Ристо Малчески

ЗА ДОКАЖУВАЊЕТО НА УСЛОВНИТЕ НЕРАВЕНСТВА

Често пати може да се слушне мислењето дека во природата не постојат две еднакви величини, т.е. дека владеењето со равенките не е доволно за проучување на природните појави. Овој неспорен факт бил појдовна точка во развојот на една од најинтересните области во математиката, на неравенствата. Во оваа статија ќе се задржиме на докажување на таканаречените условни неравенства, односно на докажување на неравенства кои важат при одредени услови.

Задача 1. Докажете дека од $ad-bc=1$ следува
$$a(a+b)+b^2+c(c+d)+d^2\neq 1.$$

Решение. Нека претпоставиме дека $a(a+b)+b^2+c(c+d)+d^2=1$. Од $ad-bc=1$ добиваме
$$a(a+b)+b^2+c(c+d)+d^2=ad-bc.$$
Последното равенство го множиме со 2 и добиваме
$$a^2+2ab+b^2+b^2+2bc+c^2+c^2+2cd+d^2+a^2-2ad+d^2=0$$
т.е.
$$(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2+(a-d)^2=0 \qquad (1)$$
Равенството (1) е можно ако и само ако
$$a+b=0,\ b+c=0,\ c+d=0,\ a-d=0$$
т.е. $a=-b=c=-d=-a$ од што следува $2a=0$, односно $a=0$. Значи, $a=b=c=d=0$. Но тоа противречи на $ad-bc=1$. Од добиената противречност следува
$$a(a+b)+b^2+c(c+d)+d^2\neq 1.$$

Задача 2. Докажете дека, ако $a+b=2$, тогаш $a^2+b^2\geq 2$. Кога важи знак за равенство?

Решение. Од $(a-1)^2\geq 0$ и $(b-1)^2\geq 0$ добиваме $a^2\geq 2a-1$ и $b^2\geq 2b-1$. Ако ги собереме последните две неравенства и искористиме дека $a+b=2$ добиваме
$$a^2+b^2\geq 2a-1+2b-1=2(a+b)-2=2\cdot 2-2=4-2=2.$$
Знак за равенство важи ако $a=1$ и $b=1$.

Задача 3. Ако $4x+2y=1$, тогаш $x^2+y^2\geq\frac{1}{20}$. Докажете! Кога важи знак за равенство?

Решение. Од $(5x-1)^2\geq 0$ следува $25x^2-10x+1\geq 0$ т.е.
$$100x^2-40x+4\geq 0$$
$$20x^2+80x^2-40x+4\geq 0$$
$$20x^2+5(4x-1)^2\geq 1 \qquad (1)$$
Од $4x+2y=1$ имаме $2y=-(4x-1)$ и ако замениме во (1) добиваме

$$20x^2+5(-2y)^2 \geq 1$$

т.е. $20x^2+20y^2 \geq 1$. Значи,

$$x^2+y^2 \geq \frac{1}{20}.$$

Знакот за равенство важи ако $(5x-1)^2=0$ т.е. $x=\frac{1}{5}$. Ако $x=\frac{1}{5}$, тогаш $y=\frac{1}{10}$.

Задача 4. Ако $a+b+c=1$, тогаш $a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}$. Докажете! Кога важи знак за равенство?

Решение. Од $a+b+c=1$ добиваме $(a+b+c)^2=1$, т.е.

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac=1$$

Но,

$$a^2+b^2 \geq 2ab,\ a^2+c^2 \geq 2ac,\ b^2+c^2 \geq 2bc$$

па затоа

$$3\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=1,$$

односно

$$a^2+b^2+c^2 \geq \frac{1}{3}.$$

Знакот за равенство важи ако $a^2+b^2=2ab,\ a^2+c^2=2ac$ и $b^2+c^2=2bc$ т.е.

$$(a-b)^2=0,\ (a-c)^2=0 \text{ и } (b-c)^2=0.$$

Според тоа, $a=b=c$ и како $a+b+c=1$ добиваме дека знакот за равенство важи ако $a=b=c=\frac{1}{3}$.

Задача 5. Ако $x+y+z=m$, тогаш $x^2+y^2+z^2 \geq \frac{m^2}{3}$. Докажете! Кога важи знак за равенство?

Решение. Од $x+y+z=m$ добиваме $(x+y+z)^2=m^2$ т.е.

$$x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=m^2$$

Но, $x^2+y^2 \geq 2xy$, $y^2+z^2 \geq 2yz$ и $x^2+z^2 \geq 2xz$, па затоа

$$3\left(x^2+y^2+z^2\right) \geq x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz=m^2$$

односно

$$x^2+y^2+z^2 \geq \frac{m^2}{3}.$$

Аналогно, како во претходната задача добиваме дека знакот за равенство се достигнува за $x=y=z=\frac{m}{3}$.

Задача 6. Ако за позитивните броеви a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 важат равенствата $a_1^2+b_1^2=c_1^2$ и $a_2^2+b_2^2=c_2^2$, тогаш $a_1a_2+b_1b_2 \leq c_1c_2$. Докажете!

Решение. Ако ги помножиме дадените реавенства добиваме

$$\left(a_1^2+b_1^2\right)\left(a_2^2+b_2^2\right)=c_1^2c_2^2$$

односно

$$\left(a_1a_2+b_1b_2\right)^2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2=\left(c_1c_2\right)^2 \qquad (1)$$

Бидејќи $\left(a_1a_2+b_1b_2\right)^2+\left(a_1b_2-a_2b_1\right)^2\geq\left(a_1a_2+b_1b_2\right)^2$ од равенството (1) добиваме

$$\left(a_1a_2+b_1b_2\right)^2\leq\left(c_1c_2\right)^2$$

и како a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 се позитивни броеви имаме $a_1a_2+b_1b_2\leq c_1c_2$.

Задача 7. Ако $a+b\geq 1$ тогаш $a^4+b^4\geq\frac{1}{8}$. Докажете!

Решение. Од $a+b\geq 1$ добиваме $a^2+2ab+b^2\geq 1$. Но,

$$a^2-2ab+b^2\geq 0,$$

па ако ги собереме последните две неравенства добиваме

$$a^2+b^2\geq\frac{1}{2} \qquad (1)$$

Од (1) добиваме $a^4+2a^2b^2+b^4\geq\frac{1}{4}$ и како $a^4-2a^2b^2+b^4\geq 0$ добиваме

$$a^4+b^4\geq\frac{1}{8}.$$

Задача 8. Нека a,b,c се реални броеви поголеми од 1. Докажете дека

$$abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>a+b+c+\frac{1}{abc}$$

Решение. Бидејќи $a>1, b>1, c>1$ добиваме $a>\frac{1}{b}, b>\frac{1}{c}, c>\frac{1}{a}$ т.е.

$$\left(a-\frac{1}{b}\right)\left(b-\frac{1}{c}\right)\left(c-\frac{1}{a}\right)>0$$

Значи, $abc-a-b-c+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}-\frac{1}{abc}>0$ т.е.

$$abc+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}>a+b+c+\frac{1}{abc}.$$

Задача 9. Нека a,b,c,d се такви броеви, што $a+b+c+d=0$. Да означиме $P=ab+bc+cd$ и $Q=ac+ad+bd$. Докажете дека $19P+93Q\leq 0$ или $19Q+93P\leq 0$.

Решение. Бидејќи $a+b+c+d=0$ добиваме

$$a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2bc+2cd+2da+2bd+2ac=\left(a+b+c+d\right)^2=0$$

па затоа

$$0\leq a^2+b^2+c^2+d^2=-2(ab+bc+cd+da+bd+ac)=-2\left(P+Q\right)$$

т.е. $P+Q\leq 0$. Значи, $\left(19P+93Q\right)+\left(19Q+93P\right)=112\left(P+Q\right)\leq 0$, од што следува $19P+93Q\leq 0$ или $19Q+93P\leq 0$.

Задача 10. Нека a, b, c и d се позитивни броеви такви што $a \geq b \geq c \geq d$ и $a+b+c+d<1$. Докажете дека $a^2+3b^2+5c^2+7d^2 \leq 1$.

Решение. Од $a \geq b \geq c \geq d$ последователно добиваме

$$\begin{aligned} a^2+3b^2+5c^2+7d^2 &\leq a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+4bc+6cd \\ &\leq a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2bc+2cd+2ac+4bd \\ &\leq a^2+b^2+c^2+d^2+2ab+2bc+2cd+2ac+2bd+2ad \\ &= (a+b+c+d)^2 \leq 1. \end{aligned}$$

Задача 11. Докажете дека, ако $a_1+a_2+...+a_n=1$, тогаш $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2 \geq \frac{1}{n}$.

Решение. Нека

$$a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=b. \tag{1}$$

Треба да докажеме дека $b \geq \frac{1}{n}$, при услов

$$a_1+a_2+...+a_n=1. \tag{2}$$

Од очигледното неравенство

$$\left(\frac{a_1}{b}-1\right)^2+\left(\frac{a_2}{b}-1\right)^2+...+\left(\frac{a_n}{b}-1\right)^2 \geq 0$$

следува

$$\frac{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}{b^2}-2\frac{a_1+a_2+...+a_n}{b}+n \geq 0,$$

од што заради (1) и (2) добиваме

$$\frac{b}{b^2}-2\frac{1}{b}+n \geq 0 \text{ т.е. } n \geq \frac{1}{b} \text{ што зна ч и } b \geq \frac{1}{n}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a_1=a_2=...=a_n=\frac{1}{n}$.

Во следните четири задачи ќе ги користиме неравенствата:

$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$, за секои $a,b>0$, при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b$, и

$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}$, за секои $a,b,c>0$, при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$;

кои всушност се специјални случаи на познатото неравенство меѓу аритметичката и геометриската средина.

Задача 12. Докажете ги неравенствата

а) $\frac{1+a^2}{2a} \geq 1$, ако $a>0$.

б) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \geq 2$, ако $a>0, b>0$.

в) $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}\geq 6$, ако $a>0,b>0,c>0$.

г) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)>4$, ако $a>0,b>0$ и $a\neq b$.

Решение. а) Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за броевите a^2 и 1 добиваме $a^2+1\geq 2\sqrt{a^2\cdot 1}$ и како $a>0$ имаме $a^2+1\geq 2a$ односно $\frac{1+a^2}{2a}\geq 1$.

Забелешка. *Неравенството можеме да го докажеме и на следниот начин: за секој реален број a важи* $(a-1)^2\geq 0$, *т.е.* $a^2-2a+1\geq 0$ *или* $a^2+1\geq 2a$. *Но,* $a>0$, *па затоа ако последното неравенство го поделиме со* 2a *знакот на неравенството не се менува. Конечно,* $\frac{1+a^2}{2a}\geq 1$.

б) За секои реални броеви a и b важи $(a-b)^2\geq 0$ и како $a>0,b>0$ добиваме $ab>0$. Значи, $\frac{(a-b)^2}{ab}\geq 0$ т.е. $\frac{a^2-2ab+b^2}{ab}\geq 0$. Конечно,

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\geq 0 \text{ т.е. } \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2.$$

Забелешка. *Како и во делот под а) и овде тврдењето следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. Имено,*

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2\sqrt{\frac{a}{b}\frac{b}{a}}=2\sqrt{1}=2.$$

в) Според б) имаме

$$\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{c+a}{b}=\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}\right)+\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)\geq 6.$$

г) Според б) имаме

$$(a+b)\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+2\geq 2+2=4.$$

Но, $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=2$ ако и само ако $a=b$, па затоа $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)>4$.

Задача 13. Докажете дека ако за позитивните броеви a, b и c важи $abc=1$, тогаш $a+b+c\geq 3$.

Решение. Ако во неравенството за аритметичката и геометриската средина $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{abc}$ ставиме $abc=1$, добиваме $\frac{a+b+c}{3}\geq\sqrt[3]{1}=1$ односно $a+b+c\geq 3$.

Задача 14. Докажете дека од $a+b+c=1$ и $a>0$, $b>0$, $c>0$, следува $(1-a)(1-b)(1-c)\geq 8abc$. Кога важи знак за равенство?

Решение. Од $a+b\geq 2\sqrt{ab}$ и $a+b=1-c$, следува $1-c\geq 2\sqrt{ab}$. Слично се докажува дека

$$1-b\geq 2\sqrt{ac} \text{ и } 1-a\geq 2\sqrt{bc}.$$

Ако ги помножиме последните три неравенства добиваме

$$(1-a)(1-b)(1-c)\geq 8\sqrt{a^2b^2c^2} \text{ т.е. } (1-a)(1-b)(1-c)\geq 8abc.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$a = b = c$$

и како

$$a + b + c = 1$$

добиваме дека знак за равенство важи ако и само ако $a = b = c = \frac{1}{3}$.

Задача 15. Докажете дека од $ab = 1$ и $a > 0,\ b > 0$,, следува $(1 + a)(1 + b) \geq 4$. Кога важи знак за равенство?

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за броевите a и $\frac{1}{a}$ добиваме

$$a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a\frac{1}{a}} = 2.$$

Од $ab = 1$ следува $b = \frac{1}{a}$, па ако замениме во претходното неравенство добиваме $a + b \geq 2$, од што последователно следува

$$a + b + 1 + 1 \geq 4,$$
$$a + b + ab + 1 \geq 4$$
$$(1 + a)(1 + b) \geq 4.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a = \frac{1}{a}$, што значи ако и само ако $a^2 = 1$ и како $a > 0$ добиваме $a = 1$. Но, тогаш и $b = \frac{1}{a} = 1$.

На крајот од оваа статија еве неколку задачи за самостојна работа.

Задача 16. Ако е $a>0$, $b>0$, докажете дека

$$ab + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 1 + a + b.$$

Задача 17. Ако се a, b позитивни броеви такви што $a+b=1$, докажете дека

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geq \frac{25}{2}.$$

Задача 18. Ако се a, b и c позитивни броеви такви што $abc=1$, тогаш важи неравенството

$$ab + bc + ca + a + b + c \geq 6.$$

Докажете!

Задача 19. Ако $a + b = 1$, тогаш $a^3 + b^3 \geq \frac{1}{4}$. Докажете!

Задача 20. Ако $a + b + c = 6$, тогаш $a^2 + b^2 + c^2 \geq 12$. Докажете!

Задача 21. Ако се a, b и c позитивни броеви такви што $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, тогаш

$$(a - 1)(b - 1)(c - 1) \geq 8.$$

Докажете!

Статијата прв пат е објавена во списанието Нумерус на СММ