

БУДИТЕ МАЋИОНИЧАР

Др Војислав Петровић, Нови Сад

Мађионичару је потребан неко из публике за извођење трика. Поглед му се зауставља на вама и позива вас да изађете. Пружа вам шпил од 52 карте којим се играју табљић, реми и друге популарне игре и тражи да по својој вољи изаберете и извучете пет карата. Притом он не види ни одабране ни преостале карте. Ви сте се определили за:

$\heartsuit A, \spadesuit D, \spadesuit 9, \diamondsuit 4, \clubsuit 4.$

Те карте предајете мађионичаревом помоћнику, док остатак задржавате код себе. Мађионичар и даље не види ни једне, ни друге карте. Од пет карата које сте му дали помоћник одваја једну и сакрива, а преостале четири окреће, тако да мађионичар може да их види. То су

$\spadesuit 9, \diamondsuit 4, \clubsuit 4, \heartsuit A.$ (1)

Мађионичар баца летимичан поглед на отворене карте и готово истог момента каже:

"Сакривена карта је $\spadesuit D!$ "

Фантастично, зар не? У исти мах сте и задивљени и збуњени. Што се самог извођења трика тиче, све је било "поштено". Није било ни намигивања, ни чешкања, ни било каквих других тајних сигнала. Уз то, карте су нове и неозначене, а мађионичар нимало не личи на Супермена са рендгенским очима. Ипак: "Како је успео да погоди?" То питање вам не да мира. После представе му прилазите и питате у чему је ствар. Наравно, он не жели да ода тајну трика: "Знате, ја сам професионалац. Могу вам само рећи да се и ја и помоћник доста разумемо у математику."

Није бог зна шта рекао, али ипак знате да је трик математичке природе. Такође вам је јасно да је кључна личност помоћник. Једино је он могао да пренесе податак о сакривеној карти. Али, како?

На располагању је имао само 4 карте. Један начин слања информације је да се те карте поређају у низ одређеним редом. Такви низови се у математици зову пермутације. Свакој потенцијално сакривеној карти одговарала би једна пермутација. Да не би дошло до забуне неопходно је да различитим картама одговарају различите пермутације и обратно. То значи да пермутација треба да буде бар онолико колико има карата које долазе у обзир да буду сакривене. Како 4 отворене карте не долазе у обзир, свака од преосталих 48 може да буде "она". Дакле, потребно је бар 48 пермутација.

Но, да видимо колико пермутација може да се формира од 4 карте? На прво место може да дође било која од 4 карте. Значи, 4 могућности. Друго место може да се попуни било којом од преостале 3 карте. Три могућности. За треће

место избор се своди на једну од две карте, две могућности. Коначно, за четврто остала је једна карта. Сваки избор се комбинује са свим осталим, па укупан број тражених пермутација износи $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$. Ако се карте означе са A, B, C, D и пермутације уреде лексикографски, онако како се нижу речи у речницима или имена у телефонским именицима, њихова листа изгледа овако:

$$ABCD, ABDC, ACBD, \dots, DCAB, DCBA.$$

Укупно 24. (Допишите оне које недостају.)

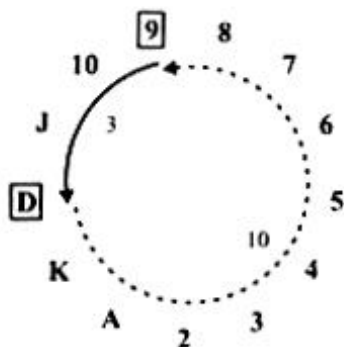
Дакле, помоћник може да формира 24 различите пермутације. Међутим за сваку од 48 карата треба му засебна. Значи, недостају 24 пермутације, што ће рећи да ова замисао не пролази.

Да ли постоји нешто ефикасније? Можда следећа идеја? Заснива се на чињеници да су све карте шпила разврстане у 4 боје, ♣ (треф), ♠ (кар), ♥ (херц), ♠ (пик), у свакој по 13 карата. Из тога следи да од извучених 5 карата, бар две морају бити исте боје. Једна од њих се сакрива, док се другом преноси информација о боји сакривене карте. Са преостале 3 карте некако се саопштава која је од преосталих 12 карата из назначене боје у питању. Јасно је да је једино последња операција проблематична. Као и у претходном разматрању, она се може успешно извести само ако има довољно пермутација.

Резонујући на исти начин као у случају 4 карте, долази се до закључка да пермутација од 3 карте A, B и C има $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Поређане лексикографским редом то су

$$ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA. \quad (2)$$

То значи да се помоћу њих могу представити највише 6 карата. За преосталих 6 смо "кратки". Опет проблеми. Ни ово не иде.



Сл. 1.

Кад већ изгледа да излаза нема, на ум вам пада спасоносна замисао. Састоји се у максимално ефикасном коришћењу 3 расположиве карте. Најпре се 13 карата једне боје поређају у низ по јачини

$$2 < 3 < \dots < 10 < J < D < K < A. \quad (3)$$

Затим се почетак и крај саставе, тако да се добије кружни распоред као на сл. 1.

На кругу се још фиксира смер, тако да иза сваке карте долази јача, изузев аса A иза кога је двојка.

Сада се може дефинисати растојање $d(X, Y)$ од карте X до карте Y . То је дужина пута који треба прећи кругом од X до Y држећи се утврђеног смера. (Узима се да је растојање од једне карте до њој суседне у фиксираном смеру једнако 1.) На пример, растојање од 9 до D је 3, $d(9, D) = 3$. Да би се стигло од 9 до D потребна су 3 "корака", $9 - 10 - J - D$. С друге стране, да би се стигло од ♠D до ♠9

треба 10 корака, јер пут води околу $D - K - A - 2 - \dots - 8 - 9$. Другим речима, $d(D, 9) = 10$. Није тешко уочити да за сваке две карте X и Y важи $d(X, Y) + d(Y, X) = 13$. Из тога следи кључна ствар. За сваке две карте X и Y важи

$$d(X, Y) \leq 6 \text{ или } d(Y, X) \leq 6.$$

Дакле, од две карте, ма какве да су, увек је једна на растојању мањем или једнаком 6 од друге. Зашто је то важно видеће се одмах.

Вратимо се поново пермутацијама из (2). Како их има 6, сваком растојању од 1 до 6 може се придружити једна од њих, тако да различитим растојањима одговарају различите пермутације. На пример, растојању 1 придружи се прва пермутација, растојању 2 друга итд.

У конкретном случају то изгледа овако. Узмимо да су на располагању $\heartsuit 7, \heartsuit 2, \clubsuit J$ и да треба да се формира пермутација која одговара растојању 4. Карте се прво уреде по величини с обзиром на поредак (3): $A = \heartsuit 2, B = \heartsuit 7, C = \clubsuit J$. На основу (2) четврта пермутација гласи BCA , а њој одговара $\heartsuit 7, \clubsuit J, \heartsuit 2$. Међутим, могу да се појаве и проблеми. Они настају у случајевима када су две или чак све три карте исте јачине с обзиром на (3). Како да се тада уреде по величини, тј. која да буде A , која B , а која C ? На пример, имамо $\heartsuit 7, \heartsuit 2, \clubsuit 2$. Све се лако решава, ако се уведе поредак и међу бојама. Стави се, рецимо, да је најслабија боја \clubsuit , затим \diamond , па \heartsuit и на крају најјача \spadesuit . На тај начин могуће је упоредити сваке две карте. Прво се гледа скала (3). Јача је она која је десно од друге карте, без обзира на боје. На пример, карта $\clubsuit 4$ је јача од $\spadesuit 3$. Ако су пак исте јачине с обзиром на (3), гледају се њихове боје. Оне морају бити различите. Узима се да је тада јача она карта чија је боја јача. На пример, $\heartsuit K$ је јачи од $\diamond K$. Тиме је омогућено да се сваке три карте поређају по јачини, од најслабије до најјаче. На пример, у горњем случају је $A = \clubsuit 2, B = \heartsuit 2, C = \heartsuit 7$.

Сад је коначно јасно шта су радили мађионичар и његов помоћник. Помоћник је од карата које сте изабрали, да се потсетимо то су $\heartsuit A, \spadesuit D, \spadesuit 9, \diamond 4, \clubsuit 4$, најпре одвојио пар исте боје, $\spadesuit D, \spadesuit 9$. Како је $d(\spadesuit 9, \spadesuit D) = 3$, а $d(\spadesuit D, \spadesuit 9) = 10$, сакрио је $\spadesuit D$, а $\spadesuit 9$ показао мађионичару и ставио на прво место у низу. Затим је преостале три карте поређао по величини, $A = \clubsuit 4, B = \diamond 4, C = \heartsuit A$. Да би мађионичару пренео податак да је $d(\spadesuit 9, \spadesuit D) = 3$ формирао је у лексикографском поретку трећу пермутацију BAC , тј. $\diamond 4, \clubsuit 4, \heartsuit A$. Све заједно је изложио као у (1). Знајући о чему се ради мађионичар је без проблема одгонетнуо сакривену карту. На основу прве карте, $\spadesuit 9$, знао да је тражена карта боје \spadesuit . Затим је у глави сложио по величини преостале три карте и установио да је $\diamond 4, \clubsuit 4, \heartsuit A$ трећа по реду пермутација. Дакле, сакривена карта је боје \spadesuit и налази се на растојању 3 од $\spadesuit 9$. Јасно - то је $\spadesuit D$.

Духовито и оштроумно, нема шта! Сада када сте "провалили" трик можете и сами да га изводите у разним приликама. Треба само да нађете поузданог помоћника. Ако желите да својој публици додатно отежате "разбијање" трика, мењајте позицију карте којом се показује боја (у горњем случају ♠9). Рецимо, у првом извођењу ту карту ставите на прво место као у (1), у другом извођењу на друго, у трећем на треће, у четвртом поново на прво итд. Можете смислити и нешто друго. Разуме се, то мора да је познато и вама и партнеру. Срећно!