќе се означува со $V(z_0, \varepsilon)$.

Конвергенцијата на низи од комплексни броеви ја има следнава форма со помош на околини. Низата од комплексни броеви (z_n) конвергира кон z_0 ако за секој $\varepsilon > 0$ сите членови на низата, почнувајќи од некој природен број n_0, се наоѓаат во ε-околината на точката z_0.

3. БЕСКОНЕЧНО ДАЛЕЧНА ТОЧКА И СТЕРЕОГРАФСКА ПРОЕКЦИЈА

Честа потреба во теоријата на аналитичките функции се јавува од поимот за бесконечно далечна точка, која ќе биде додадена на сите точки од комплексната рамнина и која ќе биде означена со ∞.

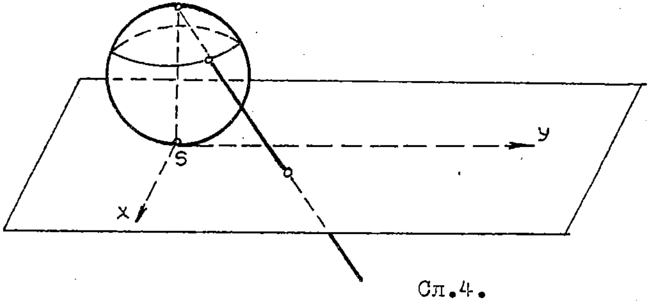
Под ρ-околина на точката ∞ се подразбира надворешноста на кругот со центар во координатниот почеток и со радиус ρ, т.е. множеството од точки z за кои е исполнето неравенството $|z| > \rho$.

За низата (z_n) велиме дека конвергира кон ∞ ако за секој $\rho > 0$ постои природен број $n_0 = n_0(\rho)$, таков што: $|z_n| > \rho$ за $n \geqslant n_0$ и пишуваме $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$.

Условот $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$ е еквивалентен со $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} = 0$.

За да се добие геометриска интерпретација на ∞ комплексните броеви се претставуваат како точки од една сфера. Посматраме сфера којашто ја допира Гаусовата рамнина во точката $z=o$ (види Сл 4.) . На сферата избираме две точки од кои едната е најмногу оддалечена и ја означуваме со N (северен пол), а втората точка е допирната точка со Гаусовата рамнина и ја означуме со S (јужен пол).

За центар на проекција го избираме северниот пол и ги проектираме точките од сферата врз рамнината. Оваа проекција се вика стереографска. На секоја точка Z од сферата и одговара единствената точка што лежи на рамнината.



Сл.4.

Точките што се поблиску до северниот пол имаат проекции кои се наоѓаат подалеку од координатниот почеток.

По договор, на северниот пол му одговара точката ∞ . Рамнината на Гаус , пополнета со бесконечно далечната точка, се вика проширена комплексна рамнина.

4. МНОЖЕСТВА ОД ТОЧКИ ВО КОМПЛЕКСНАТА РАМНИНА

Нека е дадено множеството од точки M во рамнината. За множеството M велиме дека е ограничено ако постои круг кој го содржи множеството, т.е. ако постои позитивен број K, таков што $|z| < K$ за секој $z \in M$.

Забележуваме дека ограниченоста на множеството M е еквивалентна со постоењето на квадрат со страни паралелни со координатните оски што го содржи множеството M, т.е. $|x| \leq K$, $|y| \leq K$ за сите

$z=x+iy\in M$. Од друга страна, ако постојат точки од множеството М што се надвор од кругот со произволен радиус, тогаш велиме дека множеството М е неограничено множество.

Точката z_0 од комплексната рамнина е точка на натрупување на множеството М, ако во секоја ε-околина на точката z_0 постојат бесконечно многу точки од множеството М, т.е. ако постојат бесконечно многу точки $z\in M$ такви што $|z-z_0|<\varepsilon$.
Сега ја спомeнуваме многу значајната теорема која се однесува до егзистенцијата на точки на натрупување на множество.

Теорема 4.(Болцано-Вајерштрас). Секое бесконечно и ограничено множество М во комплексната рамнина има барем една точка на натрупување.
За доказ на оваа теорема читателот може да види, на пример, во [2], каде што се посматра евклидскиот простор R^n или во [1], каде што се посматра реалната права.

За точката $z_1\in M$ велиме дека е изолирана точка за множеството М ако постои ε-околина на точката z_1 која не содржи друга точка од множеството М.

Точката $z_1\in M$ велиме дека е внатрешна точка на множеството М ако постои ε-околина на точката z_1 која што е подмножество од М, т.е. $V(z_1;\varepsilon)\subset M$.

Точката z_1 во комплексната рамнина е надворешна точка за множеството М ако е внатрешна точка на множеството M^c (комплемент на множеството М кое се се состои од точките што не припаѓаат на М. За точката z_1 велиме дека е рабна(гранична)точка на множеството М ако во секоја ε-околина на точката z_1 се наоѓаат точки од М и од M^c. Забележуваме дека рабните точки можат но не мораат да припаѓаат на множеството М.

За множеството М велиме дека е затворено ако ги содржи сите свои рабни точки. За множеството G велиме дека е отворено ако сите точки од множеството G се внатрешни точки.

Нека М е зададено множество во комплексната рамнина. Тогаш под <u>дијаметар</u> на множеството М се подразбира супремумот по сите можни растојанија меѓу точките од множеството М кој се означува со $d(M)$, т.е. $d(M) = \sup\{|z_1 - z_2|\}$ каде што $z_1, z_2 \in M$.

Забележуваме дека ако множеството М е затворено и ограничено, тогаш се покажува дека дијаметарот се достигнува во точки од множеството М , т.е. постојат точки $z_1, z_2 \in M$ такви што:

$$d(M) = |z_1 - z_2| .$$

Нека М е дадено множество и нека $\mathcal{G} = \{G_\alpha : \alpha \in I\}$ е фамилија од отворени множества. Велиме дека $\mathcal{G}$ е покривка за множеството М ако секоја точка од М припаѓа барем на едно множество од фамилијата $\mathcal{G}$. Ја споменуваме теоремата на Хајне-Борел без доказ,која дава карактеризација на затворените и ограничените множества на комплксната рамнина.

<u>Теорема 5.</u> (Хајне-Борел). Нека М е затворено и ограничено множество на комплексната рамнина. Тогаш од секоја отворена покривка на множеството М може да се извлече конечна потпокривка, т.е. ако

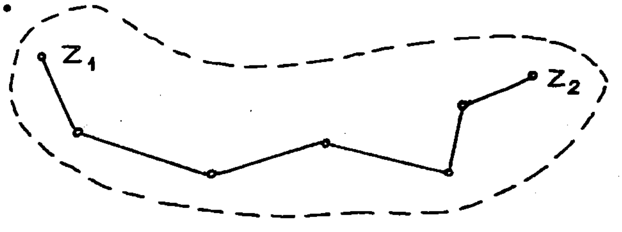
$$M \subset \cup\{G_\alpha : \alpha \in I\}$$

постојат множества $G_{\alpha_1}, G_{\alpha_2}, \dots, G_{\alpha_n} \in \mathcal{G}$, такви што:

$$M \subset G_{\alpha_1} \cup G_{\alpha_2} \cup \dots \cup G_{\alpha_n} .$$

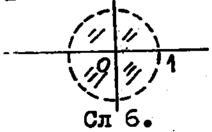
Најважни отворени множества се областите.

<u>Област</u> е отворено множество кај кое кои и да било две негови точки можат да се поврзат со искршена линија што лежи во множеството.



Сл 5.

Множеството точки z за кои што е исполнето $|z|<1$, е област.



Сл 6.

Работ на множеството е единичната кружна линија, т.е. множество од точки за кои е $|z| =1$, а а надворешните точки го исполнуваат условот $|z|>1$.

За областа D велиме дека е едноставна сврзлива ако $C\setminus D$ е сврзливо множество.

5. ЗАДАЧИ

1. Нека се $z_1=1+2i$, $z_2=2+i$.

Да се пресметаат: z_1+z_2, z_1-z_2, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$.

2. Да се најдат модулите и аргументите на комплексните броеви: а) $z= -\sin\pi/8 \quad -i\cos\pi/8$ б) $z=-3+4i$

3. Да се најдат модулите и аргументите на комплексните броеви:

а) $z = 4+3i$ б) $z = -2+2\sqrt{3}\, i$

в) $z =4-3i$ г) $z= \cos\alpha -i\sin\alpha, (0<\alpha<\pi/2)$.

4. Следниве комплексни броеви да се напишат во тригонометриски облик:

а) -2 б) $-\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ в) $1-\sin\alpha +i\cos\alpha, (0<\alpha<\pi/2)$.

5. Да се даде алгебарски доказ на неравенствата:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1|+|z_2|$$

$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1|-|z_2|| \quad .$$

6. Да се пресмета

а) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{40}$ б) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{8}$.

7. Да се докаже дека:

$$\left(\frac{1+itg\alpha}{1-itg\alpha}\right)^{n} = \frac{1+itgn\alpha}{1-itgn\alpha} \qquad (\text{ n цел број }).$$

8. Колку комплексни броеви ја задоволуваат равенката

$$z^4 = 1.$$

Да се најдат тие броеви.

9. Во следниве задачи да се најде геометриското место на точки во комплексната рамнина што го задоволуваат условот:

а) $\left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leqslant 1$ б) $0 < \mathrm{Im} z \leqslant 1$

в) $1 \leqslant |z+2+i| \leqslant 2$ г) $0 < \mathrm{Re} z < 2$ д) $\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z}\right) < \frac{-1}{2}$.

1o. Да се пресметаат сумите $1+\cos x+\cos 2x+\ldots +\cos nx$ и $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\ldots+\sin nx$.

Решение. Нека $A_n = 1+\cos x+\ldots+\cos nx$ и нека $B_n = \sin x+x\sin 2x+.+\sin nx$. Го формираме збирот $A_n+iB_n =$
$=1+\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx+\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx$.
Нека $z=\cos x+i\sin x$. Тогаш е $A_n+iB_n = 1+z+z^2+\ldots+z^n =$

$$= \frac{z^{n+1}-1}{z-1} = \frac{\cos(n+1)x+i\sin(n+1)x-1}{\cos x+i\sin x-1} =$$

$$= \frac{2\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{2\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{i}{i}\,\frac{\cos\left(\frac{n+1}{2}x\right)+i\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\cos\frac{x}{2}+i\sin\frac{x}{2}}\cdot\frac{\cos(x/2)-i\sin(x/2)}{\sin(x/2)-i\sin(x/2)} .$$

Нека $\frac{n+1}{2}x = t$, $\frac{x}{2} = u$; $t-u = \frac{nx}{2}$, па е

$$A_n+iB_n= \frac{\sin t}{\sin u}\cdot\frac{[\cos t\cos u+i\sin t\sin u+i(\sin t\cos u-\cos t\sin u)]}{\cos^2 u+\sin^2 u} =$$

$$= \frac{\sin t}{\sin u}\cdot\left[\cos(t-u) + i\sin(t-u)\right]$$

така се добива:

$$A_n = \frac{\sin((n+1)/2)x.\cos((n/2)x)}{\sin(x/2)} ,$$

$$B_n = \frac{\sin((n+1)/2)x\cdot\sin(n(n/2)x)}{\sin(x/2)} .$$

11. Дадена е низа од комплексни броеви (z_n). Тогаш, условот $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$ е еквивалентен со условот $\lim\limits_{n\to\infty}|z_n|= z$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\arg z_n=\arg z$ (каде што z не е позитивен број).

Решение. Ако $\lim\limits_{n\to\infty} z_n=z$, тогаш заради теоремата 1 имаме $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=y$ каде што $z_n=x_n+iy_n$. Тогаш од $|z_n|=\sqrt{x_n^2+y_n^2}$ заради непрекинатоста на реалните функции квадрат и квадратен корен имаме дека е

$$\lim_{n\to\infty}|z_n| = \lim_{n\to\infty} \sqrt{x_n^2+y_n^2} = \sqrt{x^2+y^2} = |z| .$$

Натаму, ако е $z=x+iy$ и $x>0$ и $y>0$, тогаш заради дефиницијата на аргументот од z, имаме $\arg z_n = \operatorname{arctg}\frac{y_n}{x_n} \to$

$$\to \operatorname{arctg}(y/x) = \arg z,$$

заради непрекинатоста на функцијата arctg. Заради (3) од страница 75 се добива резултатот во другите квадранти.

Нека претпоставиме дека $|z_n|\to|z|$ и $\arg z_n\to\arg z$.

Тогаш:

$$z_n = |z_n|(\cos\arg z_n+i\sin\arg z_n)$$

Заради непрекинатоста на функциите cos и sin и користејќи ја теоремата 1 се добива $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}|z_n|\cos\arg z_n +$

$+i\lim_{n\to\infty}|z_n|\sin(\arg z_n) = |z|(\cos\arg z + i\sin\arg z) = z.$

<u>12</u>. Користејќи ја задачата 11 да се докаже

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y+i\sin y).$$

<u>Решение.</u> Нека $z=x+iy$. Тогаш $(1+\frac{z}{n})^n = (1+\frac{x+iy}{n})^n$.

Нека $z_n = (1+\frac{z}{n})^n$; $|z_n| = \left(\sqrt{(\frac{n+x}{n})^2+(\frac{y}{n})^2}\right)^n =$

$= (1+(2x)/n+(x^2+y^2)/n^2)^{n/2}$.

Нека

$$\alpha(n) = \frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2},$$

тогаш $\alpha(n)\to 0$ кога $n\to\infty$, претставува бескрајно мала величина. Ако во развојот на логаритамската функција $\ln(1+t)$ (задача1, IV глава) $\ln(1+t) = t-\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}-\frac{t^4}{4}\dots$, ako ставиме $t=\alpha(n)$ ќе добиеме

$$\ln|z_n| = \frac{n}{2}\left[\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2+y^2}{n^2}\right)-\frac{(\alpha(n))^2}{2}+\frac{(\alpha(n))^3}{3}-\dots\right]$$

па е $\lim_{n\to\infty}|z_n| = x$, бидејќи $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2}\frac{(\alpha(n))^k}{k} = 0$ за к $\geqslant 2$.

Користејќи ја непрекинатоста на функцијата e^x добиваме дека е:

$$\lim_{n\to\infty}|z_n| = e^x.$$

Ако пуштиме $n\to\infty$ и ако се користи Лопиталовото правило, се добива $\arg z_n = \arg\left(\frac{n+x}{n}+\frac{iy}{n}\right)^n = n\,\mathrm{arctg}((y/n)/((n+x)/n)) =$

$$= n\,\mathrm{arctg}\frac{y}{n+x} = \frac{\mathrm{arctg}\frac{y}{n+x}}{\frac{1}{n}};$$

па е $\lim_{n\to\infty}\arg z = y$ што значи

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x(\cos y+i\sin y).$$

13. Да се докаже идентитетот

$$|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$$

14. Да се докаже , ако $z_1+z_2+z_3=0$ и $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$ тогаш точките z_1, z_2, z_3 се темиња на рамностран триаголник впишан во единичната кружна линија.

15. Ако a и b се комплексни броеви со особина $|a|<1$, и $|b|<1$ тогаш:

$$\left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1 .$$

16. Да се определат фамилиите на криви (геометриски места на точки) што се задоволени со условите

а) $\mathrm{Re}(1/z) = C$ б) $\mathrm{Im}(1/z) = C$

в) $\mathrm{Re}(z^2) = 0$ г) $\mathrm{Im}\,(z^2) = C$

каде што : $-\infty < C < +\infty$.

17. Да се изведат формулите за стереографска проекција претставувајќи ги координатите (ξ, η, ζ) на точката Z од сферата со дијаметар 1, која ја допира z-рамнината во координатниот почеток, со помош на координатите (x,y) на точката z и обратно: да се изразат (x,y) со помош на (ξ, η, ζ) каде што $O\xi$ и $O\eta$ се претпоставува да се поклопуваат со Ox, Oy-оските.

18. На сферата да се најдат сликите на точките 1, -1, i, $(1-i)/2$.

19. На сферата да се најдат сликите на областите што определени со следниве неравенства:

а) $\mathrm{Im}(z) \geqslant 0$ б) $\mathrm{Im} z < 0$ в) $\mathrm{Re} z > 0$

г) $\mathrm{Re} z < 0$ д) $|z| < 1$ ѓ) $|z| > 1$

VII ГЛАВА

АНАЛИТИЧКИ ФУНКЦИИ

1. ФУНКЦИИ ОД КОМПЛЕКСНА ПРОМЕНЛИВА

Нека Е е дадено подмножество од множеството на комплексните броеви. Ако на секој $z\in E$ му припаѓа единствен комплексен број w, тогаш велиме дека е зададена функција од комплексна променлива и пишуваме $w=f(z)$. За множеството Е велиме дека претставува дефинициона област на функцијата f или област на дефинираност на функцијата f. За $w=f(z)$ велиме дека е слика на елементот z.

Ако две различни точки z_1 и z_2 имаат различни слики, тогаш велиме дека f е инјекција или еден-еден или кратко f е 1-1. Комплексниот број $w=f(z)$ може да се запише во обликот $w=u+iv$, каде што $u=u(x,y)$ и $v=v(x,y)$ се две реални функции од променливите x и y.

Определувањето на функцијата $f(z)$ е еквивалентно со определувањето на две реално вредносни функции(функции чии вредности се реални броеви) од две реални независни променливи. На пример, за $w=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$

имаме:

$$u(x,y)=x^2-y^2 \quad \text{и} \quad v=v(x,y)=2xy\ .$$

<u>Дефиниција 1.</u> Нека функцијата $f(z)$ е дефинирана во некоја околина на точката z_0 освен во самата точка z_0. За комплексниот број w_0 велиме дека е гранична вредност на функцијата $f(z)$ кога z се стреми кон z_0, ако за секој $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$ таков што $|f(z)-w_0|<\varepsilon$ кога $|z-z_0|<\delta$ и $z\neq z_0$. Последното се означува со

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=w_0\ .$$

Исто како и теорема 1 од VI глава, може да се покаже дека исказот

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0 = u_0+iv_0$$

е еквивалентен со исказите $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) = u_0$

и $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y)=v_0$.

За функцијата $w=f(z)$ велиме дека е непрекината во точката z_0 ако функцијата f е дефинирана во таа точка и ако уште важи:

$$\lim_{z \to z_0} f(z) =f(z_0).$$

Користејќи ги истите методи како и при доказот на теоремите од VI глава лесно се докажува наредната теорема .

Теорема 1. Функцијата $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ е непрекината во точката $z_0=x_0+iy_0$ ако и само ако се непрекинати функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$ во точката (x_0,y_0) т.е. важи

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} u(x,y) =u(x_0,y_0) \quad , \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} v(x,y) = v(x_0,y_0).$$

Ја забележуваме следната теорема која ќе ја користиме понатаму.

Теорема 2. Збир, разлика, производ и количник на две непрекинати функции е непрекината функција во дадената точка. Реалната функција $|f|$ е непрекината функција ако f е непрекината функција. Ако f и g се непрекинати функции такви што е дефинирана сложената функција $g(f(z))$ тогаш и сложената функција истотака е непрекината. Уште повеќе ако f е непрекината функција на затворено и ограничено множество E тогаш $|f(z)|$ е ограничена на E и достигнува минимум и максимум во точките од E.

Пример 1. Нека $f(z)=z^2$ е дефинирана за секоја вредност т.е. дефиниционата област на функцијата се поклопува со комплексната рамнина. Нека z_0 е фиксен комплексен број. Тогаш е

$$|f(z)-f(z_0)| = |z^2-z_0^2| = |z-z_0||z +z_0|.$$

Нека е $|z-z_0|<\delta$. Тогаш е $|z+z_0|=|z-z_0+2z_0|<|z-z_0|+2|z_0|$.

Имаме

$$|f(z)-f(z_0)| < \delta(\delta +2|z_0|) .$$

Нека ε е кој и да било позитивен број. Се бара позитивен број δ таков што од $|z-z_0|<\delta$ да следува $|f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$. Ако $\varepsilon=\delta^2+2|z_0|\delta$, решавајќи ја последната равенка по δ се добива

$$\delta = -|z_0| + \sqrt{|z_0|^2+\varepsilon} .$$

Од последното се добива дека функцијата $f(z)=z^2$ е непрекината функција во точката z_0. Од овој пример се гледа дека δ зависи од ε и од точката z_0.

Дефиниција 2. За функцијата $f(z)$ велиме дека е рамномерно непрекината функција на множеството E ако за секој позитивен број ε постои позитивен број δ таков што

$$|f(z)-f(z')|<\varepsilon \qquad \text{штом} \qquad |z-z'|<\delta;\ z,z'\in E.$$

Теорема 3. Нека E е затворено и ограничено множество во комплексната рамнина. Тогаш секоја непрекината функција на множеството E е рамномерно непрекината функција.

Доказ. Нека $\varepsilon>0$ и нека $z_0\in E$ е произволна точка. Од непрекинатоста на функцијата f во точката z_0 следува постоење на $\delta_{z_0}>0$ таков што:

$$|f(z)-f(z_0)|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{штом} \qquad |z-z_0|<\delta_{z_0} .$$

Множеството E може да се покрие со $\frac{\delta_z}{2}$ - околини, т.е

$$E\subset\bigcup_{z\in E} V(z;\frac{\delta_z}{2}).$$

Според теоремата на Хајне-Борел од отворената покривка

$$\left\{V(z;\ \frac{\delta_z}{2}) : z\in E\right\}$$

може да се извлече конечна потпокривка на множеството E, т.е.

$$E\subseteq V(z_1,\frac{\delta_{z_1}}{2})\cup V(z_2,\frac{\delta_{z_2}}{2})\cup\dots\cup V(z_n,\frac{\delta_{z_n}}{2}).$$

Нека

$$\delta=\frac{1}{2}\left\{\min\left[\delta_{z_1},\delta_{z_2},\dots,\delta_{z_n}\right]\right\} .$$

Нека z'' и z' се произволни точки од E со особината

$$|z''-z'|<\delta<\frac{\delta_{z_k}}{2} \qquad (k=1,2, \ldots , n) .$$

Постои z_j таков што $|z'-z_j|<\frac{\delta_{z_i}}{2}$. Тогаш е :

$$|z''-z_j| \leq |z''-z'| + |z'-z_j| < \delta+\frac{\delta_{z_j}}{2} < \delta_{z_j}.$$

Оттука добиваме

$$|f(z'')-f(z')|=|f(z'')-f(z_j) +f(z_j) -f(z')| \leqslant$$

$$\leqslant|f(z'')-f(z_j)|+|f(z_j) -f(z')| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

со што теоремата е докажана.

2. ИЗВОДИ ОД ФУНКЦИИ ОД КОМПЛЕКСНА ПРОМЕНЛИВА

Изводот од функција од комплексна променлива формално се дефинира како и изводот од реално вредносна функција од една реална променлива.

Нека $z_0 \in E$ и да претпоставиме дека z_0 е внатрешна точка за множеството E. Го посматраме количникот $F(z)= \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ каде z припаѓа на некоја околина на точката z_0. Функцијата $F(z)$ не е дефинирана во точката z_0. Ако постои комплексен број L , таков што дефинирајќи ја функцијата $F(z)$ во точката z_0 со равенството $F(z_0)=L$ таа станува непрекината функција во точката z_0 ,тогаш велиме дека функцијата $f(z)$ *има извод* во точката z_0 и дека L е извод на функцијата f во точката z_0 ознака: $L=f'(z_0)$. Исказот за постоење извод е еквивалентен на следново : за секој $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$, таков што :

$$\left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - f'(z_0)\right| < \varepsilon \quad \text{штом} \quad 0 < |z-z_0| < \delta \quad ,$$

односно: $$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = f'(z_0) .$$

Дефиниција 3. Функцијата f е диференцијабилна ако има конечен извод.

Пример 2. Ако $f(z)=z^2$ тогаш е $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{z^2-z_0^2}{z-z_0} = $ $=z+z_0$ за $z \neq z_0$.

Ако земеме $f'(z_0)=2z_0$ имаме :

$$\left| \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} - 2z_0 \right| = \left| z+z_0-2z_0 \right| = \left| z-z_0 \right| < \varepsilon \text{ ako } \delta = \varepsilon ,$$

од каде се гледа дека функцијата f е диференцијабилна во која и да било точка.

Пример 3. Ја посматраме функцијата

$$f(z) = \overline{z} .$$

Ќе покажеме дека оваа функција не е диференцијабилна во ниедна точка од комплексната рамнина. Нека z_0 е произволен комплексен број.

Тогаш е :

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z-z_0} = \frac{(\overline{z-z_0})}{z-z_0} .$$

Последниот количник нема определена граница кога $z \to z_0$ бидејќи ако $z-z_0=\Delta$ е реален; количникот е 1 , а ако $z-z_0 = i\Delta$, Δ е реален, количникот е -1 . Одовде следува дека функцијата f не е диференцијабилна во ниедна точка.

Честопати се користи ознаката $\Delta z=z-z_0$, $f(z)-f(z_0)=\Delta f$ така што дефиницијата на **изводот** можеме да ја запишеме во облик:

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} .$$

Теорема 4. Ако функцијата f е диференцијабилна во точката z_0, тогаш таа е непрекината во истата точка.

Доказ. Нека E е дефинициона област на функцијата f. Тогаш постои околина U на точката z_0 која е подмножество на E. Нека $z \in U$ и $z \neq z_0$.

Имаме: $$f(z)-f(z_0) = \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \cdot (z-z_0) .$$

Тогаш е:
$$\lim_{z \to z_0} [f(z)-f(z_0)] = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} . \lim_{z \to z_0} (z-z_0) = f'(z_0).0=0.$$

Точна е наредната теорема.

Теорема 5. Ако функциите $f(z)$ и $g(z)$ се две диференцијабилни функции во точката z_0. Тогаш и функциите
$$f(z)+g(z),\ f(z)-g(z),\ f(z).g(z),\ \frac{f(z)}{g(z)}$$
се диференцијабилни во истата точка. Уште повеќе важат следниве правила за барање изводи :

1) $$[f(z) \pm g(z)]' = f'(z) \pm g'(z)$$

2) $$[f(z).g(z)]' = f'(z).g(z) + f(z)g'(z)$$

3) $$\left[\frac{f(z)}{g(z)}\right]' = \frac{f'(z)g(z)-f(z)g'(z)}{g^2(z)}$$

Доказот на оваа теорема е наполно ист како кај функции од една независно променлива.

Забележуваме: ако g е непрекината функција и ако $g(z_0) \neq 0$, тогаш постои околина U на точката z_0 таква што $g(z) \neq 0$ за $z \in U$. Последното следува од непрекинатоста на функцијата $g(z)$. Навистина, земајќи $\varepsilon = \frac{|g(z_0)|}{2} > 0$ постои δ-околина на точката z_0, таква што

$$|g(z)-g(z_0)| < \varepsilon \qquad \text{за} \qquad |z-z_0| < \delta.$$

Оттука имаме: $|g(z)| = |g(z)-g(z_0)+g(z_0)| \geqslant |g(z_0)| - |g(z)-g(z_0)| >$

$> |g(z_0)| - \frac{|g(z_0)|}{2} = \frac{|g(z_0)|}{2}$

т.е. $g(z) \neq 0$ за $z \in V(z_0; \delta)$.

Пример 4. $f(z) = C$.

Ако $f(z)=C$, тогаш имаме $f'(z\ ) = 0$

бидејќи е $f(z)-f(z_0) = C-C = 0$; од каде што се добива:

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z \to z_0} 0 = 0.$$

Пример 5.

$f(z)=z$. Имаме $\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \frac{z-z_0}{z-z_0} = 1.$

од каде што се добива :

$$(z\ )' = 1.$$

Пример 6. $f(z)=z^n$.

Имаме

$f(z)-f(z_0) = z^n - z_0^n = (z-z_0)(z^{n-1}+z^{n-2}z_0+\dots+z_0^{n-1}\ )$.

За количникот од нараснувањето на функцијата и независно променливата се добива:

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = z^{n-1}+z_0 z^{n-2}+\dots+ z_0^{n-1}, \text{ за } z \neq z_0 \quad ,$$

од каде што се добива:

$$f'(z\ ) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{z \to z_0} (z^{n-1}+z_0 z^{n-2}+\dots+z_0^{n-1}) = nz_0^{n-1}.$$

Конечно е :

$$(z^n)' = nz^{n-1}.$$

Нека $w=f(z)$ е диференцијабилна функција во точката $z_0 \in E$. Ја посматраме сложената функција $\zeta = g(w)$ каде што g е диференцијабилна функција во точката $w_0 = f(z_0)$. Тогаш сложената функција

$$\zeta = F(z) = g(f(z))$$

е диференцијабилна функција и важи правилото за барање извод од сложената функција:

$$F'(z)) = g'(w_0).f'(z_0).$$

За да се докаже последното правило го посматраме количникот од нараснувањата:

$$\frac{F(z)-F(z_0)}{z-z_0} = \frac{g(w)-g(w_0)}{z-z_0} = \frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} \cdot \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} .$$

Од непрекинатоста на функцијата f во точката z_0 следува дека $w \to w_0$ штом $z \to z_0$. Така , користејќи ги основните правила за операции со лимеси, се добива: $F'(z_0) =$

$$=\lim_{z\to z_0} \frac{F(z)-f(z_0)}{z-z_0} = \lim_{w\to w_0} \frac{g(w)-g(w_0)}{w-w_0} \cdot \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} =$$

$$= g'(w_0).\ f'(z_0) .$$

Нека е зададена функцијата $w=f(z)$ којашто го пресликува множеството E на множеството $F=f(E) = \{f(z):z\in E\}$, и тоа обратно еднозначно, т.е. 1-1. Претпоставуваме дека инверзната функција е непрекината во $w_0=f(z_0)$. Ако $f'(z_0)$ постои и е различен од 0 , тогаш постои и извод на функцијата $z= \varphi(w)$ во точката w_0 и важи:

$$\varphi'(w_0) = \frac{1}{f'(z_0)} .$$

Последното равенство се докажува поаѓајќи од:

$$\frac{\varphi(w)-\varphi(w_0)}{w\ w_0} = \frac{z-z_0}{w-w_0} = \frac{1}{\frac{w-w_0}{z-z_0}} .$$

Така што се добива:

$$\varphi'(w_0) = \lim_{w\to w_0} \frac{\varphi(w)-\varphi(w_0)}{w-w_0} = \frac{1}{\lim\limits_{z\to z_0} \frac{w-w_0}{z-z_0}} = \frac{1}{\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}} =$$

$$\frac{1}{f'(z_0)} .$$

3. АНАЛИТИЧКИ ФУНКЦИИ

Сега ќе дадеме дефиниција на еден од најважните поими во теоријата на функциите од комплексна променлива, што претставува еден од најважните поими во математичката анализа, а тоа е поимот за аналитички функции.

Дефиниција 4. За функцијата $w=f(z)$ велиме дека е аналитичка функција во точката z_0 ако постои околина U на точката z_0 во која функцијата $w=f(z)$ има непрекинат извод, т.е. функцијата $f'(z)$ е непрекината функција.

Забелешка. Најчесто во учебничката литература за аналитичност се бара само постоење на извод на функцијата во околина на точката z_0. Со помош на оваа дефиниција доказите на многу теореми се упростуваат, како на пример, основната теорема на Коши која ќе биде изнесена подоцна.

Полиномите се диференцијабилни функции. Тие, исто така, се аналитички функции во секоја точка од комплексната рамнина. Рационалните функции, кои се количници на полиноми, се аналитички функции во сите точки од комплексната рамнина, освен во точките во кои се анулираат именителите.

Функцијата $f(z)=|z|^2$ не е аналитичка функција во ниедна точка, иако има извод во точката $z=0$.

Функциите $\mathrm{Re}z$ и $\mathrm{Im}z$ не се аналитички функции.

Ќе дадеме карактеризација која ја поврзува аналитичноста на комплексната функција со условите што ги исполнуваат парцијалните изводи на реалниот и имагинарниот дел на функцијата. Овие услови се познати под името Коши-Риманови услови.

Теорема 6. Нека z_0 е внатрешна точка од дефиниционата област на функцијата $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Тогаш $f(z)$

е аналитичка функција во точката z_0, ако и само ако, функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имаат непрекинати парцијални изводи кои ги исполнуваат условите $u'_x=v'_y$ и $u'_y=-v'_x$ во некоја околина на точката (x_0,y_0).

<u>Доказ.</u> Ако $f(z)$ е аналитичка функција во точката z_0 тогаш таа има непрекинат извод во некоја околина U на точката z_0. Ако ξ и η се реални имаме: $f'(z)=\lim\limits_{\xi\to 0}\dfrac{f(z+\xi)-f(z)}{\xi}=$

$$=\lim_{\xi\to 0}\frac{u(x+\xi,y)-u(x,y)}{\xi}+i\lim_{\xi\to 0}\frac{v(x+\xi,y)-v(x,y)}{\xi}=u'_x+iv'_x.$$

Од друга страна имаме:

$$f'(z)=\lim_{\eta\to 0}\frac{f(z+i\eta)-f(z)}{i\eta}=\lim_{\eta\to 0}\frac{u(x,y+\eta)+iv(x,y+\eta)}{i\eta}-\frac{u(x,y)+v(x,y)i}{i\eta}$$

$$=-i\lim_{\eta\to 0}\frac{u(x,y+\eta)-u(x,y)}{\eta}+\lim_{\eta\to 0}\frac{v(x,y+\eta)-v(x,y)}{\eta}=-iu'_y+v'_y.$$

Од последното се добива дека првите парцијални изводи постојат, дека се непрекинати бидејќи се реални и имагинарни делови на аналитички функции и дека Коши-Римановите услови се исполнети.

Обратно, нека претпоставиме дека парцијалните изводи на реалниот и имагинарниот дел на комплексна функција се непрекинати и нека се исполнети Коши-Римановите услови $u'_x=v'_y$ и $u'_y=-v'_x$. Тогаш е:

$$\frac{f(z+\xi+i\eta)-f(z)}{\xi+i\eta}=\frac{u(x+\xi,y+\eta)-u(x,y)}{\xi+i\eta}+i\frac{v(x+\xi,y+\eta)-v(x,y)}{\xi+i\eta}.$$

Користејќи ја непрекинатоста на парцијалните изводи на функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имаме :

$$u(x+\xi,y+\eta)-u(x,y)=\xi u'_x(x,y)+\eta u'_y(x,y)+\theta_1\xi+\theta_2\eta$$

$$v(x+\xi,y+\eta)-v(x,y)=\xi v'_x(x,y)+\eta v'_y(x,y)+\theta_3\xi+\theta_4\eta$$

каде што $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$ се стремат кон о кога $|\xi+i\eta|\to 0$.

Количникот од нараснувањето од функцијата и независно променливата можеме да го запишеме во обликот:

$$\frac{f(z+\xi+i\eta)-f(z)}{\xi+i\eta} = \frac{\xi u_x'(x,y)+\eta u_y'(x,y)+i(\xi v_x'(x,y)+\eta v_y'(x,y))}{\xi+i\eta} + $$

$$+ \frac{\xi\theta_1+\theta_2\eta+i\theta_3\xi+i\theta_4\eta}{\xi+i\eta}. \qquad (1)$$

Од $\left|\frac{\xi}{\xi+i\eta}\right|\leq 1$ и $\left|\frac{\eta}{\xi+i\eta}\right|\leq 1$ имаме:

$$\left|\frac{\theta_1\xi+\theta_2\eta+i\theta_3\xi+i\theta_4\eta}{\xi+i\eta}\right| \leq |\theta_1|+|\theta_2|+|\theta_3|+|\theta_4|. \qquad (2) \quad (2)$$

Користејќи ги Коши-Римановите услови добиваме:

$$\frac{f(z+\xi+i\eta)-f(z)}{\xi+i\eta} = \frac{(\xi+i\eta)\,u_x'(x,y)+i(\xi+i\eta)v_x'(x,y)}{\xi+i\eta} +$$

$$+ \frac{\theta_1\xi+\theta_2\eta+i(\theta_3\xi+\theta_4\eta)}{\xi+i\eta}.$$

Користејќи го неравенството (2) и фактот што $\theta_i\to 0$ кога $\xi+i\eta\to 0$, за $j==1,2,3,4$, добиваме:

$$\lim_{|\xi+i\eta|\to 0}\left[\frac{f(z+\xi+i\eta)-f(z)}{\xi+i\eta}\right] = u_x'(x,y)+iv_x'(x,y) =$$

$$= v_y'(x,y)-iu_y'(x,y).$$

Оттука се добива дека $f'(z)$ постои и е непрекината функција во некоја околина на точката z_0. Доказот на теоремата е завршен.

Пример 7. Ја посматраме функцијата

$$f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin ny .$$

Во овој случај имаме $u(x,y)=e^x\cos y$, $v(x,y)=e^x\sin y$.

Тогаш е: $u_x'=e^x\cos y=v_y'$; $u_x'=v_y'$.

$v_x'=e^x\sin y$, $u_y'=-e^x\sin y$

имаме $u'_y = -v'_x$.

Оттука се гледа дека Коши-Римановите услови се исполнети така што се добива дека функцијата $f(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y$ е аналитичка функција, уште повеќе, дека важи :

$$f'(z) = e^x(\cos y+i\sin y) = f(z).$$

Нека $f(z)$ е аналитичка функција во точката z_0 . Тогаш постои околина на таа точка во која се исполнети Коши-Римановите услови: $u'_x=v'_y$; $u'_y = -v'_x$.

Да претпоставиме за момент дека функциите $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имаат непрекинати парцијални изводи до вториот ред **заклучно.** Диференцирајќи ги уште еднаш Коши-Римановите услови добиваме:

$$u''_{xx} = v''_{yx} \quad , \quad u''_{yy} = -v''_{xy} \quad ,$$
$$u''_{xy} = v''_{yy} \quad , \quad u''_{yx} = -v''_{xx} \quad .$$

Од еднаквоста на мешаните изводи се добива:

$$u''_{xx} + v''_{yy} = 0 \quad , \quad v''_{xx} + v''_{yy} = 0 .$$

Се добива дека $\mathrm{Re} f(z)$ и $\mathrm{Im} f(z)$ ја задоволуваат Лапласовата парцијална диференцијална **равенка.**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Дефиниција 5. За функцијата од две независно променливи $u(x,y)$ велиме дека е хармониска функција во околината U на точката (x_0,y_0) ако постојат непрекинати парцијални изводи од втор ред $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u''_{xx}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = u''_{yy}$

и ако уште важи: $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Од погоре покажаното се гледа дека ниту реалниот дел ниту имагинарниот дел на аналитичката функција не се произволни туку секој од нив ја задоволува Лапласовата парцијална диференцијална равенка, а двете заедно ги задоволуваат Коши-Римановите услови.

Користејќи ги овие факти, ако е зададена една хармониска функција $u(x,y)$, може да се најде хармониската функција $v(x,y)$, таква што

$$u(x,y)+iv(x,y)$$

е аналитичка функција во едноставно сврзливата област D.

На крајот споменуваме дека функцијата f е аналитичка на множество ако е аналитичка во секоја точка од множеството.

4. ЗАДАЧИ

1. Да се покаже дека функцијата $f(z)=\frac{1}{z}$ е непрекината функција но не е рамномерно непрекината функција во областа

$$D=\{z\in C:\ o<|z|\leqslant 1\}.$$

2. Функцијата

$$f(z)=|z|^{1/2}\left(\cos\frac{\arg z}{2}+i\sin\frac{\arg z}{2}\right),\quad o\leq \arg z<2\pi$$

е непрекината функција во сите точки од комплексната рамнина, освен на позитивниот дел од x-оската. Докажи! Да се докаже дека истата функција е диференцијабилна во секоја точка, освен на позитивниот дел од x-оската.

3. Докажи дека функциите $Re z$, $Im z$ се непрекинати функции во секоја точка од рамнината но не се диференцијабилни. Да се испита диференцијабилноста на функцијата $w=zRe z$.

4. Покажи дека функцијата $f(z)=\sin x\,sh y+i\cos x\,sh y$ е аналитичка функција.

5. Нека $f(z)$ го исполнува условот $f'(z)=0$ во секоја точка од областа D. Докажи дека $f(z)=C$, (константа)

6. Нека $\varphi(t)$ е реална диференцијабилна функција во точката $t_0 \in [a,b]$ и нека $z(t)$ е комплексна диференцијабилна функција во точката $\varphi(t_0)$. Да се покаже дека функцијата $z_1(t)=z(\varphi(t))$ е диференцијабилна во точката t_0 и дека важи:

$$z_1'(t_0) = z'(\varphi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0) \ .$$

7. Да се покаже дека од преминот од Декартови координати (x,y) во поларни координати (r, φ) Коши-Римановите услови имаат облик:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi} \ , \quad \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \ .$$

8. Даs се најде изводот на функцијата:

$$f(z) = u(r, \varphi)+iv(r, \varphi).$$

Специјално: а) $f(z) = z^n$ б) $f(z) = \ln r + i\varphi$.

9. Да се покаже дека следниве функции

а) $u = x^2+2x-y^2$ б) $u(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$

в) $u = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ г) $u = \ln \sqrt{x^2+y^2}$

се хармониски во својата област на дефинираност.

10. Кои услови треба да ги задоволуваат коефициентите а, b и с за да може триномот $u=ax^2+2bxy+cy^2$ да биде хармониска функција?

11. Да се најдат коефициентите а,b и с за да може функцијата $f(z)$ да биде аналитичка:

1) $f(z) = x+ay +i(bx+cy)$

2) $f(z) = \cos x \ (\operatorname{ch}y+a\operatorname{sh}y) +i\sin x(\operatorname{ch}y+b\operatorname{sh}y)$.

12. Да се провери дека функцијата $u = y^3-3x^2y$ е хармониска; потоа да се најде хармониската функција $v(x,y)$, така што $u+iv$ да е аналитичка функција во целата комплексна рамнина.

13. Дали постои функција во еден од следниве видови:

а) $u = \varphi(x)$ б) $u = \varphi(ax+by)$ в) $u= \varphi(\frac{x^2+y^2}{x})$

г) $u =\varphi(x+x^2+y^2)$. Во случај на потврден одговор да се најде.

14. Да се трансформира изразот

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

во поларни координати.

VIII ГЛАВА

ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

1. РАЦИОНАЛНИ ФУНКЦИИ

Наједноставни функции се полиномите:

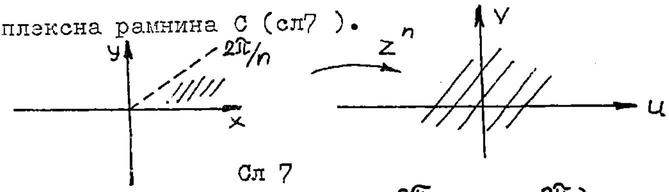
$$P(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\dots+a_nz^n$$

и рационалните функции:

$$R(z) = \frac{a_0+a_1z+a_2z^2+\dots+a_nz^n}{b_0+b_1z+b_2z^2+\dots+b_mz^m} .$$

Порано покажавме дека полиномите се аналитички функции, како и рационалните функции, освен во точките во кои именителот е еднаков на нула. На пример, рационалната функција $Q(z)=\frac{1}{1+z^2}$ е аналитичка, освен во точките во кои е $1+z^2=0$, а тоа се точките $z_1=i$, $z_2=-i$.

Покажавме дека функцијата $w=z^n$ е аналитичка функција во целата комплексна рамнина. Се поставува прашање дали постои инверзна функција за функцијата $w=f(z)=z^n$. За та цел го посматраме кружниот исечок $D_1=\left\{z : z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi);\ 0\leq\varphi<\frac{2\pi}{n}\right\}$. Ако $z\in D_1$ и нека $w=z^n$, тогаш е $\arg w=\arg z^n=n\arg z$. Ако $\varphi=\arg z$ и $0\leqslant\varphi<\frac{2\pi}{n}$, тогаш е $0\leqslant\arg w<2\pi$. Тоа значи дека функцијата $w=z^n$ го пресликува кружниот исечок D_1 на целата комплексна рамнина C (сл7).



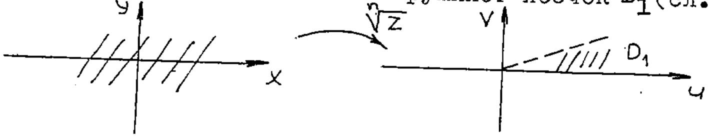
Сл 7

Меѓутоа, и кружниот исечок $D_2=\left\{z:\frac{2\pi}{n}\leq\arg z<\frac{2\pi}{n}2\right\}$ исто така се пресликува на целата комплексна рамнина со пресликувањето $w=z^n$ и, најопшто, кружниот исечок $D_i=\left\{z:\frac{2\pi}{n}(i-1)\leq\arg z<\frac{2\pi}{n}i\right\}$ се пресликува на целата комплексна рамнина, така што не постои инверзна функција за функцијата $w=z^n$ од C на C.

Меѓутоа, инверзна функција можеме да дефинираме за функцијата $w=z^n$ од C во D_1 со :

$$W = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi}{n} + i\sin\frac{\varphi}{n}\right) \quad \text{за} \quad z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

којашто ја пресликува рамнината во кружниот исечок D_1(сл.8).



сл.8

Оваа функцијае непрекината во секоја точка од рамнината освен на позитивниот дел на x-оската (задача 15).
Исто така , функцијата $w=\sqrt[n]{z}$ е аналитичка во сите точки од комплексната рамнина, освен на позитивниот дел од x-оската.

Нека $w=w(z)$ и $w_0=w(z_0)$. Тогаш имаме :

$$\frac{w-w_0}{z-z_0} = \frac{w-w_0}{w^n-w_0^n} = \frac{1}{w^{n-1}+w^{n-2}w_0+\ldots+ww_0^{n-2}+w_0^{n-1}}$$

Ако $w_0\neq 0$ и w не се на позитивниот дел од x-оската од $\lim\limits_{z\to z_0} w(z) = w_0 \neq 0$, ќе имаме

$$w'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{w-w_0}{z-z_0} = \frac{1}{nw_0^{n-1}} = \frac{1}{n}(z_0)^{\frac{1}{n}-1}$$

што значи

$$(z^{1/n})' = \frac{1}{n} z^{\frac{1}{n}-1} .$$

2. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ И ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИ

Експоненцијалната функција од комплексната променлива се дефинира со: $\exp z = e^z = e^x(\cos y+i\sin y)$.

Користејќи ги Коши-Римановите услови, порано беше покажано дека оваа функција е аналитичка функција и дека важи:

$$(e^z)' = e^z .$$

Ќе покажеме дека за експоненцијалната функција важат законите што важат за експоненцијалната функција од реален аргумент. Ќе ја покажеме точноста на равенството:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2} .$$

Навистина,

$$\exp(z_1+z_2) = \exp(x_1+x_2)\ (\cos(y_1+y_2)+i\sin(y_1+y_2)) =$$

$$=\exp x_1 \exp x_2.(\cos y_1\cos y_2-\sin y_1\sin y_2+i(\cos y_2\sin y_1+\cos y_1\sin y_2)) =$$

$$= e^{x_1}(\cos y_1+i\sin y_1).e^{x_2}(\cos y_2+i\sin y_2) = \exp z_1.\exp z_2\ .$$

Понатаму имаме:

$$e^z.e^{-z} = e^{z+(-z)} = e^0 = 1$$

од каде што се добива: $\dfrac{1}{e^z} = e^{-z}$

и $e^{z_1-z_2}= (e^{z_1})/(e^{z_2})$.

За $x=o$ добиваме $e^{iy} =\cos y+i\sin y$, $e^{-iy}=\cos y -i\sin y$

од каде што следува

$$\cos y = \frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2}\ ,\quad \sin y= \frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i}\ .$$

Последните формули ќе бидат искористени за да се дефинираат тригонометриските функции од комплексен аргумент.

По дефиниција ставаме:

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}\ ,\qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}\ .$$

Користејќи ги правилата за извод од сложени функции се добива:

$$(\cos z)'= (ie^{iz}-ie^{-iz})/2 = (-e^{iz}+e^{-iz})/(2i) = -\sin z\ ,$$

$$(\sin z)'= (ie^{iz}+ie^{-iz})/(2i) = (e^{iz}+e^{-iz})/2 = \cos z.$$

Другите тригонометриски функции се дефинираат аналогно како и и реалните функции со :

$$\mathrm{tg}z = \frac{\sin z}{\cos z}\ ,\quad \mathrm{cotg}z = \frac{\cos z}{\sin z}\ ,\sec z = \frac{1}{\cos z}\ ,\mathrm{cosec}z = \frac{1}{\sin z}\ .$$

Овие функции се дефинираат ако именителите се различни од о.

Ја посматраме равенката $\sin z=0$ во комплексната рамнина :

$$\sin z = \frac{e^{i(x+iy)}-e^{-i(x-iy)}}{2} = \frac{e^{ix}e^{-y}-e^{-ix}e^{y}}{2} =$$

$$= \frac{(\cos x+i\sin x)e^{-y}-(\cos x-i\sin x)e^{y}}{2i} =$$

$$= \frac{\cos x}{i}\,\frac{e^{-y}-e^{y}}{2} + \frac{\sin x}{1}\,\frac{e^{-y}+e^{y}}{2} = \sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\cos x\,\mathrm{sh}\,y = 0.$$

Оттука имаме дека реалниот и имагинарниот дел се еднакви на нула истовремено , ако, и само ако е $\sin x\,\mathrm{ch}\,y=0$ и $\cos x\,\mathrm{sh}\,y=0$

Бидејќи $\mathrm{ch}\,y\neq 0$ добиваме дека $\sin x=0$ и $\mathrm{sh}\,y=0, y=0$.

$$\sin z=0 \Longleftrightarrow z=k\pi \quad (k=o,1,-1,2,-2, \ldots) .$$

За изводите на $\mathrm{tg}\,z$ и $\mathrm{cotg}\,z$ имаме:

$$\frac{d}{dz}(\mathrm{tg}\,z) = (\cos^2 z+\sin^2 z)/(\cos^2 z) = 1/(\cos^2 z), \quad \cos z\neq 0$$

$$\frac{d}{dz}(\mathrm{cotg}\,z) = (-\sin^2 z-\cos^2 z)/(\sin^2 z) = \frac{-1}{\sin^2 z}, \quad \sin z\neq o.$$

Хиперболичните функции се дефинираат со :

$$\mathrm{sh}\,z=\frac{e^{z}-e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{ch}\,z=\frac{e^{z}+e^{-z}}{2}, \quad \mathrm{th}\,z=\frac{\mathrm{sh}\,z}{\mathrm{ch}\,z}, \quad \mathrm{coth}\,z=\frac{\mathrm{ch}\,z}{\mathrm{sh}\,z} .$$

Од дефиницијата е јасно дека функциите $\mathrm{sh}\,z$ и $\mathrm{ch}\,z$ се аналитички функции во секоја точка од комплексната рамнина и дека важи:

$$(\mathrm{ch}\,z)'=\mathrm{sh}\,z , \quad (\mathrm{sh}\,z)'= \mathrm{ch}\,z .$$

Логаритамската функција се дефинира како инверзна функција на експоненцијалната функција.

Имаме: $\exp(z+2ki\pi) = e^{x+i(y+2k\pi)} = e^{x}(\cos(y+2k\pi)+i\sin(y+2k\pi))$

$$= e^{x}(\cos y+i\sin y) = \exp z$$

за к=о,1,-1,2.-2,...

Инверзната функција може да се дефинира само ако се направат ограничувања (рестрикции) на имагинарниот дел на функцијата.

Нека $z=e^{w}= e^{u}(\cos v+i\sin v)$

$z=|z|(\cos \arg z +i\sin \arg z)$.

Од еднаквоста на модулите и аргументите на комплексните броеви следува дека е:

$|z| =e^{u}$, $u=\ln|z|$ и $\arg z = v$

од каде што се добива:

$$w=\log z = \ln|z|+i\arg z$$

каде што: $0\leqslant \arg z <2\pi$.

Нека $0 \leqslant \arg z< 2\pi$. Тогаш $\log z$ е непрекината функција за сите вредности на z , освен на позитивниот дел од x-оската и координатниот почеток, бидејќи $\ln 0$ не е дефиниран. Во другите точки логаритамската функција е аналитичка и важи:

$$\frac{d}{dz}(\log z)= \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{2}(\ln (x^2+y^2)) +i \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{arctg}\frac{y}{x} =$$

$$= \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{\bar{z}}{z\cdot\bar{z}} = \frac{1}{z} \text{, т.е. } (\log z)'= \frac{1}{z} \text{ .}$$

По договор ставаме:

$$\operatorname{Log} z = \log z +2k\pi i \text{ , } k=0,1,-1,2,-2,\ldots$$

Тогаш $\operatorname{Log} z$ е "бесконечно вредносна функција" и сите други делови (гранки) на логаритамската функција имаат извод кој е еднаков на $1/z$.-

Ако α е реален или комплексен број, тогаш степенската функција z^{α} по дефиниција е :

$$z^{\alpha} = e^{\alpha \log z} .$$

Функцијата z^{α} е аналитичка во оние точки во кои е аналитичка функцијата $\log z$ и уште важи:

$$(z^{\alpha})'=\alpha z^{\alpha-1} .$$

3. ЗАДАЧИ

1. Да се определат реалниот и имагинарниот дел, модулот и аргументот на следниве големини:

а) e^{3+4i} б) $\sin 2i$ г)в) $\cos i$ г) $\sin\frac{\pi}{2}i$.

2. Да се докаже:

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z \ , \qquad e^{-iz} = \cos z - i\sin z \ .$$

3. Да се докаже:

$$\lim_{\mathrm{Re}z\to-\infty} e^{z} = 0 \ , \qquad \lim_{\mathrm{Re}z\to+\infty} e^{z} = \infty \ .$$

4. Да се оддели реалниот и имагинарниот дел на следниве функции: а) $f(z)= e^{z}$ б) $f(z) = e^{z^2}$

в) $\mathrm{tg}z$ г) $\cos z$ д) $z^2\cos z$ ѓ) $\ln z$

5. Да се најдат вредностите на следниве големини:

а) e^{2+i} б) $\cos(4+i)$ в) $\sin(2-3i)$ г) $\cos 3i$

д) $\sin 2i$ ѓ) $\mathrm{tg}\frac{\pi}{2}i$ е) $\ln(-2\ )$ ж) $\ln i$

з) $\ln(1+i)$ и) $\ln(1+iy)$.

6. Да се докажат равенствата:

$$\cos(z+\frac{\pi}{2}) = -\sin z \qquad \sin(z+\frac{\pi}{2}) = \cos z$$

$$\cos(z+\pi) = -\cos z \qquad \sin(z+\pi) = -\sin z$$

$$\cos(z+\frac{3\pi}{2})=\sin z \qquad \sin(z+\frac{3\pi}{2}) = -\cos z$$

7. Докажи:

$$\mathrm{Re}\cos z= \cos x\,\mathrm{ch}y \ , \qquad \mathrm{Im}\cos z \doteq \sin x\,\mathrm{sh}y \ .$$

8. Докажи:

$$\sin(z+\alpha)= \sin z \iff \alpha=2k\pi \ .$$

9. Да се докаже:

$$ch^2z - sh^2z = 1 .$$

1o. Да се решат равенките:

а) $\sin z = 3$ б) $tg z = 1/3$ в) $\sin z = i$

г) $e^{ix}-e^{-ix}=-2a$, а реално: д) $\sin z = 0$ ѓ) $ch z = 0$

11. Да се докаже дека функциите sinz и cosz се аналитички функции, користејќи ги Коши-Римановите услови.

12. Да се покаже дека :

$$\sin(z_1+z_2) = \sin z_1\cos z_2+\cos z_1 \sin z_2 ,$$
$$\cos(z_1+z_2) = \cos z_1\cos z_2-\sin z_1\sin z_2 .$$

13. Даs се докаже дека важи:

$$|\cos z|^2 = sh^2y + \cos^2x \quad ; \quad |\sin z|^2 = sh^2y+\sin^2y .$$

Оттука да се изведе заклучокот за неограниченоста на модулот на функциите cosz и sinz на комплексната рамнина.

14. Да се покаже дека: $e^z \neq 0.$

15. Нека

$$w = \sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}(\cos \frac{\arg z}{n}+i\sin\frac{\arg z}{n})$$

каде $0 \leqslant \arg z < 2\pi$, n е природен број, поголем или еднаков на 2. Да се докаже дека w е непрекината функција во секоја точка од комплексната рамнина, освен на позитивниот дел на x-оската. Тоа да се докаже и за аналитичноста на функцијата.

IX ГЛАВА

ИНТЕГРАЦИЈА

1.ДЕФИНИЦИЈА И ОСНОВНИ ОСОБИНИ

Во овој дел се посматраат интегралите од комплексна функција по должината на кривите во комплексна рамнина. Затоа е потребно поточно да се дефинира поимот на крива во комплексна рамнина.

Интегралот од комплексната променлива ќе биде дефиниран со помош на интегралите од комплексните функции од реалните променливи, па затоа прво ќе се задржиме на нив.

Нека е дадена комплексната функција од реалната променлива t , т.е. нека е зададено пресликувањето од некое множество на реалните броеви E во множеството на комплексни броеви C , $g:E\rightarrow C$; ако $t\in E$, $g(t)$ е комплексен број и може да се запише во вид:

$$g(t)=g_1(t)+ig_2(t) \qquad (1)$$

каде што $g_1(t)$ и $g_2(t)$ се две реални функции.

Во практиката ќе земеме дека множеството E се поклопува со сегментот $[a,b]$, а за функциите $g_1(t)$ и $g_2(t)$ се претпоставува непрекинатост, така што постојат интегралите $\int_a^b g_1(t)dt$ и $\int_a^b g_2(t)dt$.

Збирот $\int_a^b g_1(t)dt +i\int_a^b g_2(t)dt$ се вика интеграл од функцијата $g(t)$ на сегментот $[a,b]$ и се означува со $\int_a^b g(t)dt$

т.е.
$$\int_a^b g(t)dt = \int_a^b g_1(t)dt + i \int_a^b g_2(t)dt$$

Забележуваме дека интегралот од комплексната функција на реална променлива ги задоволува познатите особини на Римановиот интеграл. Ќе ги дадеме во вид на леми и ќе бидат користени понатаму.

Лема 1. Ако $f(t)$ и $g(t)$ се непрекинати функции на сегментот $[a,b]$ тогаш важи :

1) $$\int_a^b kf(t)dt = k\int_a^b f(t)dt \qquad (3)$$

каде што к е комплексна константа.

2) $$\int_a^b [f(t)\pm g(t)]\,dt = \int_a^b f(t)dt \pm \int_a^b g(t)dt \qquad (4)$$

3) $$\mathrm{Re}\int_a^b f(t)dt = \int_a^b [\mathrm{Re}\, f(t)]\,dt \qquad (5)$$

4) $$\mathrm{Im}\int_a^b f(t)dt = \int_a^b [\mathrm{Im}\, f(t)]\,dt \qquad (6)$$

5) $$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt. \qquad (7)$$

Доказ. Точноста на тврдеьата 1), 2), 3) и 4) следуваат веднаш од дефиницијата на интеграл од комплексна функција и од основните особини на интегралите од реални функции. Од интерес претставува да се докаже неравенството (7).

Ако $\int_a^b f(t)dt=0$, тогаш неравенството (7) е тривијално исплнето. Затоа претпоставуваме дека $J = \int_a^b f(t)dt \neq 0$. Нека $J = |J|e^{i\theta}$. Ако во равенството (3) ставиме $k= e^{-i\theta}$ добиваме :

$$e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt = |J| . \qquad (8)$$

Од равенството (8) се гледа дека $e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt$ е ненегативен број па затоа се поклопува со реалниот дел.

Користејќи го равенството (5) се добива:

$$|J| = \mathrm{Re}\,(e^{-i\theta}\int_a^b f(t)dt) =$$

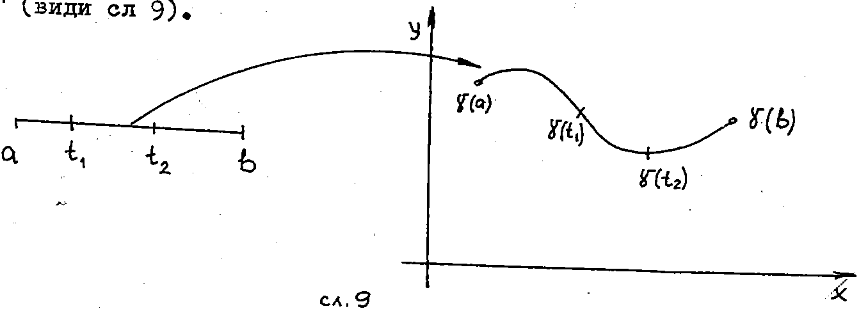
$$= \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-i\theta} f(t))dt \leqslant \int_a^b |e^{-i\theta} f(t)|dt = \int_a^b |f(t)|\,dt,$$

што требаше да се докаже.

Поимот за крива во рамнина е интуитивно јасен и една од можните интерпретации е траекторија на материјална точка што се движи во рамнината. Често пати наместо за крива се зборува за пат.

<u>Дефиниција 1.</u> <u>Лак</u> во рамнина е множество од точки во рамнината $\Gamma = \left\{\gamma(t) = x(t)+iy(t) \ : \ a \leqslant t \leqslant b\right\}$ каде што $\gamma : [a,b] \rightarrow C$ е непрекинато инјективно пресликување од сегментот $[a,b]$ во C. Инјективност значи од $t_1 \neq t_2$ да следува $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$. Интуитивно лакот е настанат со непрекината деформација на сегментот $[a,b]$ во рамнината.

Точката $\gamma(a)$ се вика почеток (почетна точка) на лакот, а точката $\gamma(b)$ се вика крај (крајна точка) на лакот Г (види сл 9).



сл. 9

На лакот Г му одговараат параметарските равенки:

$$x = x(t) \qquad t \in [a, b] \qquad (9)$$
$$y = y(t)$$

кои што се викаат параметарски равнки на лакот Г. Значи, на секој лак Г му одговараат параметарските равенки (9) или параметарската равенка $z = \gamma(t)$ во комплексна форма. Уште за γ велиме дека е <u>параметарска репрезентација</u> на лакот Г.

<u>Дефиниција 2.</u> За лакот $\Gamma = \left\{\gamma(t): \ a \leqslant t \leqslant b\right\}$ велиме дека е <u>гладок</u> ако функциите $x(t)$ и $y(t)$ имаат непрекинати изводи $x'(t)$ и $y'(t)$ и ако уште важи $x'(t)^2+y'(t)^2>0$.

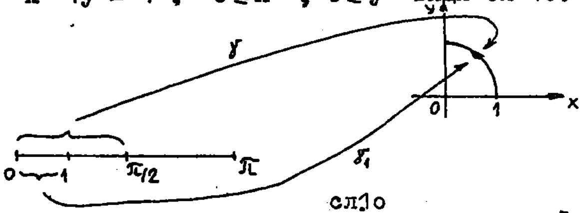
Последниот услов значи дека лакот има тангента во секоја точка, при што тангентата непрекинато се менува во зависност од допирната точка.

Забележуваме дека еден лак може да има повеќе репрезентации. Така, на пример, параметризациите $\gamma(t)=\cos t+i\sin t$, $0\leq t\leq\pi$

и $\gamma_1(t)= \cos\pi t + i\sin\pi t$, $0\leq t \leq 1$

го пределуваат лакот (четвртина од единичната кружна линија со центар во координатниот почеток и во првиот квадрант)

$x^2 +y^2= 1$, $0\leq x$, $0\leq y$ види сл 1о.



сл1о

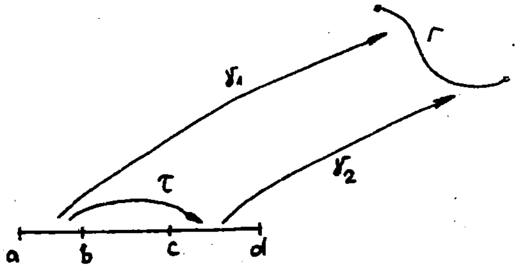
<u>Дефиниција 3</u>. За репрезентациите $\gamma_1: [a,b] \to C$ и $\gamma_2: [c , d]\to C$ велиме дека се <u>еквивалентни</u> ако постои непрекината строго монотоно растечка функција $\tau: [a,b]$ на $[c,d]$, таква што е

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(\tau(t)) \tag{1o}$$

за секој $t\in[a,b]$. Од последното се добива дека е :

$$\Gamma = \left\{\gamma_1(t) : a\leq t\leq b\right\}= \left\{\gamma_2(t): c\leq t\leq d\right\} .$$

За илустрација да се види сл 11.



сл 11

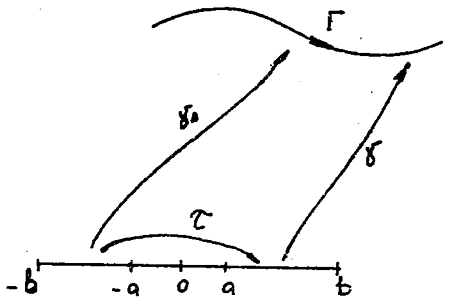
Понатаму, еквивалентните параметризации ќе бидат идентификувани. Се поставува прашање дали секогаш постои друга параметризација $\gamma_1 : [c,d] \rightarrow C$ за дадената параметризација $\gamma : [a,b] \rightarrow C$? Одговорот секогаш е позитивен, земајќи едноставно:

$$\tau(t) = c + \frac{d-c}{b-a}(t-a) \tag{11}$$

Тогаш со (11) сегментот $[a,b]$ се пресликува на сегмнетот $[c,d]$ и, уште повеќе , функцијата τ е строго монотоно растечка и непрекината функција.

Слично се дефинираат еквивалентни параметризации за глатки лакови каде што во овој случај се бара функцијата $\tau(t)$ да биде со непрекинат прв извод кој ќе биде позитивен во секоја точка на сегментот $[a,b]$.

Ако $\Gamma = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$ е лак, тогаш множеството $T = \{\gamma_1(t) : -b \leq t \leq -a\}$, каде што $\gamma_1(t) = \gamma(-t)$ е исто така лак со почеток во $\gamma(b)$ и крај во $\gamma(a)$, па затоа за лакот T велиме дека е <u>спротивен лак</u> за лакот Γ и се означува со −Γ или со Γ^-.



сл 12

Забележуваме дека функцијата $\tau(t) = -t$ го пресликува сегментот $[-b,-a]$ на сегментот $[a,b]$ и е строго монотоно опаѓачка функција.

Ако е зададен лакот $\Gamma = \{\gamma_1(t) : a \leq t \leq b\}$ тогаш велиме дека е зададена ориентација и сите еквивалентни параметризации ќе имаат иста ориентација како и Г , а спротивниот лак -Г ќе има параметризација $\{\gamma_2(\tau(t)) : c \leq t \leq d\}$, каде што е строго монотоно опаѓачка функција. Ќе добиеме дека сите параметризации се поделени на две класи: класа со позитивна ориентација и класа со негативна (спротивна)ориентација.

Дефиниција 4. Под крива се подразбира унија(спојување) на конечен број лакови кои се споени на тој начин што крајната точка на првиот лак се спојува со почетната точка на вториот лак итн.

По делови глатка крива е крива која е составена од конечен број глатки лакови.

Лаковите од кривата можат да се сечат еден со друг. Во тој случај велиме дека кривата има многукратни (повратни) точки.

Ако кривата нема повратни точки, тогаш за неа велиме дека е проста. Ако почетната и крајната точка на кривата се поклопуваат тогаш за кривата велиме дека е затворена.

Под контура се подразбира проста затворена по делови глатка крива .

Позната е наредната теорема на Жордан.

Теорема. (Жордан). Проста затворена крива во комплексната рамнина ја дели комплексната рамнина на две области G_1 и G_2 , чија заедничка граница е кривата Г. Една од областите е ограничена (тоа е внатрешноста на Г), а другата е неограничена (надворешност на Г).

Доказот на оваа теорема воопшто не е лесен. иако интуитивно е јасен исказот на теоремата.

Најпроста илустрација е внатрешноста $\{z \in C : |z-z_0| < \rho\}$ надворешноста $\{z \in C: |z-z_0| > \rho\}$ на кружната линија $\Gamma = \{z : |z-z_0| = \rho\}$.

Ако лакот е гладок , тогаш неговата должина се пресметува по формулата:

$$s = \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}\, dt \tag{12}$$

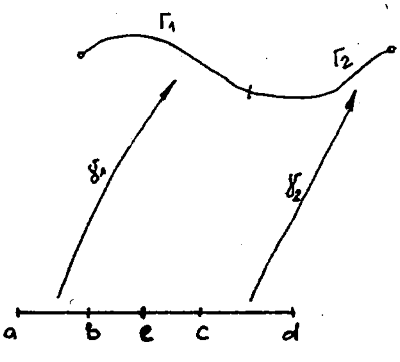
при што е: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $a \leqslant t \leqslant b$.
Функциите $x(t)$ и $y(t)$ имаат непрекинати први изводи.

Од непрекинатоста на функциите $x'(t)$ и $y'(t)$ се добива дека функцијата $\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$

е Риман-интеграбилна функција, така што интегралот (12) постои.

За доказ читателот се упатува на [1] и [9].

Должината на крива што е по делови глатка ќе биде збир од должините на лаковите од кои што е составена кривата.



Сл 13

Често пати во практиката е потребно да се даде параметарска равенка на крива. Нека земеме дека кривата C е спој од Γ_1 и Γ_2 со параметарски равенки $\gamma_1 : [a,b] \to \Gamma_1$ и $\gamma_2 : [c,d] \to \Gamma_2$.

Тогаш преликувањето

$$\tau(t) = c + \frac{d-c}{e-b}(t-b)$$

го пресликува сегментот $[b,e]$ на сегментот $[c,d]$; што е монотоно растечко непрекинато и е со облик:

$$\tilde{\gamma}_2 : [b,e] \to \Gamma_2$$

зададено со :

$$\tilde{\gamma}_2(t) = \gamma_2(\tau(t))$$

Тоа е параметризација на Γ_2 која е еквивалентна, така што за параметарска равенка на кривата C се зема :

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & : a \leq t \leq b \\ \tilde{\gamma}_2(t) & : b \leq t \leq e \end{cases} \qquad (13)$$

а самата крива C се добива со спојување на параметарските репрезентации γ_1 и $\tilde{\gamma}_2$.

Дефиниција 5. Нека $\gamma(t) = x(t)+iy(t)$ е параметарска репрезентација на глаткиот лак Γ, а f е непрекината функција на Γ. Тогаш интегралот $\int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ се вика жиниски интеграл на функцијата f по лакот Γ и се означува со $\int_\Gamma f(z)dz$, т.е.

$$\int_\Gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \qquad (14)$$

Ќе покажеме дека интегралот не зависи од параметризацијата на лакот Γ.

Лема 2. Ако $\gamma_1(t)=x_1(t)+iy_1(t)$, $c\leqslant t\leqslant d$ е параметризација на лакот $\Gamma=\{\gamma(t): a\leqslant t\leqslant b\}$ којашто е еквивалентна со γ, тогаш е :

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{c}^{d} f(\gamma_1(t))\gamma_1'(t)dt \qquad (15)$$

Доказ. Нека $\tau=g(t)$ е строго монотоно растечка функција со непрекинат прв извод која го пресликува сегментот $[a,b]$ на сегментот $[c,d]$. Имаме: $d\tau = g'(t)dt$,

$$a\leqslant t\leqslant b \iff c\leqslant \tau\leqslant d\ .$$

Натаму е:

$$\int_{c}^{d} f(\gamma_1(\tau))\ \gamma_1'(\tau)d\tau = \int_{a}^{b} f(\gamma_1(g(t))\ \gamma_1'(\tau)g'(t)dt =$$

$$= \int_{a}^{b} f(\gamma(t))(\gamma(t))'dt$$

заради

$$\gamma(t)=\gamma_1(\tau(t)).$$

Ако кривата C е по делови глатка, тогаш $\int_C f(z)dz$ се дефинира како (конечен) збир од интегралите на функцијата по глатките лакови од кои е составена кривата, т.е. ако C се состои од Γ_1, Γ_2, . . . , Γ_n, тогаш е :

$$\int_{C} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \ . \ . \ . + \int_{\Gamma_n} f(z)dz. \qquad (16)$$

Ако $z(t)=\gamma(t)=x(t)+iy(t)$ е параметарска репрезентација на лакот Γ, каде што $a\leqslant t\leqslant b$; тогаш е: $dz=(x'(t)+iy'(t))dt$, $f(z) = u+iv$, $f(z) = f(\gamma(t))= u(x(t),y(t))+iv(x(t),y(t))$ така што за производот $f(\gamma(t))\cdot\gamma'(t)$ имаме :

$$f(\gamma(t)\cdot\gamma'(t) =$$

$$=u(x(t),y(t))x'(t)-v(x(t),y(t))y'(t)+i(u(x(t),y(t))y'(t) +$$
$$+v(x(t),y(t))x'(t)).$$

Имајќи во предвид

$$x'(t)dt = dx,\ y'(t)dt = dy$$

се добива

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} udx-vdy + i\int_{\Gamma} vdx+udy. \qquad (17)$$

Со помош на (17) интегралот по лакот Г се сведува на подреден пар од два реални криволиниски интеграла по координати. Исто така, десната страна од (17) може да се земе за дефиниција на криволиниски интеграл од комплексна функција $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ по лакот Г.

Сега ќе изнесеме особини на криволиниските интеграли од комплексни функции кои непосредно следуваат од дефиницијата.

Лема 3. Ако $f(z)$ и $g(z)$ се непрекинати функции на лакот Г, тогаш е :

а) $\int_\Gamma kf(z)dz = k\int_\Gamma f(z)dz$

каде што к е комплексна константа,

б) $\int_\Gamma (f(z)+g(z))dz = \int_\Gamma f(z)dz + \int_\Gamma g(z)dz$

в) $\int_{-\Gamma} f(z)dz = -\int_\Gamma f(z)dz$

каде што $-\Gamma$ е спротивен лак за лакот Г ;

д) Ако $C = C_1 \cup C_2$ е спој на две по делови глатки криви и f е непрекината функција на $C_1 \cup C_2$, тогаш е

$$\int_C f(z)dz = \int_{C_1} f(z)dz + \int_{C_2} f(z)dz$$

Доказ. а) $\int_\Gamma kf(z)dz = \int_a kf(\gamma(t))\gamma'(t)dt = k\int_\Gamma f(z)dz.$

б) $\int_\Gamma (f(z) + g(z))\,dz = \int_a^b (f(\gamma(t)) +g(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt + \int_a^b g(\gamma(t))\gamma'(t)dt= \int_\Gamma f(z)dz + \int_\Gamma g(z)dz.$

в) Ако $\Gamma = \{\gamma(t):\ a\leqslant t\leqslant b\}$ е гладок лак, тогаш $-\Gamma = \{\gamma(-t):\ -b\leqslant t\leqslant -a\}$

Имаме:
$$\int_{-\Gamma} f(z)dz = \int_{-b}^{-a} f(\gamma(-t))(-\gamma'(-t))dt =$$
$$= \int_{b}^{a} f(\gamma(u))\gamma'(u)du = - \int_{\Gamma} f(z)dz$$

каде што е извршена смена на променливата $-t=u$, $dt=-du$ и се изменети границите на интеграцијата.

в) Ако $C_1 = \Gamma_1^{(1)} \cup \Gamma_2^{(1)} \cup \cdot \cdot \cdot \cup \Gamma_n^{(1)}$, $C_2 = \Gamma_1^{(2)} \cup \Gamma_2^{(2)} \cup \ldots \cup \Gamma_m^{(2)}$
тогаш е $C = C_1 \cup C_2 = \Gamma_1^{(1)} \cup \cdot \cdot \cdot \cup \Gamma_n^{(1)} \cup \Gamma_1^{(2)} \cup \ldots \cup \Gamma_m^{(2)}$.

Резултатот веднаш се добива од самата дефиниција (да се види формула (16)).

<u>Лема 4.</u> Ако $f(z)$ е непрекината функција на глаткиот лак Γ, тогаш е:

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)dz \right| \leq M \cdot s(\Gamma) \tag{18}$$

каде што
$$M = \max\left\{ |f(z)| : z \in \Gamma \right\} ,$$

$s(\Gamma)$ е должина на лакот Γ.

<u>Доказ.</u> Од $\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$,

имаме:
$$\left| \int_{a}^{b} f(z)dz \right| = \left| \int_{a}^{b} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \right| \leq$$
$$\leq \int_{a}^{b} |f(\gamma(t))| \cdot |(x'(t)+iy'(t)| dt \leq M\int_{a}^{b} \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\, dt = Ms(\Gamma).$$

При изведувањето на оценката е користено неравенството (7) од лема 1.

<u>Пример 1.</u> $\int_{\Gamma} \bar{z}dz$ каде што Γ :

а) отсечка што ги сврзува точките $z_1=o$ и $z_2=1+i$

б) дел од параболата $y=x^2$ меѓу точките $z_1=o$ и $z_2=1+i$.

Во првиот случај имаме: $\int_{o}^{1+i} zdz = \int_{o}^{1} (x-ix)(dx+idy) = 2\int_{o}^{1} xdx = 1$

Во вториот случај имаме: $y=x^2$, $dy=2dx$, $o \leq x \leq 1$

$$\int_0^{1+i} \bar{z}dz = \int_0^1 (x-ix)(dx+2ixdx) = \int_0^1 (x+2x^3)dx + i\int_0^1 x^2dx =$$
$$= 1 + \frac{i}{3} .$$

Пример 2. Да се пресмета интегралот $\int_\Gamma (z^2 + |z|^2)dz$ каде што Г е полукружна линија $|z|=1$; $0 \leq \arg z \leq \pi$.

Параметарската равенка на полукружната линија е $z(t)=\cos t+i\sin t$,

$0\leq t\leq \pi$, $x=\cos t$, $y=\sin t$, $dx= -\sin t dt$, $dy= \cos t dt$.

$$\int_\Gamma (z^2+|z|^2)dz = \int_0^\pi (\cos 2t + i\sin 2t + 1)(-\sin t + i\cos t)dt =$$
$$= \int_0^\pi (-\cos 2t\sin t - \sin 2t\cos t)dt + i\int_0^\pi (-\sin 2t\sin t + \cos 2t\cos t)dt = -$$
$$- \int_0^\pi \sin t dt + \int_0^\pi i\cos t dt = - \int_0^\pi \sin 3t dt + i\int_0^\pi \cos 3t dt + \cos t\Big|_0^\pi +$$
$$+ i\sin t\Big|_0^\pi = \frac{\cos 3t}{3}\Big|_0^\pi + i\frac{\sin 3t}{3}\Big|_0^\pi + (-1-1)+o = \frac{-2}{3} - 2 = \frac{-8}{3} .$$

2. НЕЗАВИСНОСТ НА КРИВОЛИНИСКИОТ ИНТЕГРАЛ ОД ПАТОТ НА ИНТЕГРАЦИЈАТА

Сега ќе ја искажеме и докажеме теоремата што дава услови при кои криволинискиот интеграл не зависи од патот на интеграцијата туку од почетната и крајната точка.

Теорема 1. Нека $f(z)$ е напрекината функција во областа D . Тогаш интегралот $\int_\Gamma f(z)dz$ зависи само од крајните точки на кривата Г (која е во областа), ако и само ако функцијата $f(z)$ е извод на аналитичка функција во D.

Доказ. Претпоставуваме дека постои функција

$F(z) = U(x,y)+iV(x,y)$ таква што $U'_x = V'_y = u$ и $-U'_y = V'_x = v$.

Имаме:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} U'_x dx + U'_y dy + i \int_{\Gamma} V'_x dx + V'_y dy =$$

$$= \int_{\Gamma} dU + i \int_{\Gamma} dV = F(\beta) - F(\alpha)$$

каде што α е почетна точка а β е крајна точка на лакот. Добиваме дека криволинискиот интеграл зависи само од почетната и крајната точка на лакот.

Обратно, да претпоставиме дека $z_0 = x_0 + iy_0$ е фиксна точка која ќе биде почетна точка на кривата Г што е по делови глатка, со крајна точка во $z=x+iy$. Кривата Г е во областа Да претпоставиме дека интегралот не зависи од кривата Г.

ако $\zeta = \xi + i\eta$;

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta = \int_{\Gamma} ud\xi - vd\eta + i \int_{\Gamma} vd\xi + ud\eta =$$

$$= U(x,y) + i\, V(x,y).$$

Од претпоставката направена во теоремата и од особината на криволинискиот интеграл следува :

$$U'_x = u, \quad U'_y = -v , \quad V'_x = v , \quad V'_y = u.$$

Оттука се добива дека $F(z)$ има непрекинат извод и дека важи

$$F'(z) = u + iv = f(z)$$

со што доказот на теоремата е завршен.

Оваа теорема покажува дека, ако може да се најде аналитичка функција $F(z)$, таква што $F'(z) = f(z)$ во областа што ја содржи кривата Г, тогаш е:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = F(\beta) - F(\alpha)$$

каде што α и β се почетни и крајни точки на кривата Г соодветно. Пример.

$$\int_{-i}^{i} e^z dz = e^i - e^{-i} .$$

Сега ќе ја докажеме основната теорема на Коши која зазема централно место во теоријата на аналитичките функции.

Теорема 2.(Основна теорема на Коши). Нека $f(z)$ е аналитичка функција во областа D. Тогаш $\int_{\Gamma} f(z)dz=o$ за секоја контура Г што лежи во D заедно со својата внатрешност.

Доказ. Од непрекинатоста на функцијата $f'(z)$ следува дека функциите u'_x, u'_y, v'_x, v'_y и $u'_x=v'_y, -u'_y=v'_x$ се непрекинати. Со примена на Гриновата формула се добива:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma} udx-vdy + i\int_{\Gamma} vdx+udy =$$

$$= -\iint_{S}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)dxdy + i\iint_{S}\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=0$$

каде што S е внатрешност на Г.

Забележуваме дека непрекинатоста на парцијалните изводи на функциите u и v во внатрешноста на контурата Г е потребна за примена на Гриновата формула.

Забележуваме дека основната теорема на Коши може да биде докажана во случај кога за аналитичноста на функцијата $f(z)$ се бара само постоење на $f'(z)$. Доказот во тој случај е многу подолг и покомпликуван.

Во случај на едноставно сврзливите области внатрешностите на сите контури лежат во областите.

Ако D е едноставно сврзлива област, тогаш $\int_{\Gamma} f(z)dz=o$ за секоја затворена контура Г во D, така што $\int_{a}^{z} f(z)dz$ не зависи од патот на интеграцијата што ги сврзува точките a и z во D. Од последното следува дека постои аналитичка функција $F(z)$ во D, таква што:

$$F'(z) = f(z)$$

и
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz = F(\beta) - F(\alpha) .$$

Во практиката, при пресметувањето на интеграли што не зависат од патот на интеграцијата, се земаат такви патишта што ги сврзуваат точките α и β за пресметувањето да биде наједноставно.

3. ИНТЕГРАЛНА ФОРМУЛА НА КОШИ

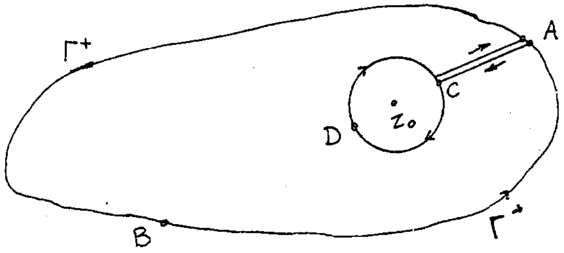
Да претпоставиме аналитичност на функцијата $f(z)$ во внатрешноста и на самата контура Г. Функцијата $f(z)$ фактички е аналитичка на едноставната област што ја содржи во себе контурата Г. Од основната теорема на Коши добиваме дека $\int_{\Gamma} f(z)dz=0$. Нека z_0 е која и да било точка од внатрешноста на Г. Ја посматраме функцијата $\frac{f(z)}{z-z_0}$ што е аналитичка во внатрешноста на Г, освен во точката z_0.

Го посматраме интегралот
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{z-z_0} .$$

Ќе ја докажеме точноста на следнава интегрална формула на Коши.

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \frac{f(z)dz}{z-z_0} \qquad (1)$$

каде Γ^+ е позитивна насока на контурата Г.



сл 14

Под позитивна насока на дадена контура Г се подразбира онаа насока по која треба да се движи набљудувачот за да може внатрешноста на Г да остане од неговата лева страна.

За кружната линија позитивната насока се совпаѓа со спротивната насока од насоката на движењето на стрелките на часовникот.

За да се докаже формулата (1) , ја посматраме кружната линија $\Gamma_\rho = \{z: |z-z_0|=\rho\}$ што лежи во внатрешноста на контурата Г. Ја посматраме контурата $\widehat{ABCDCA}$ прикажана на сл 14. Тогаш , во областа што останува од левата страна на контурата $\widehat{ABACDCA}$, функцијата $\frac{f(z)}{z-z_0}$ е аналитичка, па според основната теорема на Коши следува дека криволинискиот интеграл е еднаков на 0, т.е.

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{f(z)dz}{z-z_0}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{AC}}\frac{f(z)dz}{z-z_0}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho^-}\frac{f(z)dz}{z-z_0}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\overline{CA}}\frac{f(z)dz}{z-z_0}=0.$$

Бидејќи интегралите по $\overline{AC}$ и $\overline{CA}$ даваат збир еднаков на о, се добива:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho^+}\frac{f(z)dz}{z-z_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{f(z)dz}{z-z_0}. \qquad (2)$$

Од формулата (2) се гледа дека интегралот по кружната линија Γ_ρ^+ не зависи од ρ . За да ја докажеме формулата (1) доволно е да се докаже:

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_\rho^+}\frac{f(z)dz}{z-z_0}.$$

Ја посматраме разликата

$$L=\int_{\Gamma_\rho^+}\frac{f(z)dz}{z-z_0}-2\pi i f(z_0).$$

Имаме:

$$L = \int_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(z)dz}{z-z_0} - \int_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(z_0)dz}{z-z_0} = \int_{\Gamma_\rho^+} \frac{[f(z)-f(z_0)]dz}{z-z_0}$$

Од непрекинатоста на функцијата $f(z)$ во точката z_0 следува дека за секој $\varepsilon > o$ постои $\delta > o$, таков што $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$ за секој $|z-z_0| < \delta$.

Специјално, ако $\rho < \delta$, тогаш $|f(z)-f(z_0)| < \varepsilon$ штом $z \in \Gamma_\rho$. Одовде за модулот на разликата L добиваме:

$$|L| = \left| \int_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(z)-f(z_0)dz}{z-z_0} \right| < \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi\rho = 2\pi\varepsilon \qquad (3)$$

од каде што имаме:

$$\lim_{\rho \to o} \int_{\Gamma_\rho^+} \frac{[f(z)-f(z_0)]dz}{z-z_0} = 0 \qquad (4)$$

Користејќи го (2) добиваме:

$$\int_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

со што (1) е докажано.

Ако се посматра специјален случај кога $\Gamma=\Gamma_\rho$ (кружна линија со радиус ρ), тогаш интегралната формула (1) ја добива следнава форма:

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{it})dt \qquad (5)$$

Навистина, за $z = z_0 + \rho e^{it}$, $o \leq t \leq 2\pi$, $dz = i\rho e^{it} dt$.

Тогаш е

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{z-z_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+\rho e^{it}) i\rho e^{it}dt}{\rho e^{it}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0+\rho e^{it})dt \ .$$

Формулата (5) претставува средна аритметичка вредност на функцијата $f(z)$ на кружната линија $|z-z| = \rho$.

Формулата (1) дава репрезентација на функцијата $f(z)$ преку интеграл кој се зема по контурата и е наречена интегрална репрезентација.

Ќе покажеме дека со помош на (1) може да се добие интегрална репрезентација за изводот $f'(z_0)$. Навистина,

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h)-f(z_0)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{h\to 0} \left[\int_{\Gamma^+}\left(\frac{f(z)}{z-z_0-h} - \frac{f(z)}{z-z_0}\right)dz\right] =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)dz}{(z-z_0-h)(z-z_0)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2}.$$

Останува уште за проверување можноста за преминување на граничната вредност под интегралниот знак, т.е. треба да се покаже дека важи:

$$\lim_{h\to 0} \int_{\Gamma^+} f(z) \left[\frac{1}{(z-z_0-h)(z-z_0)} - \frac{1}{(z-z_0)^2}\right] dz = 0.$$

Но,

$$\left| \int_{\Gamma^+} f(z) \left[\frac{1}{(z-z\ -h)(z-z\ )} - \frac{1}{(z-z_0)^2}\right] dz \right| = \left| h \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)} \right|$$

Нека d е најмалото растојание од z_0 до Γ, $s(\Gamma)$ должината на Γ, $M = \max\left\{|f(z)| : z \in \Gamma\right\}$ и нека $|h| < \delta$ каде што δ е произволен број. Тогаш е

$$\left| h \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)} \right| \leqslant \frac{\delta M s(\Gamma)}{d^2(d-\delta)}$$

а последниот израз може да се направи произволно мал земајќи δ да биде произволно мал.

При доказот на оваа формула се користат следниве неравенства: $|z-z_0| \geqslant d$ за $z \in \Gamma$, $\Rightarrow |z-z_0|^2 \geqslant d^2$ од каде

$$\frac{1}{|z-z_0|^2} \leqslant \frac{1}{d^2}\ ; \quad |z-z_0-h| \geqslant |z-z_0| - |h| > d-\delta.$$

Користејќи ја интегралната репрезентација за функцијата $f'(z)$ ќе покажеме, на сличен начин, дека е точна интегралната репрезентација за $f''(z)$.

Поаѓајќи од

$$f''(z_0) = \lim_{h\to o} \frac{f'(z_0+h)-f'(z_0)}{h}$$

се добива

$$f''(z_0) = \lim_{h\to o} \frac{1}{2\pi i h} \int_{\Gamma^+} \left[\frac{f(z)}{(z-z_0-h)^2} - \frac{f(z)}{(z-z_0)^2} \right] dz =$$

$$= \lim_{h\to o} \frac{2h}{2\pi i h} \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)} + \lim_{h\to o} \frac{2h^2}{2\pi i h} \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^2(z-z_0-h)^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^3} .$$

Со методот на математичка индукција може да се докаже точноста на следнава формула:

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{n+1}} . \qquad (6)$$

Ќе покажеме дека аналитичките функции имаат непрекинат извод не само од I ред туку имаат непрекинат извод од кој и да било ред. Точна е наредната теорема.

<u>Теорема 3.</u> Нека $f(z)$ е аналитичка функција во областа D . Тогаш $f(z)$ има извод од кој и да било ред во областа D . Реалниот и имагинарниот дел на функцијата $f(z)$ се хармониски функции.

<u>Доказ.</u>Од отвореноста на областа D и од $z_0 \in D$ следува дека постои круг Γ со центар во z_0 таков што $f(z)$ е аналитичка функција во внатрешноста на Γ и на самата Γ. Тогаш Кошиевата интегрална формула може да се примени на $f(z_0)$ каде што Γ^+ е патот на интеграција. Заради (6) постои $f^{(n)}(z_0)$ за $n=1,2, \ldots$

Бидејќи $z_0 \in D$ е произволна точка добиваме дека $f(z)$ има произволен извод во која и да било точка од D.

Постоењето на $f'''(z)$ повлекува непрекинатост на функцијата $f''(z)$ од каде што следува дека функциите u и v имаат непрекинати втори изводи, а тоа беше споменато порано.

Обратната теорема на онаа на Коши е позната под името теорема на Морера.

* Теорема 4. Нека $f(z)$ е непрекината функција на областа D. Нека претпоставиме дека $\int_\Gamma f(z)dz=0$ за секоја затворена контура во D . Тогаш $f(z)$ е аналитичка функција.

Доказ. Од условот $\int_\Gamma f(z)dz=0$ следува дека интегралот $\int_a^z f(\zeta)d\zeta$ не зависи од патот на интеграција што ги сврзува точките a и z во D .

Тогаш функцијата $F(z)=\int_a^z f(\zeta)d\zeta$ е добро дефинирана и има особина да е $F'(z)=f(z)$. За да се покаже последното равенство поаѓаме од дефиницијата за извод:

$$F(z+h) = \int_a^{z+h} f(\zeta)d\zeta = \int_a^z f(\zeta)d\zeta + \int_z^{z+h} f(\zeta)d\zeta$$

односно:
$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\zeta)d\zeta .$$

Ја посматраме разликата: $\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z) =$

$$= \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(\zeta)d\zeta - \frac{1}{h}\int_z^{z+h} f(z)d\zeta = \frac{1}{h}\left[\int_z^{z+h}(f(\zeta)-f(z))d\zeta\right. .$$

Од непрекинатоста на функцијата $f(z)$ следува дека за произволен $\varepsilon>0$ постои $\delta>0$, таков што $|f(\zeta)-f(z)|<\varepsilon$, ако $|\zeta-z|<\delta$.

За $|h|<\delta$ имаме:
$$\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h} - f(z)\right| = \left|\frac{1}{h}\int_z^{z+h}\left[f(\zeta)-f(z)\right]d\zeta\right| < \frac{\varepsilon}{|h|}|h| = \varepsilon.$$

т.е.
$$\lim_{h\to o} \frac{F(z+h)-F(z)}{h} = f(z)$$

што значи
$$F'(z)= f(z).$$

Добиваме дека $F'(z)$ постои и е непрекината функција, т.е. е аналитичка функција.

Применувајќи ја теоремата 3, добиваме дека $F''(z)=f'(z)$ постои и е непрекината функција, што повлекува дека $f(z)$ е аналитичка функција.

Теорема 5. (Теорема на Луивил). Ако функцијата $f(z)$ е аналитичка на целата комплексна рамнина и ако е ограничен модулот на функцијата $f(z)$, тогаш $f(z)$ е константа.

Доказ. Нека z_o е произволна точка од комплексната рамнина. Тогаш е :
$$f'(z_o) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f(z)dz}{(z-z_o)2}$$

каде што:
$$\Gamma_\rho^+ = \left\{z \in C : |z-z_o| = \rho\right\}.$$

Имаме:
$$|f'(z_o)| = \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\Gamma_\rho^+} \frac{f(z)dz}{(z-z_o)^2} \right| \leqslant \frac{M}{\rho}$$

Бидејќи $|f(z)| \leqslant M$ на целата комплексна рамнина и бидејќи ρ е произволно голем позитивен број, следува дека $\frac{M}{\rho}$ се стреми кон нула кога $\rho \to \infty$, што значи дека $f'(z_o)=o$. Но, бидејќи z_o е произволен комплексен број, следува дека $f'(z) \equiv 0$. Последното значи дека $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ насекаде. Нека z_1, z_2 се две произволни точки. Тогаш е:

$$f(z_1)-f(z_2) = u(x_1,y_1)-u(x_2,y_2)+i(v(x_1,y_1)-v(x_2,y_2)) =$$
$$= u(x_1,y_1)-u(x_1,y_2)+u(x_1,y_2) -u(x_2,y_2) +$$
$$+ i\ (\ v(x_1,y_1)-v(x_1,y_2) + v(x_1,y_2) - v(x_2,y_2)\ ) =$$

$$= (y_1-y_2)\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_1,y_2+\theta_1(y_1-y_2)\ ) +$$
$$+\ (x_1-x_2)\ \frac{\partial u}{\partial x}(x_2+\ \theta_2(x_1-x_2)),y_2\ ) +$$
$$+i((y_1-y_2)\ \frac{\partial v}{\partial y}(x_1,y_2+\ \theta_3(y_1\ -y_2)) +$$
$$+i((x_1-x_2)\ \frac{\partial v}{\partial x}\ (x_2+\ \theta_4(x_1-x_2),y_2)) =$$
$$= 0$$

каде што $0<\theta_i < 1$ за $i=1,2,3,4$. Теоремата на Лагранж беше четири пати применета.

Теорема 6.(Основна теорема на алгебрата). Секој полином $P(z) = a_o+a_1z +a_2z^2+\ldots +a_nz^n$ има барем една комплексна нула ако $n\geqslant 1$.

Доказ. Нека претпоставиме спротивно, т.е. нека полиномот $P(z)$ нема ниедна нула, што значи $P(z)\neq o$ за секој $z\in C$. Ја посматраме функцијата $g(z)=\frac{1}{P(z)}$. Функцијата $g(z)$ е аналитичка функција за секој $z\in C$. Тврдиме дека $\lim\limits_{z\to\infty} g(z)=o$. Последното го покажуваме како што следува :

$$|P(z)| = |a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_1z + a_o| =$$
$$= |z|^n\cdot \left|a_n + \frac{a_{n-1}}{z} + ,\ldots + \frac{a_1}{z^{n-1}} + \frac{a_o}{z^n}\right| \geqslant$$
$$\geqslant |z|^n \left[\,|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} -\ldots- \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_o|}{|z|^n}\right]$$

Од $z\to\infty$ следува $\frac{|a_i|}{|z|^{n-i}}\to o$ за $i = o,1,2,\ldots, n-1$. Добиваме дека $|P(z)|\to\infty$ кога $z\to\infty$, од каде што $\frac{1}{|P(z)|}\to o$, т.е. $|g(z)|\to o$ кога $z\to\infty$, така што постои круг со доволно голем радиус ϱ , таков што $|g(z)|<1$ за $|z|>\varrho$.

Но, кругот $|z|\leq R$ е затворено и ограничено множество од комплексната рамнина. Тогаш $|g(z)|$ е ограничена функција на кругот $|z|\leq R$ и нека таа граница ја означиме со М. Тогаш е $|g(z)|\leq M+1$ што повлекува ограниченост на функцијата, па, според теоремата на Луивил, се добива дека $g(z)=C$ (константа) од каде што се добива дека $\frac{1}{P(z)}=C$. Тоа претставува противречност.

4. ПРИМЕНА

Нека е дадено векторско поле $\vec{a}=(a_x,a_y)$ во рамнината. Проток на векторското поле $\vec{a}$ низ кривата C се вика интегралот

$$Q = \int_C \vec{a}\cdot\vec{n}_0 ds \qquad (1)$$

каде што со $\vec{a}.\vec{n}_0$ е означен скаларниот производ на векторското поле $\vec{a}$ и единичниот вектор на нормалата $\vec{n}_0$ на кривата C. Од

$$\vec{s}_0 ds=dx+idy \ ;$$

$$\vec{n}_0 ds= -i\vec{s}_0 ds = dy-idx$$

добиваме дека $a\vec{n}_0 ds=a_x dy-a_y dx$, така што се добива следнава формула за протокот:

$$Q = \int_C a_x dy-a_y dx \qquad (2)$$

Нека S е површина на фигурата ограничена со C. Дефинираме дивергенција на векторското поле $\vec{a}$ со:

$$\text{div}\,\vec{a} = \lim_{C\to z} \frac{1}{S}\int_C \vec{a}\cdot\vec{n}_0 ds. \qquad (3)$$

Лимесот има значење кривата да се смалува (се стеснува) во точката z . Познато е дека важи:

$$\text{div}\,\vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} \qquad (4)$$

Точката на полето во кое е $\operatorname{div}\vec{a} \neq 0$ се вика извор(поточно извор ако $\operatorname{div}\vec{a} > o$) и понор ако е $\operatorname{div}\vec{a} < o$.

Ако во секоја точка од областа D важи

$$\operatorname{div}\vec{a} = o \tag{5}$$

тогаш велиме дека полето е соленоидно.

Во случај на соленоидно поле имаме дека протокот е еднаков на нула заради Гриновата формула:

$$Q = \int_C a_x dy - a_y dx = \iint_D \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\right) dxdy = o. \tag{6}$$

Значи, изразот $a_x dy - a_y dx$ е тотален диференцијал на функција од две променливи $\Psi(x,y)$, т.е.

$$a_x dy - a_y dx = d\Psi(x,y)$$

така што за функцијата $\Psi(x,y)$ ќе имаме:

$$\Psi(x,y) = \int_{z_0}^{z} \left[-a_y dx + a_x dy\right] + \text{константа} \tag{7}$$

Функцијата $\Psi(x,y)$ се вика струјна функција, така што протокот Q ќе зависи само од почетната и крајната точка во едноставно сврзлива област.

$$Q = \int_{z_1}^{z_2} \left[-a_y dx + a_x dy\right] = \int_{z_1}^{z_2} d\Psi = \Psi(z_2) - \Psi(z_1). \tag{8}$$

Циркулацијата на векторското поле $\vec{a} = (a_x, a_y)$ по должината на затворена контура C, по дефиниција е

$$\Gamma = \int_C \vec{a}\vec{s}_o \, ds = \int_C a_x dx + a_y dy \quad , \tag{9}$$

а роторот, по дефиниција, е :

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}. \tag{1o}$$

Ако $\operatorname{rot}\vec{a} \neq o$ во некоја точка (x,y), тогаш таа точка се вика вртежна точка. Ако за секоја точка од областа D важи $\operatorname{rot}\vec{a} = o$, тогаш за полето $\vec{a} = (a_x, a_y)$ велиме дека е безвртежно поле или потенцијално поле.

Користејќи ја Гриновата формула добиваме:

$$\int_C a_x dy + a_y dx = \iint_D \left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} \right) dxdy = 0 \qquad (11)$$

каде што D е област ограничена со кривата C , што значи дека условот (10) покажува дека изразот $a_x dx + a_y dy$ е диференцијал на некоја функција $\varphi(x,y)$ која се вика потенцијална функција или потенцијал на полето $\vec{a}$.

$$d\varphi = a_x dx + a_y dy \; , \quad a_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} \; , \quad a_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \qquad (12)$$

или

$$\vec{a} = \mathrm{grad}\, \varphi(x,y) \; .$$

Потенцијалната функција се определува преку својот диференцијал со помош на интегралот:

$$\varphi(x,y) = \int_{z_0}^{z} a_x dx + a_y dy + \text{константа} \qquad (13)$$

Во случај на едноставно сврзлива област интегралот (13) не зависи од патот на интеграцијата.

Ако во областа D полето $\vec{a} = (a_x, a_y)$ е истовремено соленоидно и **безвртежно**, се исполнети условите (5) и (10) што значи дека важи:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} \qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \qquad (14)$$

Докажана е наредната теорема.

Теорема 7. Во рамнинско поле без вртежи и извори струјната функција и потенцијалната функција се јавуваат како конјугирани хармониски функции, т.е. ги задоволуваат Коши-Римановите услови.

Како последица се добива дека линиите на еднакво струење и со еднаков потенцијал се ортогонални меѓу себе.

Функцијата од комплексна променлива $w = \varphi(x,y) + i\psi(x,y)$

се вика комплексен потенцијал на полето. Ако полето е дефинирано во повеќе сврзливи области (ако има извори и понори), комплексниот потенцијал не е еднозначно определен и се јавува повеќезначна аналитичка функција. Имаме:

$$\vec{a}=a_x+ia_y=\frac{\partial\varphi}{\partial x}+i\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial\psi}{\partial y}-i\frac{\partial\psi}{\partial x}=\overline{w}'(z) \qquad (15)$$

така што добиваме дека изводот од комплексниот потенцијал е едноззначно определен.

Поаѓајќи од

$$dw=w'(z)dz=(a_x-ia_y)(dx+idy) \qquad (16)$$

се добива:

$$Q=\operatorname{Im}\int_C w'(z)dz\ ,\qquad \Gamma=\operatorname{Re}\int_C w'(z)dz. \qquad (17)$$

Соединувајќи ги последните формули имаме:

$$\Gamma+iQ=\int_C w'(z)dz\ .$$

Забележуваме дека во хидромеханиката изводот $\frac{dw}{dz}=\vec{v}=v_x-iv_y$ се вика комплексна брзина.

Пример 1. Извор. Нека во полето се наоѓа единствен извор во координатниот почеток без вртеж. Јасно е дека векторското поле $\vec{a}$ е од облик $\vec{a}=\varphi(r)\vec{r}_0$, каде што $r=|z|$, $\vec{r}_0=\frac{z}{|z|}$; е единичен вектор насочен од координатниот почеток кон точката z. Протокот Q низ која и да било кружна линија ќе биде:

$$Q=\int_C \vec{a}\vec{r}_0 ds=\varphi(r)2\pi r\ . \qquad (18)$$

Забележуваме дека протокот не зависи од радиусот. Ако се примени Гриновата формула се добива:

$$\int_{|z|=r_2}\vec{a}.\vec{r}_0 ds-\int_{|z|=r_1}\vec{a}.\vec{r}_0 ds=\iint_{r_1<|z|<r_2}(\operatorname{div}\vec{a})dx\,dy=o\ .$$

Бидејќи во прстенот нема извори (затоа е $\mathrm{div}\,\vec{a}=0$) , Q е константа, така што се добива :

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi r} \qquad (19)$$

Бројот Q се вика интензитет на изворот.

$$\vec{a} = \frac{Q}{2\pi r}\vec{r_0} = \frac{Q}{2\pi}\cdot\frac{z}{|z|^2} = \frac{Q}{2\pi}\cdot\frac{1}{\bar{z}} .$$

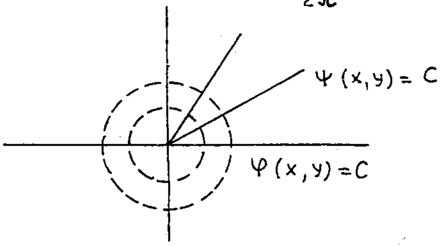
Така, за изводот за комплексниот потенцијал $w= f(z)$ се добива :

$$f'(z) = \frac{Q}{2\pi}\;\frac{1}{z} .$$

Конечно, комплексниот потенцијал има облик :

$$f(z) = \frac{Q}{2\pi}\;\mathrm{Ln}z + C.$$

Одделувајќи ги реалниот и имагинарниот дел имаме:
$\varphi(x,y) = \frac{Q}{2\pi}\ln|z|+c_1$, $\Psi(x,y) = \frac{Q}{2\pi}\mathrm{Arg}z + C_2$.



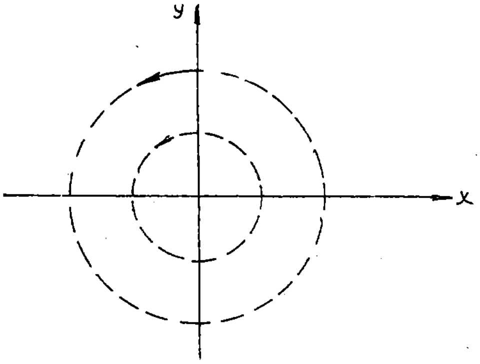
Сл.15

Пример 2. ВРТЛОГ. Нека постои единствен вртеж во координатниот почеток. Тогаш, аналогно како во претходниот пример, за векторското поле се добива:

$$\vec{a} = \frac{\Gamma}{2\pi}\;\frac{i}{z}$$

каде што константата Г е интензитет на вртежот, т.е. циркулација на полето $\vec{a}$ по произволна затворена контура што го заобиколува вртежот. Во овој случај потенцијалната функција и струјната функција ги менуваат местата.

$$f(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i}\ln z + C_1 \,;\; \varphi = \frac{\Gamma}{2\pi}\mathrm{Arg}z + C_1 ,\; \psi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\ln|z| + C_2$$



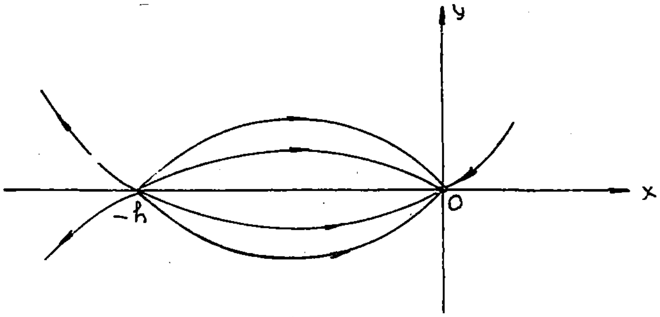
Сл.16

<u>Пример 3</u>. <u>**Дипол.**</u> Нека е даден извор со интензитет Q и понор со интензитет $-Q$, распоредени во точките

$$z_1 = -h \quad , \quad z_2 = o$$

Комплексниот потенцијал се наоѓа со собирање на потенцијалот во изворот и понорот и е еднаков на:

$$f\ (z) = \frac{Q}{2\pi}\ln(z+h) - \frac{Q}{2\pi}\ln z$$



Сл.17.

5. ЗАДАЧИ

1. Де се пресмета $\int_C (1+i-2\bar{z})dz$

од точката $z_1=o$ до точката $z_2=1+i$ по **кривите:**

а) по правата z_1z_2

б) $y=x^2$

2. $\int_{1-i}^{1+i} (3z^2+2z)dz$

(функцијата е аналитичка).

3. $\int_0^i z\cos z dz.$

4. $\int_C \frac{dz}{\sqrt{z}}$, $C: |z|=1, 0 \leq \arg z \leq \pi$

$\sqrt{z}$ е определен со оној дел за кој важи $\sqrt{1} = -1$.

5. $\int_1^i \frac{\ln^3 z}{z^z} dz$ $C: |z|=1$,($\ln z$ е главна вредност $\ln 1=o$).

6. $\int_C z\operatorname{Im} z^2 dz$ $C: |z|=1$, ($-\pi \leq \arg z \leq 0$).

7. $\int_C e^{|z|^2} dz$ C е правата z_1z_2, $z_1=o$, $z_2=1+i$.

8. $\int_C \frac{1+\operatorname{tg} z}{\cos^2 z} dz$ C е правата $z_1=1$, $z_2=i$.

Со помош на интегралната формула на Коши да се пресметаат:

9. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{ch} iz}{z^2+4z+3}\,dz$ 10. $\displaystyle\int_C \frac{e^{z^2}dz}{z^2-6z}$

каде што C е:

а) $|z-2|=1$ б) $|z-2|=3$ в) $|z-2|=5$.

11. $\displaystyle\int_{|z-1-i|=2} \frac{\sin z \sin(z-1)}{z^2-2z+2}\,dz$. 12. $\displaystyle\int_{|z|=5} \frac{dz}{z^2+16}$;

13. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\sin z \sin(z-1)}{z^2-z}\,dz$.

Користејќи ја Кошиевата интегрална формула за изводи да се пресметаат:

14. $\displaystyle\int_{|z-1|=1} \frac{\sin \pi z}{(z^2-1)^2}\,dz$. 15. $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z \operatorname{sh} z}{(z^2-1)^2}\,dz$.

16. $\displaystyle\int_{|z-2|=3} \frac{\operatorname{ch} e^{i\pi z}}{z^3-4z^2}\,dz$, 17. $\displaystyle\int_{|z-1|<\frac{1}{2}} \frac{e^{iz}}{(z^2-1)^2}\,dz$,

18. $\displaystyle\int_{|z-i|=1} \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz$. 19. $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{\operatorname{ch}^2 z}{z^3}\,dz$.

X ГЛАВА

ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА АНАЛИТИЧКИ ФУНКЦИИ СО ПОМОШ НА РЕДОВИ

1. РЕДОВИ ОД АНАЛИТИЧКИ ФУНКЦИИ

Нека

$$f_0(z), f_1(z), \ldots, f_n(z), \ldots \qquad (1)$$

е бесконечна низа од произволни функции дефинирани во дадена област D. Редот

$$f_0(z)+f_1(z)+\ldots+f_n(z)+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$$

може да биде конвергентен за некои вредности на z, а за други вредности на z да е дивергентен. Нека S е множество од комплексни броеви z за кои редот конвергира. Тогаш за S ќе велиме дека е област на конвергенција на редот.

Паралелно со низата (1) ја посматраме низата од парцијални суми :

$$S_0(z), S_1(z), S_2(z), \ldots, S_n(z), \ldots \qquad (2)$$

каде што $S_0(z)=f_0(z)$, $S_1(z) = f_0(z)+f_1(z)$, ... ,

$$S_n(z)= f_0(z)+f_1(z) + f_2(z)+\ldots+f_n(z).$$

Редот е конвергентен ако постои $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(z) = S(z)$.

На пример, редот

$$1 + z + z^2+\ldots+z^n+\ldots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

е конвергентен на множеството

$$S = \{z\in C : |z| < 1\} ,$$

бидејќи е

$$S_n(z)= 1+z+z^2+\ldots+z^n= \frac{1-z^{n+1}}{1-z}$$

и

$$\left| S_n(z) - \frac{1}{1-z} \right| = \frac{|z|^{n+1}}{|1-z|} \longrightarrow 0 \qquad \text{кога} \quad n\to\infty$$

За горната конвергенција велиме дека е обична или точкеста бидејќи $S_n(z) \to S(z)$ за секој $z \in S$. И овде ќе биде воведен поимот за униформна(рамномерна) конвергенција.

Дефиниција. За низата од функции $(f_n(z))$ велиме дека рамномерно конвергира кон функцијата $f(z)$ на множеството D ако за секој $\varepsilon > o$ постои $n = n_o(\varepsilon)$, таков што $|f_n(z)-f(z)| < \varepsilon$ за сите $n \geqslant n_o$ и $z \in D$.

Точна е наредната теорема.

Теорема 1. Ако $f_n(z)$ се непрекинати функции на множеството D и ако низата од функции f_n рамномерно конвергира кон $f(z)$, тогаш $f(z)$ е непрекината функција на D.

Доказ. Треба да покажеме дека за секој $\varepsilon > o$ постои $\delta > o$, таков што $|f(z)-f(z_o)| < \varepsilon$ кога $|z-z_o| < \delta$ и z_o е фиксна точка од D.

Од рамномерната конвергенција на низата од функции следува дека постои n_o, таков што $|f_n(z)-f(z)| < \varepsilon$ за $n \geqslant n_o$ и $z \in D$. Нека n_1 е фиксен природен број со особината $n_1 > n_o$. Од непрекинатоста на функцијата f_{n_1} следува дека постои $\delta > o$, таков што $|f_{n_1}(z)-f_{n_1}(z_o)| < \frac{\varepsilon}{3}$ за $|z-z_o| < \delta$.
За $|z-z_o| < \delta$ имаме:

$$|f(z)-f(z_o)| \leqslant |f(z)-f_{n_1}(z)| + |f_{n_1}(z)-f_{n_1}(z_o)| + |f_{n_1}(z_o)-f(z_o)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Забележуваме дека е искористено неравенството на триаголник.

Теорема 2. Нека $f_n(z)$ е низа од непрекинати функции такви што $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ е рамномерно на контурата Γ.
Тогаш е:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Gamma f_n(z)dz = \int_\Gamma \lim f_n(z)dz = \int_\Gamma f(z)dz.$$

Доказ. За даден $\mathcal{E}>0$ постои $n(\mathcal{E})>0$ таков што $|f_n(z)-f(z)|<\frac{\mathcal{E}}{L}$;$z\in\Gamma$, $n(\mathcal{E})$ не зависи од $z\in\Gamma$. Со L е означена должината на контурата Г. Тогаш е

$$\left|\int_{\Gamma} f_n(z)dz - \int_{\Gamma} f(z)dz\right| = \left|\int_{\Gamma}[f_n(z)-f(z)]\,dz\right| < \frac{\mathcal{E}}{L}\cdot L = \mathcal{E}$$

за сите $n\geqslant n(\mathcal{E})$.

Теорема 3. Нека $(f_n(z))$ е низа од аналитички функции на едноставно сврзлива област D и нека $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$, е рамномерно на D . Тогаш $f(z)$ е аналитичка функција.

Доказ. Нека Г е произволна проста затворена контура во D . Според основната теорема на Коши , имаме $\int_{\Gamma} f_n(z)dz=0$. Користејќи ја теорема 2 имаме дека $\int_{\Gamma} f(z)dz = \lim\limits_{n\to\infty}\int_{\Gamma} f_n(z)dz=0$. Заради теорема 1 функцијата $f(z)$ е непрекината, така што со употреба на теоремата на Морера се добива дека $f(z)$ е аналитичка функција.

Ако е даден редот од аналитички функции $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, велиме дека редот $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ конвергира апсолутно(по модул) ако конвергира редот $\sum_{n=1}^{\infty}|f_n(z)|$. Забележуваме дека секој апсолутно конвергентен ред е ,исто така , конвергентен ред.

За бројните редови од комплексни броеви важат наредните критериуми.

Критериум на Даламбер

Нека $L = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|$. Тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ (1) е конвергентен ако $L<1$, (2) е дивергентен ако $L>1$ и (3) критериумот не е применлив ако $L=1$.

Критериум на Коши

Нека $L = \lim\sqrt[n]{|z_n|}$. Тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ е: (1) конвергентен ако $L<1$ (2) дивергентен ако $L>1$ и (3) критериумот не е применлив ако е $L=1$.

За редовите од комплексни функции важат истите теореми како и за редовите од реални функции.

Теорема 4. Ако редот од непрекинати функции рамномерно конвергира, тогаш и сумата на редот, исто така, е непрекината функција.

Теорема 5. Нека D е област и нека $(f_n(z))$ е низа од аналитички функции во D, таква што редот $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ рамномерно конвергира во D. Тогаш и сумата на редот претставува аналитичка функција.

Теорема 6. Ако f_n се непрекинати функции на контурата Γ и ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ рамномерно конвергира на Γ, тогаш е:

$$\int_\Gamma \Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \Big) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Gamma f_n(z) dz \ .$$

Теорема 7. Нека D е област и нека $f_n(z)$ е низа од аналитички функции, таква што редот рамномерно конвергира на D. Тогаш е:

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \Big)' = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(z) \ .$$

Доказ. Нека $z_0 \in D$ е произволна точка од областа D и нека

$$S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \ .$$

Тогаш постои кружна линија $\Gamma_\rho = \{ z : |z - z_0| = \rho \}$ таква што $f_n(z)$ се аналитички внатре и на контурата Γ_ρ, за секој $n \in N$. Имаме

$$S'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) dz}{(z-z_0)^2} \ .$$

Од рамномерната конвергенција на Γ следува дека можат да се променат знакот за интеграл и бесконечна сума, па е :

$$S'(z_0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\rho} \frac{f_k(z)}{(z-zo)^2} dz = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'(z_0) \ .$$

Теорема 8. Нека $f_n(z)$ се дефинирани и $|f_n(z)| \leqslant M_n$ $(n=1,2,3, \dots)$ каде што M_n се константи. Ако редот $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ конвергира, тогаш редот $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ рамномерно конвергира.

Доказот на оваа теорема е ист како и доказот кај редовите од реални функции.

2. СТЕПЕНСКИ РЕДОВИ

Најважен вид функционални редови се редовите во облик $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, каде што (a_k) е низа од комплексни броеви. Јасно е дека степенскиот ред секогаш конвергира за $z=0$. Точна е наредната теорема.

Теорема 9. Нека степенскиот ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ е конвергентен за $z=z_0 \neq 0$. Тогаш редот конвергира апсолутно за сите комплексни броеви за кои е $|z| < |z_0|$.

Доказ. Да претпоставиме конвергенција на редот $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k$ и нека $z_0 \neq 0$. Тогаш општиот член $a_n z_0^n$ се стреми кон нула, од каде што се добива ограниченост на низата $(|a_n z_0^n|)$ т.е. постои $M \geqslant 0$ таков што $|a_n||z_0|^n \leqslant M$. Имаме $|a_n z^n| = |a_n z_0^n| \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \leqslant$ $\leqslant M \varrho^n$ каде што $\varrho = \frac{|z|}{|z_0|} < 1$ ако $|z| < |z_0|$. Редот $\sum_{k=0}^{\infty} M \varrho^k$ конвергира, од каде што, заради теоремата за споредување на редови, се добива конвергенција на редот $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$

Последица. Ако степенскиот ред $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ дивергира за $z=z_0 \neq 0$, тогаш степенскиот ред ќе дивергира за сите z каде што $|z| > |z_0|$.

Доказ. Претоставуваме спротивно, т.е. нека постои комплексен број z' таков што $|z'| > |z_0|$, и нека редот $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z'^k$ конвергира. Тогаш според теорема 9, ќе конвергира и редот $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_0^k$, што е противречност.

Ако степенскиот ред не конвергира само за $z=0$ или за секој $z \in C$, тогаш постои позитивен реален број R, таков што за $|z|<R$ степенскиот ред конвергира, а за $|z|>R$ редот дивергира. Бројот R се вика радиус на конвергенција на степенскиот ред, а кругот $|z|<R$ се вика круг на конвергенција. Во случај степенскиот ред да конвергира само за $z=0$, ставаме $R=0$, а во случај кога степенскиот ред конвергира за секој z, ставаме $R=\infty$. На кружната линија степенскиот ред може да биде конвергентен но не мора.

Теорема 10. Нека R е радиус на конвергенција на степенскиот ред. Тогаш степенскиот ред рамномерно конвергира на кругот

$$K = \{z \in C : |z| \leq \varrho\}, \quad \varrho < R.$$

Доказ. Нека $z \in K$. Тогаш имаме:

$$|a_k z^k| = |a_k||z|^k \leq |a_k| \varrho^k = M_k .$$

Редот $\sum_{k=0}^{\infty} M_k$ конвергира затоа што степенскиот ред конвергира апсолутно за $|z|=\varrho<R$. Со примена на теорема 8 и теорема 9 се добива теоремата.

Непосредно од теорема 10 следуваат следниве важни особини:

1) степенскиот претставува непрекината функција во кругот на конвергенција;

2) степенскиот ред претставува аналитичка функција во кругот на конвергенција;

3) степенскиот ред може да се диференцира член по член во кругот на конвергенција;

4) степенскиот ред може да се интегрира по должината на која и да било контура која лежи во кругот на конвергенција.

Нека

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \qquad (1)$$

и нека радиусот на конвергенција на овој ред е $R>0$. Овој ред може да се диференцира произволен број пати, така што за n-тиот извод имаме:

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-n+1)a_k z^{k-n} . \qquad (2)$$

Забележуваме дека радиусот на конвергенција на изводните редови (2) е еднаков на радиусот на конвергенција на почетниот ред (1) . Ставајќи $z=0$ во (2) се добива: $f^{(n)}(0) = n!a_n$

од каде што се добива: $$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$$

односно

$$f(z)= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k . \qquad (3)$$

Редот (3) се вика Маклоренов ред за функцијата $f(z)$.

Ако е даден редот $g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$, тогаш се покажува дека важи:

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k . \qquad (4)$$

Редот (4) се вика Тајлоров ред за функцијата g во околина на точката z_0.

3. РАЗВОЈ НА АНАЛИТИЧКИТЕ ФУНКЦИИ ВО ТАЈЛОРОВ РЕД

Сега ќе покажеме обратно, т.е. дека секоја аналитичка функција во точката z_0 може да се развие во Тајлоров ред во некој круг со центар во z_0 .

Теорема 11. Нека функцијата $f(z)$ е аналитичка во точката z_0 . Тогаш е

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z-z_0)^k \qquad (1)$$

и степенскиот ред има позитивен радиус на конвергенција.

Доказ. Нека функцијата $f(z)$ е аналитичка во точката z_0 . Тогаш постои околина во која функцијата е аналитичка.

Нека Г е кружна линија со центар во z_0 и радиус r и нека лежи во таа околина. Нека z е точка од внатрешноста на Г, т.е. $|z-z_0|<r$. Имаме:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma+}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}.$$

Но,

$$\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-z_0+z_0-z} = \frac{1}{\zeta-z_0}\quad\frac{1}{1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}}.$$

Последниот ред униформно конвергира за $\zeta\in\Gamma$ и $|z-z_0|<R$. Редот може да се интегрира член по член откако ќе се помножи со $f(\zeta)$ со што ќе се добие:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\frac{k!}{k!}\int_{\Gamma+}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(\zeta)(z-z_0)^k d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}} =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{2\pi i}\int_{\Gamma+}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}(z-z_0)^k.$$

Редот конвергира за сите z што го задоволуваат неравенството $|z-z_0|<r$.

Така , на пример, за функцијата $f(z)=e^z$ имаме: $f'(z)=e^z$, $f''(z)=e^z, \dots, f^{(n)}(z)=e^z$, $f'(0)=1, \dots, f^{(n)}(0)=1$

$$e = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = 1+z+\frac{z^2}{2!}+\dots+\frac{z^n}{n!}+\dots$$

Последниот ред претставува Маклоренов ред на функцијата e^z.

4. ЕДИНСТВЕНОСТ НА АНАЛИТИЧКИТЕ ФУНКЦИИ

Теорема 12. Нека f(z) и g(z) се две аналитички функции кои се поклопуваат на множество што има точки на натрупување во областа D. Тогаш $f(z)\equiv g(z)$ на D.

Доказ. Нека $h(z)=f(z)-g(z)$. Тогаш h(z) е аналитичка функција на D и е еднаква на нула на множество од точки кое има точки на натрупување на D. Нека z_0 е точка на натрупување на нулите на функцијата h(z). Ќе покажеме дека $h(z)\equiv 0$ во D. Од непрекинатоста на функцијата h(z) следува дека

$h(z_o)=o$.Тогаш $h(z)$ има Тајлоров развој:

$$h(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{(k)}(z_o)}{k!}(z-z_o)^k = (z-z_o)h_1(z)$$

кој конвергира во некоја околина на точката z_o. Имаме:

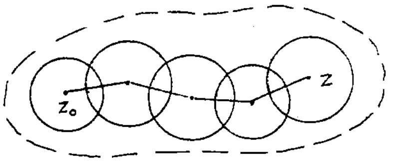
$$h_1(z) = \frac{h(z)}{z-z_o} = \frac{h(z)-h(z_o)}{z-z_o}.$$

Нека (z_n) е низа од комплексни броеви со граница z_o, таква што $h(z_n)=o$. Тогаш е :

$$h'(z_o) = \lim_{n\to\infty} h_1(z_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{h(z_n)-h(z_o)}{z_n-z_o} = \lim o= o.$$

Добиваме: $h'(z_o)=o$.

Со математичка индукција се покажува дека $h^{(n)}(z_o)=o$ за секој n. Од последното се добива дека $h(z)\equiv o$ во некоја ε-околина на точката z_o.



Сл.18

Нека z_1 е произволна точка од D. Постои искршена линија што целосно лежи во D, која што ги поврзува точките z_o и z_1. Со помош на теоремата на Хајне-Борел таа искршена линија може да се покрие со конечен број на ε-околини кои лежат во D. Тие ε-околини формираат синџир од преклопувачки околини од z_o до z_1. Користејќи го Тајлоровото разложување може да се докаже $h(z)\equiv 0$ во втората околина; на крајот $h(z)\equiv 0$ во последната околина, со што е докажано дека $h(z_1)=o$.

5. СИНГУЛАРНИ ТОЧКИ

Ако функцијата f(z) не е аналитичка во точката z_0, тогаш за точката z_0 велиме дека претставува сингуларна точка за функцијата. За точката z_0 велиме дека претставува изолирана сингуларна точка за функцијата f(z) ако постои околина на таа точка во која функцијата е аналитичка освен во самата точка z_0. Еден од најдобрите методи за изучување на карактерот на сингуларноста е Лорановиот развој на функцијата f(z).

Теорема 13. Нека функцијата f(z) е аналитичка во кружниот прстен: $A = \{ z \in C: R_1 < |z| < R_2 \}$.

Тогаш:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = \lim_{k\to\infty} \sum_{i=-k}^{k} a_i (z-z_0)^i$$

во кружниот прстен, каде што е :

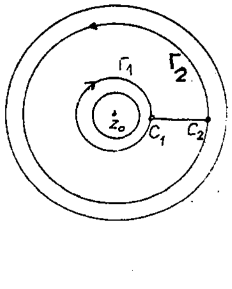
$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(z)dz}{(z-z_0)^{k+1}}$$

а Г е затворена контура која се наоѓа во кружниот прстен таква што z_0 е во внатрешноста на Г.

Доказ. Нека $z \in A$. Тогаш $|z-z_0| = \rho$. Постојат кружни линии Γ_1 и Γ_2 со радиуси r_1 и r_2 соодветно, такви што :

$$R_1 < r_1 < \rho < r_2 < R_2$$

Кружните линии Γ_1 и Γ_2 ги сврзуваме со отсечка по радиусот од точките C_1 и C_2 и, ако Г е контура составена од $\Gamma_2^+ \cup \overline{C_1C_2} \cup \Gamma_1^- \cup \overline{C_2C_1}$, тогаш, според Кошиевата интегрална формула, се добива :



Сл.19

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1^+}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2^+}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

На кривата Γ_1 имаме: $-\frac{1}{\zeta-z} =$

$$= -\frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)} = \frac{1}{(z-z_0)\left[1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right]} = \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$$

На кривата Γ_2 имаме: $\frac{1}{\zeta-z} = \frac{1}{\zeta-z_0-(z-z_0)} =$

$$= \frac{1}{(\zeta-z_0)\left[1-\frac{z-z_0}{\zeta-z_0}\right]} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$$

Двата степенски реда конвергираат униформно на двете концентрични кружни линии Γ_1 и Γ_2. Ако се помножат двата реда со $f(\zeta)$ и ако се интегрираат член по член се добива:

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{(z-z_0)^k}{2\pi i}\int_{\Gamma_1^+}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(z-z_0)^k}{2\pi i}\int_{\Gamma_2^+}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1}a_k(z-z_0)^k + \sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

каде што

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_1^+}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}} \qquad (k=-1,-2,\dots)$$

и

$$a_k = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_2^+}\frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta-z_0)^{k+1}} \qquad (k=0,1,2,\dots)$$

Вредностите a_k, $k=0,1,-1,2,-2,\dots$ не зависат од изборот на кружните линии Γ_1 и Γ_2. Може да се покаже дека Γ е која и да било кружна линија од прстенот која во својата внатрешност ја содржи точката z_0, тогаш коефициентите a_k се пресметуваат по формулата:

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} \frac{f(\zeta)d\zeta}{(\zeta - z_0)^{k+1}} \qquad (k,=o,1,-1, \dots).$$

Редот
$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k (z-z_0)^k$$
се вика Лоранов ред за функцијата $f(z)$ во кружниот прстен.

Ако точката z_0 е изолирана сингуларна точка, тогаш постои $R > o$, таков што функцијата $f(z)$ е аналитичка во областа $o < |z-z_0| < R$.

Ако
$$f(z) = \sum_{k=o}^{\infty} a_k (z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z-z_0)^k} \quad (z \neq z_0),$$
тогаш редот $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{(z-z_0)^k}$ се вика главен дел на функцијата $f(z)$ во точката z_0 .

Постои следнава класификација на сингуларните точки:

1. ако главниот дел е нула , тогаш велиме дека точката z_0 е отстранлив сингуларитет. Во овој случај функцијата $f(z)$ ќе ја додефинираме во z_0 со $f(z_0)=a_0$ и функцијата f ќе биде аналитичка.

2. ако $b_m \neq o$ и $b_k = o$ за сите $k > m$, тогаш велиме дека функцијата f има пол од m-ти ред во точката z_0 . Во овој случај функцијата $(z-z_0)^m f(z)$ има отстранлив сингуларитет во точката z_0 ;

3. ако главниот дел има бесконечно многу членови различни од нула, тогаш велиме дека функцијата $f(z)$ има суштински сингуларитет во точката z_0 .

6.ЗАДАЧИ

1. Да се докаже дека низата од функции (z^n) , $n=1,2,\dots$ конвергира за $|z| < 1$, но не конвергира униформно.

2. Да се докаже дека редот $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$, каде што $z_k=x_k+iy_k$, конвергира кон $z=x+iy$, ако и само ако редот $\sum x_k$ конвергира кон x а редот $\sum y_k$ конвергира кон y .

3. Да се испита конвергенцијата на редовите :

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n^2}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi/n}}{n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sin in}{3^n}$ г) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\pi/n}}{\sqrt{n}}$

4. Да се најде радиусот наконвергенција на редовите:

а) $\sum_{n=0}^{\infty} \cos inz^n$ б) $\sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$ в) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1-i}\right)^n$

г) $\sum \left(\frac{z}{in}\right)^n$ д) $\sum_{n=1}^{\infty} \cos^n \frac{\pi i}{\sqrt{n}} z^n$

5. Функцијата $f(z)$ да се развие во Маклоренов ред и да се најде радиусот на конвергенција:

а) $f(z)=\frac{z}{z^2-2z-3}$ б) $f(z) = \ln(2-z)$.

6. Функцијата $f(z) = \frac{1}{3-2z}$ да се развие по степените на $z-3$ и да се најде радиусот на конвергенција.

7. Да се најде областа на конвергенција на редовите:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1+i)^{n+1}}{z^n}$ б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin in}{z^n}$

в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z+4i}{z+2i}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z+2i}{6}\right)^n$

г) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^n + \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{b}\right)^n \quad (b \neq 0)$.

8. Функцијата $\frac{2z+1}{z^2+z-2}$ да се развие во Лоранов ред:

а) во кругот $|z|<1$ б) во прстенот $1<|z|<2$

в) надворешноста на кругот $|z|\leqslant 2$.

9. Следниве функции да се развијат во Лоранов ред:

а) $f(z) = \frac{e^z}{z^3}$ во околина на точката $z_0 = 0$.

б) $f(z)=z^4\cos\frac{1}{z}$ во околина на точката $z_0=0$

в) $f(z)=\frac{2}{z^2-1}$ во прстенот $1<|z+2|<3$

г) $f(z)=\frac{1}{z^2+1}$ во прстенот $0<|z-i|<2$

д) $f(z)=\frac{1}{(z^2-1)^2}$ во прстенот $0<|z-i|<2$.

10. да се најдат нулите и да се определи нивниот ред на функциите:

а) $f(z)=1+\cos z$ б) $f(z)=(z+\pi i)\operatorname{sh} z$

в) $f(z)=(z^2+\pi^2)(1+e^{-z})$

(Дефиниција. Точката z_0 се нарекува нула отод к-ти ред за функцијата f ако $f^{(i)}(z_0)=0,\forall i\leqslant k-1$ и $f^{(k)}(z_0)\neq 0$).

11. Да се определи карактерот на сингуларните точки на функциите :

а) $f(z)=\frac{e^z-1}{z}$, $z_0=0$

б) $f(z)=e^{1/z}$, $z_0=0$

в) $f(z)=\frac{1}{z-\sin z}$, $z_0=0$

г) $f(z)=\frac{1-e^{-z}}{z}$, $z_0=0$

д) $f(z)=(z-1)e^{\left(\frac{1}{z}-1\right)}$, $z_0=1$

ѓ) $f(z)=\frac{e^{z+e}}{z+e}$, $z_0=-e$.

XI ГЛАВА

ОСТАТОЦИ И НИВНА ПРИМЕНА

1. ТЕОРЕМА ЗА ОСТАТОЦИ

Нека z_0 е изолирана точка за функцијата $f(z)$ и нека

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \qquad (1)$$

е Лоранов развој за функцијата $f(z)$ по степени $z-z_0$.

Коефициентот a_{-1} има многу важно значење и се вика <u>остаток</u> (резидиум) на функцијата $f(z)$ во точката z_0 и се означува со $a_{-1} = \underset{z=z_0}{\mathrm{Rez}}\, f(z)$.

Ако Г е произволна кружна линија која во својата внатрешност ја содржи точката z_0 (и се наоѓа во областа во која функцијата $f(z)$ е аналитичка) и ако се изврши интеграција по должината на позитивната насока, имајќи во предвид

$$\int_{\Gamma^+} (z-z_0)^k dz = 0, \ (k \neq -1) \ ; \qquad \int_{\Gamma} \frac{dz}{z-z_0} = 2\pi i$$

добиваме:

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma^+} f(z)dz. \qquad (2)$$

Често пати е потребно да се знае остатокот за примена. Ако z_0 е пол, тогаш остатокот се наоѓа без тешкотија. Ако z_0 е пол од прв ред (прост пол), имаме:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots \qquad (3)$$

$$(z-z_0)f(z) = a_{-1} + a_0(z-z_0) + a_1(z-z_0)^2 + \dots$$

$$a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)f(z). \qquad (4)$$

Ако функцијата $f(z)$ има специјален вид $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ каде што $\varphi(z_0)\neq o$ и ако $\psi(z)$ има проста нула при $z=z_0$ (т.е. $\psi(z_0)=o$ и $\psi'(z_0)\neq o$), од формулата (2) се добива:

$$\operatorname{Res} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=z_0} \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} = \lim_{z\to z_0} (z-z_0)\frac{\varphi(z)}{\psi(z)} =$$

$$= \lim_{z\to z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\lim\limits_{z\to z_0}\varphi(z)}{\lim\limits_{z\to z_0}\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (5)$$

Во случај $z=z_0$ да е пол од m- ти ред, имаме:

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0+a_1(z-z\ )+\dots$$

Множејќи со $(z-z_0)^m$ се добива :

$$(z-z_0)^m f(z) = a_{-m}+a_{-m+1}(z-z_0) +\dots+ a_{-1}(z-z\ )^{m-1} +\dots$$

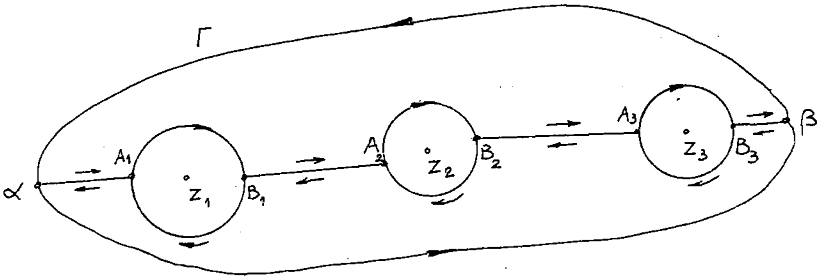
Диференцирајќи ја $m-1$- пати последната релација се добива:

$$\frac{d^{m-1}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]}{dz^{m-1}} = (m-1)!a_{-1}+m(m-1)\dots 2a_0(z-z_0)+\dots$$

Конечно е:

$$a_{-1} = \operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]}{dz^{m-1}} .(6)$$

Нека е дадена област D со контура Г. Да претпоставиме дека f(z) е аналитичка во областа и на контурата Г, освен во конечен број точки $z_1,z_2, . .. z_n$.



Сл.2о

Ја посматраме сл 2о и интегралите по должината на контурата Г во позитивна насока и нека $\Gamma_1 ,\Gamma_2 ,...,\Gamma_n$ се кружни линии во чија внатрешност лежат точките $z_1,z_2,z_3, ...,z_n$.

Избираме две точки α и β на контурата Г. Ако извршиме интеграција по " горната половина" , потоа по $\overline{\alpha A_1}$, $\widehat{A_1B_1}$, $\overline{B_1A_2}$, . . . , $\overline{B_n\beta}$, ќе добиеме интеграл од аналитичка функција кој е еднаков на нула заради основната теорема на Коши, т.е. $\int_{C'} f(z)dz=o$ каде што со C′ е контурата опишана погоре.

Ако интегрираме од α до β по долниот дел, потоа по $\underset{\smile}{\beta B_n},\underset{\smile}{B_nA_{n-1}}, ..., \underset{\smile}{A_1\alpha}$; ако таа контура ја означиме со C" , ќе добиеме: $\int_{C''} f(z)dz=o$.

Ако ги собереме двата интеграла и по поништувањето по должините на отсечките се добива:

$$\int_{\Gamma^+} f(z)dz + \int_{\Gamma_1^-} f(z)dz + . . . + \int_{\Gamma_n^-} f(z)dz = o$$

односно:

$$\int_{\Gamma^+} f(z)dz = \int_{\Gamma_1^+} f(z)dz + \int_{\Gamma_2^+} f(z)dz + \dots + \int_{\Gamma_n^+} f(z)dz =$$
$$= 2\pi i \left[a_{-1}^{(1)} + a_{-1}^{(2)} + \dots + a_{-1}^{(n)}\right] \qquad (7)$$

т.е. ја добиваме наредната теорема за остатоци.

Теорема 1. Нека функцијата $f(z)$ е аналитичка во внатрешноста на контурата Γ и на самата контура Γ, освен во конечен број точки кои се наоѓаат во внатрешноста на Γ. Тогаш интегралот $\int_{\Gamma} f(z)dz$ е еднаков на збирот од производите на $2\pi i$ со остатоците во изолираните сингуларни точки кои се внатре во Γ.

Пример 1. Да се пресмета интегралот

$$\int_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}\,dz .$$

Во кругот $|z|\leq 4$ функцијата $f(z)=\frac{e^z-1}{z^2+z}$ е аналитичка во сите точки освен во точките $z_1=0$ и $z_2=-1$. Користејќи ја теоремата за остатоци добиваме:

$$\int_{|z|=4} \frac{e -1}{z^2+z}\,dz = 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=-1} f(z)\right] .$$

Но,

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{z(e^z-1)}{z(z+1)} = \lim_{z\to 0} \frac{e^z-1}{z+1} = 0 ;$$

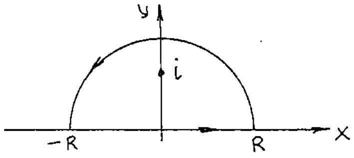
$$\operatorname*{Res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z\to -1} \frac{(z+1)(e^z-1)}{z(z+1)} = \lim_{z\to -1} \frac{e^z-1}{z} = \frac{e^{-1}-1}{-1} = 1-\frac{1}{e} .$$

од каде што се добива $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{e^z-1}{z^2+z}\,dz = 2\pi i\left(1-\frac{1}{e}\right).$

Пример 2. Познато е дека $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi .$

Овој интеграл ќе биде пресметан со помош на теоремата за остатоци.

Со Γ_R ја означуваме полукружната линија $z=Re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.
Ја посматраме контурата на сл.21.



сл.21

Реалниот број R го избираме доволно голем за полот i на функцијата $f(z)=\frac{1}{1+z^2}$ да се наоѓа во внатрешноста на контурата.
Тогаш е:

$$\int_{-R}^{R}\frac{dz}{1+z^2} + \int_{\Gamma_R}\frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i\ (\operatorname*{Res}_{z=i} f(z)).$$

Ако $z\in[-R,R]$, $z=x$, $dz=dx$. На Γ_R : $dz = iRe^{it}dt$;

$$\int_{-R}^{R}\frac{dx}{1+x^2} + i\int_{\Gamma_R}\frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i\left(\frac{1}{2i}\right) = \pi .$$

Но,

$$\left|\int_{\Gamma_R}\frac{dz}{1+z^2}\right| \leqslant \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0,$$

кога $R\to\infty$.

Исто така, теоремата за остатоци може да биде применета за пресметување на определени интеграли од тригонометриски функции, што ќе биде илустрирано на наредниот пример.

Пример 3. Да се пресмета интегралот

$$\int_{0}^{\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta}$$

каде што $a>b>0$.

Навистина, ставајќи $z=e^{i\theta}$ добиваме: $dz = ie^{i\theta}d\theta$

$$\cos\theta = (e^{i\theta}+e^{-i\theta})/2 = \frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right) \qquad d\theta = \frac{dz}{iz}$$

$$\int_{0}^{2\pi}\frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = -2i\int_{\Gamma^+}\frac{dz}{bz^2+2az+a}$$

каде што Г е единична кружна линија. Единствени сингуларни точки на подинтегралната функција се точките $-\frac{a}{b} \pm \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}$.

Точката $\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}$ е во внатрешноста на Г. Со примена на теоремата за остатоци ќе добива:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+b\cos\theta} = \frac{-2i}{b} \int_{\Gamma+} \frac{dz}{z^2+2(a/b)z+1} = 2\pi i \cdot \frac{-i}{\sqrt{a^2-b^2}} =$$

$$= \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}} \cdot$$

Теорема 2. Нека $F(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ е рационална функција од x таква што степенот од $Q(x) \geqslant$ степенот на $P(x)+2$ и нема полови на x-оската. Тогаш е

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = 2\pi i \, (C_1+ C_2+\dots+C_n)$$

каде што $C_1,C_2, \dots,C_n$ се остатоци на функцијата $\frac{P(z)}{Q(z)}$ во горната полурамнина.

Доказ. За контура на интеграција ја земаме полукружната линија $\Gamma_R = \{ z=Re^{i\theta} , 0\leqslant \theta\leqslant\pi\}$, отсечката $[-R,R]$ на реалната оска и R е доволно голем за да може сите полови што се наоѓаат во горната полурамнина да се во внатрешноста на кружната линија.

Имаме:

$$\int_{-R}^{R} F(x)dx + \int_{BCA} F(z)dz = 2\pi i \sum_{K} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

каде што сумирањето се врши по сите оние остатоци на сингуларните точки што се наоѓаат во горната полурамнина.

Од

$$|F(z)| = \frac{|P(z)|}{|Q(z)|} = \frac{|a_m z^m+ \dots + a_0|}{|b_n z^n+\dots + b_0|} =$$

$$= \frac{|a_m|}{|b_n||z|^{n-m}} \cdot \frac{\left|1 + \dots + \frac{a_0}{z^m}\right|}{\left|1 + \dots + \frac{b_0}{z^n}\right|}$$

и $n-m \geqslant 2$ се добива дека за доволно големи вредности на $|z|=R$ е:

$$|F(z)| < \frac{2|a_m|}{|b_n|R^2} \leqslant \frac{M}{R^2}$$

од каде што се добива:

$$\left|\int F(z)dz\right| \leqslant \frac{MR}{R^2}\pi = \frac{\pi M}{R} \longrightarrow 0 \qquad \text{кога} \quad R \to \infty.$$

На крајот имаме:

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} F(x)dx = 2\pi i \sum_{k} \operatorname*{Res}_{z=z_k} F(z)$$

<u>Пример 4</u>.Да се пресмета интегралот

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} .$$

Јасно е дека подинтегралната функција ги исполнува условите од теорема 2. Полови на функцијата $f(z)=\frac{1}{(z^2+1)(z^2+2z+2)}$ се точките $z_1=i$, $z_2=-1+i$ во горната полурамнина. За остатокот на функцијата $f(z)$ во точката $z_1=i$ имаме:

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \lim_{z\to i} \frac{1}{(z+i)(z^2+2z+2)} \doteq \frac{1}{2i(-1+2i+2)} = \frac{1}{2(-2+i)} =$$

$$= \frac{-2-i}{10}.$$

Натаму е : $\operatorname*{Res}_{z=-1+i} f(z) = \lim_{z\to -1+i} \frac{1}{(z-i)(z+i)(z+i+1)} =$

$$= \frac{1}{(-1+2i)(-1)(2i)} = \frac{1}{2(2+i)} = \frac{2-i}{10}$$

од каде што се добива:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+2x+2)} = 2\pi i\left(\frac{-2-i}{10}+\frac{2-i}{10}\right) = 2\pi i\,\frac{-i}{5} = \frac{2\pi}{5}.$$

Третиот вид реални интеграли кои можат да се пресметуваат со слични методи се интегралите во облик :

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)\cos\beta x\,dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x)\sin\beta x\,dx \ ,$$

Каде што $R(x)$ е рационална функција од x со реални коефициенти која нема реални полови, при што степенот на броителот е за еден помал од степенот на именителот и уште се зема $\beta > 0$.

Пресметувањето ќе се изврши со помош на функцијата $R(z)e^{i\beta z}$. За добивање на конечниот резултат се зема реалниот (имагинарниот) дел во зависност од проблемот поставен за решавање. Точна е наредната теорема.

<u>Теорема 3.</u> Нека $R(z)=\dfrac{a_m z^m+a_{m-1}z^{m-1}+\dots+a_0}{b_n z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\dots+b_0}$

каде што $n \geq m+1$.

Ако $\beta > 0$, тогаш
$$\lim_{R\to\infty}\int_C R(z)e^{i\beta z}dz = 0 \qquad (9)$$

каде што $C = \{z : z = Re^{i\theta} \ , \ 0 \leq \theta \leq \pi\}$

<u>Доказ.</u> Ако $z \in C$, тогаш е :

$$|R(z)| = \frac{|a_m z^m+a_{m-1}z^{m-1}+\dots+a_0|}{|b_n z^n+b_{n-1}z^{n-1}+\dots+b_0|} \leq$$

$$\leq \frac{|a_m|R^m+\dots+|a_0|}{|b_n|R^n-\dots-|b_0|}$$

Натаму е

$$\exp(i\beta z) = \exp(i\beta Re^{i\theta}) = \exp(i\beta R(\cos\theta + i\sin\theta)) =$$
$$= \exp(i\beta R\cos\theta).(\exp-\beta R\sin\theta),$$

така што за модулот имаме:

$$\left|\exp(i\beta z)\right| \leqslant e^{-R\beta\sin\theta} \qquad (1o)$$

Го користиме неравенството $\sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta$ за $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ кое е исполнето заради конкавноста на функцијата $\sin\theta$ на сегментот $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (види сл.2) .

Имаме : $\left|e^{i\beta z}\right| = e^{-\beta R\sin\theta} \leqslant e^{-2\beta R\theta/\pi}$ и

$$\left|\int_C R(z)\exp(i\beta z)dz\right| \leqslant \frac{|a_m|\cdot R^n + \cdot\cdot\cdot + |a_o|}{|b_n|\cdot R^n - \cdot\cdot\cdot - |b_o|}\left|\int_C \exp(i\beta Re^{i\theta})\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\, iR\exp(i\theta)d\theta\right| \leqslant \frac{|a_m|\cdot R^m + \dots + |a_o|}{|b_n|\cdot R^n - \dots - |b_o|}\, R.\int_0^{\pi} \exp(-\beta R\sin\theta)d\theta$$

За последниот интеграл ја имаме следната оценка:

$$\int_0^{\pi} \exp(-\beta R\sin\theta)d\theta = \int_0^{\pi/2} e^{-\beta R\sin\theta}d\theta + \int_{\pi/2}^{\pi} e^{-\beta R\sin\theta}d\theta =$$

$$= \int_0^{\pi/2} e^{-\beta R\sin\theta}d\theta + \int_0^{\pi/2} e^{-\beta R\sin(\theta+\pi/2)}d\theta = 2\int_0^{\pi/2} e^{-R\beta\sin\theta}d\theta \leqslant$$

$$\leqslant 2\int_0^{\pi/2} e^{-2\beta R\theta/\pi}d\theta = \frac{\pi}{\beta R}\left(1 - e^{-\beta R}\right)$$

Конечно се добива :

$$\left|\int_C R(z)e^{i\beta z}dz\right| \leqslant \frac{\pi}{\beta}(1-e^{-\beta R}) \cdot \frac{|a_m|R^m + \cdot\cdot\cdot + |a_o|}{|b_n|R^n - \cdot\cdot\cdot - |b_o|} \cdot$$

Заради претпоставката $n > m$ последната величина се стреми кон о кога $R \to \infty$, со што е докажана теоремата.

<u>Пример 5.</u> Да се пресмета интегралот

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x dx}{1+x^2} \cdot$$

Навистина , земајќи $f(z) = \frac{e^{i2z}}{1+z^2}$, гледаме дека $z_1 = i$ е единствен пол од прв ред во горната полурамнина. Се добива:

$$\int_{-R}^{R}\frac{e^{2ix}dx}{1+x^2}+\int_{C}\frac{e^{2iz}}{1+z^2}\,dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z=i} f(z)= 2\pi i\ \frac{e^{2ii}}{i+i}=\pi e^{-2}.$$

Заради теоремата имаме дека е: $\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_{C}\frac{e^{2iz}dz}{1+z^2}=0$

така што следува :

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos 2x dx}{1+x^2}+i\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin 2x dx}{1+x^2}=\pi e^{-2},$$

од каде што , земајќи го реалниот дел, се добива дека вредноста на интегралот е π/e^2.

2. ЗАДАЧИ

1. Да се најдат остатоците на функцијата

$$f(z) = \frac{\sin z^2}{z-\frac{\pi}{4}z^2}$$

во нејзините сингуларни точки.

2. Истото прашање за функцијата $f(z)=\frac{e^z}{(z+1)^3(z-2)}$.

3. Да се пресметаат интегралите:

а) $\int\limits_{|z-i|=\frac{3}{2}}\frac{e^{1/z^2}\,dz}{z^2+1}$ б) $\int\limits_{|z|=4}\frac{e^{iz}dz}{(z-\pi)^3}$

в) $\int\limits_{C}\frac{dz}{z^2+1}$ каде што C е $x^2+y^2=2x$.

4. Да се преметаат,со помош на остатоци, интегралите:

а) $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^2}$ ($a>0$) б) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{xdx}{(x^2+4x+13)^2}$.

5. Да се докаже формулата:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(1+x^2)^n}=\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots\ 2n}\pi\ .$$

6. Да се пресметаат интегралите со помош на теоремата за остатоци:

а) $\int_0^\infty \frac{x\sin ax}{x^2+k^2}dx \quad \left(\begin{matrix} a>0 \\ k>0 \end{matrix}\right)$ б) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{(x^2+1)(x^2+4)}$

7. Да се пресмета интегралот $\int_0^\infty \frac{\sin x dx}{x}$.

8. а) Ако f е непарна функција ($f(-z)=-f(z)$), тогаш е $\operatorname*{Res}_{z=-a} f(z) = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$.

б) Ако f е парна функција ($f(-z)= f(z)$), Тогаш е $\operatorname*{Res}_{z=-a} f(z) = -\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$.

9. Да се пресмета интегралот $\int_0^\infty \frac{x^{2p}dx}{1+x^{2n}}$ ($p<n$).

10 . Да се пресмета интегралот $\int_{\Gamma^+} \frac{\operatorname{tg} z dz}{1-e^z}$

каде што Γ^+ е кружна линија со центар во координатниот почеток и радиус 2.

12. Да се пресмета интегралот

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x dx}{1+x^2} .$$

XII ГЛАВА

КОНФОРМНИ ПРЕСЛИКУВАЊА

1. ДЕФИНИЦИЈА НА КОНФОРМНИ ПРЕСЛИКУВАЊА

Нека $w=f(z)$ е зададена аналитичка функција. Тогаш таа функција ја пресликува дадената област D од z-рамнината во некоја област D_1 во w -рамнината.

Геометриските особини на пресликувањата зададени со аналитичките функции се многу важни во случај кога $f'(z_0)\neq o$ во D.

Наредната теорема ја даваме без доказ.

<u>Теорема 1.</u> Ако $f(z)$ е аналитичка функција во точката z_0 и нека $f'(z_0)\neq 0$;тогаш постои околина на точката z_0 , таква што функцијата $w=w(z)$ има инверзна функција којашто исто **така** , е аналитичка функција.

За илустрација ја посматраме функцијата $w=f(z)= z^2$. Во точката $z_0 \neq 0$ теоремата може да се примени така што се добива инверзна функција $z=\sqrt{w}$ во околина на точката z_0 . Оваа околина не треба да ја содржи нулата.

<u>Теорема 2.</u> Нека $w=f(z)$ е аналитичка функција во точката z_0 и нека $f'(z_0)\neq o$. Тогаш функцијата $f(z)$ ги запазува аглите по големина и знак (ориентација).

<u>Доказ.</u> Ги посматраме кривите C_1 и C_2 што минуваат низ точката z_0 и нека тангентите на тие криви зафаќаат агол α.

Тогаш

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{w-w_0}{z-z_0} .$$

Ако z се приближува кон z_0 по должината на C_1, тогаш w се приближува кон w_0 по должината на Γ_1 ($\Gamma_1= f(C_1)$, $\Gamma_2= f(C_2)$).

Имаме:

$$\theta_1 = \lim_{z\to z_0} \arg(z-z_0) \quad , \qquad \varphi_1=\lim_{w\to w_0} \arg(w-w_0)$$

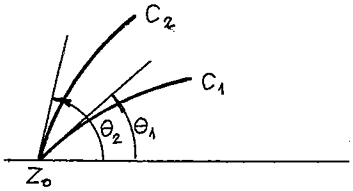
Се добива:

$$\arg f'(z_0) = -\lim_{z\to z_0}\arg(z-z_0) + \lim_{w\to w_0}\arg(w-w_0) = -\theta_1 + \varphi_1.$$

Слично, и за кривите C_2 и Γ_2 се добива

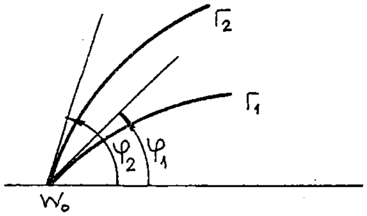
$$\arg f'(z_0) = -\theta_2 + \varphi_2.$$

Добиваме: $\varphi_2-\varphi_1 = \theta_2-\theta_1$ со што теоремата е докажана.



Z-рамнина

сл.22



W - рамнина

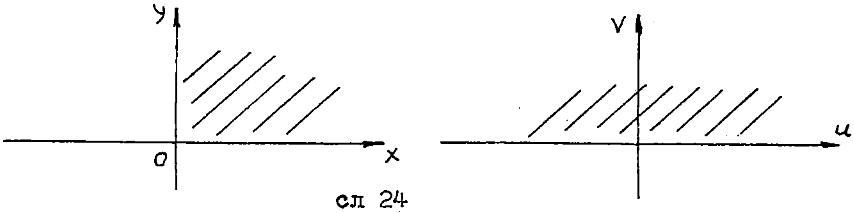
сл.23

Дефиниција 1. За пресликувањето $w=f(z)$ што ги запазува аглите по големина и ориентација се вика дека е конформно. Од теоремата 2 се гледа дека , ако функцијата е аналитичка во точката z_0 и ако $f'(z_0)\neq 0$, тогаш $w=f(z)$ е конформно пресликување.

Пресликувањето $w=z^2$ е насекаде конформно, освен во координатниот почеток. Така, внатрешноста на првиот квадрант

$$D_1 = \left\{z\in C : 0<\arg z<\frac{\pi}{2},\ |z|>0\right\}$$

се пресликува во горната полурамнина $D_2 = \{w\in C:\ \operatorname{Im} w>0\}$.



сл 24

Инверзната функција е дефинирана од D_2 на D_1 .

2. ДРОБНОЛИНЕАРНИ ПРЕСЛИКУВАЊА

Пресликувањето
$$w=\frac{az+b}{cz+d}\quad , \quad ad-bc\neq 0$$
се вика дробнолинеарно пресликување. За изводот на тоа пресликување се добива:
$$\frac{dw}{dz}=\frac{ad-bc}{(cz+d)^2}\neq 0$$
така што се добива конформност напресликувањето во сите точки во кои е дефинирано.

Ова пресликување е дефинирано во сите точки, освен во точката $z=\frac{-d}{c}$. Ќе покажеме дека w е 1-1. Да претпоставиме дека е:
$$w_1=w_2\ ,$$
па тогаш е:
$$\frac{az_1+b}{cz_1+d}=\frac{az_2+b}{cz_2+d}$$
односно: $(ad-bc)(z_1-z_2)=0$

од каде што следува $z_1=z_2$.

Дробнолинеарното пресликување може да се запише во вид:
$$w=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c}\cdot\frac{1}{cz+d}$$
т.е. дробнолинеарното пресликување може да се запише како композиција од следниве пресликувања: $w_1=cz+d$,
$$w_2=1/w_1\ ,\qquad w_3=\frac{bc-ad}{c}w_2\ ,\qquad w=w_3+\frac{a}{c}\ .$$
Првото пресликување е линеарно пресликување. Ќе покажеме дека со дробнолинеарното пресликување кружната линија се пресликува во кружна линија (и правата се смета за кружна линија).

Нека равенката на кружната линија биде:
$$A(x^2+y^2)+2Bx+2Cy+D=0. \qquad (1)$$
Ако A=o, тогаш (1) претставува равенка на права.

Го посматраме пресликувањето $w=\frac{1}{z}$. Имаме

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \text{и} \qquad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$Az\bar{z} + 2B\cdot\frac{z+\bar{z}}{2} + 2C\cdot\frac{z-\bar{z}}{2i} + D = 0$$

$$Az\bar{z} + \delta z + \bar{\delta}\bar{z} + D = 0 \qquad (2)$$

каде што : $\delta = B-iC$.

Од $w=\frac{1}{z}$ имаме $z=\frac{1}{w}$, од каде што следува:

$$A + \delta\bar{w} + \bar{\delta}w + Dw\bar{w} = 0. \qquad (3)$$

Равенката (3) претставува равенка на кружна линија, така што е покажано дека кружната линија преминува, исто така, во кружна линија.

Постојат три независни параметри во дробнолинеарното пресликување. Ако една од константите (на пример d) е различна од нула, тогаш дробнолинеарното пресликување може да се запише во вид

$$w = \frac{(\frac{a}{d})z + \frac{b}{d}}{(\frac{c}{d})z + 1} .$$

Одовде заклучуваме: ако се дадени три точки z_1, z_2, z_3 од z-рамнината и три дадени точки w_1, w_2, w_3 од w-рамнината, тогаш постои едно и само едно дробнолинеарно пресликување w , такво што $w(z_1)=w_1$, $w(z_2)=w_2$, $w(z_3)=w_3$.

Пример 1. Се поставува проблем за наоѓање на пресликување кое ја пресликува горната полурамнина ($\operatorname{Im} z \geq 0$) во внатрешноста на единична кружна линија ($|w| \leq 1$). Со помош на коресподенцијата $-1 \mapsto -i$. $0 \mapsto 1$, $1 \mapsto i$ се добива дека реалната оска се пресликува на единичната кружна линија.

Имаме: $-i = \frac{-a+b}{-c+d}$, $1= \frac{b}{d}$, $i = \frac{a+b}{c+d}$.

Со решавање на системот равенки по a, b и c се добива:

$$a=bi \ , \ d=b, \ \ c=-bi.$$

Бараното дробнолинеарно пресликување е :

$$w = \frac{biz+b}{-biz+b} = \frac{iz+1}{-iz+1} \ , \quad z = \frac{w-1}{iw+i} .$$

Нека $w=\rho e^{i\varphi}$,$\rho<1$. Имаме:

$$\mathrm{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i} = \frac{1}{2i}\left(\frac{w-1}{iw+i} - \frac{\bar{w}-1}{-i\bar{w}-i}\right) =$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{-i|w|^2+i\bar{w}-iw+i-i|w|^2-i\bar{w}+iw+i}{|iw+i|^2}\right] = \frac{1-|w|^2}{|iw+i|^2} = \frac{1-\rho^2}{1+\rho^2+2\rho\cos\varphi}$$

од каде што гледа дека $\mathrm{Im} z\geqslant 0$,ако и само ако $\rho\leqslant 1$, со што е покажано дека горната полурамнина се пресликува единичниот круг.

Се поставува прашање дали изборот на точките -1, 0 и 1 е случаен; дали не може да се земе друг избор на точки од реалната права? Ќе покажеме дека трите оригинални точки од реалната права и трите слики од единичната кружна линија мора да го задоволуваат таканаречениот принцип на симетрија при дробнолинеарното пресликување. Тоа ќе биде изнесено во наредната точка.

Сега ќе покажеме како експлицитно се наоѓа дробнолинеарното пресликување кое три зададени точки z_1,z_2,z_3 од $C^*=C\cup\{\infty\}$ ги пресликува во три дадени точки w_1,w_2, w_3 од C^*.

Во почетокот претпоставуваме дека ниедна од точките z_1,z_2, z_3 не е еднаква на ∞ . Тогаш со пресликувањето

$$w = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)}$$

точките z_1, z_2, z_3 се пресликуваат во $0, 1, \infty$ соодветно. Ако една од точките z_i (на пример z_1) е еднаква на ∞, тогаш бараното пресликување е

$$w = \frac{z_2 - z_3}{z - z_3} .$$

Аналогно се посматраат другите случаи.

Ако w^* е **друга** дробно линеарна трансформација, **таква што :** $w^* : z_1 \mapsto 0, z_2 \mapsto 1, z_3 \mapsto \infty$ тогаш трансформацијата $w^* \circ w^{-1}$ има особина точките $0, 1, \infty$ да остануваат неподвижни при таа трансформација. Проблемот е сведен на наоѓање на дробнолинеарно пресликување $\varphi = \frac{az+b}{cz+d}$, такво што : $\varphi(0)=0$, $\varphi(1)=1$, $\varphi(\infty)=\infty$.

Од равенките

$$0 = \frac{b}{d}, \quad 1 = \frac{a+b}{c+d}, \quad \infty = \frac{a}{c}$$

добиваме дека е $b=0, c=0, a=d$ што значи $\varphi=z$. Докажавме дека $w^* \circ w^{-1} = I$, е идентично пресликување од каде што се добива дека $w^* = w$, што значи дека w е единственото пресликување што ги пресликува точките z_1, z_2, z_3 во $0, 1, \infty$ соодветно.

Бидејќи кружната линија е определена со три точки, лесно е да се најде дробнолинеарното пресликување што дадената кружна линија Γ_1, определена со точките z_1, z_2, z_3 ја пресликува на кружната линија Γ_2, определена со точките w_1, w_2, w_3. Тоа е пресликувањето:

$$\frac{(w-w_1)(w_2-w_3)}{(w-w_3)(w_2-w_1)} = \frac{(z-z_1)(z_2-z_3)}{(z-z_3)(z_2-z_1)} \qquad (4)$$

кое ги пресликува точките z_1, z_2, z_3 во w_1, w_2, w_3. Десната страна на (4) ги пресликува z_1, z_2, z_3 во $0, 1, \infty$, а инверзното пресликување на левата страна ги пресликува $0, 1, \infty$ во точките w_1, w_2, w_3.

Пример 2. Да се најде дробнолинеарно пресликување кое точките $-1,i,1+i$ ги пресликува во точките $o,2i,\ 1-i$.

Навистина , од (4) се добива:

$$\frac{(w-o)(2i-1+i)}{(w-1+i)(2i-0)} = \frac{(z+1)(i-1-i)}{(z-1-i)(i+1)}$$

од каде што , решавајќи по w , се добива:

$$w = \frac{(1+i)z\ +1+i}{2(i-1)z+2i+3} \ .$$

3. ПРИНЦИП НА СИМЕТРИЈА ПРИ ДРОБНОЛИНЕАРНИТЕ ПРЕСЛИКУВАЊА

Забележуваме дека точките $z=x+iy$ и $\bar{z}=x-iy$ се симетрични во однос на x-оската. Ќе се обопшти поимот на симетрија во однос на кружна линија.

Дефиниција 2. Две точки z и z^* се симетрични во однос на Г во проширената комплексна рамнина, ако постои дробнолинеарно пресликување што ја пресликува кружната линија Г на реалната оска така што:

$$\overline{w(z)} = w(z^*). \tag{1}$$

На прв поглед се чини дека симетричноста во однос на кружната линија зависи од дробнолинеарното пресликување w , меѓутоа, ако w^* е друго дробнолинеарно пресликување, коешто ја пресликува Г на реалната оска, тогаш $\varphi=w^*\circ w^{-1}$ ја пресликува реалната оска на самата себе, па затоа има облик:

$$\frac{(\varphi-b_1)(b_2-b_3)}{(\varphi-b_3)(b_2-b_1)} = \frac{(w-a_1)(a_2-a_3)}{(w-a_3)(a_2-a_1)} \tag{2}$$

каде што a_j, b_j $(j=1,2,3)$ се реални броеви.

Решавајќи по φ се добива :

$$\varphi = \frac{\alpha w + \beta}{\gamma w + \delta} \qquad (3)$$

каде што $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ се реални броеви. Тогаш од $w \overset{*}{=} \zeta(w)$ добиваме: $\overline{w^{*}(z)} = \overline{\varphi(w(z))} = \varphi(\overline{w(z)}) = \varphi(w(z^{*})) = w^{*}(z^{*})$, така што симетријата е независна од дробнолинеарното пресликување што влегува во дефиницијата на симетричност. Уште повеќе симетријата се запазува при кое и да било дробнолинеарно пресликување. Навистина, ако z и z^{*} се две симетрични точки во однос на кружната линија Г(со пресликувањето w) и ако w^{*} е кое и да било дробнолинеарно пресликување , тогаш $w^{*}(z)$ и $w^{*}(z^{*})$ се симетрични во однос на $w^{*}(\Gamma)$ при пресликувањето $w \circ w^{*-1}$. Навистина, $z \mapsto w^{*}(z)$, $z^{*} \mapsto w^{*}(z^{*})$, $\Gamma \to w^{*}(\Gamma)$;

$w \circ w^{*-1}(w^{*}\Gamma) = w(w^{*-1} \circ w^{*}(\Gamma)) = W(\Gamma) = R$ (реална права);

$$\overline{(w \circ w^{*-1})(w^{*}z)} = \overline{w(w^{*-1} \circ w^{*})z} = \overline{w(z)} = w(z^{*}) =$$

$$= (w \circ w^{*-1})(w^{*}z^{*}) .$$

Фактотшто при дробнолинеарното пресликување се запазуваат симетричните точки се вика <u>принцип на симетрија</u> при дробнолинеарното пресликување.

На крајот ќе биде дадена формула за симетричната точка на точката z во однос на кружната линија Г, со центар во a и радиус R .

<u>Пример 3.</u> Пресликувањето

$$w = i \, \frac{z - (a-R)}{z - (a+R)} \qquad (4)$$

ја пресликува кружната линија Г на реалната оска, бидејќи $a-R$ се пресликува во 0, $a+R$ во ∞ , $a+Ri$ во 1 .

Тогаш,

$$\overline{w(z)} = \overline{\left[i\,\frac{z-(a-R)}{z-(a+R)}\right]} = \overline{i}\,\frac{\overline{(z-a)+R}}{\overline{(z-a)-R}} =$$

$$= \frac{i\,\frac{R}{\bar{z}-\bar{a}}+1}{\frac{R}{\bar{z}-\bar{a}}-1} = \frac{i\left[\frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}}+a-(a-R)\right]}{\frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}}+a-(a+R)},$$

што значи дека

$$z^* = \frac{R^2}{\bar{z}-\bar{a}}+a \qquad \text{или} \qquad (z^*-a)(\bar{z}-\bar{a}) = R^2 \quad . \tag{5}$$

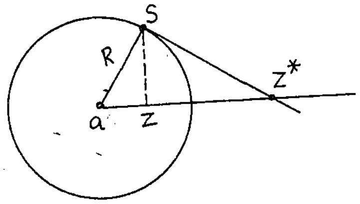
Од равенството (5) се добиваат следниве две равенства:

$$\frac{|z-a|}{R} = \frac{R}{|z^*-a|} \tag{6}$$

и

$$\arg\frac{z^*-a}{z-a} = \arg\left(\frac{z^*-a}{z-a}\cdot\frac{\bar{z}-\bar{a}}{\bar{z}-\bar{a}}\right) = \arg\frac{R^2}{|z-a|^2} = 0 \tag{7}$$

што покажува дека z и z^* лежат на иста полуправа со почеток во a и важи геометриската конструкција на сл.25.



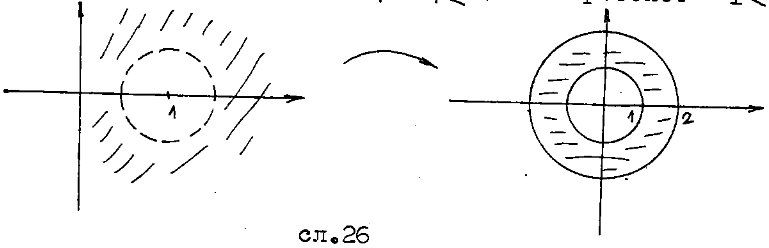
сл.25

Пример 4. Користејќи го принципот на симетрија при дробнолинеарното пресликување, да се најде пресликувањето кое горната полурамнина ја пресликува во внатрешноста на единичната кружна линија.

Користејќи ја симетријата на точките i и $-i$ во однос на x-оската, ако точката i ја пресликаме во 0, тогаш точката $-i$ ќе ја пресликаме во бесконечност, така што дробнолинеарното пресликување има множител од видот $\frac{z-i}{z+i}$. Ако x е реален број , тогаш комплексниот број има модул 1, па затоа наједноставен вид на дробнолинеарно пресликување со бараното својство е пресликувањето:

$$w = \frac{z-i}{z+i} .$$

<u>Пример 5.</u> Да се најде дробнолинеарното пресликување w и бројот $0<a<1$, така што w ја пресликува десната полурамнина со исфрлен круг $|z-1| \leq a$ на прстенот $1<|w|<2$.



сл.26

Прво се бараат точките z_0 и z_0^* , кои се симетрични истовремено во однос на имагинарната оска и кружната линија $|z-1|=a$. Специјално, $\overline{z_0^*}=-z_0$ и, бидејќи $1, z_0, z_0^*$ лежат на една иста права, z_0 е реален. Нека $z_0>0$. Заради симетрија имаме: $(-z_0-1)(z_0-1)=a \iff z_0=\sqrt{1-a^2}$.

Пресликувањето

$$\zeta = \frac{z-z_0}{z+z_0}$$

го пресликува z_0 во 0, $-z_0$ во ∞ и заради принципот на симетрија имагинарната оска и кружната линија $|z-1|=a$ се пресликуваат во концентрични кружни линии со центар во 0.

Бидејќи $\zeta(\infty)=1$, $\zeta(1+a) = \frac{1+a-z_0}{1+a+z_0} < 1$.

Функцијата ζ ја множиме со

$$\frac{1+a+z_0}{1+a-z_0} = 2.$$

Имаме:

$$1+a+z_0= 2+2a-2z_0 \iff 3z_0=a+1 \iff 3\sqrt{1-a^2}=1+a \ , \ a_1=4/5,$$

$$z_0= 3/5.$$

Бараната функција е

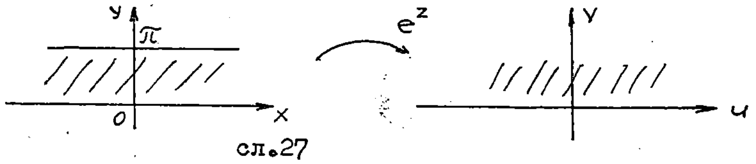
$$w = 2\,\frac{z - 3/5}{z + 3/5} \;.$$

4. ПРЕСЛИКУВАЊА ЗАДАДЕНИ СО ЕЛЕМЕНТАРНИ ФУНКЦИИ

Ја посматраме функцијата $w=e^z= e^x(\cos y+i\sin y)$.

Тогаш е : $u = e^x\cos y$, $v= e^x\sin y$.

Ја посматраме бесконечната лента $0\leqslant y\leqslant \pi$ во z-рамнината. Имаме $v=e^x\sin y \geqslant 0$. Со пресликувањето $w=e^z$ бесконечната лента со ширина π се пресликува во горната полурамнина.



сл.27

Рабовите на бесконечната лента се пресликуваат како што следува:

$y= 0,\quad x\geqslant 0$ во $v=0$ и $u\geqslant 1$

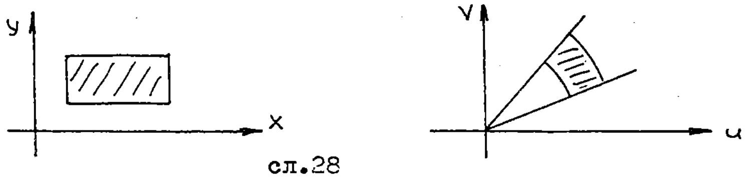
$y= 0,\quad x\leqslant 0$ во $v=0$ и $0\leqslant u\leqslant 1$

$y= \pi,\quad x\geqslant 0$ во $v=0$ и $u\leqslant -1$

$y= \pi,\quad x\leqslant 0$ во $v=0$ и $-1\leqslant u\leqslant 0$.

Правоаголната област $c_1\leqslant x\leqslant c_2$, $c_3\leqslant y\leqslant c_4$ се пресликува во областа $\exp c_1 \leqslant \varrho \leqslant \exp c_2$, $c_3 \leqslant \arg z \leqslant c_4$.

Областите и нивните соодветни слики се покажани на сл.28.



сл.28

Го посматраме пресликувањето зададено со функцијата $w=\sin z$. Од $\sin z=\sin x\,\mathrm{ch}\,y+i\cos x\,\mathrm{sh}\,y$ добиваме дека $u=\sin x\,\mathrm{ch}\,y$ и $v=\cos x\,\mathrm{sh}\,y$. Ако $x= \frac{\pi}{2}$, тогаш $u=\mathrm{ch}\,y$ и $v=0$. Правата $x= \frac{\pi}{2}$

се пресликува на делот $u \geqslant 1$ од реалната оска во w-рамнината. Ја посматраме половината лента во z-рамнината $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, $y \geqslant 0$. Тогаш $\cos x \geqslant 0$ и добиваме дека $v \geqslant 0$ што покажува дека половината лента се пресликува во горната полурамнина. Со елиминација на x а потоа на y се добива:

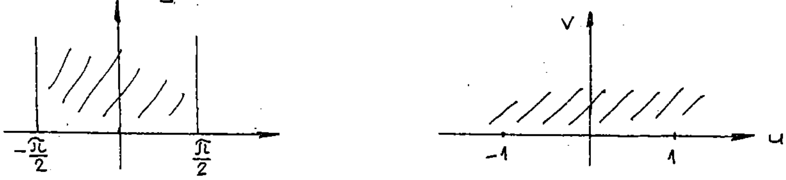
$$\frac{u^2}{ch^2 y} + \frac{v^2}{sh^2 y} = 1 \quad , \quad \frac{u^2}{\sin^2 x} - \frac{v^2}{\cos^2 x} = 1 .$$

Последните равенки претставуваат равенки на елипси и хиперболи. За дадена точка (u,v) од горната полурамнина ($v > 0$) постојат елипса и хипербола кои се сечат во таа точка. Тие криви ја определуваат точката од половината лента што се пресликува во (u,v). Точките од работ се пресликуваат како што следува :

$y=0$, $-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ во $v=0$, $0 \leqslant u \leqslant 1$

$y \geqslant 0$, $x=\frac{\pi}{2}$ во $v=0$, $1 \leqslant u$

$y \geqslant 0$, $x=-\frac{\pi}{2}$ во $v=0$, $u \leqslant -1$.



сл.29

Функцијата $w=z^2$ нема инверзна функција во целата рамнина бидејќи точките z и $-z$ имаат иста слика. Ставајќи

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \; r \geqslant 0, \; 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$$

добиваме
$$z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$$
според Муавровата формула. Дефинираме две области:

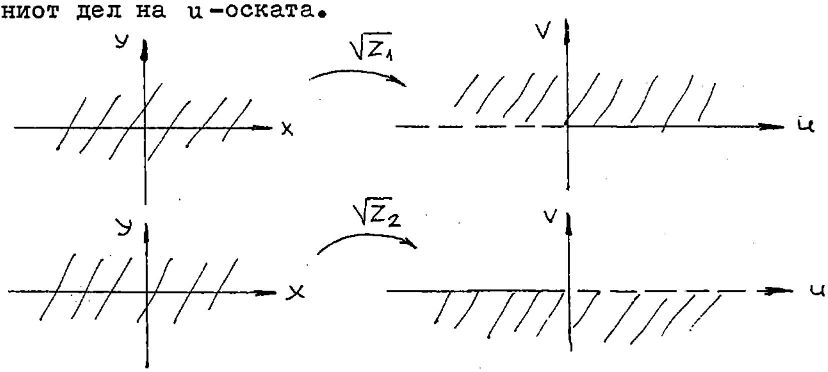
$$D_1 = \left\{ z \in C: \; 0 \leqslant \arg z < \pi \right\} \quad и \quad D_2 = \left\{ z \in C: \; \pi \leqslant \arg z < 2\pi \right\}.$$

Тогаш функциите

$$\sqrt{z_1} = \sqrt{r}\,(\cos\frac{\arg z}{2} + i\sin\frac{\arg z}{2}) \quad ,$$

$$\sqrt{z}_2 = \sqrt{r}\ (\cos\frac{\arg z+2\pi}{2}+i\sin(\frac{\arg z+2\pi}{2})$$

имаат особини: првата функција ја пресликувацелата рамнина во горната полурамнина без негативниот дел на u-оската, а втората функција ја пресликува целата рамнина во долната полурамнина без позитивниот дел на u-оската.

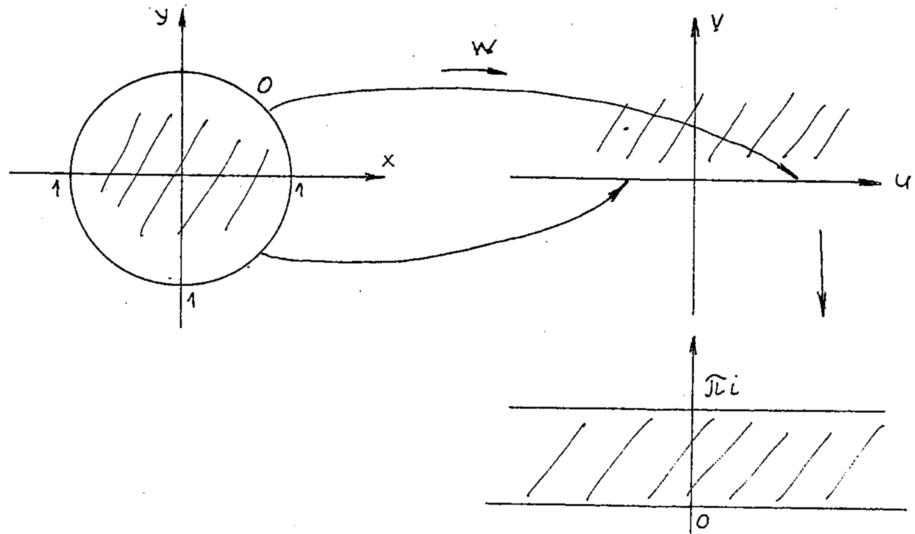


сл. 30

5. ПРИМЕР НА КОНТУРЕН ПРОБЛЕМ РЕШЕН СО МЕТОДОТ НА КОНФОРМНИ ПРЕСЛИКУВАЊА

Пример 6. Се бара хармониска функција во внатрешноста на единичната кружна линија која прима вредност нула на горната половина од кружната линија и 1 на долната половина од кружната линија. Бараната функција претставува напон на цилиндричен кондензатор со напон нула на едната страна и единица на другата страна.

Прво со пресликувањето $w = -i\,\frac{z-1}{z+1}$ внатрешноста на единичниот круг се пресликува во горната полурамнина.



сл. 31

Од

$$i \mapsto -i\,\frac{i-1}{i+1} = -i\frac{i-1}{i+1} = \frac{1+i}{i+1} = 1$$

добиваме дека горната полукружна линија се пресликува во позитивниот дел на u -оската, а долната полукружна линија се пресликува во негативниот дел на u -оската (сл.31).

Проблемот се сведува на наоѓање на хармониска функција во горната полурамнина што прима вредности 0 на позитивниот дел од реалната оска и 1 на негативниот дел од реалната оска. Со пресликувањето $\zeta = \ln w$ горната полурамнина се пресликува во лентата $0 < \mathrm{Im}\, z < \pi$, при што позитивната полуоска преминува на реалната права, а **негативната** оска на правата $\mathrm{Im}\,\zeta = \pi$. Сега проблемот се сведува на наоѓање хармониска функција на лентата $0 < \mathrm{Im}\,\zeta < \pi$ која е 0 на долната страна и 1 на горната страна. Јасно е дека таква функција е :

$$\varphi = \frac{1}{\pi}\ \mathrm{Im}\,\zeta .$$

Нека $w=u+iv$. Тогаш од $\zeta = \ln|w| + i\arg w$ имаме:

$$\mathrm{Im}\,\zeta = \arg w = \mathrm{arctg}\,\frac{v}{u} \ , \quad \varphi = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,\frac{v}{u} \ .$$

Меѓутоа,

$$u+iv= -i \cdot \frac{x+iy-1}{x+iy+1} \cdot \frac{x+1-iy}{x+1-iy} = \frac{2y-i(x^2+y^2-1)}{(x+1)^2+y^2}$$

така што бараното решение е дадено во облик :

$$\varphi(x,y)= \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}\frac{1-x^2-y^2}{2y}$$

каде што arctg прима вредности меѓу 0 и π; $(\operatorname{arctg}(-1)= \frac{3\pi}{4})$.

Имаме

$$\lim_{r\to 1} \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = \lim_{r\to 1} \frac{1-r^2}{2r\sin\theta} .$$

За $0<\theta<\pi$ имаме $0<\sin\theta$, па е :

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1-r^2}{2r\sin\theta} = \lim_{r\to 1} \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} (0+) = 0 \cdot \frac{1}{\pi} = 0 .$$

За $y<0$, $\sin\theta<0$, имаме

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1-r^2}{2r\sin\theta} = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg}(0-) = \frac{1}{\pi}\cdot\pi = 1$$

со што е покажано дека функцијата φ ги задоволува контурните услови.

6. ЗАДАЧИ

1. Користејќи ја тригонометриската форма на комплексен број, да се покаже дека со пресликувањето

$$w =z + \frac{1}{z}$$

двете половини на единичната кружна линија се пресликуваат во сегментот $-2\leqslant u\leqslant 2$, $v= 0$.

2. Да се најде сликата на кружната линија $|z|=r$ со пресликувањето $w = z + \frac{1}{z}$.

3. Да се докаже дека со пресликувањето

$$w = e^{i\varphi}\frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z} \qquad (|\alpha| < 1)$$

единичниот круг се пресликува во самиот себе. Дали важи обратно, т.е. дали секое пресликување со тоа својство е од тој вид?

4. Да се преслика областа D ограничена со контурата $x^2+y^2=2x$ со функцијата $w=3z+1$.

5. Да се најде линеарна функција која триаголникот со врвови $z_1=0, z_2=1, z_3=i$ го пресликува во триаголник со врвови соодветно во точките $w_1, = 0, w_2=2, w_3= 1+i$.

6. Да се најде сликата на кружната линија $|z|=3$ со пресликувањето дефинирано со $w = \frac{25}{z}$.

7. Да се најде сликата на областа $0<\mathrm{Re}z<1;\ \mathrm{Im}z>0$ при функцијата $w=1/z$.

8. Да се најде дробнолинеарно пресликување што кругот $|z|<1$ го пресликува во полурамнината $\mathrm{Im}z>0$, така што точките $-1,1, i$ да се пресликуваат во точките $o,-1,1$ соодветно.

9. Да се најде дробнолинеарното пресликување што кругот $|z|<5$ го пресликува во кругот $|w|<1$, така што точките $-5, 4+3i, 5$ се пресликуваат во $-1, i, 1$ соодветно.

10. Да се најде функцијата $w=f(z)$ што единичниот круг го пресликува во самиот себе и важи :

а) $f(1/2)=0$; $\arg f'(1/2) = \pi/2$.

б) $f(0)=0$; $\arg f'(0) = -\pi/2$.

11. Во која област функцијата $w = i\frac{1-z}{1+z}$ го пресликува горниот полукруг $|z| < 1,\ \mathrm{Im}z > 0$?

12. Да се најдат сликите на областа $1\leq|z|\leq2$, $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$ при функцијата $w = 1 + \frac{1}{z}$.

13. Да се преслика секторот $0 \leq \arg z < \frac{\pi}{4}$ во единичниот круг $|w| < 1$, така што точката $z = e^{i\pi/8}$ да иде во центарот $w_1 = 0$, а точката $z_2 = 0$ во точката $w_2 = 1$.

14. Да се најде функцијата што горната половина од кругот $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$ го пресликува во горната полурáмнина.

15. Да се преслика областа $0 < \operatorname{Im} z < 2\pi$, $\operatorname{Re} z < 0$ со помош на функцијата $w = e^z$.

16. Да се најде функцијата што ја пресликува рамнината z со разрез по должината на негативниот дел од реалната оска во областа $-\pi < v < \pi$ од w-рамнината.

17. Да се најде функцијата што ја пресликува областа $\frac{\pi}{2} < \arg z < \pi$ во областа $0 < \arg w < \frac{\pi}{4}$.

18. Да се најде дробнолинеарната функција при која точките $1, i$ се неподвижни, а точката 0 се трансформира во -1.

Решение. Земаме $w = \frac{z+b}{cz+d}$.

Од условот за неподвижност на точката 1 се добива: $1 = \frac{1+b}{c+d}$

од каде што имаме: $-b+c+d = 1$

Точката i е, исто така неподвижна, па затоа е: $i = \frac{i+b}{ci+d}$

Од $w(0) = -1$ добиваме : $b+d=0$

Решавајќи го системот равенки:
$$-b+c+d = 1$$
$$-b-c+id = i$$
$$b+d = 0$$

се добива: $b = -\frac{1+i}{3+i}$, $c = \frac{1-i}{3+i}$, $d = \frac{1+i}{3+i}$.

Бараната функција е

$$w = \frac{(z - (1+i)/(3+i))}{((1-i)/(3+i))z + (1+i)/(3+i)}$$

односно

$$w = \frac{(3+i)z - (1+i)}{(1-i)z + (1+i)}.$$

XIII ГЛАВА

ПРОБЛЕМОТ НА ДИРИХЛЕ

1. ПРОБЛЕМОТ НА ДИРИХЛЕ ЗА ЕДИНИЧНИОТ КРУГ

Во оваа глава ќе биде изведен методот за решавање на Лапласовата парцијална диференцијална равенка со контурни услови, познат под името проблем на Дирихле.

Нека е дадена ограничена област D со контура Γ и нека е зададена непрекината функција g на контурата Γ; се бара хармониска функција $u(x,y)$ во областа D, таква што $u|\Gamma = g$ (која се поклопува на контурата Γ со однапред зададена непрекината функција).

Понатаму ќе покажеме дека, ако постои решение, тоа е единствено.

Во оваа книга ќе биде решен проблемот на Дирихле во наједноставен случај, кога областа D е единичниот круг $\{z: |z|<1\}$, а контурата Γ е единичната кружна линија $|z| = 1$ и за полурамнина.

Во овој случај треба да се најде хармониската функција во внатрешноста на контурата Γ која што ги прима однапред зададените вредности $g(\varphi)$ на Γ, при што е $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. За функцијата g треба да се бара да биде периодична, т.е. $g(0)= g(2\pi)$.

За да се дојде до методот за решавање се претпоставува дека $g(\varphi)$ е реален дел од една аналитичка функција $f(z)$ на контурата Γ, којашто е аналитичка во внатрешноста и на самата контура Γ. Тогаш јасно е дека $\Psi = \mathrm{Re} f(z)$ е хармониска функција и е решение на проблемот на Дирихле за D, бидејќи реалниот дел на аналитичката функција е секогаш хармониска функција.

Ќе ја запишеме интегралната репрезентација на ова решение. Нека $|z|<1$. Според Кошиевата интегрална формула имаме:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\varphi})e^{i\varphi}\,d\varphi}{e^{i\varphi} - re^{i\theta}},$$

каде што $z = re^{i\theta}$, $\zeta = e^{i\varphi}$, $r < 1$.

Точката $z' = \frac{e^{i\theta}}{r}$ е надвор од кружната линија Г бидејќи е:

$$|z'| = \frac{1}{r} > 1 ,$$

од интегралната формула на Коши се добива:

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+}\frac{f(\zeta)d\zeta}{\zeta - z'} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\varphi})e^{i\varphi}\,d\varphi}{e^{i\varphi} - \frac{e^{i\theta}}{r}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\varphi})re^{i\varphi}\,d\varphi}{re^{i\varphi} - e^{i\theta}}.$$

Бидејќи е:

$$|e^{i\varphi} - re^{i\theta}|^2 = (e^{i\varphi} - re^{i\theta})(e^{-i\varphi} - re^{-i\theta}) =$$

$$= 1 + r^2 - re^{i(\varphi-\theta)} - re^{-i(\varphi-\theta)} = 1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)$$

добиваме:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\varphi})(1 - re^{i(\varphi-\theta)})d\varphi}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)}$$

$$0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\varphi})(r^2 - re^{i(\varphi-\theta)})d\varphi}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)}.$$

Со одземање на последните две равенства се добива:

$$f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(e^{i\varphi})(1 - r^2)\,d\varphi}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)}.$$

Ако се земе реалниот дел од левата и десната страна на последното равенство се добива:

$$\Psi(r,\theta) = \operatorname{Re} f(re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{g(\varphi)(1 - r^2)\,d\varphi}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \varphi)}$$

каде што $g(\varphi) = f(e^{i\varphi})$.

Последната формула е позната под името Пуасонова интегрална формула. Последната формула овозможува барање на хармониска функција во следниот облик.

Ја посматраме функцијата

$$\Psi(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{g(\varphi)(1-r^2)d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}$$

каде што $g(\varphi)$ е напрекината функција таква што $g(o)=g(2\pi)$. Последниот интеграл постои ако $r<1$ и условите за диференцирање под интегралниот знак се исполнети, така што може да се диференцира по r и θ. Ќе покажеме дека $\Psi(r,\theta)$ е хармониска функција во внатрешноста на Г. Пресметувајќи го Лапласијанот ∇^2 во поларни координати и користејќи го фактот

$$\nabla^2\left[\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}\right] = 0,$$

се добива дека $\Psi(r,\theta)$ е хармониска функција.

Следниот чекор е да се покаже дека

$$\lim_{r\to 1-}\Psi(r,\theta) = g(\theta)$$

т.е. функцијата $\Psi(r,\theta)$ на контурата $|z|=1$ се поклопува со однапред зададената функција $g(\theta)$. Земајќи $f(z)\equiv 1$ во горното изведување на Пуасоновата формула добиваме:

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}$$

со што се добива:

$$\Psi(r,\theta) - g(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{[g(\varphi)-g(\theta)](1-r^2)d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}.$$

Сега ќе покажеме дека

$$\lim_{r\to 1-}\left[\Psi(r,\theta)-g(\theta)\right] = 0.$$

Имаме:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\frac{[g(\varphi)-g(\theta)]\,(1-r^2)\,d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\theta-\delta}\frac{[g(\varphi)-g(\theta)]\,(1-r^2)d\varphi}{1+r\ -2r\cos(\theta-\varphi)}+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}\frac{[g(\varphi)-g(\theta)]\,(1-r^2)d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}+\frac{1}{2\pi}\int_{\theta+\delta}^{2\pi}\frac{[g(\varphi)-g(\theta)]\,(1-r^2)d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 \ .$$

Нека ε е произволен позитивен број. Од непрекинатоста на функцијата $g(\varphi)$ следува дека постои $\delta > 0$, таков што:

$$|g(\varphi) - g(\theta)| < \varepsilon \qquad \text{за} \qquad |\varphi-\theta| < \delta$$

Тогаш е:

$$|I_2| \leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{\theta-\delta}^{\theta+\delta}\frac{(1-r^2)d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} = \varepsilon \ .$$

Непрекинатата функција $|g(\varphi)|$ е ограничена, т.е. постои позитивен број M , таков што $|g(\varphi)| \leqslant M$, од каде што се добива:

$$|I_1| \leqslant \frac{2M}{2\pi}\int_{0}^{\theta-\delta}\frac{(1-r^2)d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} =$$

$$= \frac{M}{\pi}\int_{0}^{\theta-\delta}\frac{(1-r^2)d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)} \leqslant 2M\cdot\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\delta} <$$

$$< \frac{(1-r^2)\,2M}{(1-\cos\delta)^2} < \varepsilon$$

ако $1-r$ е доволно мало.

Слично за $1-r$ доволно мало се добива $|I_3|<\mathcal{E}$.

Имаме:
$$\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{[g(\varphi)-g(\theta)]\,(1-r^2)'\,d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}\right|\le|I_1|+|I_2|+|I_3|<3\mathcal{E},$$

со што тврдењето е докажано, бидејќи $\mathcal{E}$ беше произволен позитивен број. Забележуваме дека во доказот е искористено следново неравенство:

$$\frac{1}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}<\frac{1}{1+r^2-2r\cos\delta}\quad,\ 0<\varphi<\theta-\delta\qquad(\ast)$$

што се покажува на следниот начин:

Од $0<\varphi<\theta-\delta$, имаме $\delta<\theta-\varphi$ односно
$$\cos\delta>\cos(\theta-\varphi)$$
(бидејќи функцијата косинус е опаѓачка) се добива:
$$1+r^2-2r\cos\delta<(1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)).$$
Значи, за реципрочната вредност се добива неравенството $(\ast)$.

Досегашните резултати ќе бидат формулирани во вид на теорема.

Теорема 1. Нека $g(\varphi)$ е непрекината функција на сегментот $[0,2\pi]$ таква што $g(0)=g(2\pi)$. Тогаш функцијата
$$\Psi(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(1-r^2)g(\varphi)d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}$$
е хармониска во внатрешноста на кругот $|z|<1$ и важи:
$$\lim_{r\to1-}\Psi(r,\varphi)=g(\varphi).$$
Напоменуваме дека проблемот на Дирихле може да биде решен за секоја едноставно сврзлива област D со контура Г со помош на наредната теорема на Риман која нема да ја докажуваме.

Теорема 2. (Риман). Нека D е едноставно сврзлива област со контура Г. Тогаш постои конформно пресликување од

D во внатрешноста на единичниот круг , при што контурата на областа се пресликува на единичната кружна линија.

Забелешка. Во практични примени проблемот на Дирихле се јавува во облик , наместо непрекината функција на контурата Г, да е зададена функција која има прекин во конечен број точки, при што постојат лимеси одлево и оддесно. Тогаш е точна наредната теорема.

Теорема 3. Нека $g(e^{i\varphi})$ е непрекината функција , освен во конечен број точки $0 \leq \varphi_0 < \varphi_1 < \varphi_2 < \dots < \varphi_n < 2\pi$, во кои функцијата g има лимеси одлево и оддесно. Тогаш функцијата

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{g(e^{i\varphi})(1-r^2)\,d\varphi}{1+r^2-2r\cos(\theta-\varphi)}$$

е хармониска за $z=re^{i\theta}$, $r<1$

и уште важи

$$\lim_{r\to 1-} \Psi(re^{i\varphi}) = g(e^{i\varphi})$$

во точките во кои функцијата g е непрекината. За илустрација читателот се упатува на задача 3.

2. ЕДИНСТВЕНОСТ НА РЕШЕНИЕТО НА ПРОБЛЕМОТ НА ДИРИХЛЕ

Во овој дел ќе покажеме дека ако проблемот на Дирихле има решение, тогаш тој е единствен. За таа цел ни е потребна наредната теорема за минимум (максимум) на хармониската функција.

Теорема 4. Хармониската функција u(x,y) во ограничена област и непрекината на затворената област $\overline{D} = D \cup Г$ не може да прима вредности поголеми од максимумот на границата Г и помали од минимумот на функцијата на границата Г (освен о).

Доказ. Бидејќи функцијата $u(x,y)$ е непрекината на Г, следува дека таа достигнува најмала и најголема вредност . Нека $M = \max\{u(x,y):(x,y)\in\Gamma\}$. Да претпоставиме дека постои точка $(x_0,y_0)\in G$, таква што $\mu=u(x_0,y_0)$ и уште $\mu>M$. Ја посматраме помошната функција

$$v(x,y)=u(x,y)+\frac{\mu-M}{2d^2}\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\right]$$

каде што d е дијаметар на областа G.

Имаме: $v(x_0,y_0) = u(x_0,y_0) = \mu$.

За $(x,y)\in\Gamma$ е исполнето неравенството :

$$v(x,y) \leqslant M + \frac{\mu-M}{2d^2}d^2 = \frac{\mu+M}{2} < \mu ;$$

од каде што добиваме дека функцијата $v(x,y)$ ја достигнува својата најголема вредност во областа G во некоја точка $(\bar{x},\bar{y})$ при што се исполнети потребните услови:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0 .$$

Од

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{2(\mu-M)}{d^2} =0+2\frac{(\mu-M)}{d^2}>0$$

следува дека барем еден од изводите $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ или $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ се позитивни во G. Последното покажува дека функцијата $v(x,y)$ нема максимум во ниедна внатрешна точка што претставува контрадикција со претпоставката. Докажано е дека $u(x,y)\leqslant M$ за секоја точка $(x,y)\in G$. На потполно аналоген начин се докажува дека $m\leqslant u(x,y)$ каде што m е минимум на функцијата $u(x,y)$ на контурата Г.

Последица 1. Нека $u(x,y)$ е хармониска функција во ограничената област G и непрекината на затворената област

$$\overline{G} = G \cup \Gamma .$$

Тогаш е точно неравенството:

$$\underline{u} \leq u(x,y) \leq \overline{u}$$

каде што $\underline{u}= \min u(x,y)$ на Γ и $\overline{u} =\max u(x,y)$ на Γ .

Последица 2. (единственост на решението на проблемот на Дирихле) . Задачата на Дирихле за затворена и ограничена област и за едноставно сврзлива област има едно и само едно решение , т.е. не постојат две непрекинати функции и хармониски функции во областа G што се поклопуваат на контурата.

Доказ. Нека $u_1(x,y)$ и $u_2(x,y)$ се две хармониски функции во областа G , коишто се поклопуваат на границата , т.е.

$$u_1(x,y)\big|_{\Gamma} = u_2(x,y)\big|_{\Gamma} .$$

Ја посматраме функцијата :

$$u(x,y) = u_1(x,y)-u_2(x,y) .$$

Функцијата $u(x,y)$ е хармониска како разлика од две хармониски функции. Заради последицата 1 функцијата не може да прима вредности поголеми и помали од нула, од каде што се гледа дека $u(x,y)=o$ за секоја $(x,y)\in G$, што значи дека $u_1(x,y)=u_2(x,y)$.

3. ПРОБЛЕМОТ НА ДИРИХЛЕ ЗА ПОЛУРАМНИНА

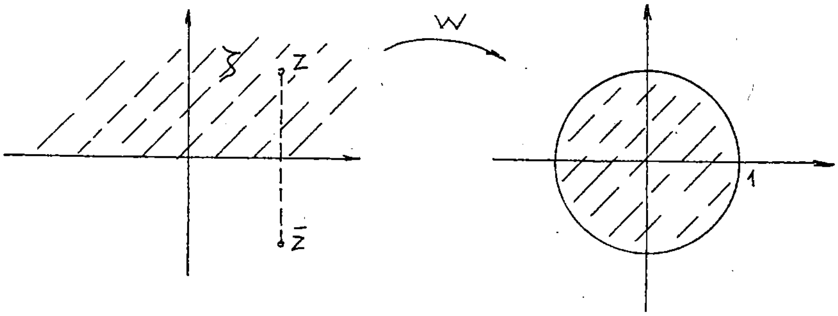
Претпоставуваме дека на реалната оска е зададена функцијата $u(t)$, која е непрекината , освен во конечен број точки на прекин, и уште постојат лимесите $\lim\limits_{t\to\infty} u(t)$ и $\lim\limits_{t\to-\infty} u(t)$. Се претпоставува конечност на тие лимеси.

Проблемот се состои во наоѓањето хармониска функција во горната полурамнина, која ќе се поклопува со зададената функција $u(t)$ на реалната оска.

Нека $z=x+iy$ е точка од горната полурамнина. Го посматраме пресликувањето

$$w = \frac{\zeta - z}{\zeta - \bar{z}} \qquad (1)$$

кое ја пресликува полурамнината $\mathrm{Im}\zeta > o$ во кругот $|w|<1, z \mapsto w=o$.



Сл 32

Ако ζ е реален, тогаш е $|w| = \frac{|\zeta - z|}{|\zeta - \bar{z}|} = 1$.

Ако u е хармониска функција на горната полурамнина тогаш $u(\zeta(w))=U(w)$ ќе биде хармониска функција во единичниот круг. Од (1) се добива;

$$\zeta w - \bar{z} w = \zeta - z \quad , \quad \zeta = \frac{\bar{z} w - z}{w-1} \quad . \qquad (2)$$

Користејќи ја теоремата за средна вредност за хармониската функција $U(w)$ во единичниот круг $|w|<1$ се добива:

$$U(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(w)\, d\tau \quad |w|<1 \qquad (3)$$

(да се види глава IX) .

Ако τ е аргумент на кружната линија $|w| =1$ имаме :

$$e^{i\tau} = \frac{t-z}{t-\bar{z}} \qquad (4)$$

Диференцирајќи го последното равенство, наоѓаме:

$$ie^{i\tau}\, d\tau = \frac{((t-\bar{z} -(t-z))\, dt}{(t-\bar{z})^2} = \frac{z-\bar{z}\ \, dt}{(t-\bar{z})^2}$$

односно

$$e^{i\tau}\, d\tau = \frac{2y\ dt}{(t-\bar{z})^2} \tag{5}$$

$$d\tau = \frac{2y}{(t-\bar{z})^2}\cdot\frac{t-\bar{z}}{t-z}\, dt = \frac{2y\quad dt}{(t-\bar{z})(t-z)} = \frac{2ydt}{|t-z|^2} = \frac{2ydt}{(t-x)^2+y^2}.$$

Ако се замени последниот резултат во (3) и ако се има предвид $U(0)=u(\zeta(o))=u(z)$, ќе добиеме:

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{y\ dt}{(t-x)^2+y^2}\quad . \tag{6}$$

Бидејќи е

$$\frac{y}{(t-x)^2+y^2} = \text{Re}\,\frac{1}{i(t-z)}\ , \tag{7}$$

можно е функцијата $f(z)$ да се изрази преку функцијата $u(z)$, како што следува:

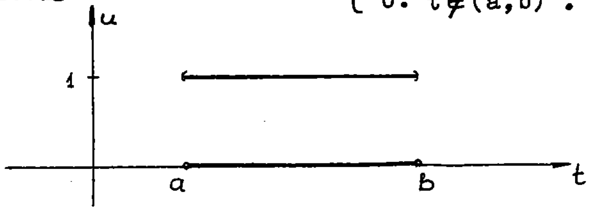
$$f(z) = \frac{1}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} u(t)\cdot\frac{dt}{t-z} + iC \tag{8}$$

Овде C е реална константа.

Интегралот (6) конвергира за ограничени функции додека за конвергенција на интегралот (8), ограниченоста на функцијата не е доволна.

За конвергенцијата на (8) доволен услов, на пример , ќе биде $|u(t)|\to o$, кога $|t|\to\infty$, не побавно од функцијата $|t|^{-\alpha}$ каде што $\alpha > o$.

<u>Пример 1</u>. Нека $u(t) = \begin{cases} 1: & t\in(a,b) \\ o: & t\notin(a,b)\end{cases}$.



Сл 33

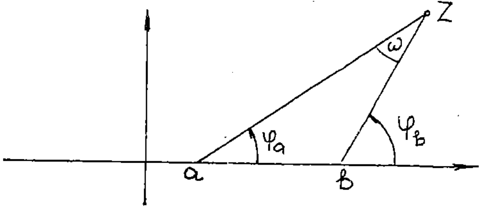
$$u(x,y)=\frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{y\,dt}{(t-x)^2+y^2}=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{t-x}{y}\right)\Big|_a^b=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{arctg}\frac{b-x}{y}-\operatorname{arctg}\frac{a-x}{y}\right). \qquad (9)$$

Ако со φ_a и φ_b ги означиме аглите образувани од векторите $z-a$ и $z-b$ со реалната оска, се добива:

$$u(z)=\frac{\varphi_b-\varphi_a}{\pi}=\frac{\omega}{\pi} \qquad (1o).$$

каде што ω е агол под кој се гледа отсечката (a,b) од комплексниот број z , (види сл 34).



Сл 34.

4. ЗАДАЧИ

1. Поаѓајќи од формулата

$$u(x,y)=\frac{y}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)dt}{(x-t)^2+y^2},$$

да се покаже $\lim_{\varepsilon\to 0}u(x_0,\varepsilon)=u(x_0)$ во сите точки од непрекинатоста на функцијата u . За функцијата u важат условите од формулата (6) во Дирихлеовиот проблем за горна полурамнина.

2. Нека $a_1,a_2,\dots,a_n$ се зададени n точки на бројната права R , такви што $-\infty<a_1<a_2<\dots<a_n<+\infty$.

Да се најде хармониска функција во горната полурамнина што на интервалите $(-\infty,a_1)$, (a_1,a_2), ... , $(a_n\ ,+\infty)$ прима постојани вредности $u_0,u_1,u_2, \dots u_n$.

3. Нека плочата G е круг дсо радиус R и со контурни температури 1° на горната полурамнина и 0° на долната полурамнина. Да се најде температурата во сите точки од G и да се опишат изотермите.

XIV ГЛАВА ЛАПЛАСОВИ ТРАНСФОРМАЦИИ

1. ОСНОВНИ СВОЈСТВА

Нека функцијата f(t) (реална или комплекснозначна) е определена на интервалот $(0, +\infty)$. Лапласовата трансформација за f(t) претставува функција од комплексна променлива:

$z = x + iy$, определена на следниов начин:

$$\tilde{f}(z) = \int_{0}^{\infty} e^{-zt} f(t)dt \qquad (1)$$

Функцијата $\tilde{f}(z)$ е определена за оние $z \in C$ - комплексна рамнина за кои интегралот конвергира.

Овдека ќе земеме функцијата f(t) да биде од експоненцијален ред. Тоа значи дека треба да постојат константи $A>0$ и $B \in R$, такви што:

$$|f(t)| < A\, e^{tB}, \qquad (2)$$

за секое $t>0$. На пример, секој полином го исполнува тој услов. Навистина, нека $f(t)=a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n$. Бидејки

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{e^t} = 0,$$

произлегува дека за $t>M$ имаме:

$$\frac{|f(t)|}{t} < 1 \qquad \text{т.е.} \qquad |f(t)|<e^t \qquad t>M$$

На интервалот $[0,M]$, $|f(t)|< M_1$;(|f(t)| е непрекината функција

$$M_1 = \sup_{t\ |0,R|} |f(t)| .$$

Според тоа,

$$|f(t)| < M_1 e^t + e^t = (M_1 + 1)\ e^t\ .$$

Функциите што ќе ги разгледуваме ќе бидат од експоненцијален вид. Освен тоа, ќе претпоставиме дека на секој конечен интервал $[0,a]$ се ограничени и интеграбилни.

2. АПСЦИСА НА КОНВЕРГЕНЦИЈА

Сега ќе разгледаме за кои вредности на Z е определена функцијата $\tilde{f}(z)$ и каде е аналитична.

Теорема 1. Нека $f:[0,+\infty)\to$ C(или R) и нека е од експоненцијален вид и нека:

$$\tilde{f}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt$$

Постои единствен број σ, $-\infty<\sigma<\infty$, таков што:

$$\int_0^\infty e^{-zt} f(t)\,dt \qquad \begin{cases} \text{конвергира за } \operatorname{Re}z>\sigma \\ \text{дивергира за } \operatorname{Re}z<\sigma \end{cases} \tag{3}$$

Понатаму, $f(z)$ е аналитична на множеството $D=\{z:\operatorname{Re}z>\sigma\}$ и важи:

$$\frac{d}{dz}\tilde{f}(z) = -\int_0^\infty t\ e^{-tz} f(t)\,dt \tag{4}$$

за: $\operatorname{Re}z>\sigma$.

Бројот σ се вика апсциса на конвергенција. Бројот ρ го дефинираме со

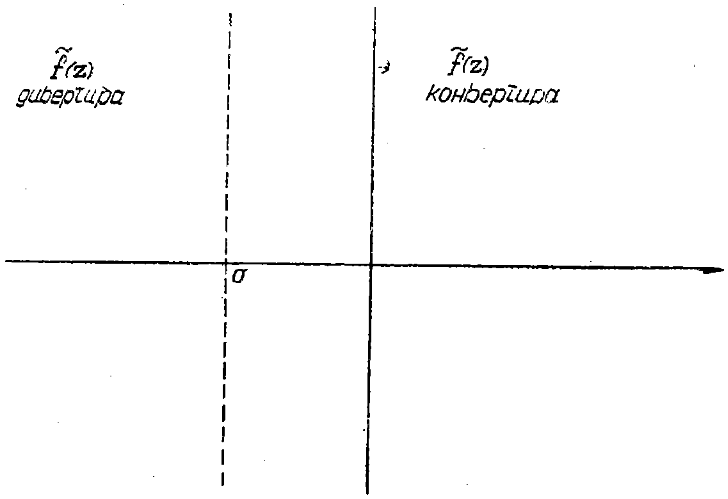
ρ = inf {B $\in$ R. Постои. A> 0, такво што:

$|f(t)| < A\ e^{Bt}\}$,

Тогаш: $\sigma < \rho$.

Множеството $\{Z: \mathrm{Re}z > \sigma\}$ се вика полурамнина на конвергенција.

(Ако $\sigma = -\infty$, тогаш целата комплексна рамнина е C.



сл. 35

Во општ случај не можеме да кажеме ништо за конвергенцијата на $\tilde{f}(z)$ на вертикалната линија Rez $=\sigma$.

Доказот на оваа теорема ќе го дадеме подоцна.

Понекогаш, за појасно, ќе пишуваме $\sigma(f)$ или $\rho(f)$.

Преминувањето $f \to \tilde{f}$ е очигледно линеарно,т.е. $(af+b\tilde{g}) = a\tilde{f} + b\tilde{g}$, за Rez> max { $\sigma(f)$, $\sigma(g)$, a,b - константи.

Исто така, ако $\tilde{f} = \tilde{g}$, тогаш $f = g$. Поточна е наредната теорема.

Теорема 2. Да претпоставиме дека f и h се непрекинати и дека $\tilde{f}(z) = \tilde{h}(z)$ за Rez> y_0 за некое y_0. Тогаш $f(t) = h(t)$ за t $[0,\infty)$

Оваа теорема не е така едноставна како што изгледа. Поточно, ние не сме во можност да дадеме комплетен доказ, но главната идеја на доказот ќе ја дадеме подоцна. Имајќи ја предвид теоријата на интеграцијата, резултатот од теоремата 2 ќе го прошириме на прекинати функции, но притоа, ќе модифицираме "еднаквост на функциите". Очигледно, ако f(t) ја промени својата вредност во една точка t, интегралот што ја определува функцијата $\tilde{f}(z)$ нема да се промени, т.е. $\tilde{f}(z)$ останува иста.

Теоремата 2 ни овозможува да дадеме одговор на проблемот: "дадена е g(z), да се најде f(t), таква што $f^2=g$. Бидејќи е јасно дека може да постои само една таква непрекината функција f(t). Функцијата f ќе ја викаме инверзна Лапласова трансформација за g.

3. ЛАПЛАСОВА ТРАНСФОРМАЦИЈА ОД ИЗВОДИ

Најголема корист од Лапласовата трансформација е таа што диференцијалните проблеми се заменуваат со алгебарски. Таа процедура се базира на наредната теорема.

Теорема 3. Нека f(t) е непрекината на $(0,\infty)$ и по делови непрекинато диференцијабилна. Тогаш за $\mathrm{Re}z>\rho$ (како што е дадено во теоремата 1),

$$\tilde{\left(\frac{df}{dt}\right)}(z) = z\tilde{f}(z)-f(o) \qquad (6)$$

Доказ. Според дефиницијата,

$$\tilde{\left(\frac{df}{dt}\right)}(z)= \int_0^\infty e^{-zt}\,\frac{dt}{dt}\,dt .$$

Со парцијална интеграција добиваме:

$$\lim_{t_o\to\infty}\left(e^{-zt}f(t)\left(\begin{smallmatrix}t_o\\ o\end{smallmatrix}\right)+\int_0^{\infty}ze^{-zt}f(t)dt\right.$$

(Да споменеме дека парцијалната интеграција може да се примени на по делови непрекинато диференцијабилни функции).

Според дефиницијата за ρ, $|e^{Bto}f(t_o)|< A$ за некое $B<\mathrm{Re}z$. Следователно:

$$|e^{-zto}f(to)|=|e^{-(z-B)to}|\ |e^{-Bto}f(to)|<e^{-(\mathrm{Re}z-B)to}A$$

Последната големина се стреми кон 0 кога $t_o\to\infty$. Така добиваме: $-f(o)+z\tilde{f}(z)$, што беше и наше тврдење.

Да забележиме дека покажавме постоење на $(\widetilde{\frac{df}{dt}})$. За $\mathrm{Re}z>\rho$, меѓутоа, апсцисата на конвергенција може да биде и помала.

Ако равенството (6) го примениме на $(\frac{d^2\tilde{f}}{dt^2})$ ќе добиеме:

$$\left(\frac{d^2\tilde{t}}{dt^2}\right)(z)=z^2f(z)-z\tilde{f}(o)-\frac{df}{dt}(o) \qquad (7)$$

Теорема 4. Нека $g(f)=\int_0^t f(\tau)d\tau$. Тогаш за $\mathrm{Re}z>\max\{o,\rho(f)\}$:

$$\tilde{g}(z)=\frac{\tilde{f}(z)}{z}\quad . \qquad (8)$$

Ќе дадеме уште некои теореми кои се однесуваат на особините на Лапласовата трансформација.

Теорема 5. Нека $a\in C$ и нека $g(t)=e^{-at}f(t)$. Тогаш за $\mathrm{Re}z>\tau(f)-\mathrm{Re}a$,

$$\tilde{g}(z)=\tilde{f}\ (z+a). \qquad (9)$$

Доказ: Според дефиницијата:

$$\tilde{g}(z)=\int_0^\infty e^{-zt}e^{-at}f(t)dt=\int_0^\infty e^{-(z+a)t}f(t)dt=$$

$$=\tilde{f}(z+a)$$

кое важи, ако $Re(z+a)>\sigma$.

Теорема 6. Нека

$$H(t)=\begin{cases}0 & \text{за} \quad t<o\\ 1 & \text{за} \quad t>o\end{cases}$$

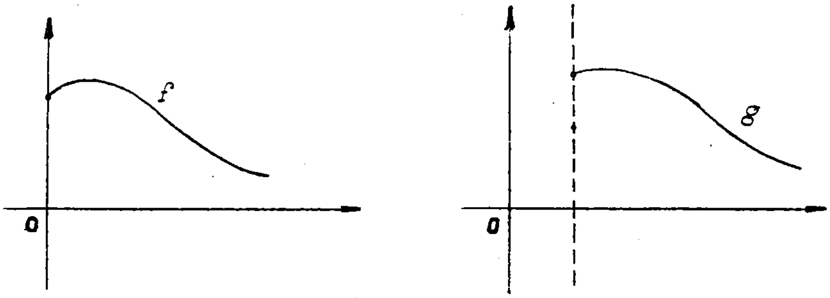
$H(t)$ се вика Хевисајдова функција

Нека $a\geqslant 0$ и $g(t)=f(t-a).H(t-a)$, т.е.

$$g(t)=\begin{cases}0 & \text{за} \quad t<a\\ f(t-a) & \text{за} \quad t\geqslant a\end{cases} \tag{10}$$

Тогаш за $Rez>\sigma$, $\tilde{g}(z)=e^{-az}\tilde{f}(z)$.

Доказ: Според дефиницијата и бидејќи $g=o$, за $0<t<a$,



Сл.35

$$g(z)=\int_0^\infty e^{-zt}g(t)dt=\int_a^\infty e^{-zt}f(t-a)dt.$$

Ако ставиме $\tau=t-a$, ќе добиеме:

$$\tilde{g}(z)=\int_0^\infty e^{-t(\tau+a)}f(\tau)d\tau = e^{-za}\tilde{f}(z)$$

4. КОНВОЛУЦИЈА

Конволуцијата на функциите $f(t)$ и $g(t)$ се дефинира со:

$$(f*g)z = \int_0^\infty f(t-\tau)g(\tau)d\tau, \qquad t>0 \qquad (11)$$

каде сме ставиле $f(t)=0$ за $t<0$.

Сега ќе покажеме како се определува Лапласовата трансформација на конволуција.

Теорема 7. Имаме $f*g=g*f$ и

$$(\tilde{f}*\tilde{g})(z)=\tilde{f}(z).\tilde{g}(z), \qquad (12)$$

кога $\operatorname{Re} z>\max\{\rho(f),\rho(g)\}$

Доказ. Имаме $(\tilde{f*g})(z)=\int_0^\infty e^{-zt}(\int_0^\infty f(t-\tau)g(\tau)d\tau)\ dt =$

$$= \int_0^\infty e^{-z\tau}e^{-z(t-\tau)}\int_0^\infty f(t-\tau)g(\tau)d\tau dt$$

Ако ставиме $x=t-\tau$ и се потсетиме дека $f(s)=0$ за $s<0$, ќе добиеме:

$$\int_0^\infty e^{-z\tau}\tilde{f}(z)g(\tau)d\tau = \tilde{f}(z)\tilde{g}(z).$$

Со смена на променливите не е тешко да се покаже дека $f*g=g*f$.

Сега ќе ги докажеме недокажаните теореми.

Теорема 1. Нека $f\colon [0,\infty)\to C$ (или R) е од експоненцијален ред и нека

$$\tilde{f}(z) = \int_{o}^{\infty} {}^{-zt}f(t)dt$$

Постои единствен број $\sigma, -\infty<\sigma<\infty$ таков што:

$$\int_{o}^{\infty} e^{-zt}f(t)dt \quad \begin{matrix} \text{конвергира за } Rez>\sigma \\ \text{дивергира за } Rez<\sigma \end{matrix} \tag{3}$$

Понатаму, $\tilde{f}(z)$ е аналитична на множеството $A=\{z\ Rez>\sigma\}$ и имаме:

$$\frac{d}{dz}\tilde{f}(z) = -\int_{o}^{\infty} te^{-tz}f(t)dt \tag{4}$$

Бројот σ се вика апсциса на конвергенција и ако дефинираме број ρ со

$$\rho = \inf\{B\epsilon R\ ,\text{постои } A>0, \text{ такво што } |f(t)|< A\ e^{Bt} \tag{5}$$

Тогаш $\sigma\leq\rho$.

За да ја докажеме теоремата ќе го користиме наредниот важен резултат.

Лема 1. Нека $\tilde{f}(z) = \int_{o}^{\infty} e^{-zt}f(t)dt$ конвергира за $z=z_o$. Нека $0<Q<\pi/2$ - и дефинираме множество

$$S_Q = \{Z\colon |\arg(z-z_o)|< Q\}$$

Тогаш $\tilde{f}(z)$ конвергира рамномерно на S_Q.

Доказ: Нека $h(x)=\int_0^x e^{-z_0 t} f(t)dt - \int_0^\infty e^{-z_0 t} f(t)dt$

така што $h\to 0$ кога $x\to\infty$. Ќе покажеме дека за секое $\varepsilon>0$ постои t_0, такво што t_1, $t_2>t_0$ имплицира:

$$|\int_{t_1}^{t_2} e^{-zt} f(t)dt|<\varepsilon$$

За секое $z\in S_Q$. Оттука следува дека $\int_0^\infty f(t)dt$ конвергира рамномерно на S_Q кога $x\to\infty$, според Кошевиот критериум

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-zt} f(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} e^{-(z-zdt} e^{-t_0 t} f(t) \; dt$$

За дадено $\varepsilon>0$ избираме t_0, такво што $|h(t)|<\varepsilon/3$ и $|h(t)|<\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{6 \sec Q}$ за $t>t_0$,

Тогаш за $t_2>t_0$,

$$|e^{-(z-z_0)t2} h(t_2)|<|h(t_2)| <\varepsilon/3$$

бидејќи $|e^{-(z-t_0)t_2} h(t_2)|=e^{-(Rez-Rez_0)t_2}<1$ зашто $Rez>Rez_0$.

Слично, за $t_1>t_0$,

$$|e^{-(z-z_0)t_1} h(t_1)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

Уште треба да го оцениме последниот член:

$$|(z-z_0)\int_{t_1}^{t_2} e^{-(z-z_0)t} h(t)dt|<(z-z_0)\varepsilon' \int_{t_1}^{t_2} e^{-(x-x_0)} dt$$

каде $x=Rez$ и $x_0=Rez_0$. Ако $z=z_0$, тој член ќе биде 0.

Ако $z \neq z_o$, тогаш $x \neq x_o$, и имаме:

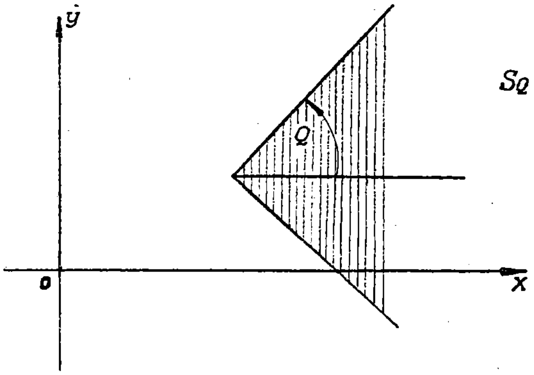
$$\varepsilon' \frac{|z_o - z_Q|}{x-x_o} \{e^{-(x-x_o)t_1} - e^{(x-x_o)t_2}\} < 2\varepsilon' \frac{|z-z_o|}{x-x_o} < 2\varepsilon' \sec Q = \frac{\varepsilon}{3}$$

Да забележиме дека ограничувањето $0<Q<\frac{\pi}{2}$ е потребно за да може $\sec Q = \frac{1}{\cos Q}$ да биде конечен.

Комбинирајќи ги горните неравенства добиваме:

$$\left|\int_{t_1}^{t_2} e^{-zt} f(t)\,dt\right| < \varepsilon$$

Ако t_1, $t_2 > t_o$ за сите S_Q, завршен е доказот на лемата.



Сл. 37

Сега ќе го дадеме доказот на теорема 1.

Доказ на теорема 1. Нека $\sigma = \inf\{x: \int_0^\infty e^{-xt} h(t)\,dt$ дивергира$\}$

Од лема 1 имаме: ако $f(z_o)$ конвергира, тогаш $\tilde{f}(z)$ конвергира за $\mathrm{Re}z > \mathrm{Re}z_o$ зашто z се наоѓа во некој S_Q за z_o.

Нека $\mathrm{Re}z > \sigma$. Од дефиницијата за σ постои $x_o < \mathrm{Re}z_o$, такво што

$$\int_0^\infty e^{-x_o t} f(t)\,dt \quad \text{конвергира.}$$

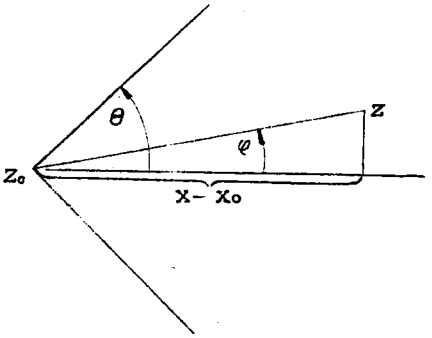
Следователно, $\tilde{f}(z)$ конвергира според лема 1.

Обратно, нека $\mathrm{Re}z<\sigma$ и $\mathrm{Re}z<x<\sigma$. Ако $\tilde{f}(z)$ конвергира ќе конвергира и $\tilde{f}(x)$ и затоа $\sigma<x$ е контрадикција. Зчаи, $\tilde{f}(z)$ не конвергира за $\mathrm{Re}z<\sigma$.

Сега ќе покажеме дека $\tilde{f}(z)$ е аналитична за $\{z : \mathrm{Re}z>\sigma\}$. Нека $g_n(z)=\int_0^n e^{-zt}f(t)dt$. Функциите $g_n(z)$ конвергираат кон $\tilde{f}(z)$. Функциите $g_n(z)$ се аналитични, при што:

$$g_n'(z) = -\int_0^n t\ e^{-zt}f(t)dt$$

Треба да покажеме дека $g_n(z)$ конвергираат рамномерно на затворени кругови од множеството z: $\mathrm{Re}z>\sigma\}$.



$$S_\theta: \quad \frac{|z-z_0|}{x-x_0} = \sec\varphi < \sec\theta$$

Сл. 38

На секој диск лежи по некое S_Q во однос на некое z_0, со $\mathrm{Re}z_0>\sigma$. Тоа тврдење геометриски е дадено, но може, исто така, и аналитички да се покаже.

Затоа, според една теорема од комплексни функции, $\tilde{f}(z)$ е аналитичка на $\{z : \mathrm{Re}z>\sigma\}$:

$$(\tilde{f}(z))' = -\int_0^\infty t\ e^{-zt}f(t)dt.$$

Автоматски знаеме дека интегралната репрезенатација за изводот на f конвергира за $\mathrm{Re}z>\sigma$, како и другите изводи од повисок ред.

Уште останува да се покаже дека $\sigma<p$. За да го покажеме тоа доволно е да покажеме дека $\sigma<B$, ако $|f(t)|<Ae^{Bt}$. Тоа ќе важи, ако $\tilde{f}(z)$ конвергира секогаш кога $\mathrm{Re}z>B$. Навистина, ние ќе ја покажеме апсолутната конвергенција.

Да забележиме дека $|e^{-zt}f(t)|=|e^{-(z-B)t}e^{-Bt}f(t)|$ $<e^{-(\mathrm{Re}z-B)}A$. Бидејќи $\int_0^\infty e^{-\alpha t}dt=\frac{1}{\alpha}$ конвергира за $\alpha>0$, $\int_0^\infty e^{-zt}f(t)dt$ конвергира апсолутно.

За да покажеме дека $\tilde{f}=\tilde{h}$ имплицира f=hза непрекинати функции f и h, доволно е да се посматра f-h, врз основа на наредната теорема.

Теорема 2'. Нека функцијата f(t) е непрекината и нека $\tilde{f}(z)=0$ за $\mathrm{Re}z>y_0$ за некое y_0. Тогаш $f(t)=0$ за сите $t\in[0,+\infty)$.

За доказ на оваа теорема ќе ја искористиме наредната лема.

Лема 2. Нека функцијата f е непрекината на $[0,1]$. Да претпоставиме дека $\int_0^1 t^n f(t)dt=0$ за сите $n=0,1,2,\ldots$ Тогаш f=0.

Ова тврдење има резон зашто од него следува дека $\int_0^1 P(t)f(t)dt=0$ за секој полином P(t).

Доказ на лема 2. Точниот доказ на оваа лема зависи од Ваерштрасовата теорема за апроксимација на функции со полиноми, според која, секоја непрекината функција на затворен интервал е рамномерна граница од полиноми. Според таа теорема имаме $\int_0^1 g(t)f(t)dt=0$ за секоја непрекината функција g. Резултатот ќе следува, ако земеме g=f и ако имаме предвид дека интегралот од негативната непрекината функција е нула само ако функцијата е секаде еднаква на нула.

Доказ на теоремата 2′. Сега лесно ќе ја докажеме теоремата 2′. Да претпоставиме дека

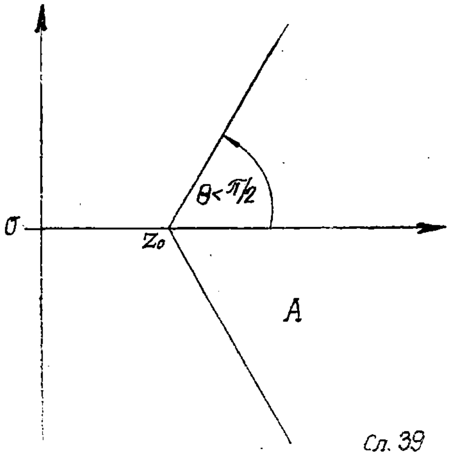
$$\tilde{f}(z) = \int_0^\infty e^{-zt} f(t)dt = 0$$

За Rez> σ фиксираме $x_o > y_o$ реално и ставаме $s=e^{-t}$. Со промена на променливата t и земајќи за $z=x_o+n$ $(n=0,1,2,...)$,

$$\int_0^\infty e^{-nt} e^{-x_o t} f(t)dt = \int_0^\infty s^n h(s)ds=0, \quad n=0,12.$$

каде што $h(s)=0^{-x_o s} f(s)$. Од лема 2 произлегува дека h, следователно и f, се нули.

Забелешка. Од корист е да забележиме дека $\tilde{f}(z)=0$ кога $Rez \to \infty$. Тоа може да се види од доказот на теорема 1.



Сл. 39

5. ПРИМЕРИ

1. Да се определи Лапласовата трансформација за функцијата $f(t)=e^{-at}$.

Од дефиницијата имаме:

$$\tilde{f}(z) = \int_0^\infty e^{-at}e^{-zt}dt = \int_0^\infty e^{-(a+z)t}dt =$$

$$= - \frac{e^{-(a+z)t}}{a+z}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{z+a}$$

земаме $Re(a+z)>0$. Тоа значи дека добиениот резултат важи за $Rez>-Rea$.

Да забележиме дека формулата за $\tilde{f}(z)$ важи само за $Rez> - Re\ a$, макар што функцијата $\tilde{f}(z)$ на тој дел се поклопува со една аналитичка функција на целата комплексна рамнина минус точката $z = - a$.

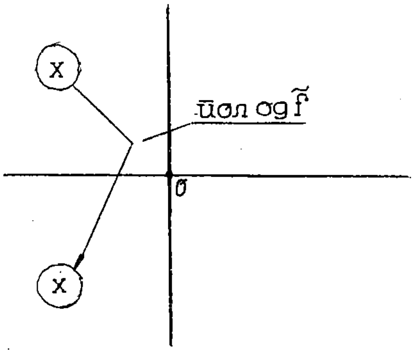
Оваа ситуација е слична со гама-функцијата.

На крај ќе покажеме дека за $f(t)=e^{-at}$, $\sigma(f)=- Re\ a$. Но, побргу видовме дека $\sigma(f)<-Re\ a$. Бидејќи интегралот дивергира во $z=a$, затоа $\sigma(f)>-Re\ a$, па оттука следува $\sigma(f)= -Re\ a$.

2. Претпоставуваме дека $\tilde{f}(z)$ конвергира за $Rez>\gamma$. Да претпоставиме, исто така, дека $\tilde{f}$ се поклопува со аналитичка функција која има пол на правата $Rez=\gamma$. Ќе покажеме дека $\sigma(f)=\gamma$.

<u>Решение.</u> Знаеме дека $\sigma(f)<\gamma$, според основната особина за σ од теоремата 1.

Бидејќи f е аналитичка за $\mathrm{Re}z>\sigma$, нема полови во областа $\{z:\mathrm{Re}z>\sigma\}$. Ако $\sigma(f)<\gamma$, тогаш мора да има пол во таа област. Следователно $\sigma(f)=\gamma$.



сл. 40

3. Нека $f(t)=\cosh t$. Да се определи $\tilde{f}$ и $\sigma(f)$.

Решение. $f(t)=\cosh t=\frac{e^{t}+e^{-t}}{2}$. Од дефиницијата добиваме:

$$\tilde{f}(z)=\frac{1}{2}\ \{\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+1}\}=\frac{z}{z^{2}-1}$$

Овдека $\sigma(f)=1$, според примерот 2, ($\sigma(e^{t})=1$ $\sigma(e^{-t})=-1$, Така, $\sigma(f)<1$, но не може да биде <1).

6. ЗАДАЧИ

1. Нека $f(t)=e^{-et}$, $t>0$. Да се покаже дека $\sigma(f)=-\infty$.
2. Имајќи ја предвид теорема 1, да се покаже дека во општ случај $\sigma\neq f$.

Упатство. Посматрај ја функцијата $f(t)=e^{t}\sin(e^{t})$ и покажи дека $\sigma=0$, $\rho=1$.

3. Директно да се покаже дека $f*g=g*f$.

4. Да се определи Лапласовата трансформација и апсцисата на конвергенција за следниве функции:

а) $f(t)=t^2+2$

б) $f(t)=t+e^{-t}+\sin t$

в) $f(t)=(t+1)^n$, n- природен број.

5. Да се покаже дека Лапласовата трансформација за функцијата $f(t)=e^{-at}\cos bt$ е:

$$\tilde{f}(z)=\frac{z+a}{(z+a)^2+b^2}$$

6. Да се покаже дека, ако $f(t)=e^{-at}t^n$, тогаш:

$$\tilde{f}(z)=\frac{(n+1)}{(z+a)^{n+1}},$$ на што е еднаква $\sigma(f)$?

7. Нека $f(t) = \cos at$. Да се покаже:

$$f(z)=\frac{z^2-a^2}{(z^2+a^2)^2},\quad \sigma(f)=|\sin a|$$

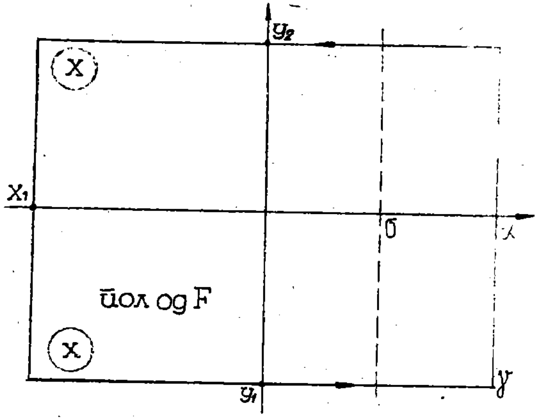
6. КОМПЛЕКСНА ИНВЕРЗНА ФОРМУЛА

Теорема 8. Нека $F(z)$ е аналитична на комплексната C, освен што има конечен број полови. Да претпоставиме дека $F(z)$ е аналитичка на половина од рамнината $\{z:\mathrm{Re}z>\sigma\}$ и дека $|F(z)|<\frac{M}{|z|}$ за сите $|z|>R$; константите се: $R>0$ и $M>0$. (Всушност е потребно $|F(t)|<\frac{M}{|z|^B}$ за некое $B>0$ и $|z|<R$). Специјално, таа претпоставка е исполнета ако $F(z)=\frac{P(z)}{Q(z)}$, каде што P и Q се полиноми, при што степенот на Q е поголем од степенот на P најмалку за 1.

За $t>0$, нека

$$f(t)=\Sigma\{\mathrm{Rez}\ e^{zt}F(z) \text{ во секој пол}\} \qquad (1)$$

Тогаш, $\tilde{f}(z)=F(z)$ за $\mathrm{Re}z>\sigma$.



Сл.41

Тоа значи дека теорема 8 ни дава формула за f(t) кога $F=\tilde{f}$ е позната. Според теорема 2, може да постои само една таква (непрекината) функција f. Функцијата f ја викаме инверзна Лапласова трансформација за F така што (1) е формула за определување на f.

Доказ. Нека $\alpha>\sigma$. Ја разгледуваме кривата γ на цртежот на сл.42. Нека страните на γ се $\mathrm{Re}z = x_1$, $\mathrm{Re}z = \alpha$ $\mathrm{Re}z = -y_1<0$, и $I_m z = y_2>0$. Ги избираме x_1, y_1, y_2 доволно големи за да можат сите полови од функцијата F да бидат во γ. Според теоремата за остатоците,

$$2\pi i|\{\mathrm{Res}\ e^{zt}F(t)\} = \int_\gamma e^{zt}F(z)dz$$

$$\int_\gamma e^{zt}F(z)dz \qquad \int_{\gamma\alpha} e^{zt}F(z)dz$$

кога $x_1, y_1, y_2 \to \infty$, каде што $\gamma\alpha$ е вертикалната крива $\mathrm{Re}z=\alpha$.

Според дефиницијата,

$$2\pi i\ f(t) = \gamma \int_\gamma e^{zt}F(z)dz$$

$\mathrm{Re}z>\alpha$. Да забележиме дека:

$$\int_0^r e^{-zt}(\quad e^{\zeta t}F(\zeta)d\zeta) = \int_\gamma \int_0^r e^{-(\zeta-z)t} F(\zeta)d\zeta dt$$

Можеме да го промениме редот на интегрирањето зашто интегралите се конечни. Таа равенка станува:

$$\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta-z}(e^{(\zeta-z)} -1)F(\zeta)d\zeta$$

Бидејќи $Rez>Re\zeta$, членот е $^{(\zeta-z)r}$ се стреми кон 0, рамномерно кога $r\to\infty$. Затоа,

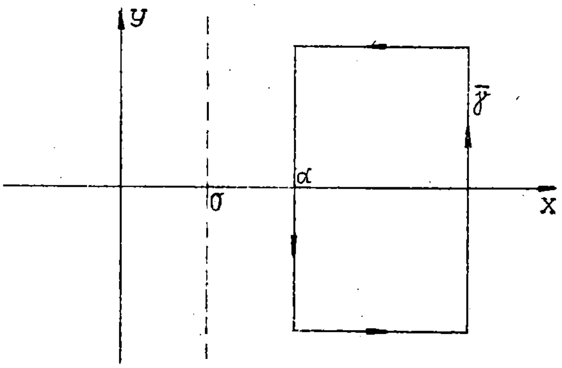
$$2\pi i\tilde{f}\ (z) = -\int_{\gamma} \frac{F(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$$

Кога $x_1, y_1, y_2 \to \infty$, горниот интеграл конвергира кон:

$$-\int_{\gamma\alpha} \frac{F(\zeta)d\zeta}{-\ z} .$$

бидејќи $\frac{F(\zeta).}{|\zeta-z|} < \frac{M}{|\zeta|^2}$ за големи $|\zeta|$.

Исто така, $\frac{F(\zeta)d}{|\zeta_= \ |} \to -\int_{\gamma\alpha} \frac{F(\zeta)d\zeta}{\zeta-z}$



Сл.42

Но, според Кошиевата интегрална формула,

$$\int_{\tilde{\gamma}} \frac{F(\zeta)d}{\zeta-z} = 2\pi i\ F(\zeta)$$

Теорема 9. Нека $P(z)$ и $Q(z)$ се полиноми, при што редот од Q е најмалку за 1 поголем од редот на P. Да претпоставиме дека нулите од Q се лоцирани во точките $z_1, z_2, \dots, z_m$ и се прости нули. Тогаш инверзната Лапласова трансформација $F(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ е дадена со

$$f(t) = \sum_{i=1} e^{z_i t} \frac{P(z_i)}{Q'(z_i)} \tag{3}$$

Понатаму, $\sigma(f) = \max\{\operatorname{Re} z_i : i=1,2,\dots m\}$.

Доказ. Бидејќи редот на Q е најмалку за 1 поголем од редот на P, исполнети се условите на теоремата 8. Следователно $f(t) = \Sigma\{\operatorname{Res} e^{zt} \frac{P(z)}{Q(z)}$. Но, сите полови се прости и затоа имаме:

$$\operatorname{Res}(e^{zt} \frac{P(z)}{Q(z)}; z_i) = e^{z_i t} \frac{P(z_i)}{Q'(z_i)}$$

Формулата за $\sigma(f)$ непосредно следува од последицата 1.

Примери

1. Ако $\tilde{f}(t) = \frac{1}{z-3}$, да се најде $f(t)$.

   $f(t) = e^{3t}$, а $\sigma(f) = 3$.

2. Ако $\tilde{f}(z) = \log(z^2+z)$ која е $f(t)$?

Решение. Да забележиме ако $g(t) = tf(t)$, тогаш,

$$\tilde{g}(z) = \frac{d}{dz} \tilde{f}(z) = \frac{d}{dz} \log(z^2+z) = -\frac{2z+1}{z^2+z}$$

За да ја определиме $g(t)$ ние ја разложуваме $\tilde{g}(z)$ на прости дропки:

$$\tilde{g}(z) = -\frac{2z+1}{z^2+z} = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}.$$

Следователно, $g(t)=-1-e^{-t}$, па затоа:

$$f(t)= - \frac{1}{t}(1+e^{-t}) \ .$$

3. Да се определи инверзната Лапласова трансформација за функцијата:

$$F(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z^2+3z-10)}.$$

Потоа да се определи $\sigma(t)$, апсцисата на конвергенција за f.

Решение

$$f(t)=\Sigma\{\text{Res} \frac{e^{zt}}{(z+1)^2(z^2+3z-10)}\}= \frac{e^{zt}}{(z+1)^2(z+5)(z-2)} \ .$$

Половите се во $z=-1, z=-5$, и $z=2$. Полот во $z=-1$ е од втор ред, а другите се прости. Остатокот (резидиумот) во $z=-1$ ќе биде $\frac{1}{12}\{te^{-t} -e^{-t} + \frac{e^{-t}}{12}\}$

Остатокот во -5 е $\frac{e^{-5t}.5}{16.7}$ и остатокот во $z=2$ е $\frac{e^{-2t}.9}{9.7}$. Следователно,

$$f(t)= \frac{1}{12}\{te^{-t}-e^{-t} + \frac{e^{-t}}{12}\} + \frac{5e^{-5t}}{16.7} + \frac{2e^{-2t}}{63}$$

Според последицата 1, $\sigma(f)=2$.

9. Задачи

1. Да се изведе формулата за развој на Хевисајд за $\frac{P}{Q}$ кога Q има двојни нули.

2. Да се определи инверзната Лапласова трансформација на следниве функции:

а) $F(z) = \frac{z}{z^2+1}$

б) $F(z) = \frac{1}{(z+1)^2}$

в) $F(z) = \frac{z^2}{z^3-1}$

3. Да се определи Лапласовата трансформација за следниве функции:

а) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$

б) $\sinh z$

в) $\frac{1}{(z+1)^3}$

ГЛАВА IV

ПРИМЕНА НА ЛАПЛАСОВАТА ТРАНСФОРМАЦИЈА НА ОБИЧНИТЕ ДИФЕРЕНЦИЈАЛНИ РАВЕНКИ

Овдека ќе дадеме краток увод во една од многуте примени на Лапласовата трансформација.

Ќе дадеме некои примери од примената, но нема да формулираме општи теореми за тоа. Методот се базира на формулата:

$$\left(\widetilde{\frac{df}{dt}}\right)(z) = z\tilde{f}(z) - f(0)$$

и на техниката за определување инверзна Лапласова трансформација.

Ќе претпоставиме дека решенијата постојат и ќе определуваме формули за нив. Кога ќе ја определиме формулата, можеме да провериме дека, навистина, сме го нашле решението. Но, понекогаш решенијата не се диференцијабилни и затоа стриктно не ја задоволуваат равенката. Таквите решенија ќе ги третираме како обопштени решенија. Понатамошната анализа на тие решенија води кон теоријата на дистрибуциите.

Пример 1. Да се реши равенката:

$y'' + 4y' + 3y = 0$ за $y(\ )$, $t>0$, при почетни услови $y(0) = 0$ и $y'(0) = 1$.

Решение. Применуваме Лапласова трансформација на двете страни од равенката. Притоа ги користиме следниве формули:

$$\left(\widetilde{\frac{dy}{dt}}\right)(z) = zy(z) - y(0) = z\tilde{y}(z)$$

и

$$\left(\frac{d^2\tilde{y}}{dt^2}\right)(z) = z^2y^2(z)-zy(0)-y'(0)=z^2y^2(z)-1$$

Според тоа, имаме:

$$z^2\ \tilde{y}\ (z)-1+4z\tilde{y}(z) + 3\tilde{y}(z) = 0, \quad \text{од тука}$$

$$\tilde{y}(z)=\frac{1}{z^2+4z+3}=\frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

Инверзната Лапласова трансформација за $\tilde{y}(z)$ ќе биде:

$$y(t) = \Sigma\mathrm{Res}\ \frac{e^{zt}}{(z+1)(z+3)} \quad \text{во } -1,\ 3.\}$$

Конечно,

$$y(t)=\frac{e^{-t}-e^{-3t}}{2}$$

Тоа е бараното решение, што може да се провери со директна замена во равенката.

Пример 2. Да се реши равенката:

$$y'(t)-y(t)= H(t-1), \quad t> 0,\ y(0) = 0.$$

каде што H е Хевисајдовата функција.

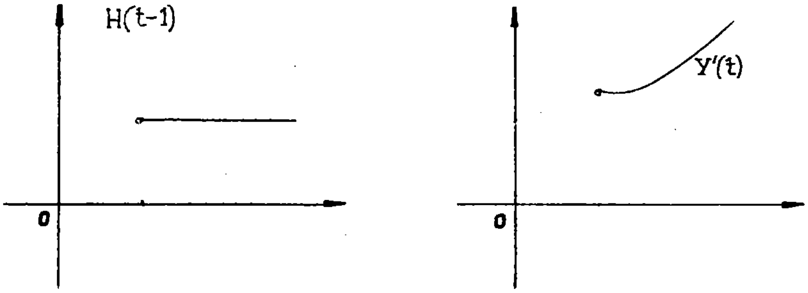
Решение. Ја применуваме Лапласова трансформација на двете страни од равенката. Добиваме:

$$z\tilde{y}(z)-\tilde{y}(0)-y(t) = \frac{e^{-t}}{z}. \qquad \tilde{y}(z) = \frac{e^{-z}}{z(z-1)}$$

Инверзната Лапласова трансформација е:

$$y(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t < 1; \\ -1+e^{t-1}, & t \geqslant 1 \end{cases}$$

Ова решение не е диференцијабилно и затоа не може да се посматра како решение во строга смисла. На цртежот се гледа дека прекинатоста на H(t-1) предизвикува скок кај $y'(t)$. Се вели дека y(t) добива импулс во $t=1$.



Сл.43

Решението на диференцијалната равенка од облик $a_n y^{(n)} +\dots+a_1 y=f$, каде што $a_1,\dots,a_n$ се константи, ќе го изразиме во вид на конволуција.

За да добиеме решение при дадени $y(0)y'(0),\dots,y^{(n-\ )}(0)$ додаваме едно партикуларно решение y_p, кое ги задоволува условите $y_p(0)=0$, $y'_p(0)=0,\dots,y_p^{(n-1)}(0)=0$, на решението y_c од соодветната хомогена равенка, при што:

$y_c(0)$, $y'_c(0),\dots,y_e^{(n-2)}(0)$ се зададени. Збирот $y_p +y_c$ е бараното решение.

2. Задачи

Да се решат следниве диференцијални равенки со Лапласовата трансформација:

1) $y'' + 6y - x = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$

2) $y'' - 4y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 1$

3) $y' + y = e^t,\quad y(0) = 0$

4) $y'' + 9y = H(t-1),\ y(0) = y'(0) = 0$

5) $y'' + 9y = H(t),\ y'(0) = y'(0) = 0.$

6) $y' + y + \int_o^t y(\tau)d\tau = f(t)$, каде $y(0)=1$ и

$$f(t)=\begin{array}{l} o,\ o<t<1,\quad t>2 \\ 1,\ 1<t<2 \end{array}$$

7) $y' + y = \cos t,\ y(0) = 1.$

Да се решат со Лапласовата трансформација следниве системи:

8)

a) $$\begin{aligned} y_1' + y_2 &= 0 \\ y_2' + y_1 &= 1 \end{aligned} \qquad y_1(0)=1,\ y_2(0) = 0$$

$$\begin{aligned} y_1' + y_2' + y_1 &= 0 \\ y_2' + y_1 &= 3 \end{aligned} \qquad y_1(0)=0,\ y_2(0) = 0$$

9) Да се реши диференцијалната равенка:

$$y'' + y = t - \sin t,\qquad y(0)=0,\ y'(0) = 1.$$

XVI ГЛАВА

ФУРИЕВИ ТРАНСФОРМАЦИИ

1. Дефиниции

Претпоставуваме дека функцијата f(t) е апсолутно интеграбилна, т.е. постои интегралот $\int_{\infty}^{\infty} |f(t)|\, dt$, бидејќи:

$$|e^{-ixt}f(t)| = |f(t)|$$

Затоа и функцијата $e^{-ixt}f(t)$ е апсолутно интеграбилна. Следоватлно можеме да ставиме:

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-ixt}\, dt \qquad (1)$$

Функцијата $\hat{f}(x)$ се вика Фуриева трансформација за дадената функција f(t). Според тоа, од секоја апсолутно интеграбилна функција постои Фуриева трансформација.

Со буквата S ќе означуваме едно множество од функции што се важни како за Фуриеовата анализа така и за примената во физиката и техниката.

Дефиниција. Множеството S се состои од сите бесконечно диференцијабилни функции со следнава особина: за даден пар ненегативни цели броеви m, n постои број $C_{m,n}>0$, таков што за секое $t\in R$ важи:

$$|t^m \varphi^{(n)}(t)| < C_{m,n} \qquad (2)$$

$\varphi(t)$ е дадена функција.

Условот под (2) може да се замени со еквивалентен услов.

<u>Теорема 1.</u> Функцијата $\varphi \in S$ точно тогаш кога за сите ненегативни цели броеви n,j постои број $C^*_{n,j}$, така што важи:

$$(1+|t|)^j |\varphi^{(n)}(t)| < C^*_{n,j} \tag{3}$$

<u>Доказ.</u> Од условот (3), очигледно следува условот (2). Сега да претпоставиме дека е задоволен условот (2).

$$(1+|t|)^j = \sum_{\nu=o}^{j} \binom{j}{\nu} |t|^\nu$$

Ако последнава релација ја помножиме со $\varphi^{(n)}(t)$, ќе добиеме:

$$(1+|t|)^j |\varphi^{(n)}(t)| = \sum_{\nu=o}^{j} \binom{j}{\nu} |t|^\nu |\varphi^{(n)}(t)|$$

Бидејќи важи условот (2) постојат константи $C_{n,\nu}$, такви што:

$$\sum_{\nu=o}^{j} \binom{j}{\nu} |t|^\nu |\varphi^{(n)}(t)| < \sum_{\nu=o}^{j} \binom{j}{\nu} C_{n,\nu}$$

Ако ставиме $C^*_{n,j} = \sum_{\nu=o} C_{n,j}$, ќе имаме:

$$(1+|t|)^j |\varphi^{(n)}(t)| < C^*_{n,j}$$

Очигледно дека функциите што се бесконечно диференцијабилни и кои надвор од некој ограничен интервал се анулираат, се елементи на множеството S. Една таква функција е, на пример:

$$\rho(t) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{1-t^2}} & \text{за} \quad |t|<1 \\ 0 & \text{за} \quad |t|>1 \, . \end{cases}$$

Јасно е дека функцијата $\rho(t)$ се анулира надвор од интервалот $[-1,1]$. Освен тоа, во внатрешноста на $[-1,1]$ и надвор од него има непрекинати изводи од кој и да било ред.

$\rho'(t) = -\frac{2t}{(1-t^2)^2} e^{-\frac{1}{1-t^2}}$ за $t \in (-1,1)$ ако $t \to \pm 1$. Очигледно $\rho'(t) \to 0$, но бидејќи надвор од $[-1,1]$ $\rho'(t)=o$, добиваме дека функцијата $\rho(t)$ има прв извод во -1 и 1. Работејќи на ист начин се убедуваме дека $\rho(t)$ има извод од кој и да било ред во -1 и 1 и дека изводот е нула.

Сега ќе покажеме дека функциите од множеството S се апсолутно интеграбилни. Навистина, нека $\varphi(t)$:

$$\int_{\infty}^{\infty} |\varphi(t) \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+|t|)^2}{(1+|t|)^2} \, |\varphi(t)| dt$$

$$< \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+|t|)^2 |\varphi(t)|}{1+t^2} dt < \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C^*_{o,2} dt}{1+t^2}$$

$$= C^*_{o,2} \operatorname{arctgt} \int_{-\infty}^{\infty} = \pi C^*_{o,2}$$

Понатаму, кој и да било извод $\varphi^{(p)}(t)$ од дадена функција $\varphi \in S$ е пак елемент од множеството S. Навистина, да ставиме:

$$\psi(t) = \varphi^{(p)}(t), \quad \psi^{n}(t) = \varphi^{(n+p)}(t)$$

$$t^m \, |\psi^{(n)}(t)| = |t|^m |\varphi^{(n+p)}(t)| < C_{n+p,m}$$

Сега ќе покажеме дека секоја функција $\varphi \in S$ може да се добие на еден определен начин од својата Фуриеова трансформација

Теорема 2. Ако $\varphi \in S$ тогаш $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\hat{\varphi}(t)dt.$

Доказ. Ако во интегралот замениме за $\hat{\varphi}$ ќе добиеме:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\, dt \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t)e^{-itn}\, du = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)e^{-it(u-x)}dtdu$$

Сега да земеме дека $\varphi(t)$ и $\Psi(t)$ се две апсолутно интеграбилни функции:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\varphi(t)\Psi(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\Psi(x)e^{ixt}dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}\varphi(u)du$$

Заради апсолутната интеграбилност можеме да го промениме редот на интеграција, па ќе добиеме:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\hat{\varphi}(x)\varphi(x)dx =\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)du \int_{-\infty}^{\sim}\Psi(x)e^{-ix(u-t)}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u)\hat{\Psi}(u-t)du = \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(u+t)\hat{\Psi}(u)du \qquad (4)$$

Ако ставиме специјално $\psi(x)=\Psi(\frac{x}{\varepsilon})$ $\varepsilon>0$,

т.е. $\Psi(x)=\Psi(\varepsilon x)$, ќе добиеме:

$$\hat{\Psi}(\varepsilon x)=\hat{\Psi}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\Psi(\varepsilon t)\, dt =$$

$$=\frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{x}{\varepsilon}u}\psi(u)\, du$$

Земајќи го предвид (4) се добива:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\hat{\varphi}(x)\,\Psi(\varepsilon x)\,dx = \frac{1}{\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x+t)\;\hat{\Psi}\,\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(t+\varepsilon x)\;\Psi(t)\,dx$$

Сега да земеме $\varphi, \Psi \in S$. Подолу ќе покажеме дека и $\hat{\varphi}\;\hat{\Psi} \in S$

Ако пуштиме $\varepsilon \to 0$ (овде со лимесот можеме да прејдеме во интегралот) ќе добиеме:

$$\Psi(0)\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}\hat{\varphi}(x)\,dx = \varphi(t)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\Psi}(x)\,dx = \varphi(t)\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\Psi}(x)\,dx =$$

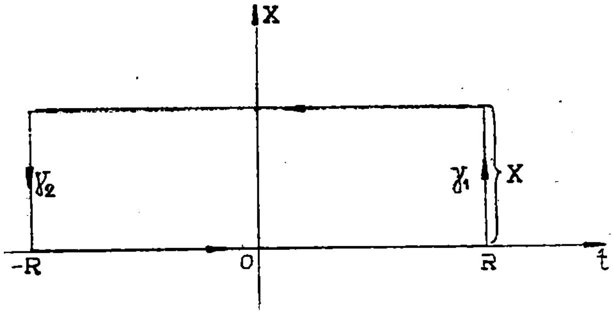
Земаме специјално $\Psi(t) = +e^{-\frac{t^2}{2}}$, па ќе биде:

$$\Psi(0) = \Psi(0) = 1, \; \Psi(t) \in S$$

$$\hat{\Psi}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\, e^{\frac{-t^2}{2}}\; dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-1/2\,(t^2+2ixt+x^2-x^2)}\,dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-1/2\,|(t+ix)^2+x^2)|}\,dt = e^{-\frac{x^2}{2}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(\,|t|\,ix)^2}\,dt$$



Сл.44

Бидејќи функцијата $W=e^{-\frac{1}{2}z^2}$ $z=t+ix$ е аналитичка, од основната теорема на Коши добиваме (цртеж.44):

$$\int_{-R}^{R} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt + \int_{\gamma_1} e^{-1/2(R+i\xi)^2}d\xi + \int_{+\infty}^{-\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2}dt$$

$$+ \int_{\gamma_2} e^{-1/2(R+i\xi)^2}d\xi = 0$$

Ако $R\to\infty$ тогаш интегралите по γ_1 и γ_2 се стремат кон 0 и затоа добиваме:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}dt + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2}dt = 0$$

Оттука следува:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t+ix)^2}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt$$

Познато е дека: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}dt = \sqrt{2}\pi$

Сега можеме да напишеме:

$$\Psi(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}\sqrt{2\pi}.$$

Аналогно се добива:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{\Psi}(x)dx = \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}\,\sqrt{2\pi} = 2\pi$$

Ако замениме во (5) ќе добиеме:

$$\int_{\infty} e^{ixt}\hat{\varphi}(x)dx = \varphi(t)\cdot 2\pi$$

Оттука конечно:

$$\varphi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt} \quad (x)dx$$

Со формулата (6), всушност, е определена инверзната Фуриеова трансформација.

Конечно можеме вака да речеме:

- ако функцијата $\varphi(t) \in S$, тогаш таа претставува инверзна Фуриеова трансформација за сопствената Фуриеова трансформација $\hat{\varphi}(x)$.

Меѓутоа, за која и да било апсолутно интеграбилна функција не важи (6) туку проблемот е далеку потежок.

Овде ќе наведеме само уште еден резултат за определувањето на една функција преку нејзината Фуриеова трансформација.

Нека функцијата f(t) е апсолутно интеграбилна и, освен тоа, нека има непрекинат извод на интервалот (a,b). Тогаш важи:

$$f(t) = \lim_{M\to\infty} \int_{-M}^{M} e^{itx} \hat{f}(x)dx \qquad \text{за} \quad t \in [a,b]$$

(види, на пр., Земаниан [10], ст.183.)

Сега ќе дадеме некои особини на Фуриеовата трансформација.

2. Особини на Фуриеовата трансформација

1. Фуриеовата трансформација е линеарна трансформација во следнава смисла:

- нека се дадени две функции f(t) и g(t).

$$\widehat{(af+bg)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}[af(t)+bg(t)]\, dt =$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}f(t)dt + b\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\, g(t)dt =$$

$$a\hat{f}(x) + b\hat{g}(x)\ ,$$ a,b - константи.

2. Фуриеовата трансформација $\hat{f}(x)$ за дадена апсолутно интеграбилна функција е ограничена функција.

$$|\hat{f}(x)| = |\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}f(t)dt| < \int_{-\infty}^{\infty}|e^{-ixt}||f(t)|dt =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt < +\infty$$

3. Нека $g(t)=f(t+a)$, па тогаш $\hat{g}(x)=\hat{f}(x)e^{+iax}$

$$\hat{g}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t+a)e^{-ixt}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ix(t-a)}\, dt$$

$$= e^{iax}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ixt}dt = f(x)e^{iax}$$

4. $\hat{f}(x+b) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(x+b)}f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}e^{-ibt}f(t)dt$

Тоа значи дека $\hat{f}(x+b)$ е Фуриеова трансформација за функцијата $e^{-ibt}f(t)$.

Фуриеовата трансформација од дадена апсолутно интеграбилна функција f(t) не мора да биде апсолутно интеграбилна. Еве пример:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{за } t<0 \\ e^{-t} & \text{за } t \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\ e^{-t} dt =$$

$$= \int_{0}^{\infty} e^{-t(1+ix)} dt = \frac{1}{1+ix}\ e^{-t(1+ix)}\Big|_{0}^{\infty} = \frac{1}{1+ix},$$

$|f(x)| = \frac{1}{|(1+ix)|} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Оваа функција не е интеграбилна на $(-\infty, +\infty)$.

Фуриеовата трансформација $\hat{f}(x)$ од една апсолутно интеграбилна функција е рамномерно непрекината функција, за која важи $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \hat{f}(x)=0$.

Ние не сме во можност да ја докажеме оваа особина во општ случај, а само ќе се задржиме на функциите од множеството S.

Теорема 3. Нека $\varphi\in S$ па тогаш $\hat{\varphi}\in S$.

Доказ. Ако $\varphi(t)\in S$, тогаш и $\varphi^{(p)}(t)$ и $(-it)^m\varphi(t)$ се од S, па затоа и $F(t) = (-it)^m\varphi^{(n)}(t) \in S$.

Бидејќи функцијата $e^{-ixt}\varphi(t)=\Phi(t,x)$ има непрекинати парцијални изводи по x, затоа:

$$\hat{\varphi}^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (-it)^n\varphi(t)e^{-ixt}\,dt$$

Имајќи го тоа предвид како и парцијалната интеграција, можеме да напишеме:

$$(ix)^m\ \hat{\varphi}^{(n)}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}\ \left[(-it)^n\varphi(t)\right]^{(m)}dt$$

$$|(ix)^m \varphi^{(n)}(x)| = |\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}[(-it)^n\varphi(t)]^{(m)}\, dt|$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-ixt}| \quad |(-it)^n.\varphi(t)|^{(m)}\, dt<\infty$$

а тоа значи дека $\hat{\varphi}(x) \in S$.

3. Фуриеова трансформација од конволуција на функции

Дефиниција. Нека $f(t)$ и $g(t)$ се две апсолутно интеграбилни функции. Функцијата

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt \tag{7}$$

се вика конволуција за функциите f и g и обично се запишува:

$$h = f*g$$

Од самата дефиниција за конволуција произлегува дека $f*g = g*f$. Навистина,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x-s)f(s)ds \quad \text{со смената}$$

$$s = x-t\ .$$

Теорема 4. Ако f и g се апсолутно интеграбилни, тогаш нивната конволуција е, исто така, апсолутно интеграбилна.

Доказ.

$$h(x)= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(x)|dx = \int_{-\infty}^{\infty} | \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)dt|dx <$$

$$< \int_{-\infty}^{\infty} |\int_{-\infty}^{\infty} |f(x-t)| \; |g(t)|dt \; dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f|(t)|dt. \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|dt<\infty$$

Сега ќе ја определиме Фуриеовата трансформација на конволуцијата од две функции.

Теорема 5. Нека $f(t)$ и $g(t)$ се апсолутно интеграбилни и $h=f*g$. Тогаш, $\hat{h}=\hat{f}.\hat{g}$.

Доказ.

$$\hat{h}(x)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}h(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}dt\int_{-\infty}^{\infty} f(t-u)g(u)du=$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)du \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixt}f(t-u)du=\int_{-\infty}^{\infty} g(u)du.\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix(t+u)}f(t)dt=$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(u)e^{-iux}du. \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixt}f(t)dt = \hat{f}(x).\hat{g}(x).$$

Да споменеме тука дека конволуцијата на функции од S е функција од S. Доказот го оставаме како вежба.

4. Врска меѓу Лапласовата и Фуриеовата трансформација

Во претходната глава Лапласовата трансформација за дадена функција f(t) ја определивме со:

$$\tilde{f}\ (z) = \int_0^\infty f(t)e^{-zt}dt, \qquad z=x+iy$$

$$\tilde{f}\ (z) = \int_0^\infty f(t)e^{-t(x+iy)}dt =$$

$$= \int_0^\infty f(t)e^{-tx}e^{-ity}dt=(\widehat{f(t)}e^{-tx})\,(y)$$

Некогаш е поедноставно да се оперира со фуриеовата трансформација отколку со Лапласовата, која пак има побогата традиција.

На крајот даваме еден пример за примена на Фуриеовата трансформација во физиката.

Ја посматраме диференцијалната равенка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

на полурамнината $t>0$, $x \in (-\infty,+\infty)$, при почетен- услов $u(x,0)=g(x)$.

Избирајќи t фиксно, нека

$$u(\xi,t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x}\,u(x,t)\,dx \qquad (8)$$

биде Фуриеова трансформација за $u(x,t)$, посматрана како функција од x.

Со формално диференцирање под знакот на интегралот и со парцијална интеграција лесно се добива:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial t}\ (\xi,t)\ ,\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = (i\xi)^2 U(\xi,t)\ ;$$

Од равенка (8) следува дека функцијата $U(\xi,t)$, како функција од t, мора да ја задоволува диференцијалната равенка:

$$-\ \xi^2\ U(\xi,t) = \frac{\partial u}{\partial t}\ (\xi,t)$$

и следователно, има вид:

$$U(\xi,t) = C(\xi)e^{-\xi^2 t}$$

Од почетниот услов за $t=0$ се добива:

$$U(\xi,0)g(\xi),$$

па затоа:

$$U(\xi,\ t)=g(\xi)=e^{-\xi^2 t}\ .$$

Ако $f(x,t)$ го означува оригиналот за функцијата $e^{-\xi^2 t}$ (t фиксно), тогаш функцијата $u(x,t)$ е конволуција за функциите g и $\frac{f}{2\pi}$, т.е.

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\infty}^{\infty} f(x-u,t)g(u)du$$

Меѓутоа,

$$d(x,t)=\sqrt{\frac{\pi}{t}}\ e^{-\frac{x^2}{4t}}\ ,$$

и следователно,

$$u(x,t)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(x-u)^2/4t}}{\quad}g(u)du.$$

Гледаме дека за решавање на проблемот формално добиваме експлицитна репрезентација, слична на Пуасоновиот интеграл. Решението што тука го најдовме нема да го разгледуваме детално.

5. Задачи

1) Да се покаже дека Фуриеовата трансформација на парна (непарна) функција е пак парна (непарна).

2) Да се покаже дека Фуриеовата трансформација на парна (непарна) функција $f(x)$ е нејзина cosin - трансформација (sin -трансформација), т.е.

$$F_c(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)\cos\xi t dt \; (F_s(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}f(t)\sin\xi t dt)$$

3) Да се определи Фуриеовата трансформација за xe^{-ax^2} и $x^2e^{-ax^2}$, $a>0$.

4) Да се покаже дека, ако (x) и $\Psi(x)$ се функции од просторот S, тогаш и нивната конволуција припаѓа на S.

ОДГОВОРИ И РЕШЕНИЈА

I ГЛАВА

2. Нека се $a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_k}$ (к-конечен број) членовите на редот кои се изменети во членови $b_{i_1}, b_{i_2}, \dots, b_{i_k}$, соодветно, и нека S_n е n-тата парцијална сума за редот Σa_n $(n > i_k)$, а S_{n_k} n-тата парцијална сума на изменетиот ред Σb_n, во кој $b_n = a_n$ за $n \neq i_1, i_2, \dots, i_k$. Тогаш, $S_n = S_{n_k} + a_{i_1} + a_{i_2} + \dots + a_{i_k} - (b_{i_1} + b_{i_2} + \dots + b_{i_k})$, односно $S_n = S_{n_k} + A$, каде што $A = a_{i_1} + \dots + a_{i_k} - (b_{i_1} + b_{i_2} + \dots + b_{i_k})$. Бидејќи редот Σa_n е конвергентен, имаме $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, па е и $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{n_k} + A) = \lim\limits_{n\to\infty} S_{n_k} + A$, од каде се добива $\lim\limits_{n\to\infty} S_{n_k} = S - A$, т.е. и редот Σb_n е конвергентен. Ако $A=0$, сумата не се менува. Во секој друг случај сумата се менува за A.

5. Тргнувајќи од формулата:

$$\frac{1}{(n+\alpha)(n+1+\alpha)} = \frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n+1+\alpha},$$

се добива: $S_n = \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha+1}\right) + \left(\frac{1}{\alpha+1} - \frac{1}{\alpha+2}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n+\alpha} - \frac{1}{n+1+\alpha}\right) =$

$$= \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{n+1+\alpha}, \quad \text{од каде } \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{\alpha}.$$

6. Мора. Нека со S_n' ја означиме n-тата парцијална сума на редот Σa_n^2. Поради $S_{n+1}' = S_n' + a_{n+1}^2 > S_n'$, низата $\{S_n'\}$ монотоно расте. Од неравенството $S_n' = a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2 \le (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2 = S_n^2$ и од конвергентноста на низата $\{S_n\}$ добиваме $S_n' < M$ (M - константа), со што е докажано дека низата $\{S_n\}$ е конвергентна, односно редот Σa_n^2 е конвергентен.

9. Нека $\{S_n\}$ е низа од парцијални суми на редот Σa_n, а $\{S_n'\}$ на редот $\Sigma 2^n a_{2^n}$, и нека редот Σa_n конвергира. Низата $\{S_n'\}$ е монотоно растечка. Од неравенството:

$$\frac{1}{2}\,S'_{n+1} = \frac{1}{2}(2a_2+4a_4+\ldots+2^{n+1}a_{2^{n+1}}) \le a_1+a_2+\ldots+a_{2^{n+1}}=S_{2^{n+1}},$$

и од ограниченоста на низата $\{S_n\}$ следува и ограниченоста на низата $\{S'_n\}$, т.е. и конвергентноста на редот $\Sigma 2^n a_{2^n}$. Користејќи го неравенството:

$$S_{2^n} = a_1+a_2+\ldots+a_{2^n} \le a_1+2a_2+\ldots+2^n a_{2^n} = S'_n,$$

на ист начин се докажува и обратното тврдење.

10. а) $a_n = \frac{1}{n^p}$, $2^n a_{2^n} = 2^n \frac{1}{(2^n)^p} = \frac{1}{(2^{p-1})^n}$ од каде следува конвергенција за $p-1 > 0$ (геометриски ред).

б) $2^n a_{2^n} = \frac{1}{\log 2}\,\frac{1}{n}$. Дивергенетн хармониски ред.

в) $2^n a_{2^n} = \frac{1}{\log 2}\,\frac{1}{n(\log n+\log\log 2)} = b_n$, а $2^n b_{2^n} = \frac{1}{n\log 2+\log\log 2}$.

Значи, со повторување на истата постапка се добива дивергентен ред.

II ГЛАВА

1. Според Т7 б), редот $\Sigma a_n\cdot\frac{1}{n}$ е конвергентен. Според истата теорема, и редот $\Sigma a_n \sin n$ е конвергентен. Редот $\Sigma\sqrt{a_n}\cdot\frac{1}{n}$ е конвергентен поради неравенството

$$\sqrt{a_n}\cdot\frac{1}{n} \le \frac{1}{2}\left[(\sqrt{a_n})^2 + (\frac{1}{n})^2\right] = \frac{1}{2}(a_n + \frac{1}{n^2}),$$

кое важи за секое n и Т1.

Редот $\Sigma\frac{a_n}{1+|a_n|}$ е конвергентен според Т8, бидејќи низата $\{\frac{1}{1+|a_n|}\}$ е монотоно конвергентна.

2. а) Од Т2, користејќи го конвергентниот ред $\frac{1}{n^2}$, следува конвергенција. б) Според Т4 следува конвергенција.
в) Конвергира кон Т4. г) Од Т9 следува дивергенција.

3. Со користење на Т2 б) и хармонискиот дивергентен ред, дадениот ред дивергира. Редот

$$\Sigma e^{-\log n} = \Sigma e^{-p\ln n} = \Sigma e^{-\ln n^p} = \Sigma\frac{1}{n^p}$$

конвергира за $p > 1$.

5. Според Т5, односно според нејзината последица, се добива:

$$\lim_{n\to\infty} n\left[(1+\frac{1}{2n+1})^{p}-1\right] = \lim_{n\to\infty} n\left[1+\frac{p}{2n+1}+\frac{p(p-1)}{2(2n+1)^2}+0(\frac{1}{n^2})-1\right]=\frac{p}{2}$$

па значи дека за $p > 2$ редот конвергира.

III ГЛАВА

1. а) $R=1$, б) $R=\frac{1}{\alpha}$, в) $R=0$, г) $R=1$, д) $R=+\infty$.

2. а) $R=1$, за $x=1$ се добива хармониски дивергентен ред, а за $x=-1$ се добива редот $\Sigma(-1)^n\cdot\frac{1}{n}$, кој е условно конвергентен.

б) $R=1$, за $x=1$ се добива конвергентен ред $\sum\limits_{n=2}(-1)^n\frac{1}{\log n}$, а за $x=-1$ дивергентен ред $\sum\limits_{n=2}\frac{1}{\log n}$ (Глава 2, задача 3. $p=1$),

в) $R=1$, за $x=1$ и $x=-1$ се добиваат дивергентни редови (Глава 1, лема 1 и глава 2, Т9).

3. а) $\int S(x)dx = x^2 s(x)$, $\int s(x)dx = \frac{x}{1-x}$ (геометриски ред), $S(x) = \frac{2x}{(1-x)^3}$. б) $S'(x) = \frac{1}{x^2}s(x)$, $s'(x) = \frac{x}{1-x}$, $S(x) = \frac{1}{x}\ln(1-x)-\ln(1-x)$. в) $S(x) = \frac{1}{x}S_1(x)$, $S_1'(x)=xS_2(x)$, $\int S_2(x)dx = \frac{x}{1-x}$, $S(x) = \frac{1}{x}\int\frac{xdx}{(1-x)^2}$. г) $S(x)=x\,\Sigma\,(x^4)^n = \frac{x}{(1-x^4)}$.

IV ГЛАВА

3. $\frac{\sin t}{t} = \Sigma\frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n+1)!}$, $f(x) = \int\limits_0^x\frac{\sin t}{t}dt = \Sigma(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)(2n+1)!}$.
$e^{-x^2} = \Sigma\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$, $\sigma(x) = \int\limits_0^x e^{-t^2}dt = \Sigma(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)\cdot n!}$.

4. $\frac{e^x-1}{x} = 1+\frac{x}{2!}+\ldots+\frac{x^{n-1}}{n!}+\ldots$, $\frac{d}{dx}(\frac{e^x-1}{x}) = \frac{1}{2!}+\frac{2x}{3!}+\ldots+\frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}+\ldots$

Бидејќи $\frac{d}{dx}(\frac{e^x-1}{x}) = \frac{xe^x-e^x+1}{x^2}$, за $x=1$ се добива:

$$\frac{1\cdot e^1-e^1+1}{1} = 1 = \frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{n}{(n+1)!}+\ldots =$$

$$= \Sigma\frac{n}{(n+1)!}.$$

2. $|z|=1$, $\arg z=\pi+\mathrm{arctg}(\mathrm{ctg}\,\frac{\pi}{8})=\pi+\mathrm{arctg}\left[\mathrm{tg}\,(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8})\right]=\frac{11}{8}\pi$

3. а) $]z|=5$, $\arg z = \mathrm{arctg}\ 3/4$.

б) $|z|=4$, $\arg z = 2/3\ \pi$.

в) $|z|=5$, $\arg z = 2\pi-\mathrm{arctg}\ 3/4$.

г) $|z|=1$, $\arg z = 2\pi$.

4. а) $2(\cos\pi+i\sin\pi)$

б) $2(\cos(3/4)\pi+i\sin(3/4)\pi$

в) $\sqrt{2(1-\sin\alpha)}\cdot[\cos(\pi/4+\alpha/2)+i\sin(\pi/4+\alpha/2)]$

5. Решение. Нека $z_1=x_1+iy_1$, $z_2=x_2+iy_2$.

Имаме: $|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2| \Longleftrightarrow |z_1+z_2|^2 \le (|z_1|+|z_2|)^2 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2}) \le (|z_1|+|z_2|)^2 \Longleftrightarrow \ldots$

$\Longleftrightarrow (x_1x_2+y_1y_2)^2 \le (x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow (x_1y_2+x_2y_1)^2 \ge 0$

На ист начин следува второто неравенство.

6. а) $-2^{19}(1+i\sqrt{3})$, б) 1.

7. Упатство: да се примени Муавровата формула.

8. Четири, $1,-1,i,-i$.

9. а) $\mathrm{Re}z=0$

в) кружен прстен $(x+2)^2+(y+1)^2 \ge 1$
$(x+2)^2+(y+1)^2 \le 4$.

д) внатрешноста на кругот без точките што лежат на кружната линија.

13. Се користи равенството $|z|^2 = z.\bar{z}$.

15. Решение. $|a-b| < |1-\bar{a}b| \Longleftrightarrow (a-b)(\bar{a}-\bar{b}) < (1-\bar{a}b)(1-a\bar{b}) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 1+a\bar{a}\cdot b\bar{b}-a\bar{a}-b\bar{b} > 0 \Longleftrightarrow (1-a\bar{a})(1-b\bar{b}) > 0 \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 1^\circ \begin{matrix} 1-a\bar{a} > 0 \\ 1-b\bar{b} > 0 \end{matrix}$ или $\begin{matrix} 1-a\bar{a} < 0 \\ 1-b\bar{b} < 0 \end{matrix}$

(Последица : ако $|a|=1$ или $|b|=1 \Longrightarrow \frac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|} = 1$

Решение. $\frac{|a-b|}{|a\bar{a}-b\bar{b}|} = \frac{|a-b|}{|\bar{a}|\,|a-b|} = \frac{1}{|\bar{a}|} = 1$

или $\frac{|a-b|}{|b\bar{b}-\bar{a}b|} = \frac{|a-b|}{|b|\,|\overline{a-b}|} = \frac{1}{|b|} = 1$)

16. а) Фамилија кругови $(x-\frac{1}{2C})^2 + y^2 = (1/2C)^2$

б) фамилија кругови $x^2+(y+1/2C)^2 = (1/2C)^2$

в) фамилија хиперболи $x^2-y^2=C$

г) фамилија хиперболи $xy=C/2$ (C е параметар)

17. $x = \xi/(1-\zeta)$, $y = \eta(1-\zeta)$

и $\zeta = (x^2+y^2)/(x^2+y^2+1)$, $\xi = x/(x^2+y^2+1)$, $\eta = y/(x^2+y^2+1)$.

18. $(1/2,0,1/2)$, $(-1/2,0,1/2)$, $(0,1/2,1/2)$, $(2/4,\frac{-2}{4},1/2)$

19. а) $\eta \geq 0$ (десна полусфера)

б) $\eta < 0$ (лева полусфера)

в) $\xi \geq 0$ (предна полусфера)

г) $\xi < 0$ (задна полусфера)

д) $\xi^2+\eta^2=1/4$, $\zeta=1/2$ (долна калота под кругот)

ѓ) останатиот дел од сферата без делот под д).

VII ГЛАВА

7. Решение. $x=\rho\cos\phi$, $y=\rho\sin\phi$. Ги користиме следниве трансформациони формули:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \rho}; \qquad \frac{\partial u}{\partial \phi} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi}$$

и добиваме

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\left(\rho\cos\phi\frac{\partial u}{\partial \theta} - \sin\phi\frac{\partial u}{\partial \phi}\right); \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho}\left(\cos\phi\frac{\partial u}{\partial \phi} + \rho\sin\phi\frac{\partial u}{\partial \rho}\right)$$

На ист начин, слични изрази за $\frac{\partial v}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, па заменувајќи ги во Коши-Римановите услови се добива:

$$\rho\cos\phi \frac{\partial u}{\partial \rho} - \sin\phi \frac{\partial u}{\partial \phi} = \cos\phi \frac{\partial v}{\partial \phi} + \rho\sin\phi \frac{\partial v}{\partial \rho}$$

$$\cos\phi \frac{\partial u}{\partial \phi} + \rho\sin\phi \frac{\partial u}{\partial \rho} = -(\rho\cos\phi \frac{\partial v}{\partial \rho} - \sin\phi \frac{\partial v}{\partial \phi})$$

Множејќи ја првата равенка со $\cos\phi$, а втората со $\sin\phi$ и собирајќи ги, потоа множејќи ја првата равенка со $\sin\phi$, а втората равенка со $\cos\phi$ и пак собирајќи ги, ги добиваме Коши-Римановите услови во поларни координати:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial v}{\partial \phi}, \qquad \frac{\partial u}{\partial \phi} = -\rho \frac{\partial v}{\partial \rho}.$$

8. Решение. Ги користиме резултатите од претходната задача:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{\rho}\left[\rho\cos\phi\frac{\partial u}{\partial \rho} - \sin\phi\frac{\partial u}{\partial \phi}\right] + \left[i(\rho\cos\phi \frac{\partial v}{\partial \rho} - \right.$$

$$\left. - \sin\phi\frac{\partial v}{\partial \phi}\right] = \frac{1}{\rho}\left[\cos\phi\frac{\partial v}{\partial \phi} - \sin\phi\frac{\partial u}{\partial \phi} - i(\frac{\partial u}{\partial \phi}\cos\phi+\sin\phi \frac{\partial v}{\partial \phi}\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[(\cos\phi-i\sin\phi)(\frac{\partial v}{\partial \phi} - i\frac{\partial v}{\partial \phi})\right] = \frac{1}{z}(\frac{\partial v}{\partial \phi} - i\frac{\partial u}{\partial \phi});$$

а) $f'(z)=nz^{n-1}$

б) $f'(z) = \frac{1}{z}$

10. $a+c = 0.$

11. 1) $a+b=0, \quad c=1,$

    2) $a=b=-1$

12. $u(x,y) = x^3-3xy^2, \qquad f(z) = i(z^3+C)$

13. а) $u = C_1x + C_2$ б) $u = C_1(ax+b) + C_2$

    в) $u = C_1 \frac{x}{x^2+y^2} + C_2$ г) не постои (C_1,C_2 параметри)

14. Користејќи го решението на задача 7 добиваме:

$$\Delta = \Delta^2u = \frac{\partial^2u}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\phi^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}$$

VIII ГЛАВА

1. а) $Rez = e^3\cos4, \quad Imz = e^3\sin4, |z|=e^3, \quad argz=4$

   б) $Rez = 0, \quad Imz=sh2, \quad |z|=sh2, \quad argz=\pi/2$

   в) $Rez=sh1, \quad Imz=0, \quad |z|=sh1, \quad argz=0$

   г) $Rez = 0, \quad Imz = sh\frac{\pi}{2}, \quad |z|=sh\frac{\pi}{2}, \quad argz = \pi/2$

2. Упатство: да се докаже со развивање на e^z во ред.

3. $\lim\limits_{\mathrm{Re}z\to-\infty} e^z = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x(\cos y+i\sin y) = 0$

$\lim\limits_{\mathrm{Re}z\to\infty} e^z = \lim\limits_{x\to\infty} (e^x(\cos y+i\sin y)) = \infty$

4. а) $\mathrm{Re}\, e^z = e^x\cos y,\ \mathrm{Im}(e^z) = e^x\sin y$

б) $\mathrm{Re}\, e^{z^2} = e^{x^2-y^2}\cos 2xy,\quad \mathrm{Im}(e^{z^2}) = e^{x^2-y^2}\sin 2xy$

в) $\mathrm{Re}(\mathrm{tg}z) = \mathrm{tg}x\,\mathrm{ch}^2y/(1-\mathrm{tg}^2x\,\mathrm{th}^2y),\ \mathrm{Im}(\mathrm{tg}z)=\sec^2x\,\mathrm{th}y/(1+\mathrm{tg}^2x\cdot\mathrm{th}^2y)$

г) $\mathrm{Re}(\cos z) = \cos x\,\mathrm{ch}y,\quad \mathrm{Im}(\cos z) = \sin x\,\mathrm{sh}y$

д) $\mathrm{Re}(z^2\cos z) = (x^2-y^2)\cdot \cos x\,\mathrm{sh}y+2xy\sin x\,\mathrm{sh}y$

$\mathrm{Im}(z^2\cos z) = 2xy\cos x\,\mathrm{ch}y - (x^2-y^2)\sin x\,\mathrm{sh}y$

ѓ) $\mathrm{Re}(\ln z) = \ln|z|,\quad \mathrm{Im}(\ln z) = \arg z$

5. а) $e^2(\cos 1+i\sin 1)$ б) $\cos 4\,\mathrm{ch}1+i\sin 4\,\mathrm{sh}1$

в) $\mathrm{ch}3\sin 2-i\cos 2\,\mathrm{sh}3$ г) $\mathrm{ch}3$

д) $i\,\mathrm{sh}3$ ѓ) $-i\,\mathrm{sh}(\pi/2)/\mathrm{ch}(\pi/2)$

е) $\ln 2+(2k+1)\pi i$

ж) $(4k+1)\frac{\pi i}{2}$ з) $\ln\sqrt{2}+(\frac{\pi}{4}+2k\pi i)$ и) $\ln\sqrt{1+y^2}+(\mathrm{arctg}y+2k\pi)i$

6. Упатство: да се користи дефиницијата.

7. Упатство: да се користи дефиницијата.

10. а) $z_{1,2}=(2k+\frac{1}{2})\pi-i\ln(3\pm2\sqrt{2})$ б) $z=k\pi+i\frac{\ln 2}{2}$,

в) $z_1=2k\pi-i\ln(\sqrt{2}-1),\ z_2=(2k+1)\pi-i\ln(\sqrt{2}+1)$

г) $x_1=-i\ln(-a+\sqrt{1+a^2})+2k\pi,\quad x_2=-i\ln(a+\sqrt{1+a^2})+(2k+1)\pi$

д) $z = k\pi$ ѓ) $z = (2k+1)\pi i/2$

13. Решение. Бидејќи $|e^z|=e^x > 0$ и е различно од 0 за кој и да било реален број x, тогаш е и $|e^z|\neq 0$ за кој и да било z.

IX ГЛАВА

1\. а) $2(i-1)$, б) $-2+\frac{4}{3}i$. 2. $8i$. 3. $(1-e)/e$.
4\. $2(1-i)$. 5. $\pi^4/64$. 6. $\pi/2$. 7. $(e^2-1)(1+i)/4$.
8\. $-(\mathrm{tg}1+\frac{1}{2}\mathrm{tg}^2 1+\frac{1}{2}\mathrm{th}^2 1)+i\mathrm{th}1$. 9. $i\pi\cos 1$.
10\. а) 0, б) $-\pi i/3$, в) $(e^{36}-1)\pi i/3$. 11. $i\pi\mathrm{sh}\pi$.
12\. 0. 13. 0. 14. $-\pi^2 i/2$. 15. 0. 16. $-\pi^2\mathrm{sh}1/2$.
17\. $-(1+i)e^i/2$. 18. $-\pi i\mathrm{ch}1$. 19. πi.

X ГЛАВА

3\. а) конвергира, б) дивергира, в) конвергира, г) дивергира.
4\. а) $R=e^{-1}$, б) $R=\frac{\sqrt{2}}{2}$, в) $R=\sqrt{2}$, г) $R=\infty$, д) $R=1$.
5\. а) $R=1$, $f(z)=-(\frac{z}{3})+\frac{2z^2}{3^2}-\frac{2z^3}{3^3}+\ldots$
б) $R=1$, $f(z)=-iz+z^3+iz^5-z^7-\ldots$
в) $R=2$, $f(z)=\ln 2-\frac{1}{2}(\frac{z}{2}+z^2/24+\frac{z^3}{3\cdot 8}+\ldots)$
6\. $R=3/2$; $f(z)=-1/3+2/3^2(z-3)-2^2/3^3(z-3)^2+\ldots$
7\. а) $|z|>\sqrt{2}$, б) $|z+i|>e$, в) $5<|z+2i|<6$,

г) Ако $|a|>|b|$, тогаш редот е дивергентен. Ако $|a|<|b|$, тогаш редот конвергира во областа $|a|<|z|<|b|$.

8\. а) $f(z)=-1/2+(3/4)z+(7/8)z^2+(15/16)z^3+\ldots)$
б) $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{2^n}$
в) $f(z)=2/z-(1/z^2)+(\frac{5}{z^3})-(7/z^4)+\ldots$
9\. а) $f(z)=(1/z^3)+(1/z^2)+\frac{1}{2!}1/2+\frac{1}{3!}+\frac{z}{4!}+\ldots$
б) $f(z)=z^4-(z^2/2!)+1/4!-1/6!z^2+\ldots$
в) $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z+2)^n}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z+2)^n}{3^{n+1}}$ г) $f(z)=\frac{-i}{2(z-1)}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2i)^n}(z-i)^n$
д) $f(z)=\sum_{n=-2}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+3)}{2^{n+4}}(z-1)^n$

10\. а) $z_n=(2n+1)\pi$ $(n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots)$ се нули од прв ред

б) $z=\pi i$ е нула од втор ред, $z_n=n\pi i$ се нули од прв ред (прости нули), в) $z_{1,2} = \pm\pi i$ се нули од втор ред

$z_n = (2n+1)\pi i$ се прости нули

11. а) отстранлива сингуларна точка $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{e^z-1}{z} = 1$

б) суштинска сингуларна точка не постои $\lim\limits_{z\to 0} f(z)$

в) пол од трет ред г) отстранлива сингуларна точка

д) суштински сингуларна точка ѓ) прост пол.

XI ГЛАВА

1. $\mathrm{Res}\, f(0) = 0$ $\mathrm{Res}\, f(\pi/4) = \frac{16}{\pi^2}\sin(\pi^2/16)$
2. $\mathrm{Res}\, f(-1) = -17/54e$ $\mathrm{Res}\, f(2) = e^2/27$
3. а) π/e б) πi в) 0
4. а) $\pi/4a$ б) $-\pi/27$

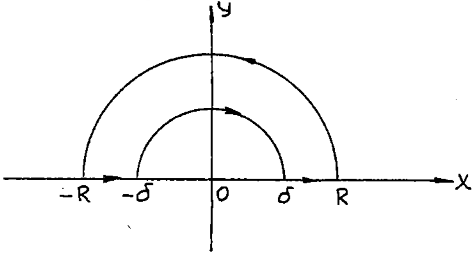
6) а) Да се земе $f(t) = \frac{ze^{iaz}}{z^2+k^2}$ и контура полукруг; $\pi e^{-ak}/2$

б) $\pi e^{-2}(2e-1)/6$

7. Решение. Заради парноста на функцијата $\sin x/x$ имаме дека

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

Го посматраме интегралот $\int_C \frac{e^{iz}}{z}\,dz$, каде што C е контура зададена на сл. 45.



Сл. 45

Подинтегралната функција има пол од прв ред во точката 0, па затоа полот се заобиколува со полукружната линија $\delta e^{i\theta}$ (θ се менува од π до 0), полукружната линија $Re^{i\theta}$ ($0\le\theta\le\pi$) и реалната оска од δ до R и од $-R$ до $-\delta$. Тогаш е:

$$\int_C f(z)dz = \left(\int_{-R}^{-\delta} + \int_{\delta}^{R}\right) + \int_{\pi}^{0} \frac{e^{i\delta e^{i\theta}}\, i\cdot\delta e^{i\theta}d\theta}{\delta e^{i\theta}} + \int_{0}^{\pi} \frac{e^{iRe^{i\theta}}\, iRe^{i\theta}d\theta}{Re^{i\theta}} = 0$$

бидејќи функцијата $f(z)$ нема полови во внатрешноста на C. Интегралот по големата полукружна линија се стреми кон нула кога $R \to \infty$ заради теорема 3, а за малата кружна линија интегралот е

$$i\int_{\pi}^{0} e^{i\delta e^{i\theta}} d\theta,$$

Користејќи го фактот подинтегралната функција во последниот интеграл да се стреми кон 1 кога $\delta \to 0$, се добива:

$$\lim_{\delta \to 0} i\int_{\pi}^{0} e^{i\delta e^{i\theta}} d\theta = -\pi i.$$

Потребно е да се докаже дека конвергенцијата

$$f_n(\theta) = e^{i\delta_n e^{i\theta}} \to 1$$

е униформна кога $n \to \infty$ $(\delta_n \to 0)$. За таа цел го посматраме модулот од разликата $f_n(\theta)-1$. Имаме:

$$|f_n(\theta)-1| = |e^{i\delta_n e^{i\theta}}-1| = e^{-\delta_n \sin\theta}\sqrt{\cos^2(\delta_n \cos\theta-1)+\sin^2(\delta_n \cos\theta)}$$

$$= e^{-\delta_n \sin\theta}\sqrt{2-2\cos(\delta n^{\cos\theta})} = e^{-\delta_n \sin\theta} 2|\sin(\delta_n \cos\theta)/2| .$$

Од $\sin\theta \geq -1$ следува дека $e^{-\delta_n \sin\theta} \leq e^{-\delta_n}$ од $|\sin x| \leq |x|$ за секој реален број x се добива дека е:

$$\sin(\delta_n \cos\theta)2) \leq \frac{1}{2}\, \delta_n |\cos\theta| \leq \frac{1}{2}\, \delta_n .$$

Конечно се добива:

$$|e^{i\delta_n e^{i\theta}}-1| < \frac{1}{2}\, \delta_n e^{i\delta_n}$$

така што оценката не зависи од θ, па се добива униформна конвергенција.

8. Решение. а) Нека C е кружна линија $\{z:|z+a|=r\}$, каде што r е доволно мал што во неговата внатрешност се наоѓа само точката $-a$. Кружната линија C има равенка $r=-a+re^{i\theta}$, $0\leq\theta\leq 2\pi$. Од дефиницијата за непарна функција имаме дека е:

$$f(-a+re^{i\theta}) = -f(a-re^{i\theta})$$

така што за остатокот ќе имаме:

$$A = \operatorname*{Res}_{z=-a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(z)dz = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(-a+re^{i\theta})ire^{i\theta}d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} -f(a-re^{i\theta})ire^{i\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} -f(a+re^{i(\theta+r)})ire^{i\theta}d\theta .$$

Ако се изврши смена на променливата

$$\theta + \pi = u(d\theta=du,\ e^{i\theta}= e^{iu}e^{-i\pi} = e^{iu})$$

во последниот интеграл и имајќи ја предвид периодичноста на подинтегралната функција се добива дека е:

$$A = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} f(a+re^{iu})re^{iu}du = \operatorname*{Res}_{z=a} f(z)$$

што требаше да се докаже. Слично се докажува под б).

XII ГЛАВА

4. $(u-3)^2+(v-1)^2=9$. 5. $w=(1+i)(1-z)$.

6. $u^2 + v^2 = (25/3)^2$.

7. $\mathrm{Re}w < 0$, $\mathrm{Im}w < 0$ (четвртина квадрант) без долната половина на кругот $|z-(1/2)| = 1/2$.

8. $w = i\,\frac{1-z}{1+z}$. 9. $w = (2z-5)/(10-z)$.

10. Да се искористи формулата $w = e^{i\phi}(z-z_0)/(1-z\bar{z}_0)$.

а) $w=i(2z-1)/(2-z)$, б) $w =-iz$.

11. $\mathrm{Re}w > 0$, $\mathrm{Im}w > 0$. 12. $\frac{1}{2} \le |w-1| \le 1$, $\frac{-\pi}{4} \le \arg(w-1) \le 0$.

13. Да се искористат формулите: $w=z^4$; $w=e^{i\phi}(z-z_0)/(z-\bar{z}_0)$

$$w = -(z^4-i)/(z^4+i).$$

14. Да се искористат формулите $w=z^2$, $w=(az+b)/(cz+d)$,

$$w = (1+z)^2/(1-z)^2.$$

15. $|w| < 1$ со разрез по должината на позитивниот дел на u-оската.

16. $w = \ln z = \ln|z| + i\arg z$

17. $w = \sqrt{ze}^{\,-i\pi/4}$ (е онаа функција за која важи $\sqrt{1}=1$).

XIII ГЛАВА

1. Решение. Од непрекинатоста на функцијата u во точката x_o следува дека за фиксен $\eta > 0$ постои $\delta > 0$, таков што:

$$|u(t) - u(x_o)| < \frac{\eta}{3}, \quad |t-x_o| < \delta.$$

$$u(x_o,\varepsilon) - u(x_o) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(t)\varepsilon dt}{(t-x_o)+\varepsilon^2} - \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{u(x_o)\varepsilon dt}{(t-x_o)^2+y^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\left[u(t)-u(x_o)\right]\varepsilon}{(z-x_o)^2+y^2}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{x_o-\delta} + \int_{x_o-\delta}^{x_o+\delta} + \int_{x_o+\delta}^{+\infty} .$$

За вториот интеграл ја имаме оценката:

$$|A_2| < \frac{\eta}{3}\,\text{artg}\,\frac{(t-x_o)}{\varepsilon} < \frac{\eta}{3}\,\frac{\pi}{2}.$$

За првиот интеграл ја имаме следнава оценка:

$$|A_1| < \frac{2M}{\pi}\int_{-\infty}^{x_o-\delta}\frac{\varepsilon dt}{(t-x_o)^2+\varepsilon^2} = \frac{2M}{\pi}\,\text{arctg}\,\frac{A-x_o}{\varepsilon}\Bigg|_{-\infty}^{x_o-\delta} =$$

$$= \frac{2M}{\pi}(\text{arctg}\,\frac{x_o-\delta-x_o}{\varepsilon} - \text{arctg}(-\infty)) = \text{arctg}(\frac{-\delta}{\varepsilon} + \frac{\pi}{2}).$$

Но, $\lim_{\varepsilon\to 0} \text{arctg}\,(\frac{-\delta}{\varepsilon}) + \frac{\pi}{2} = 0$. Слично се покажува дека:

$$|A_3| \to 0 \text{ кога } \varepsilon \to 0.$$

2. Решение. Применувајќи ја формулата (10) од примерот 1 добиваме:

$$u(z) = \frac{u_o\phi_1}{\pi} + \frac{u_1}{\pi}(\phi_2-\phi_1)+\ldots+\frac{u_n}{\pi}(\pi-\phi_n)$$

што може да се запише во обликот:

$$u(z) = \frac{\phi_1}{\pi}(u_o-u_1) + \frac{\phi_2}{\pi}(u_1-u_2)+\ldots+\frac{\phi_n}{\pi}(u_{n-1}-u_n) + u_n$$

3. Решение. Применувајќи ја Пуасоновата интегрална формула за $z = re^{i\theta}$, $|z| < R$,

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \mathrm{Re}\, \frac{Re^{i\phi}+z}{Re^{-i\phi}-z}.1.d\phi =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{1}{2}\, \frac{(Re^{i\phi}+z(Re^{-i\phi}-\bar{z})+(Re^{-i\phi}+\bar{z})(Re^{+i\phi}-z)d\phi}{|Re^{i\phi}-z|^{2}} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{R^{2}-r^{2}d(\phi-\theta)}{R^{2}+r^{2}-2Rr\cos(\theta-\phi)} = \frac{1}{2\pi}\, \frac{R^{2}-r^{2}}{R^{2}+r^{2}}\, 2\int \frac{d(\phi-\theta)}{1-\frac{2Rr}{R^{2}+r^{2}}\cos(\phi-\theta)} .$$

Од $$\int \frac{dx}{1-a\cos x} = \frac{2}{1-a}\cdot\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}}\, \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1-a}}\, \mathrm{tg}\, \frac{x}{2}\right);$$

се добива:

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\, \mathrm{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\, \mathrm{tg}\, \frac{\phi-\theta}{2}\right)\Bigg|_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\mathrm{actg}\left(\frac{R+r}{R-r}\, \mathrm{tg}\, \frac{\pi-\theta}{2}\right) + \mathrm{arctg}\left(\frac{R+r}{R-r}\, \mathrm{tg}\, \frac{\theta}{2}\right)\right],$$

имаме:

$$\mathrm{tg}\pi(u(z)) = \frac{\frac{R+r}{R-r}(\mathrm{tg}\, \frac{\pi-\theta}{2} + \mathrm{tg}\, \frac{\theta}{2})}{1-(\frac{R+r}{R-r})^{2}(\mathrm{tg}\, \frac{\pi-\theta}{2}\, \mathrm{tg}\, \theta/2} .$$

Имајќи го предвид

$$\mathrm{tg}\left(\frac{\pi-\theta}{2}\right) = \mathrm{cotg}\ \theta/2$$

се добива:

$$\mathrm{tg}\pi(u(z)) = \frac{R+r}{R-r}\, \frac{1}{\sin\theta/2\cos\theta/2}\, \frac{1}{1-\frac{(R+r)^{2}}{(R-r)^{2}}} =$$

$$= \frac{R+r}{R-r}\cdot\frac{1}{\sin\theta/2\cos\theta/2}\cdot\frac{1}{-4Rr}; \quad \mathrm{tg}\pi u(z) = \frac{R^{2}-r^{2}}{4Rr\sin\theta}.$$

Земајќи

$$z = r(\cos\theta+i\sin\theta), \quad w = i\frac{R+z}{R-z}$$

се добива:

$$i\,\frac{R+r(\cos\theta+i\sin\theta)}{R-r(\cos\theta+i\sin\theta)} =$$

$$= \frac{i(R^2-r^2)-2rR\sin\theta}{R^2+r^2-2rR\cos\theta},$$

$$\mathrm{tg}\pi(u(z)) = \mathrm{tg}(\mathrm{Arg}\; i\,\frac{R+z}{R-z})$$

така што температурата ќе биде зададена со:

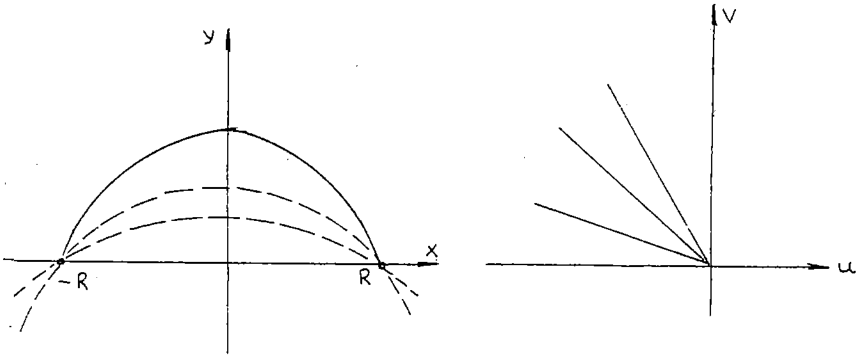
$$u(z) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{Arg}(i\,\frac{R+z}{R-z}).$$

Изотермите се зададени со:

$$\mathrm{Arg}\; i\,\frac{R+z}{R-z} = C$$

кáде што C е константа.

Функцијата $i\frac{R+z}{R-z}$ го пресликува $|z| < R$ на горната полурамнина, така што изотермите се лакови од кружници што минуваат низ точките ±R и лежат во кругот $|z| < R$.



сл. 46

ЛИТЕРАТУРА

[1] Н.Ивановски: Математичка анализа I (функции од една независно променлива), Скопје, 1981

[2] Z.P.Mamuzić, B.P.Djerasimović: Osnovi matematičke analize, Naučna knjiga, Beograd

[3] Бермант: Курс математического анализа часть 2, физматтиз, Москва, 1959

[4] Ahlfors: Complex Analysis, Mc Craw-Hill, Book Company, New York, 1966

[5] W.R.Derrick: Introductory Complex Analysis and Applications, Academic Press, 1972

[6] R.V.Churchhill: Complex Variables and Applications, Mc Graw-Hill Company, Inc. New York, 1960

[7] Konrad Knop: Theory of Functions, Part I, Dover Publications, New York, 1945

[8] Ѓ.Чупона, Б.Трпеновски во соработка со Н.Целакоски: Предавања по виша математика, книга 3, Скопје, 1972

[9] В.И.Смирнов: Курс висшей математики, Том I,II, Москва

[10] Zemanian A., Distribution theory and transform analysis, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965

СОДРЖИНА

V ГЛАВА ФУРИЕОВИ РЕДОВИ

VI ГЛАВА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

VII ГЛАВА АНАЛИТИЧКИ ФУНКЦИИ