ГЛИГОР ТРЕНЧЕВСКИ

# ГЕОМЕТРИЈА

**ЗА V ОДДЕЛЕНИЕ**

III ИЗДАНИЕ

ПРОСВЕТНО ДЕЛО
СКОПЈЕ, 1977

Рецензенти:

*Магдалена Пасху*. професор на Педагошката академија во Скопје
*Роберт Ансаров*, самостоен советник во Републичкиот завод за школство — Скопје
*Атанас Бадев*, директор во Основното училиште „Ј. А. Коменски“ — Скопје

---

Со решение на Републичкиот педагошки совет бр 02-21/2 од 28. IV 1975 година се одобрува употребата на овој учебник.

---

Илустрирал:

ТОМЕ ГЕОРГИЕВСКИ

ГЛАВА I

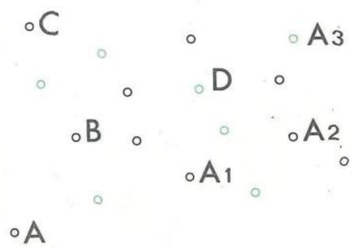
# ТОЧКА, ПРАВА И РАМНИНА

## § 1. ТОЧКА и ПРАВА

**1.** Точките ги замислуваме како ситни честици прашина, кои се толку ситни што немаат ни должина, ни ширина, ни дебелина. Такви честици во реалниот свет не постојат. Нив само ги замислуваме.

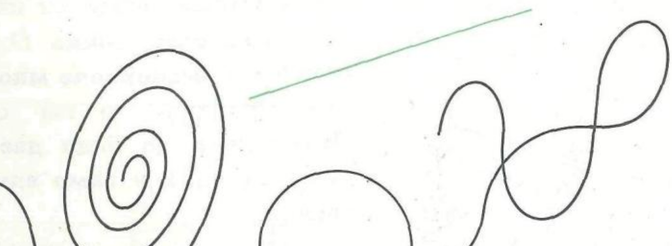
Во тетратката и на таблата точките ги претставуваме со траги што ги остава допрената игла, подострен молив или врвот на кредата. Но, секоја таква точка, колку и да е малечка, сепак има должина и ширина. Меѓутоа, геометриската точка нема никакви димензии.

Точките обично, ги обележуваме со мало крукче (∘), или со пресек на две прави цртички (×); а ги означуваме со големите печатни букви $A$, $B$, $C$, ... од латинската азбука, или со $A_1$, $A_2$, $A_3$ итн., како на црт. 1.

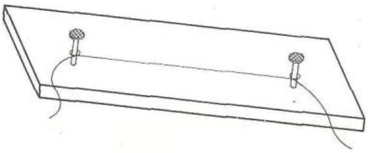



Црт. 1

**2.** На црт. 2. нацртани се неколку линии. Тие можат да бидат прави или криви. Претстава за права линија можеме да добиеме на повеќе начини. На пример:



Црт. 2

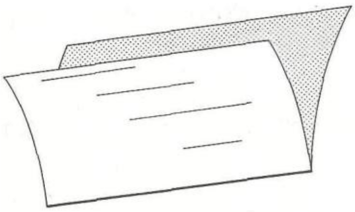


Црт. 3

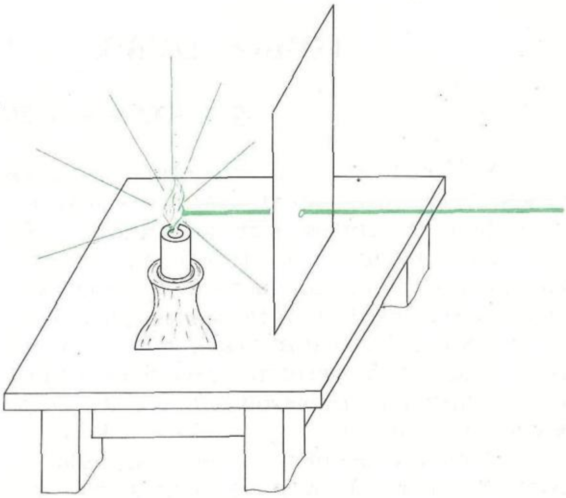
Земете еден танок конец и затегнете го добро помеѓу две клинчиња (црт. 3). Затегнатиот конец е модел на една права линија.

Земете еден лист хартија и превиткајте го како и да било. Работ, што се добива при тоа, исто така, претставува права линија (црт. 4.).

Претстава за права линија ни дава и танкиот сноп светлински зраци, кој минува низ еден мал отвор на картонот, што е поставен пред една запалена свеќа (црт. 5.).



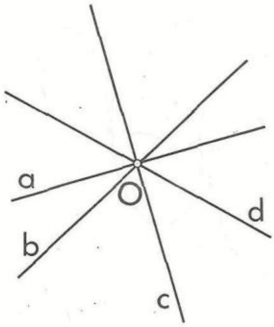
Црт. 4



Црт. 5

Правите линии, претставени со затегнатиот конец и работ на превитканиот лист хартија, како што гледаме, се ограничени и од двата краја.

Права линија, која е неограничена од двата краја уште се вика и само *права*.




Црт. 6

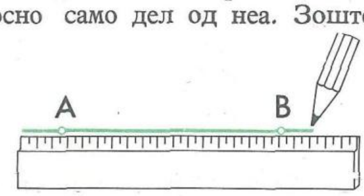
**Правата нема ни почеток ни крај.**

**Низ една точка *O* можат да се повлечат бесконечно многу прави** (црт. 6.). Проверете го тоа сами! Меѓутоа: **Низ кои и да било две точки *A* и *B* минува една и само една права.** Затоа велиме:

**Правата е потполно определена со две различни точки.**

Правите ги цртаме со линијар. За да нацртаме права, која минува низ две дадени точки, линијарот го поставуваме така, што две точки од работ на линијарот да се совпаднат со двете дадени точки $A$ и $B$ низ кои треба да мине правата (црт. 7.). Потоа, врвот на моливот го движиме по работ на линијарот и ја добиваме бараната права, односно само дел од неа. Зошто?

Низ три дадени точки може да се нарцта една права само тогаш, ако третата точка лежи на правата што е определена од првите две точки.




Црт. 7

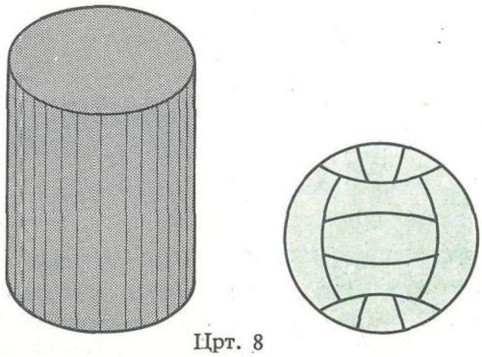
Правите ги означуваме со по една ракописна буква, или со две големи печатни букви од латинската азбука, кои ги поставуваме при кои и да било две нејзини точки, на пример: прави $a$, $b$, $c$ (црт. 6.) или права $AB$ (црт. 7.).

Бидејќи правата е неограничена од двата краја, ние можеме да нацртаме само дел од неа. Но секогаш треба да си ја претставуваме продолжена во двете насоки (црт. 7).

## § 2. РАМНИНА

На црт. 8 гледаме една лимена кутија и една фудбалска топка.

Лимената кутија е ограничена со две рамни и една крива површина, фудбалската топка е ограничена само со една крива површина. Значи, површините можат да бидат рамни или криви.

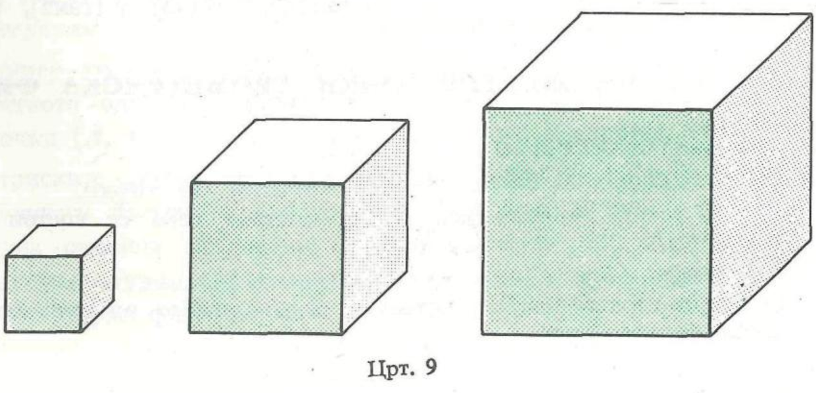


Црт. 8

Претстава за рамна површина ни дава површината на масата, површината на рамно огледало, или површината на мирна вода во базенот.

Погледај ги трите коцки на црт. 9. Тие се разликуваат по својата големина. Исто и рамните површини, со кои тие се ограничени, се разликуваат по својата големина.

Ако коцката станува сè поголема, тогаш и секоја нејзина страна (рамна површина) ќе станува сè поголема и поголема. Замислете рамната површина на коцката да станала толку голема, така што нејзинете граници



Црт. 9

да не можат веќе да се видат. Така доаѓаме до претстава за една неограничена рамна површина.

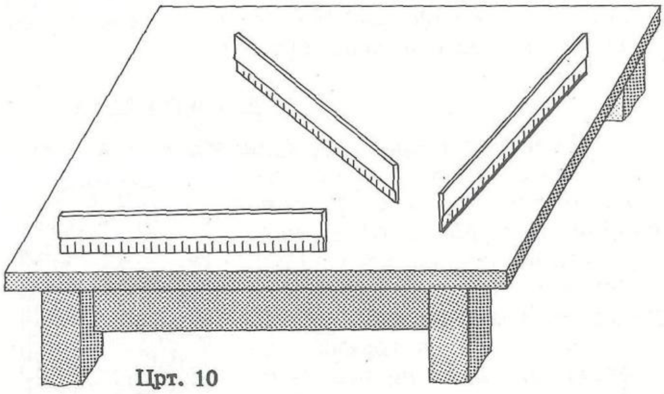
Неограничената рамна површина уште се вика и само *рамнина*.

Според тоа, рамните површини со кои е ограничена коцката се само делови од рамнини.

Рамнината го има следново основно својство:

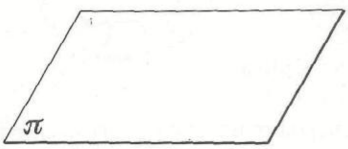
**Ако една права минува низ две точки од рамнината, тогаш таа целата лежи во неа.**

Тоа својство го има само рамнината. Со помош на него може да се испита дали дадена површина, на пример, површината на масата, е дел од рамнина или не. За таа цел го поставуваме работ на линијарот во различни насоки (црт. 10.) и гледаме дали тој се прилепува со сите



Црт. 10

точки до неа. Ако работ на линијарот (поставен во која и да било насока) секогаш се прилепува до дадената површина, тогаш таа е рамна.




Црт. 11

Бидејќи рамнината е неограничена, ние не можеме да ја прикажеме целата, туку само дел од неа. Деловите од рамнината ги претставуваме како на црт. 11., а ги означуваме, обично, со грчките букви: α (алфа), β (бета), γ (гама), π (пи), итн.

## § 3. МНОЖЕСТВО ТОЧКИ. ГЕОМЕТРИСКА ФИГУРА

Замислуваме дека:

**Просторот е бесконечно множество од точки.**

И секоја рамнина можеме да сметаме дека се состои од точки. Значи:

**Рамнината е некое множество од бесконечно многу точки,** кое од своја страна, пак, претставува *подмножество* од множеството на сите точки во просторот.

За точките што ја сочинуваат, на пример, рамнината $\pi$ (црт. 12.)., велиме дека *се елементи* или дека *ѝ припаѓаат на рамнината* $\pi$, и пишуваме:

$$A \in \pi; \quad B \in \pi; \quad C \in \pi, \ldots$$

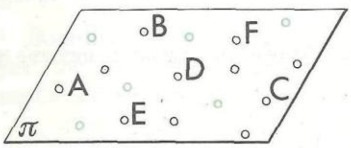
За секоја точка што ѝ припаѓа на дадена рамнина велиме уште дека *лежи* на неа.

Ист е случајот и со правата, имено:

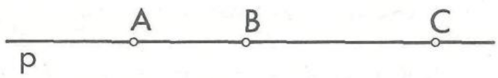
**Секоја права е некое множество од бесконечно многу точки.**

За точките што ја сочинуваат, на пример, правата $p$ (црт. 13) велиме дека тие *се елементи*, или дека *ѝ припаѓаат*, или дека *лежат на правата* $p$, и пишуваме:

$$A \in p, \quad B \in p, \quad C \in p.$$

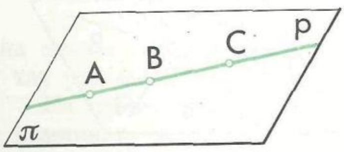



Црт. 12




Црт. 13

Ако сите точки на правата $p$ припаѓаат и на некоја рамнина $\pi$, тогаш велиме дека правата $p$ *припаѓа* (*лежи*) на рамнината $\pi$ (црт. 14.).




Црт. 14

Правата $p$ е едно множество точки, а исто и рамнината $\pi$ е едно множество точки, но бидејќи правата $p$ лежи на рамнината $\pi$, тогаш јасно е дека правата $p$ е подмножество на множеството $\pi$. Затоа пишуваме:

Телата, површините, линиите и точките се викаат *геометриски фигури*, а точката, правата и рамнината — *основни геометриски фигури*.

Што е тоа геометриска фигура?

**Геометриска фигура е секое непразно множество од точки.**

На пример, геометриски фигури се: множеството само од една точка $\{A\}$, множеството од две различни точки $\{A, B\}$, множеството од три различни точки $\{A, B, C\}$, правата, правоаголникот, квадратот, итн.

Геометриските фигури, на кои сите точки лежат во една рамнина ги викаме *рамнински фигури*; а фигурите на кои сите точки не можат да лежат во една рамнина ги викаме *просторни фигури*. На пример: сите погоре наведени фигури се рамнински, а сите тела и некои линии и површини се просторни фигури.

Науката, која ги изучува геометриските фигури и ги испитува нивните својства се вика *геометрија*. Таа може да се подели на два дела.

Делот од геометријата, што ги изучува рамнинските фигури кои лежат во иста рамнина, се вика *планиметрија*; а делот што ги изучува просторните фигури и заемните положби на рамнинските фигури во просторот, се вика *стереометрија*.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Колку прави можат да се повлечат низ една точка? А колку низ две различни точки?

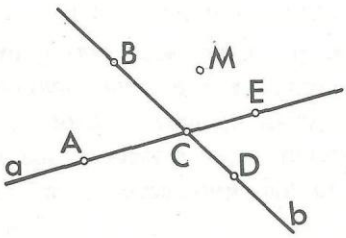
**2.** Обележи две точки во тетратката, потоа соедини ги со една права линија и две криви линии! Која од тие три линии е најкратка?

**3.** Обележи три различни точки во тетратката! Може ли секогаш низ тие три точки да се повлече една права?

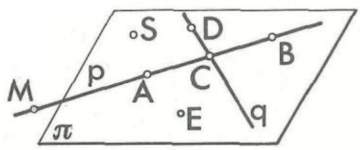
**4.** Кое важно својство го има рамнината?

**5.** Како испитуваме дали една површина е дел од рамнина или не?

**6.** Колку прави во различни насоки можат да се повлечат низ една точка во иста рамнина? Нацртај!




Црт. 15




Црт. 16

**7.** Што е тоа геометриска фигура?

**8.** На цртеж 15. нацртани се две прави $a$ и $b$ и обележени се неколку точки: $A, B, C, \ldots$ Со помош на симболите $\in$ и $\notin$, запиши ги кратко следниве реченици:

а) Точката $A$ ѝ припаѓа на правата $a$, а не ѝ припаѓа на правата $b$.

б) Точката $B$ лежи на правата $b$, а не лежи на правата $a$.

в) Точката $C$ ѝ припаѓа на правата $a$ и на правата $b$.

г) Точката $M$ не ѝ припаѓа ниту на правата $a$, ниту на правата $b$.

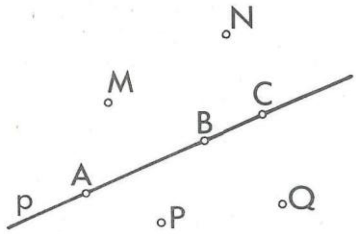
**9.** Во рамнината $\pi$ повлечени се две прави $p$ и $q$ и означени се неколку точки како на цртеж 16. Прочитај ги следниве симболички записи: $A \notin q$; $A \in \pi$; $C \in p$, $C \in q$, $C \in \pi$, $D \in \pi$, $D \in q$, $D \notin p$, $p \subset \pi$, $q \subset \pi$, $E \in \pi$, $M \in p$. Дали е точно дека $M \in \pi$?

**10.** Кои од следниве геометриски фигури: $\{A\}$, $\{A, B\}$, $\{A, B, C\}$, правата $p$, коцката, квадарот, квадратот, правоаголникот; топката; се рамнински, а кои се просторни?

## § 4. ЗАЕМНИ ПОЛОЖБИ НА ТОЧКИТЕ, ПРАВИТЕ И РАМНИНИТЕ ВО ПРОСТОРОТ

### 4. 1. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ТОЧКА И ПРАВА

Нацртајте една права и означете ја со $p$. Таа има бесконечно многу точки. Изберете три кои и да било нејзини точки и означете ги со $A$, $B$ и $C$. Потоа, изберете и означете уште неколку други точки: $M$, $N$, $P$ и $Q$ во рамнината како на црт. 17.



Црт. 17

Гледаме дека: точките $A$, $B$ и $C$ ѝ припаѓаат (лежат) на правата $p$, а точките $M$, $N$, $P$ и $Q$ не ѝ припаѓаат (не лежат) на неа.

Тоа симболички го запишуваме:

$A \in p$, $B \in p$, $C \in p$, $M \notin p$, $P \notin p$ итн.

Воопшто, дадена права и дадена точка можат да ги имаат следниве две заемни положби во просторот:

а) **Точката ѝ припаѓа (лежи) на правата,** или

б) **Точката не ѝ припаѓа (не лежи) на правата.**

### 4. 2. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ТОЧКА И РАМНИНА

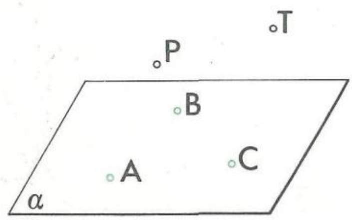
На црт. 18. гледаме две мали гумени топки. Едната Петре ја држи во рака, а другата лежи на подот.

Ако топките претставуваат модели на точки, тогаш можеме да кажеме дека едната од нив лежи на рамнината на подот, а другата дека не лежи на таа рамнина.

На цртежот 19, гледаме дека точките $A$, $B$ и $C$ лежат (ѝ припаѓаат) на рамнината $\alpha$, а точките $P$ и $T$ не лежат (не ѝ припаѓаат) на неа, т. е.

$$A, B, C \in \alpha; \text{ а } P, T \notin \alpha.$$


Црт. 18



Црт. 19

Воопшто, дадена точка и дадена рамнина можат да ги имаат само следниве две заемни положби во просторот:

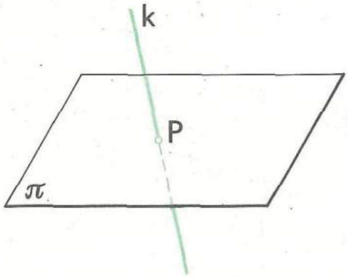
а) **Точката ѝ припага (лежи) на рамнината, или**

б) **Точката не ѝ припаѓа (не лежи) на рамнината.**

### 4. 3. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ПРАВА И РАМНИНА

Нека $k$ е права, $\pi$ — некоја рамнина и $P$ — точка.

Ако $P \in k$ и $P \in \pi$, тогаш велиме дека точката $P$ е *заедничка точка* на правата $k$ и рамнината $\pi$ (црт. 20.).




Црт. 20

Знаеме дека правата $k$ и рамнината $\pi$ се некои множества од точки. Тука нас посебно ќе нѐ интересира дали тие две множенства имаат заеднички елементи или немаат такви. Тоа ќе го дознаеме ако го разгледаме пресекот $k \cap \pi$. Тој пресек може да биде празно множество, множество од една точка, или множество од повеќе точки, т. е.

$$k \cap \pi = \varnothing; \quad k \cap \pi = \{P\}, \quad \text{или}$$
$$k \cap \pi = \{A, B, C, \ldots\}.$$

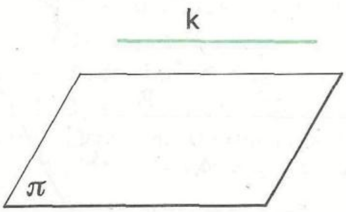
1°. Ако $k \cap \pi = \varnothing$, т. е. ако правата $k$ и рамнината $\pi$ немаат ниту една заедничка точка (црт. 21.), велиме дека *правата* $k$ *е паралелна со рамнината* $\pi$ и пишуваме: $k \parallel \pi$.

Знакот „ $\parallel$ " е знак за паралелност и го читаме: „*паралелно со*".

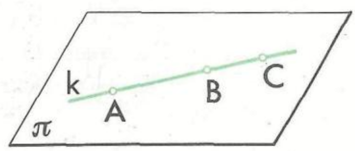
2°. Ако $k \cap \pi = \{P\}$, т. е. ако правата $k$ и рамнината $\pi$ имаат само една заедничка точка (црт. 20.), тогаш велиме дека *правата* $k$ *ја прободува рамнината* $\pi$ *во точката* $P$. Точката $P$ во која правата ја прободува рамнината $\pi$, се вика *прободод* на правата $k$ во рамнината $\pi$.

3°. Ако $k \cap \pi = \{A, B, C, \ldots\}$, т. е. ако правата $k$ и рамнината $\pi$ имаат барем две заеднички точки (црт. 22.), тогаш врз основа на основното својство на рамнината заклучуваме дека сите точки на правата $k$ ѝ припаѓаат на рамнината $\pi$ и велиме дека *правата* $k$ *ѝ припаѓа* (*лежи*) *на рамнината* $\pi$. Тоа симболички го означуваме $k \subset \pi$, а ќе биде ако е $k \cap \pi = k$.

Обично, и за секоја права, која лежи на дадена рамнина велиме дека е паралелна со неа (специјален случај на паралелност).




Црт. 21




Црт. 22

Воопшто, дадена права и дадена рамнина можат да имаат една од следниве три заемни положби во просторот:

а) **Правата е паралелна со рамнината,** или

б) **Правата ја прободува рамнината,** или

в) **Правата лежи на рамнината** (специјален случај на паралелност).

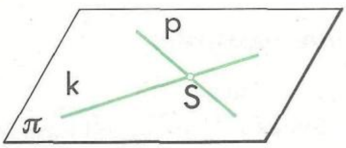
### 4. 4. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ДВЕ ПРАВИ

Нека се $k$ и $p$ две прави. За нив постојат две основни можности: правите $k$ и $p$ можат да лежат на иста рамнина или тие не можат да лежат на иста рамнина. Во секој од тие два случаја, да испитаме какво множество е $k \cap p$.

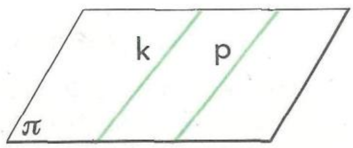
1°. Ако правите $k$ и $p$ лежат на иста рамнина $\pi$, т. е. ако $k \subset \pi$ и $p \subset \pi$, тогаш ќе ги разликуваме следните случаи:

а) Правите $k$ и $p$ имаат само една заедничка точка, т. е. $k \cap p = \{S\}$. Во тој случај велиме дека *правите k и p се сечат во точката S* (црт. 23). Заедничка точка $S$ се вика *пресек на правите k и p*.

б) Правите $k$ и $p$ немаат ниту една заедничка точка, т. е. $k \cap p = \varnothing$. Во тој случај велиме дека *правите k и p се паралелни* и пишуваме $k \parallel p$. (црт. 24.).




Црт. 23

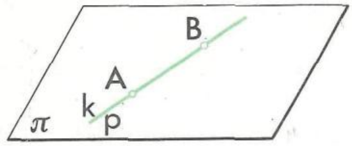



Црт. 24

в) Правите $k$ и $p$ имаат барем две заеднички точки. Во тој случај врз основа на основното својство на правата, заклучуваме дека сите точки на правите $k$ и $p$ им се заеднички и велиме дека тие се *совпаѓаат*, (црт. 25.).

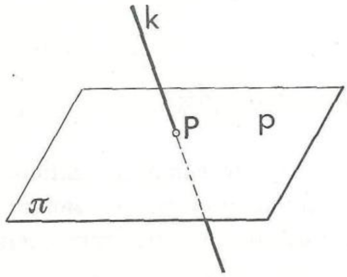
Случајот кога правите $k$ и $p$ се совпаѓаат го вбројуваме во специјален случај на паралелност, па затоа велиме:

**Секоја права е паралелна сама на себе си,** т. е. $k \parallel k$.

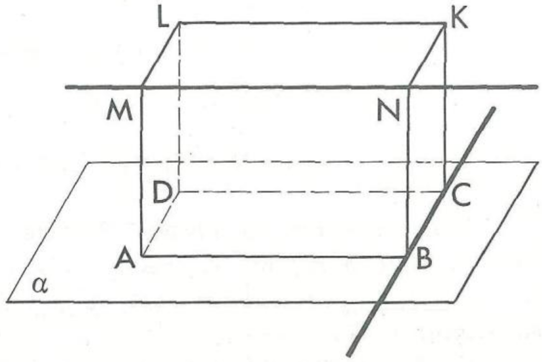



Црт. 25

2°. Ако правите не можат да лежат на иста рамнина, на пример, правата $k$ ја прободува рамнината $\pi$ во токата $P$, а правата $p$ лежи на рамнината $\pi$ и $P \notin p$ (црт. 26.), тогаш јасно е дека тие немаат ниту една заедничка точка, т. е. $k \cap p = \varnothing$, но не се паралелни бидејќи не лежат во иста рамнина. Во тој случај велиме дека *правите $k$ и $p$ се разминувачки.*




Црт. 26




Црт. 27

Разминувачки прави на моделот на квадарот на црт. 27 се, на пример, продолжените рабови $BC$ и $MN$, потоа $AM$ и $NK$; $AM$ и $KL$ и др.

Воопшто, две прави во просторот можат да ги имаат следниве заемни положби:

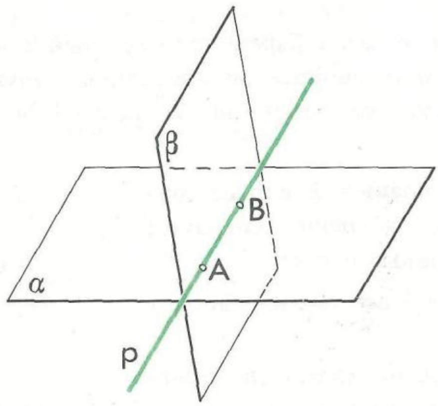
**Две прави: или се сечат, или се паралелни, или се совпаѓаат (специјален случај на паралелност), или се разминувачки.**

### 4. 5. ЗАЕМНА ПОЛОЖБА НА ДВЕ РАМНИНИ

Нека $\alpha$ и $\beta$ се две рамнини, а $A$, $B$, $C$, . . . точки.

Ако $A \in \alpha$ и $A \in \beta$, тогаш велиме дека точката $A$ е заедничка точка на рамнините $\alpha$ и $\beta$ (црт. 28.).

Рамнините го имаат следново важно својство:




Црт. 28

**Ако две различни рамнини имаат една заедничка точка, тогаш тие се сечат и нивниот пресек секогаш е една права, што минува низ таа точка.**

Рамнините $\alpha$ и $\beta$, што ги разгледуваме, потоа можат да немаат ниту една заедничка точка, или сите точки да им се заеднички, т. е.

$$\alpha \cap \beta = \varnothing \quad \text{или} \quad \alpha \cap \beta = \alpha = \beta.$$

1°. Ако $\alpha \cap \beta = \varnothing$, т. е. ако рамнините $\alpha$ и $\beta$ немаат ниту една заедничка точка, тогаш велиме дека тие *се паралелни* и пишуваме $\alpha \parallel \beta$.

Таква положба имаат рамнините на таванот и подот, кои и да било две спротивни страни на училницата, потоа, рамнината на масата и рамнината на подот и др.

2°. Ако $\alpha \cap \beta = \alpha = \beta$, т. е. ако сите точки на двете рамнини им се заеднички тогаш велиме дека рамнините $\alpha$ и $\beta$ *се совпаѓаат*. Тоа ќе се случи, ако тие имаат барем (најмалку) три заеднички точки, кои не лежат на една права.

Случајот кога рамнините $\alpha$ и $\beta$ се совпаѓаат го сметаме и како специјален случај на паралелност на тие рамнини. Затоа велиме:

**Секоја рамнина е паралелна сама на себе си, т. е. $\alpha \parallel \alpha$.**

Воопшто, две рамнини можат да ги имаат следниве заемни положби во просторот:

**Две рамнини или се сечат, или се паралелни, или се совпаѓаат** (специјален случај на паралелност).

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Колку прави определуваат три различни точки, кои не припаѓаат на иста права? Нацртај и објасни!

**2.** Колку прави определуваат четири така одбрани точки, од кои да нема три точки што припаѓаат на иста права? Нацртај и објасни!

**3.** Каква положба имаат рабовите при подот на училницата спрема рамнината: а) на подот, б) на таванот?

**4.** Може ли една иста права да прободува две различни рамнини?

**5.** Може ли: а) една права да е паралелна со две или повеќе рамнини, б) една рамнина да е паралелна со две или повеќе прави? Покажи го тоа со помош на неколку жици и картони!

**6.** За кои две прави велиме дека се паралелни, а за кои дека се разминувачки во просторот? Објасни го тоа со два молива!

**7.** На моделот на квадар на црт. 27. покажи два по два раба што се сечат, што се паралелни, што се разминувачки!

**8.** Две прави се паралелни на трета права. Во каква заемна положба се тие меѓу себе? Покажи го тоа со помош на три моливи!

**9.** Каква заемна положба можат да имаат две прави: а) кои лежат на иста рамнина, б) кои не лежат на иста рамнина?

10. Каква заемна положба имаат линиите во тетратките по мајчин јазик?

11. Од две дадени паралелни прави, едната ја прободува некоја рамнина. Во каква положба е другата права спрема таа рамнина?

12. Кога две рамнини: а) се сечат, б) се паралелни, в) се совпаѓаат?

13. Што претставува пресекот на две рамнини?

14. Во каква заемна положба се наоѓаат листовите на една затворена книга?

15. Во каква заемна положба е рамнината на прозорецот спрема рамнината на ѕидот: а) кога тој е затворен, б) кога тој е отворен?

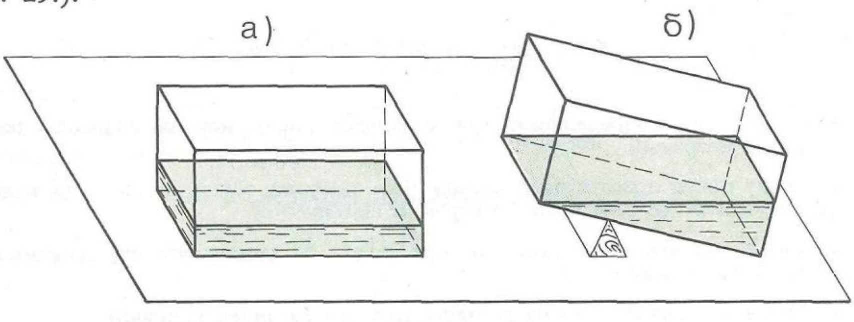
16. Може ли дадена права да лежи истовремено на две или повеќе рамнини? Во каква заемна положба се наоѓаат тие рамнини?

17. Забоди две игли во рамнината на масата, така што тие: а) да се паралелни, б) да се разминуваат:

18. Колку рамнини можат да се постават: а) низ една точка, б) низ една права? Во каква заемна положба се наоѓаат тие?

## § 5. ХОРИЗОНТАЛНИ, ВЕРТИКАЛНИ И КОСИ ПРАВИ И РАМНИНИ

**1.** Земете еден сад и во него ставете вода! Причекајте водата да се смири! Ќе забележиме дека површината на водата ќе остане во иста положба, иако садот од положбата (а) го доведеме во положбата (б) (црт. 29.).




Црт. 29

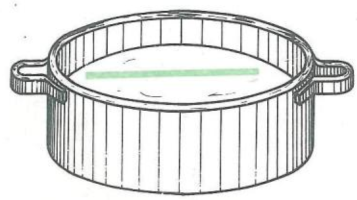
Мирната површина на водата претставува една рамна површина, за која велиме дека има *хоризонтална* (или *водорамна*) *положба*. Таква положба има површината на подот или таванот, површината на училишното игралиште и др.

**Секоја рамнина, која има положба како и површината на мирна вода, се вика хоризонтална рамнина.**

Хоризонталната рамнина го има следново својство:

**Низ една точка во просторот може да се постави само една хоризонтална рамнина.**

Да пуштиме една сламка или танко дрвце да плива по мирната површина на водата во еден сад (црт. 30.). Таа може да има различни положби, но секогаш целата ќе лежи во хоризонтална рамнинна. Ако сламката (или дрвцето) ни претставува модел на една права, за таква права велиме дека има *хоризонтална положба*, а самата права се вика *хоризонтална права*. Според тоа:

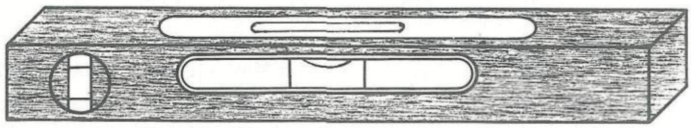


Црт. 30

**Секоја права која лежи на некоја хоризонтална рамнина, се вика хоризонтална права.**

Низ една точка колку хоризонтални прави можат да се повлечат? Објасни зошто?

Дали некоја рамна површина или рамнина е хоризонтална или не, утврдуваме со направата, која се вика *либела* или *водна терезија* (црт. 31.).

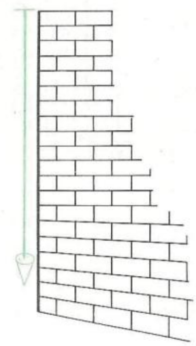


Црт. 31

**2.** Да земеме еден танок конец, на едниот крај да врземе едно метално топче, а другиот крај да го обесиме на клинец или да го држиме во рака (црт. 32.). Таа направа се вика *висок*. Конецот под дејството на тежината на топчето, се затегнува и по смирувањето зазема една одредена положба.

Правецот на затегнатиот конец на високот што слободно виси, ни претставува модел на една права, за која велиме дека има *вертикална положба*. Таква положба имаат рабовите на околните ѕидови на училницата и зградите, прачката на која виси лустерот и др.

Секоја права, која има положба како и затегнатиот конец на високот, се вика *вертикална права*.

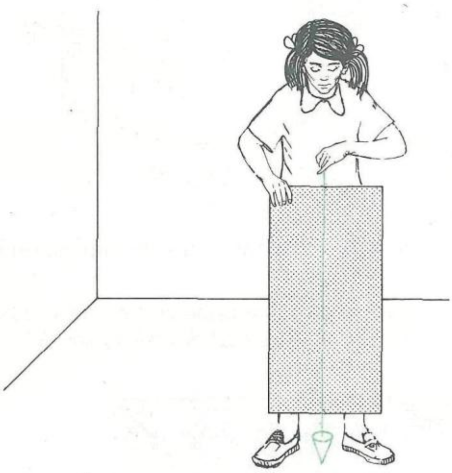


Црт. 32

Ако местото, каде конецот на високот е прицврстен, ни претставува модел на една точка, гледаме дека низ таа точка минува само една вертикална права. Затоа велиме:

**Низ една точка во просторот минува само една вертикална права.**

Да земеме еден картон (модел на рамнина) и да го поставиме така, што тој да го допре затегнатиот конец на високот што слободно виси (црт. 33.). Како што гледаме, вертикалната права претставена со конецот на височот ќе лежи во рамнината на картонот, или обратно: рамнината на картонот ќе минува низ вертикалната права, што е претставена со конецот на височот. За таква рамнина велиме дека има *вертикална положба*, а самата рамнина се вика *вертикална рамнина*. Според тоа:



Црт. 33

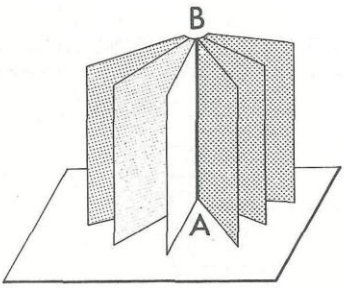
**Секоја рамнина, која содржи барем една вертикална права се вика вертикална рамнина.**

Вертикални рамнини претставуваат околните ѕидови на зградите, околните страни на коцката, кога таа е поставена на една хоризонтална рамна површина и др.

Бидејќи низ една права можат да се поставаат бесконечно многу рамнини, затоа и:

**Низ една вертикална права можат да се поставаат бесконечно многу вертикални рамнини** (црт. 34.).

**3. Секоја права (односно рамнина), која не е ниту хоризонтална, ниту вертикална, се вика коса права (односно рамнина).**




Црт. 34

Од досега изложеното заклучуваме дека:

Правите и рамнините можат да имаат три различни положби во просторот во однос на зѐмјината површина: да бидат или *хоризонтални*, или *вертикални*, или *коси*.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Како ја утврдуваме: а) хоризонталната, б) вертикалната положба на правите и рамнините?

**2.** Земи еден модел на квадар или коцка и постави го на една хоризонтална рамнина! Потоа покажи: а) колку хоризонтални, а колку вертикални рамнини има на моделот? б) колку хоризонтални, а колку вертикални рабови има на него?

**3.** Постави го моделот на коцка во таква положба, така што сите нејзини рабови да бидат во коса положба!

**4.** Во каква положба е рамнината на вратата на училницата кога таа: а) е затворена, б) отворена?

**5.** Разгледај го моделот на квадар, што е поставен на некоја хоризонтална рамнина и кажи дали две соседни страни на квадарот можат да бидат: а) хоризонтални, б) вертикални? А два соседни раба?

**6.** Може ли во која и да било рамнина да постои: а) хоризонтална права, б) вертикална права? Покажи го тоа со помош на картон и молив!

**7.** Во една хоризонтална рамнина колку хоризонтални прави можат да се повлечат? Покажи!

**8.** Постави го моливот во хоризонтална положба и покрај него потпри еден картон, така што тој да биде: а) во хоризонтална, б) во вертикална, в) во коса положба!

**9.** Постави го моливот во вертикална положба и покрај него потпри еден картон. Може ли тој картон да биде во: а) хоризонтална, б) вертикална, в) коса положба? Што забележуваш?

**10.** Низ една хоризонтална права колку: а) хоризонтални, б) вертикални, в) коси рамнини можат да се постават?

**11.** Низ една вертикална права колку вертикални рамнини можат да се постават? Покажи!

**12.** Може ли низ секоја права да се постави: а) хоризонтална, б) вертикална в) коса рамнина? Покажи го тоа со помош на еден молив и картон!

**13.** Низ една точка во просторот колку: а) хоризонтални прави, б) хоризонтални рамнини, в) вертикални прави, г) вертикални рамнини можат да минуваат?

**14.** Какви заемни положби можат да заземат: а) две хоризонтални прави, б) една хоризонтална и една вертикална права, в) две вертикални прави? Покажи го тоа со помош на два моливи!

**15.** Какви заемни положби можат да заземат: а) хоризонтална права и хоризонтална рамнина, б) хоризонтална права и вертикална рамнина, в) вертикална права и хоризонтална рамнина, г) вертикална права и вертикална рамнина? Покажи го тоа со помош на еден молив и еден картон!

**16.** Какви заемни положби можат да имаат: а) две хоризонтални рамнини, б) две вертикални рамнини, в) една хоризонтална и една вертикална рамнина?

**17.** Можат ли да се сечат: а) две хоризонтални прави, б) две вертикални прави, в) една хоризонтална и една вертикална права?

**18.** Можат ли две разминувачки прави да бидат: а) обете хонизонтални, б) обете вертикални? Објасни зошто!

**19.** Постави го моделот на квадар да лежи во хоризонтална рамнина и покажи дали сите хоризонтални рабови се паралелни меѓу себе! Меѓу нив има ли некои што се разминуваат?

**20.** Можат ли да се сечат: а) две хоризонтални рамнини?, б) две вертикални рамнини?

ГЛАВА II

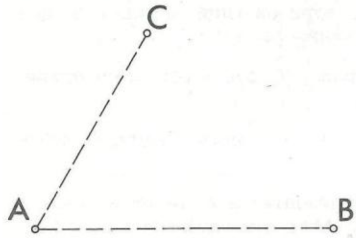
# РАСТОЈАНИЕ. ПОЛУПРАВА. ОТСЕЧКА. АГОЛ

## § 6. РАСТОЈАНИЕ ОД ТОЧКА ДО ТОЧКА

Да уочиме кои било три различни точки $A$, $B$ и $C$ (црт. 35.). Практиката нè упатува на еден ваков заклучок: точката $A$ се наоѓа поблизу до точката $C$, отколку до точката $B$ (црт. 35.).

Тоа го искажуваме уште и вака:

**Растојанието од точката $A$ до точката $C$ е помало отколку растојанието од точката $A$ до точката $B$.**



Црт. 35

Под зборот *растојание* од една до друга точка ќе подразбираме некоја точно определена величина која, како и секоја друга величина, може да се мери и да се изразува со број. Растојанието го изразуваме во сантиметри, метри или километри. На пример, растојанието од точката $A$ до точката $B$ на црт. 35. е 4 *cm*, а тоа од точката $A$ до точката $C$ е 3 *cm*.

Растојанието од точката $A$ до точката $B$ симболички ќе го означуваме вака $\overline{AB}$, па горниве заклучоци ги запишуваме: $\overline{AB} = 4\ cm$, $\overline{AC} = 3\ cm$. Според тоа:

$$\overline{AB} > \overline{AC}, \text{ односно } \overline{AC} < \overline{AB}.$$

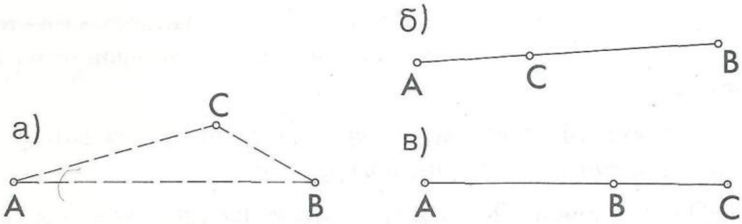
**Ако точките $A$ и $B$ се совпаѓаат, тогаш растојанието од $A$ до $B$ е еднакво на нула,** т. е. Ако $A \equiv B$, тогаш $\overline{AB} = 0$.

Очигледно е дека за растојанието ќе важи и следново својство:

**Растојанието од точката $A$ до точката $B$ е еднакво на растојанието од точката $B$ до точката $A$,** т.е. секогаш е $\overline{AB} = \overline{BA}$.

Обележете три различни точки $A$, $B$ и $C$ и измерете ги растојанијата $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$. Тоа е сторено во три различни случаи на црт. 36.

Ако го споредиме растојанието $\overline{AC}$ со збирот на растојанијата $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, ќе забележиме дека во случаите а) и б) ќе биде $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$, а во случајот в) ќе имаме: $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

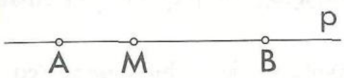



Црт. 36

Тоа е во согласност со следново важно својство на растојанијата.

**За кои и да било три точки $A$, $B$ и $C$, растојанието од $A$ до $C$ е помало или еднакво (велиме не поголемо) од збирот на растојанијата од $A$ до $B$ и од $B$ до $C$,** т.е. секогаш ќе важи релацијата:

$$\overline{AC} \leqslant \overline{AB} + \overline{BC}.$$




Црт, 37

Нацртајте една права $p$ и на неа уочете три различни точки $A$, $M$ и $B$ (црт. 37).

На сите ви е јасно што искажуваме со реченицата (исказот): „Точката $M$ *лежи меѓу* точките $A$ и $B$". Измерете ги растојанијата $\overline{AB}$, $\overline{AM}$ и $\overline{MB}$. Што забележувате?

Поимот *„лежи меѓу"* често ќе го користиме. Тој поим, со помош на поимот растојание, го воведуваме вака:

**Точката $M$ лежи меѓу точките $A$ и $B$, ако тие три различни точки припаѓаат на една права и ако важи релацијата $\overline{AB} = \overline{AM} + \overline{MB}$.**

Очигледно е дека:

**Од три различни точки, кои ѝ припаѓаат на иста права, една од нив секогаш лежи меѓу другите две точки.**

Но, од три различни точки кои не ѝ припаѓаат на иста права ниту за една од нив не може да се каже дека лежи меѓу другите две.

И навистина,

**Ако три тнчки $A$, $B$ и $C$ не ѝ припаѓаат на иста права, тогаш секогаш е $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$,**

т.е. никогаш не може да биде $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC}$.

## § 7. ПОЛУПРАВА И ОТСЕЧКА

### 7. 1. ПОЛУПРАВА

Нацртајте една права $p$ и означете неколку произволни точки на неа како на цртеж 38.

Гледаме дека, точката $M \in p$ го разбива множеството точки (различни од $M$) од правата $p$ на две непразни подмножества (два дела), така што:

1°. Точката $M$ лежи меѓу кои и да било две точки ($A$ и $C$), што лежат на различните делови од правата, но

2°. Од две точки ($A$ и $B$), што лежат на еден ист дел од правата, една од нив секогаш лежи меѓу другата точка и точката $M$.

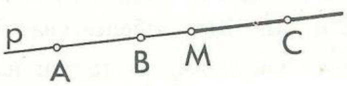
Секој од двата дела, на кои точката $M$ ја разбива правата $p$ вклучително и точката $M$, се вика *полуправа со почеток* $M$. Според тоа:

**Полуправа е дел од правата, што е ограничен од едната страна.**

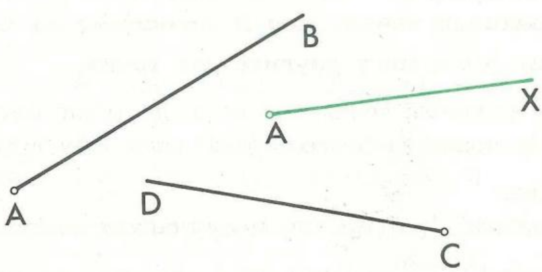
Точката ($M$), што ја ограничува полуправата, се вика *почеток* на полуправата.

*Полуправите имаат почеток, но немаат крај*, за разлика од правите, кои немаат ни почеток ни крај.

Полуправата ја означуваме со две печатни букви од кои едната ја ставаме кај почетокот, а другата — кај која и да било друга нејзина точка и ја читаме така, што прво ја изговараме буквата кај почетокот, на пример: полуправа $AX$, полуправа $AB$, полуправа $CD$ (црт. 39.).




Црт. 38




Црт. 39

## 7. 2. ОТСЕЧКА

Нацртајте една права $p \equiv MN$ и означете две различни нејзини точки со $A$ и $B$ (црт. 40.).

Црт. 40

Гледаме дека, точките $A$ и $B$ ја разбиваат правата $p$ на три подмножества (три дела). Тоа се: полуправите $AM$ и $BN$ и множеството на сите точки што лежат меѓу точките $A$ и $B$.

Множеството на сите точки од правата $p$, што лежат меѓу точките $A$ и $B$, вклучувајќи ги и точките $A$ и $B$, се вика *отсечка* и се означува со $AB$.

Точките $A$ и $B$ се викаат *крајни точки* или краеви на отсечката $AB$, а секоја друга точка која ѝ припаѓа на отсечката $AB$, се вика нејзина *внатрешна точка*. Според тоа:

**Отсечка е дел од правата, што е ограничен со две различни точки од неа.**

Растојанието меѓу крајните точки на отсечката $AB$, се вика *должина на отсечката* и се означува со $\overline{AB}$.

## 7. 3. МЕРЕЊЕ НА ОТСЕЧКИ

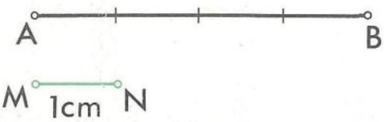
Должината на отсечката ја одредуваме со мерење. За таа цел избираме некоја отсечка $MN$, за која земаме дека има должина еднаква на 1. Отсечката $MN$ тогаш се вика *единична отсечка* или *мерна единица*, при што $\overline{MN} = 1$.

Основна мерна единица за мерење на отсечките е *метарот* ($m$).

Помали мерни единици од метарот се: *дециметар* ($dm$), *сантиметар* ($cm$), *милиметар* ($mm$), *микрон* ($\mu$); а поголеми: *декаметар* ($dkm$), *хектометар* ($hm$) и *километар* ($km$).

Називите на помалите и поголемите мерни единици од метарот се образуваат со зборовите: *деци*, што значи $\frac{1}{10}$, *санти* — $\frac{1}{100}$, *мили* — $\frac{1}{1000}$, *дека*, што значи 10, *хекто* — 100 и *кило* — 1000.

На цртежот 41. дадена е отсечка $AB$. За да ја одредиме нејзината должина, земаме отсечка $\overline{MN} = 1\ cm$. Ја нанесуваме отсечката $MN$ со помош на линијар или шестар врз дадената отсечка $AB$. Гледаме дека таа се нанесува точно 4 пати и пишуваме $\overline{AB} = 4\ cm$.



Црт. 41

Бројот 4 $cm$ се вика *мера* или *должина на отсечката* $AB$, а неименуваниот број 4 — *мерен број* на отсечката $AB$.

## 7. 4. СКЛАДНОСТ И СПОРЕДУВАЊЕ НА ОТСЕЧКИ

Отсечката, како и секоја геометриска фигура е непразно множество од точки.

Да се потсетиме: две непразни множества велиме дека *се еднакви* ако и само ако тие се состојат од едни исти елементи. На пример:

Множеството $A = \{ \bigcirc, \ \triangle, \ a, \ 5 \}$ е еднакво на множеството $B = \{a, \ \triangle, \ 5, \ \bigcirc\}$ и пишуваме $A = B$.

Според тоа, еднаквите множества $A$ и $B$ се едно исто множество, кое е запишано само на два различни начина.

Но, отсечките $AB$ и $CD$ на црт. 42. *не се еднакви множества*, бидејќи тие не се состојат од едни исти точки. Затоа, да се каже „отсечките $AB$ и $CD$ се еднакви" не би било точно.

Црт. 42

Ако отсечката $AB$ со лизгање ја пренесеме и ја поставиме врз отсечката $CD$, ќе забележиме дека отсечките $AB$ и $CD$ се совпаѓаат (се сливаат во една отсечка). При тоа доаѓа до совпаѓање и на секоја точка од отсечката $AB$ само со по една точка од отсечката $CD$, и обратно.

Очигледно е дека растојанијата $AB$ и $CD$ се еднакви, т.е. отсечките $AB$ и $CD$ имаат еднакви должини. Во таков случај, за отсечките $AB$ и $CD$ (како фигури) велиме дека се *складни* или *конгруентни* и пишуваме:

$$AB \cong CD.$$

Воопшто:

**Две отсечки се складни (конгруентни), ако и само ако тие имаат еднакви должини,** т.е.

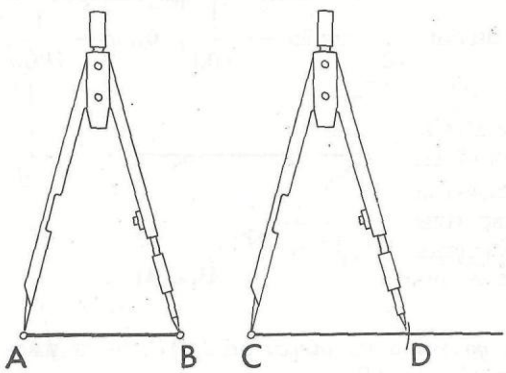
Ако $\overline{AB} = \overline{CD}$, тогаш $AB \cong CD$, и обратно.

Утврдувањето на складноста на две отсечки, како и цртањето на отсечка што е складна на дадена отсечка, најлесно се изведува со помош на шестар (види црт. 43.).

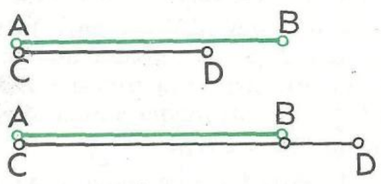
Ако отсечките $AB$ и $CD$ не се складни, тогаш: или $AB$ *е поголема* од $CD$ (црт. 44. а), или $AB$ *е помала* од $CD$ (црт. 44. б), т.е.

$$\text{или } AB > CD \quad \text{или } \quad AB < CD.$$

Тоа, практично, го утврдуваме преку споредување на должините на отсечките $AB$ и $CD$ со помош на шестар.



Црт. 43



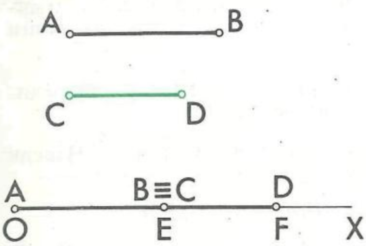
Црт. 44

## § 8. СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА ОТСЕЧКИ

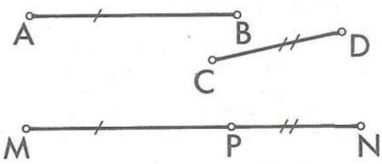
**1.** Нека се дадени отсечките $AB$ и $CD$ (црт. 45.).

Од почетокот $O$ на една произволна полуправа $Ox$, со шестар прво ќе ја пренесеме отсечката $AB$ ($OE \cong AB$), а потоа во продолжение на истата полуправа од точката $E$ ја пренесуваме и втората отсечка $CD$ ($EF \cong CD$). Така добиената отсечка $OF$ се вика *збир на отсечките* $AB$ и $CD$ (црт. 45.). и пишуваме: $OF \cong AB + CD$.

Меѓутоа, збир на отсечките $AB$ и $CD$ се вика и секоја отсечка $MN$, во која постои внатрешна точка $P$, така што $MP \cong AB$ и $PN \cong CD$ (црт. 46.).




Црт. 45



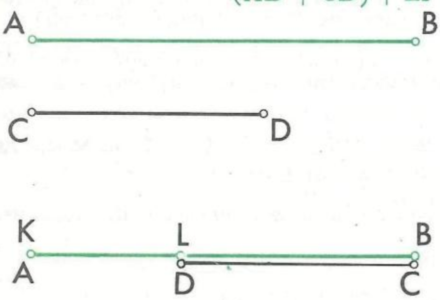

Црт. 46

Збирот на повеќе од две отсечки: $AB$, $CD$, $EF$, $GH$, . . . го одредуваме, кога кон збирот на две од нив (на пример, $AB$ и $CD$) ја додадеме третата отсечка ($EF$), потоа кон добиениот збир ја додадеме четвртата отсечка ($GH$), итн. Покажи дека:

**За собирањето на отсечките важи комутативниот и асоцијативниот закон на збирот,** т.е.

$$AB + CD \cong CD + AB \quad \text{и}$$

$$(AB + CD) + EF \cong AB + (CD + EF).$$




Црт. 47

**2.** Нека се дадени две несkладни отсечки $AB$ и $CD$, при што $AB > CD$ (црт. 47.).

*Секоја отсечка* $KL$, *таква што* $KL + CD \cong AB$, *се вика разлика на отсечките* $AB$ *и* $CD$, и се пишува $KL \cong AB - CD$.

Значи:

$$KL \cong AB - CD, \text{ ако е } KL + CD \cong AB.$$

Разликата $AB - CD$, практично, ја одредуваме кога од едниот крај, на пример од точката $B$, врз поголемата отсечка $AB$ со шестар ја пренесеме помалата отсечка $CD$ (црт. 47). Така добиената отсечка $AD$ е бараната разлика на дадените отсечки $AB$ и $CD$.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Нацртај три полуправи, обележи ги и прочитај ги!

**2.** Дали полуправите можат да се споредуваат? Може ли да се каже која од две полуправи е поголема, а која помала?

**3.** Нацртај една права и означи три нејзини различни точки со $A$, $B$ и $C$. Потоа од некоја точка $O$, што не ѝ припаѓа на правата $p$, повлечи три полуправи кои ќе минуваат соодветно низ точките $A$, $B$ и $C$!

**4.** Во рамнината на тетратката означи кои и да било четири точки $A$, $B$, $C$ и $D$. Нацртај полуправи кои поаѓаат од точката $A$, а минуваат низ една од другите три точки, потоа нацртај полуправи кои поаѓаат од точката $B$, па од точката $C$ и $D$, а минуваат низ една од останатите точки! Така нацртаните полуправи колку различни прави образуваат?

**5.** Точките $A$, $B$, $C$, $D$ по овој ред се обележени на правата $p$. Одреди: а) $AC \cup BD$; б) $AC \cap BD$; в) $AC \cap CD$; г) $AC \cup BD$; д) $AB \cap CD$!

**6.** Нацртај права $p$ и на неа означи три различни точки со $A$, $B$ и $C$. Наведи колку и кои полуправи и отсечки се добиваат на правата $p$?

**7.** Како се расположени точките $A$, $B$ и $M$, ако е $\overline{BM} + \overline{BA} = \overline{AM}$?

**8.** Точката $S$ лежи меѓу точките $A$ и $B$, а точката $M$ лежи меѓу точките $S$ и $B$. Што можеш да кажеш за точките $A$, $B$, $S$ и $M$, дали тие ѝ припаѓаат на иста права?

**9.** Можат ли две полуправи да имаат: а) само една заедничка точка, б) само две заеднички точки?

**10.** Дадени се три различни точки. Колку отсечки тие определуваат.

**11.** Нацртај произволна отсечка $AB$, а потоа конструирај друга отсечка што е складна на отсечката $AB$!

**12.** Нацртај две нескладни отсечки, а потоа утврди која од нив е поголема, а која помала. Запиши го тоа!

**13.** Нацртај две отсечки $AB$ и $CD$ $(AB > CD)$, потоа конструирај ги отсечките: $AB + CD$; б) $AB - CD$; в) $3AB$; г) $AC + 2CD$!

**14.** Дадена е права $p$ и точка $O \in p$. Колку точки од правата $p$ има, чие растојание од точката $O$ е: а) поголемо од 3 $cm$, б) еднакво на 3 $cm$, в) помало од 3 $cm$?

**15.** Дадена е права $q$ и точка $A \in q$. Што претставува множеството точки од правата $q$, чие растојание од точката $A$ е: а) не помало од 3 $cm$, б) не поголемо од 3 $cm$, в) еднакво на 3 $cm$?

**16.** За три точки $A, B, C \in \pi$ познато е дека: $\overline{AB} = 5$ $cm$; $\overline{AC} = 7$ $cm$. Може ли растојанието $\overline{BC}$ да биде еднакво на: а) 12 $cm$, б) 5 $cm$, в) 13 $cm$; г) 2 $cm$?

**17.** Нацртај три произволни отсечки и провери дали за собирањето на отсечките важи комутативниот и асоцијативниот закон!

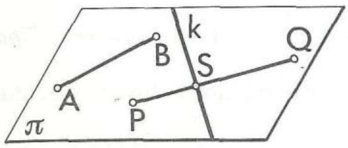
## § 9. ПОЛУРАМНИНА

Во рамнината $\pi$ на црт. 48. повлечени се една права $k$ и две отсечки $AB$ и $PQ$, т.е. $k \subset \pi$, $AB \subset \pi$, $PQ \subset \pi$.

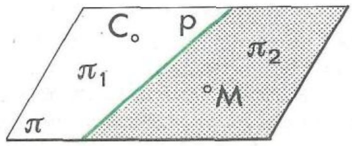
Гледаме дека отсечката $AB$ и правата $k$ немаат заеднички точки, т.е. $AB \cap k = \varnothing$; а отсечката $PQ$ и правата $k$ имаат само една заедничка точка $S$, т.е. $PQ \cap k = \{S\}$ (црт. 48).

За точките $A$ и $B$, кои ѝ припаѓаат на рамнината $\pi$ велиме дека се наоѓаат на иста страна од правата $k$; а за точките $P$ и $Q$ кои исто ѝ припаѓаат на рамнината $\pi$, дека се наоѓаат на различни страни од правата $k$.

**Две точки $A$ и $B$ се наоѓаат на иста страна од правата $k$, ако отсечката $AB$ и правата $k$ немаат ниту една заедничка точка,** т. е. **ако $AB \cap k = \varnothing$; а две точки $P$ и $Q$ се наоѓаат на различни страни од правата $k$** (велиме уште дека $P$ и $Q$ се раздвоени со правата $k$), **ако** отсечката $PQ$ **и правата $k$ имаат само една заедничка точка,** т. е. ако $PQ \cap k = \{S\}$.




Црт. 48




Црт. 49

Јасно е дека: секоја права $p$ што ѝ припаѓа на рамнината $\pi$ (црт. 49.), го разбива множеството на сите точки од рамнината $\pi$ (што не лежат на правата $p$) на две дисјунктни непразни подмножества. Тоа се: множеството $\pi_1$ на сите точки од рамнината $\pi$, кои со точката $C \in \pi_1$ се наоѓаат на иста страна од правата $p$; и множеството $\pi_2$ на сите оние точки од рамнината $\pi$, кои со точката $M \in \pi_2$ се наоѓаат од иста страна од правата $p$.

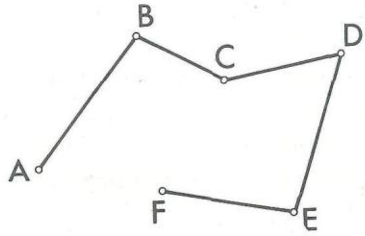
Секое од множествата (деловите) $\pi_1$ и $\pi_2$, на кои правата $p$ ја разбива рамнината $\pi$, вклучувајќи ја и правата $p$, се вика *полурамнина со гранична права $p$*.

Полурамнината симболички ќе ја означуваме со нејзината гранична права и една точка која ѝ припаѓа на таа полурамнина, но не лежи на граничната права. На пример, полурамнината $\pi_2$ на црт. 49. која е шрафирана симболички ќе ја означуваме со $pM$, а полурамнината $\pi_1$ со $pC$.

## § 10. ИСКРШЕНА ЛИНИЈА

Во рамнината на тетратката обележете неколку точки $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ и $F$ и повлечете ги отсечките $AB$, $BC$, $CD$, $DE$ и $EF$ (црт. 50). Ќе се добие една линија $ABCDEF$ која е составена од отсечките $AB$, $BC$, $CD$, $DE$ и $EF$, на кои крајот на првата отсечка се совпаѓа со почетокот на втората, а крајот на втората се совпаѓа со почетокот на третата отсечка итн, а освен тоа, ниту еден пар соседни отсечки (кои имаат заедничка крајна точка) не ѝ припаѓаат на иста права. Така добиената линија $ABCDEF$ се вика *искршена линија*.

Искршената линија $A_0A_1A_2A_3 \ldots A_{n-1}A_n$ претставува, всушност, унија од отсечките $A_0A_1$; $A_1A_2$; $A_2A_3$; ... $A_{n-1}A_n$, на кои крајот на секоја отсечка (освен на последната) се совпаѓа со почетокот на наредната и ниту еден пар соседни отсечки не ѝ припаѓаат на иста права.

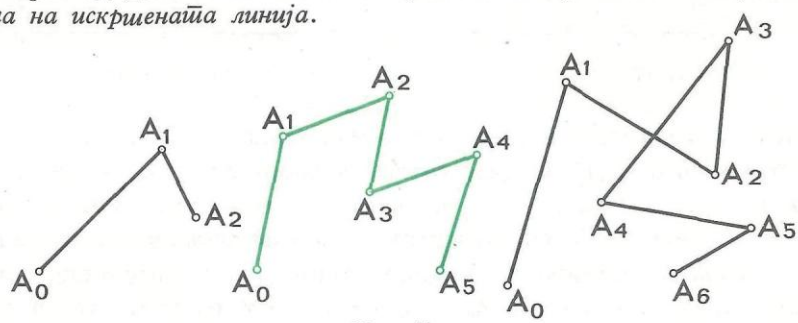


Црт. 50

Отсечките $A_0A_1$; $A_1A_2$; $A_2A_3$; ... $A_{n-1}A_n$ се викаат *страни на искршената линија* $A_0A_1A_2A_3 \ldots A_n$. Точките $A_1$; $A_2$; $A_3$; ... $A_{n-1}$ се викаат *темиња*, а точките $A_0$ и $A_n$ — *краеви* (*почетна* и *крајна точка*) на искршената линија.

Две темиња, кои ѝ припаѓаат на иста страна на искршената линија, се викаат *соседни темиња*; а две страни со заедничко теме, се викаат *соседни страни* на искршената линија.

Збирот од должините на сите страни на искршената линија се вика *должина на искршената линија*.



Црт. 51

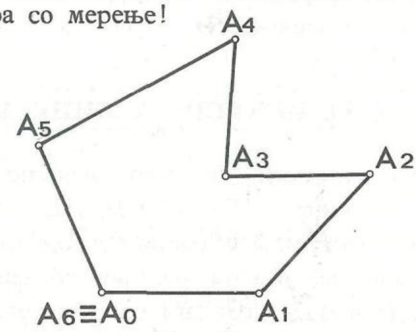
Ако краевите на искршената линија $A_0$ и $A_n$ не се совпаѓаат велиме дека искршената линија е *отворена* (црт. 51.).

Очигледно е дека:

**Должината на секоја отворена искршена линија е поголема од растојанието меѓу нејзините крајни точки,** т.е.,

$$\overline{A_0A_1} + \overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + \ldots + \overline{A_{n-1}A_n} > \overline{A_0A_n}.$$

Уверете се во тоа со мерење!

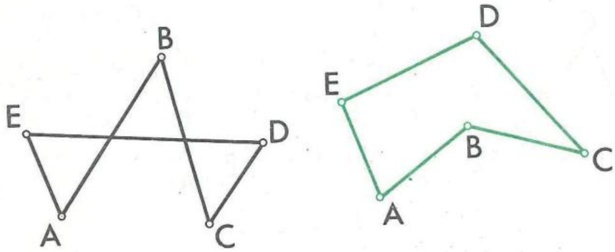


Црт. 52

Ако краевите на искршената линија $A_0$ и $A_n$ се совпаѓаат ($A_0 \equiv A_n$), велиме дека таа е *затворена искршена линија* (црт. 52.).

## § 11. МНОГУАГОЛНИК (ПОЛИГОН)

На црт. 53 нацртани се две затворени искршени линии. Тие се разликуваат една од друга по тоа, што кај првата искршена линија несоседните страни $AB$ и $DE$; а исто и $BC$ и $DE$ се сечат; а кај втората — не постои ниту еден пар несоседни страни кои се сечат. Ние ќе разгледуваме затворени искршени линии само од вториот вид.

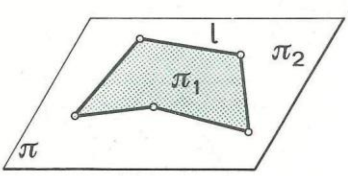



Црт. 53

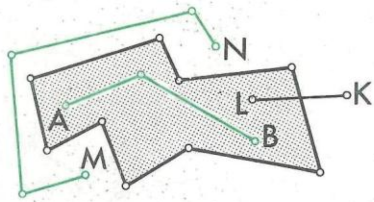
**Затворена искршена линија, која лежи на иста рамнина и нема ниту еден пар несоседни страни кои се сечат, се вика уште и многуаголна или полигонална линија.**

Секоја полигонална линија $l$, што лежи во рамнината $\pi$ (црт. 54.) го разбива множеството на сите точки од рамнината $\pi$ (што не ѝ припаѓаат на $l$) на две подмножества и тоа: $\pi_1$ — множество на точките што припаѓаат на делот од рамнината $\pi$, што е ограничен со полигоналната линија (внатрешност на полигоналната линија $l$); и $\pi_2$ — множество на точките што не припаѓаат ниту на $l$, ниту на $\pi_1$ (надворешност на полигоналната линија) (црт. 54.).

На црт. 54. внатрешната област $\pi_1$ на полигоналната линија $l$ е шрафирана. Внатрешната и надворешната област на полигоналната линија го имаат следново својство: секои две точки што припаѓаат на иста област секогаш можат да се соединат со отсечка или искршена линија, која не ја сече полигоналната линија $l$ (црт. 55). Но, точките што припаѓаат на различни области, тоа својство го немаат (црт. 55.).



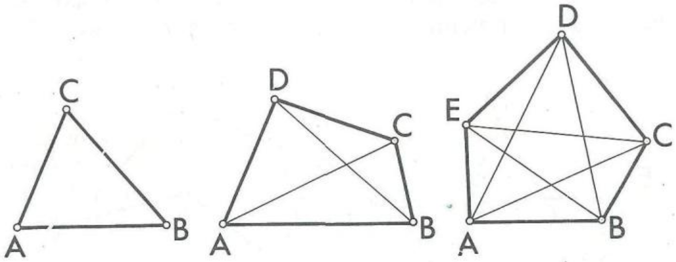

Црт, 54




Црт. 55

**Унијата од множеството точки што ѝ припаѓаат на полигоналната линија $l$ и множеството точки од нејзината внатрешна област се вика многуаголник или полигон.**

Полигоналната линија $l$ за многуаголникот се вика негова *граница* или *контура*, а страните и темињата на полигоналната линија се викаат *страни* и *темиња* на многуаголникот. Многуаголникот симболички го означуваме, како и полигоналната линија, со именување на сите негови темиња: $ABC$; $ABCD$; $ABCDE$, итн (црт. 56.).




Црт. 56

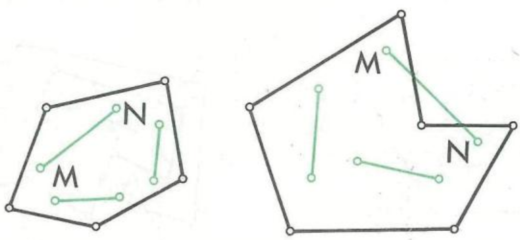
Во секој многуаголник бројот на темињата е еднаков на бројот на страните. (Објасни зошто!).

Според бројот на страните, многуаголникот може да биде *триаголник* (кога тој има три страни), *четириаголник* (кога тој има четири страни) *петаголник* (кога има пет страни), *шестаголник*, итн. (црт. 56).

Две темиња кои припаѓаат на иста страна се викаат *соседни темиња*, а две страни со заеднички крај (теме) се викаат *соседни страни* на многуаголникот.

Отсечката, што сврзува кои да било две несоседни темиња на многуаголникот, се вика негова *дијагонала*. Петаголникот има 5 дијагонали, четириаголникот — 2, а триаголникот нема ниту една дијагонала (Зошто? (црт. 56.).

На црт. 57. нацртани се два многуаголника. Кај првиот од нив уочуваме дека: која и да било отсечка $MN$, чии крајни точки ѝ припаѓаат на внатрешната област на многуаголникот, целата лежи во таа област. Но, кај вториот многуаголник постојат отсечки ($MN$), на кои сите точки не ѝ припаѓаат на внатрешната област на многуаголникот иако крајните




Црт. 57

точки ($M$ и $N$) ѝ припаѓаат на таа област. Првиот од тие два многуаголника се вика *конвексен*, а вториот — *неконвексен* (или *конкавен*). Според тоа:

**Даден многуаголник е конвексен, ако на неговата внатрешна област и припаѓаат сите отсечки, чии крајни точки се од таа област.**

Секој многуаголник кој не го задоволува тој услов, се вика *неконвексен* (или конкавен). Ние ќе ги разгледуваме само конвексните многуаголници.

Лесно уочуваме дека сите дијагонали на конвексниот многуаголник ѝ припаѓаат на неговата внатрешна област (црт. 56.)

**Збирот од должините на сите страни на многуаголникот се вика периметар на многуаголникот, и ќе го означуваме со буквата** $L$, т.е.
$$L = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \ldots + \overline{MA}.$$

Нацртајте еден произволен многуаголник и одредете го неговиот периметар:

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Правата $p$ ја разделува рамнината $\pi$ на две полурамнини (црт. 58.). Покажи кои точки припаѓаат: а) на иста полурамнина со точката $A$, б) на иста полурамнина со точката $M$, в) на границата на двете полурамнини!

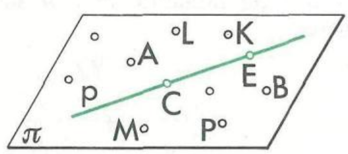
**2.** Нацртај искршена линија која има три страни, и одреди ја нејзината должина!

**3.** Можат ли две страни на искршената линија да припаѓаат на иста права?

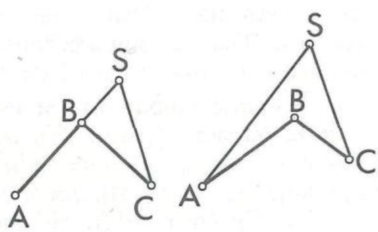
**4.** Нацртај една искршена линија $ABCD$, потоа со помош на шестар и линијар, конструирај отсечка, чија должина е еднаква на должината на искршената линија $ABCD$!

**5.** Искршената линија $ABCDE$ има должина на страните: $\overline{AB} = 2\ cm$; $\overline{BC} = 3\ cm$; $\overline{CD} = 4\ cm$; $\overline{DE} = 5\ cm$. Може ли отсечката што ги сврзува краевите на искршената линија $ABCDE$ да има должина: а) $9\ cm$, б) $14\ cm$; в) $15\ cm$.

**6.** Покажи дека: должината на искршената линија $ABC$ е помала од должината на искршената линија $ASC$ (црт. 59.)!




Црт. 58

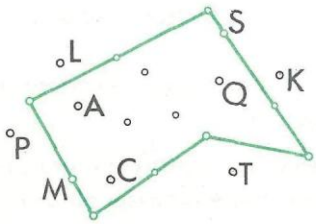



Црт. 59

**7.** Во рамнината на тетратката означи пет точки, од кои никои три не лежат на иста права. Нацртај полигонална линија чии темиња се означените точки, потоа одреди ја должината на добиената полигонална линија!

**8.** Колку најмалку страни може да има многуаголникот?

9. На црт. 60. нацртан е еден многуаголник. Кои од означените точки на цртежот припаѓаат: а) на многуаголникот, б) на внатрешната, в) на надворешната област; г) на контурата на многуаголникот?




Црт. 60

10. Одреди го периметарот на многуаголникот, што е нацртан на црт. 60!

11. Отсечката $MS$ нема заеднички точки со правата $AB$, со која лежи во иста рамнина, Како се расположени точките $M$ и $S$ во однос на правата $AB$?

12. Може ли низ некоја точка, што ѝ припаѓа на: а) внатрешната, б) надворешната област на даден многуаголник да се повлече права, која нема да пресече ниту една страна на многуаголникот?

13. Колку дијагонали можат да се повлечат низ едно теме на еден конвексен: а) четириаголник, б) петаголник, в) шестаголник?

14. Колку вкупно дијагонали има: четириаголникот, петаголникот, шестаголникот, седумаголникот, осумаголникот?

15. Нацртај искршена линија во една полурамнина, која со границата на полурамнината да има: а) само една заедничка точка; б) само две заеднички точки; в) бесконечно множество заеднички точки.

16. Даден е конвексен многуаголник $ABCDE$. Може ли да се повлече права $MS$, која ќе пресече само една страна на многуаголникот?

17. Нацртај конкавен: четириаголник, петаголник, триаголник (!).

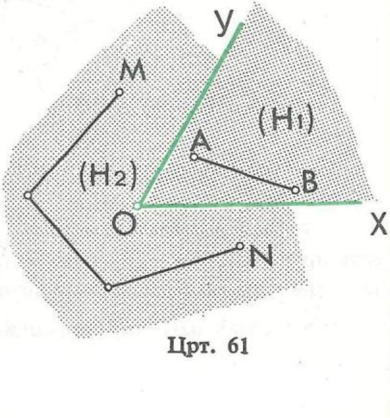
18. Нацртај искршена линија со најмал број на страни: а) отворена б) затворена!

## § 12. АГОЛ, ВИДОВИ АГЛИ

### 12. 1. ПОИМ ЗА АГОЛ

Нацртајте во рамнината на тетратката две полуправи $Ox$ и $Oy$ со заеднички почеток $O$ (црт. 61.). Тие го разбиваат множеството на сите точки од рамнината (што не им припаѓаат на полуправите) на две подмножества. Тоа се: множеството на сите точки од областа $H_1$; и множеството на сите точки од областа $H_2$, така што:

Секои две точки што ѝ припаѓаат на една иста област $H_1$ или $H_2$, можат да се соединат со една отсечка или искршена линија која нема да ги пресече полуправите $Ox$ и $Oy$ (црт. 61.). Но, тоа својство го немаат точките од различните области $H_1$ и $H_2$.

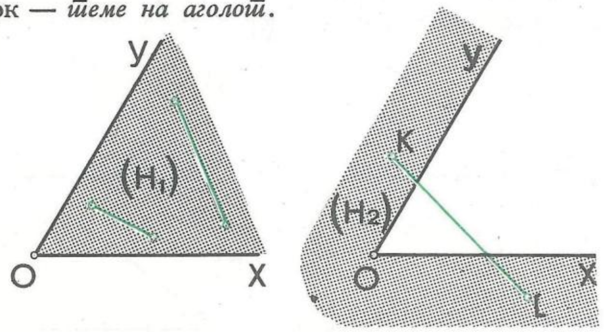



Црт. 61

Потоа: секои две точки од областа $H_1$ ако ги соединиме со отсечка, целата таа отсечка ѝ припаѓа на областа $H_1$. Тоа својство го нема областа $H_2$. На пример, отсечката $KL$, чии крајни точки $K$ и $L$ ѝ припаѓаат на областа $H_2$, не ѝ припаѓа целата (со сите свои точки) на областа $H_2$ (црт. 62.). Затоа, за областа $H_1$ велиме дека е *конвексна*, а за областа $H_2$ — *неконвексна.*

**Унијата од полуправите $Ox$ и $Oy$ со заеднички почеток и множеството точки на една од областите $H_1$ или $H_2$, на кои полуправите ја разбиваат рамнината, се вика агол.**

Полуправите $Ox$ и $Oy$ се викаат *краци на аголот*, а нивниот заеднички почеток — *теме на аголот*.

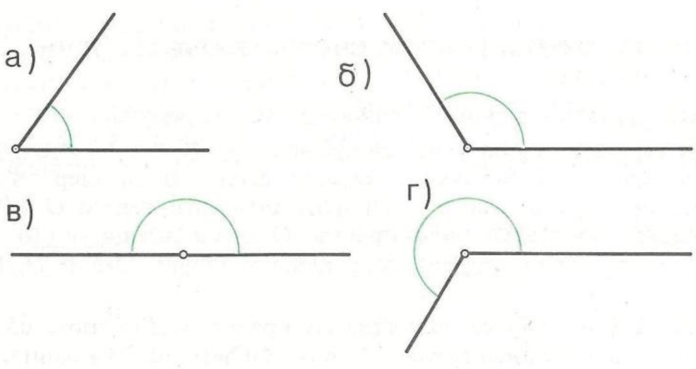



Црт. 62

Аголот можеме да го дефинираме и вака:

**Агол е геометриска фигура која се состои од две полуправи со заеднички почеток и една од областите, на кои тие ја разбиваат рамнината на која ѝ припаѓаат.**

Очигледно е дека две полуправи со заеднички почеток секогаш образуваат два агла со заеднички краци. Кој од тие два агла во конкретниов случај сакаме да го разгледаме, обично, го означуваме со еден кружен лак, како што е покажано на црт. 63.



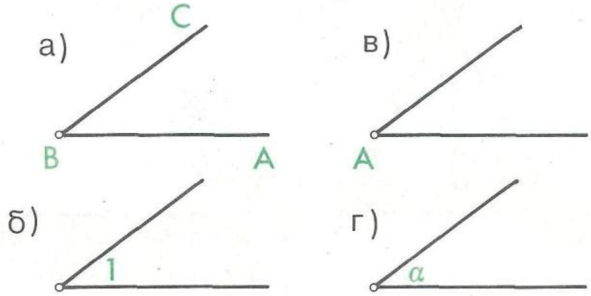

Црт. 63

Ако областа на разгледуваниот агол е конвексна, велиме дека тој агол е *конвексен.* Такви се аглите а) и б) на црт. 63. Ако, пак, областа на аголот е неконвексна, за тој агол велиме дека е *неконвексен* (или *конкавен*) (црт. 63. г).

**Агол, чии краци образуваат една права, се вика рамен агол** (црт. 63. в).

Аглите ги означуваме на различни начини. Најчесто ги означуваме со три големи печатни букви, што ги пишуваме една кај темето, а другите две кај краците. При вакво означување на аглите, буквата што го означува темето треба да падне помеѓу другите две букви при запишувањето и читањето на аголот, на пример, агол $ABC$ (црт. 64. а).

Аглите можат да се обележуваат и само со една голема печатна буква, што се става кај темето, на пример агол $A$ (црт. 64. б).




Црт. 64

Аглите често ги означуваме и со цифрите: 1; 2; 3; 4; ... или со малите грчки букви $\alpha$ (алфа); $\beta$ (бета); $\gamma$ (гама); $\delta$ (делта); што се ставаат кај темето во неговата внатрешна област (црт. 64. в, г).

При запишувањето на аглите, наместо зборот „агол" го пишуваме знакот $\measuredangle$, како на пример: $\measuredangle ABC$, $\measuredangle A$; $\measuredangle 1$. При означувањето на аглите со грчките букви $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$; обично го изоставаме знакот $\measuredangle$, т. е. на место $\measuredangle\alpha$, $\measuredangle\beta$, пишуваме само $\alpha$; $\beta$.

## 12. 2. СКЛАДНОСТ И СПОРЕДУВАЊЕ НА АГЛИ

Аглите, како и отсечките, можат да се споредуваат.

За да споредиме два агла: на пример, $\measuredangle AOB$ и $\measuredangle A_1O_1B_1$ (црт. 65.) постапуваме вака: го исечуваме едниот агол, на пример $\measuredangle AOB$, и го поставуваме врз другиот агол $\measuredangle A_1O_1B_1$; така што темето $O$ и кракот $OA$ да се совпаднат со темето $O_1$ и кракот $O_1A_1$, а краците $OB$ и $O_1B_1$ да паднат од истата страна спрема совпаднатите краци $OA$ и $O_1A_1$; и во тој случај:

1°. Ако кракот $OB$ се совпадне со кракот $O_1B_1$ (црт. 65. а) велиме дека $\measuredangle AOB$ *е складен* (*конгруентен*) со $\measuredangle A_1O_1B_1$, што го запишуваме вака:

$$\measuredangle AOB \cong \measuredangle A_1O_1B_1.$$

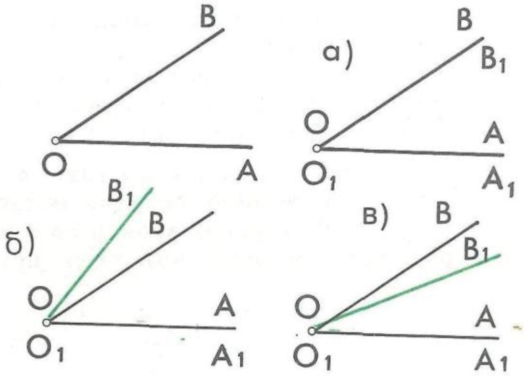
Значи,

**Два агла се складни, ако тие на некој начин можат да се доведат до совпаѓање, т. е. да им се совпаднат краците и нивните области.**

Според тоа, складните агли се разликуваат само по својата положба и по ништо друго.

2°. Ако кракот $AB$ падне меѓу краците $O_1A_1$ и $O_1B_1$, т. е. во областа на аголот $A_1O_1B_1$ (црт. 65. б), гледаме дека $\sphericalangle AOB$ е дел од $\sphericalangle A_1O_1B_1$. Во таков случај велиме дека аглите не се складни, или поточно дека $\sphericalangle AOB$ *е йомал од* $\sphericalangle A_1O_1B_1$, кое го запишуваме вака:

$$\sphericalangle AOB < \sphericalangle A_1O_1B_1.$$




Црт. 65

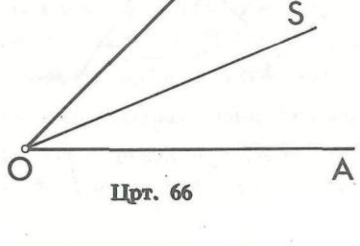
3°. Ако, пак, кракот $OB$ падне надвор од областа на $\sphericalangle A_1O_1B_1$ (црт. 65. в), велиме дека $\sphericalangle AOB$ е ***йоголем од*** $\sphericalangle A_1O_1B_1$, кое го запишуваме вака:

$$\sphericalangle AOB > \sphericalangle A_1O_1B_1.$$

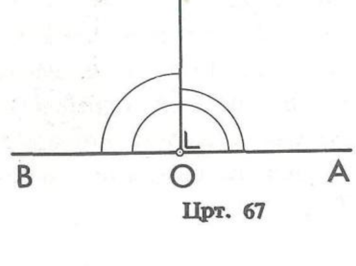
## 12. 3. БИСЕКТРИСА НА АГОЛ. ВИДОВИ АГЛИ

Нацртајте еден произволен агол $AOB$ на лист хартија (црт. 66.) и исечете ја хартијата по краците на аголот. Ако добиениот модел од хартија го превиткате така, што краците $OA$ и $OB$ да се совпаднат, а потоа моделот го исправите, на него ќе се образува раб (превој) $OS$, кој го разделува дадениот агол на два складни агли $AOS$ и $SOB$ (црт. 66.). За секој од складните агли $AOS$ и $SOB$ велиме дека се ***йоловина*** од дадениот агол.

**Полуправата $OS$, која го разделува еден агол на два складни агли, се вика бисектриса на аголот.**




Црт. 66

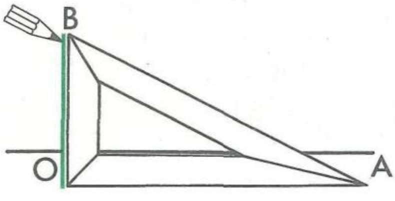



Црт. 67

Очигледно е дека секој агол има една и само една бисектриса.

На цртеж 67. е нацртан рамен агол $AOB$ и е повлечена неговата бисектриса $OS$. Таа го разделува рамниот агол на два складни агла $AOS$ и $SOB$. Секој од тие два агла се вика *йрав агол.* Значи:

**Половината од рамниот агол се вика прав агол.**

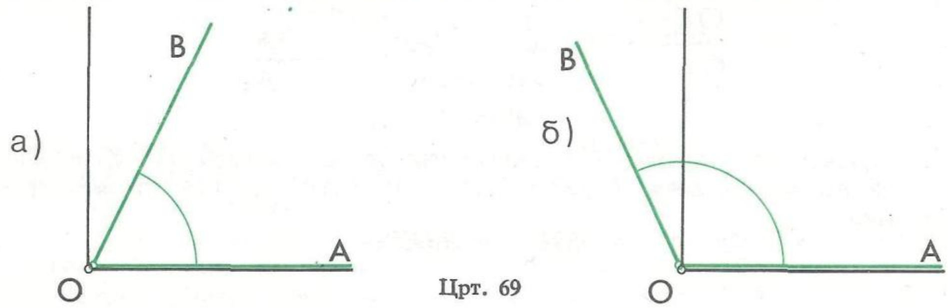



Црт. 68

Бидејќи сите рамни агли се складни (зошто?), тоа и сите прави агли (како половинки од рамниот агол) се складни еден на друг.

Правите агли ги цртаме со помош на правоаголниот триаголник (кој има еден прав агол) (црт. 68.).

**Секој агол што е помал од правиот агол се вика остар агол** (црт. 69. а); **а секој агол што е поголем од правиот, но помал од рамниот. се вика тап агол** (црт. 69. б).

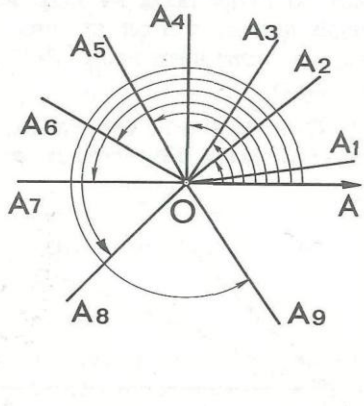



Црт. 69

Јасно е дека острите, правите и тапите агли се конвексни агли (зошто?), а секој агол што е поголем од рамниот агол е *неконвексен* (или *конкавен*) агол.

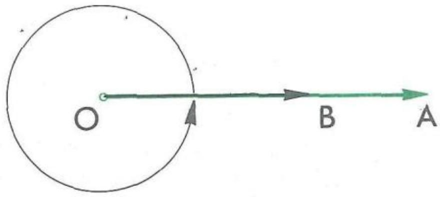
Можеме да замислиме дека аглите настануваат и со вртење (ротација) на една полуправа околу својот почеток, од некоја почетна положба $OA$. (црт. 70.).

Полуправата $OA$, при вртењето околу својот почеток $O$, со својата почетна положба прво ќе образува се поголеми и поголеми остри агли; само во еден определен момент ќе образува прав агол, потоа ќе образува се поголеми и поголеми тапи агли; само во еден определен момент ќе образува рамен агол; а потоа ќе образува се поголеми и поголеми конкавни агли (црт. 70.).




Црт. 70

Најпосле, кога полуправата *OA* ќе направи едно полно завртување околу својот почеток, таа пак ќе дојде до својата почетна положба (црт. 71.). При тоа, образувала два рамни агла, т. е. ја „опишала“ целата рамнина и велиме дека образувала *йолн агол*.



Црт. 71

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Што е агол? што разликуваме кај него?

**2.** Како ги означуваме аглите? Нацртај три агли и означи ги!

**3.** Нацртај две прави *AB* и *CD*, кои се сечат во точката *S*! Колку агли гледаш на цртежот? Прочитај ги и запиши ги!

**4.** Нацртај три полуправи со заеднички почеток, што ќе припаѓаат на иста рамнина. Колку различни агли образуваат тие?

**5.** Кој агол се вика конвексен, а кој конкавен (неконвексен)?

**6.** За кои два агла велиме дека се складни?

**7.** Нацртај две прави што се сечат, исечи ги сите четири агли и испитај дали меѓу нив има складни агли!

**8.** Нацртај два произволни агла, исечи ги и спореди ги! Изрази го тоа математички!

**9.** Кој агол се вика остар, а кој тап?

**10.** Земи еден лист хартија и со свиткување направи модел на прав агол!

**11.** Нацртај неколку различни агли, означи ги и покажи кој од каков вид е!

**12.** Нацртај по еден од секој вид агли и напиши како се вика!

**13.** Нацртај еден прав агол: Како ги цртаме правите агли?

**14.** Нацртај и исечи од картон по еден од секој вид агли!

**15.** Каков агол претставува половината од: а) остриот, б) правиот, в) тапиот, г) рамниот, д) конкавниот, ѓ) полниот агол?

**16.** Каков агол образуваат стрелките на часовникот, кога тој покажува: а) $2^h$, б) $3^h$, в) $4^h$, г) $5^h$, д) $6^h$, ѓ) $8^h$, е) $9^h$, ж) $12^h$?

**17.** Каков агол опишува малата стрелка на часовникот од пладне до: а) $14^h$ б) $15^h$, в) $17^h$, г) $18^h$ д) $20^h$, ѓ) $21^h$, е) полноќ?

**18.** Колку прави, а колку рамни агли содржи еден полн агол?

**19.** Колку најмногу тапи агли може да содржи еден полн агол?

**20.** Колку прави агли ќе опише големата (минутна) стрелка на часовникот за: а) 1 час, б) 1 ден, в) 1 месец?

## § 13. НОРМАЛНИ ПРАВИ И РАМНИНИ

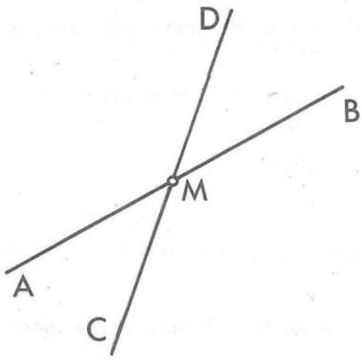
### 13. 1. НОРМАЛНИ ПРАВИ

На црт. 72. нацртани се две прави $AB$ и $CD$, кои се сечат во точката $M$. Гледаме дека при пресекувањето тие образуваат четири агли: два остри и два тапи. Лесно се уверуваме дека двата остри агла, а исто и двата тапи агла се складни, т. е.

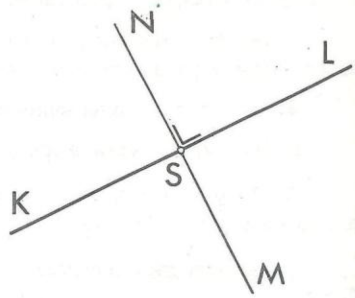
$$\sphericalangle AMC \cong \sphericalangle BMD \text{ и } \sphericalangle AMD \cong \sphericalangle BMC.$$

На црт. 73. нацртани се, исто така две прави $KL$ и $MN$ кои се сечат, но при пресекувањето тие образуваат еден прав агол ($\sphericalangle LSN$). Какви се другите три агли $\sphericalangle KSN$, $\sphericalangle KSM$ и $\sphericalangle MSL$?

И тие се прави. Објасни зошто!




Црт. 72

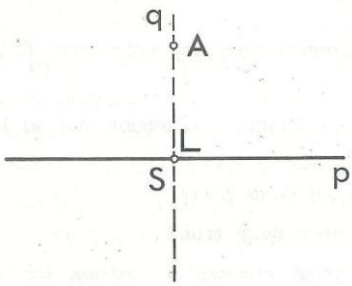



Црт. 73

**Две прави, кои при пресекувањето образуваат прави агли, се викаат заемно нормални (или ортогонални).**

За правата $MN$ велиме дека е *нормална* (ортогонална) на правата $KL$, и обратно; а тоа симболички го запишуваме: $MN \perp KL$ или $KL \perp MN$.

Наместо „нормална права", често велиме *нормала*; а наместо „заемно нормални прави" велиме *нормални прави*.




Црт. 74

Две прави, што се сечат, а не се нормални една на друга велиме дека се *коси* една спрема друга. Такви се правите $AB$ и $CD$ на црт. 72.

Нормалните прави го имаат следново важно својство:

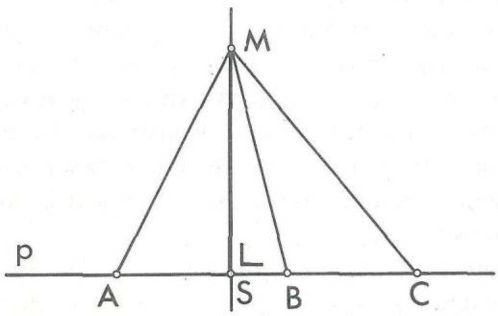
**Низ дадена точка во рамнината, што не ѝ припаѓа на дадена права, може да се повлече само една права, што е нормална на дадената права.**

На сл. 74. низ точката $A$ е повлечена права $q$, што е нормална на правата $p$. Штом е $q \perp p$, тогаш јасно е дека секоја друга права што ќе мине низ точката $A$ не може да биде нормална на правата $p$, а ќе биде коса со неа.

## 13. 2. РАСТОЈАНИЕ ОД ТОЧКА ДО ПРАВА

Нацртајте права $p$ и означете една произволна точка $M$, што не ѝ припаѓа на правата $p$. Потоа, низ точката $M$ во рамнината, во која лежат $M$ и $p$, повлечете нормала на правата $p$ (црт. 75.). Повлечената нормала од точката $M$ ќе ја пресече правата $p$ во точно одредена точка $S$. Точката $S$ се вика *подножје* на повлечената нормала $MS$ од точката $M$ кон правата $p$.

На правата $p$ да означиме неколку точки $A, B, C, \ldots$ кои се различни од точката $S$, и истите да ги соединиме во точката $M$.




Црт. 75

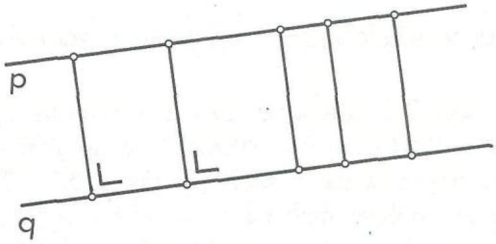
Ако ги измериме и спредиме должините на отсечките $MA$, $MB$, $MC$ и $MS$, ќе забележиме дека: **Должината на нормалната отсечка $MS$ е помала од должината на секоја коса отсечка $MA$, $MB$, $MC, \ldots$, т.е.**

$$\overline{MS} < \overline{MA}; \quad \overline{MS} < \overline{MB}; \quad \overline{MS} < \overline{MC}.$$

Според тоа: Растојанието од точката $M$ до подножјето на повлечената низ неа нормала на правата $p$, е помало од растојанието на точката $M$ до која и да било друга точка од правата $p$.

Значи, точката $S$ од правата $p$ е најблиска од сите нејзини точки до точката $M$. Затоа: Растојанието од точката $M$ до подножјето на нормалата, што е повлечена кон правата $p$, се вика *растојание од точката $M$ до правата $p$*.

Ако две прави $p$ и $q$ се паралелни (црт. 76.), тогаш растојанието на секоја точка од едната права (на пример, $p$) до другата права е едно исто. Затоа, растојание меѓу две паралелни прави се вика растојанието на која и да било точка од едната до другата права.

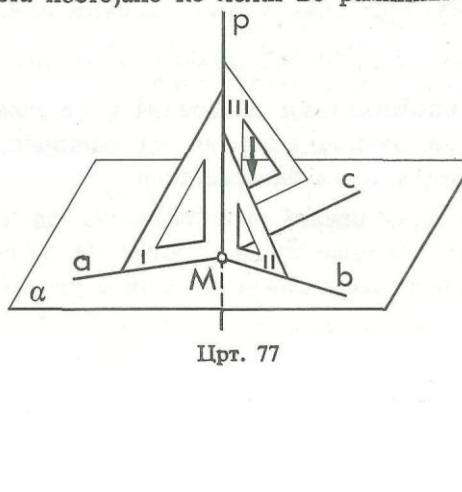


Црт. 76

### 13. 3. ПРАВА НОРМАЛНА НА РАМНИНАТА

Даземеме еден рамен картон и два правоаголни триаголника I и II. Помалите катети на тие триаголници ќе ги поставиме да легнат на рамнината од картонот, а другите две катети да им се поклопат, како што е покажано на цртеж 77. Здружените катети на триаголниците ќе определуваат некоја права $p$, а катетите што лежат на рамнината од картонот ќе ги формираат правите $a$ и $b$, кои ќе минат низ точката $M$ (пробод на правата $p$ во рамнината од картонот). Јасно е дека така определената права $p$ е нормална на правите $a$ и $b$.

Потоа, да земеме уште еден триаголник (III), па неговата поголема катета да ја здружиме со поклопените катети на триаголниците I и II. Ако триаголникот III го спуштиме полека, лизгајќи ја неговата поголема катета по правата $p$, ќе забележиме дека другата катета на триаголникот III ќе легне целата во рамнината на картонот. А, ако потоа триаголникот III почнеме да го вртиме околу поголемата катета, како околу оска, тогаш другата негова катета постојано ќе лежи во рамнината на картонот.



Црт. 77

Од ова гледаме дека правата *p*, која што ја прободува рамнината и е нормална на правите *a* и *b* што лежат во истата рамнина, а минуваат низ нејзиниот пробод, ќе биде нормална и на секоја друга права што лежи во рамнината, а минува низ нејзиниот пробод.

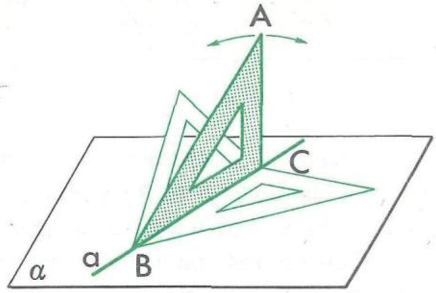
За таква права велиме дека е *нормална* на рамнината, а точката *M*, во која нормалата ја прободува рамнината, уште се вика и *подножје* на нормалата. Според тоа:

**Дадена права е нормална на дадена рамнина, ако таа е нормална најмалку на две прави што лежат во дадената рамнина, а минуваат низ нејзиниот пробод.**

Правата, што ја прободува дадена рамнина, а не е нормална на неа, велиме дека е *коса* кон таа рамнина.

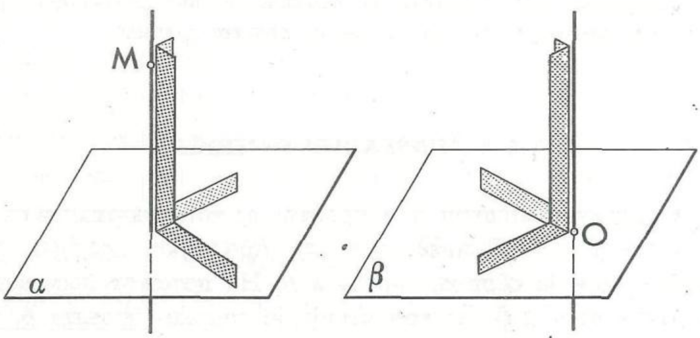
Се поставува прашањето: дали при утврдувањето на нормалноста на дадена права на дадена рамнина е доволно да утврдиме дека таа е нормална само спрема една права во рамнината?

Ако дадена права е нормална спрема една права, која лежи на рамнината, тоа уште не значи дека дадената права мора да е нормална и на рамнината. Во тоа ќе се увериме и од цртеж 78.



Црт. 78

Во градежништвото и занаетчиските работилници за повлекување на права нормална на дадена рамнина се употребува специјална направа, таканаречена *просторен аголник*. На цртеж 79. е покажано како со помошта на просторниот аголник се повлекува нормала од дадената точка $M \notin \alpha$ кон рамнината $\alpha$, а на црт. 79. б е покажано како се повлекува нормала од некоја точка $O \in \beta$, кон рамнината $\beta$.

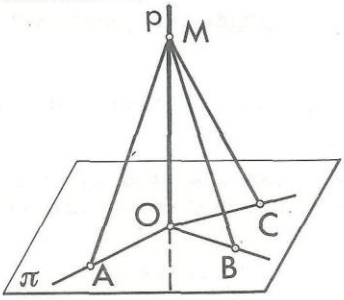


Црт. 79

Лесно се уверуваме дека: **Низ една точка во просторот може да се повлече само една нормала кон дадена рамнина.**

## 13. 4. РАСТОЈАНИЕ ОД ТОЧКА ДО РАМНИНА

Нека е дадена рамнината $\pi$ и една точка $M$, што не ѝ припаѓа на таа рамнина (црт. 80). Низ точката $M$ може да се повлече само една права $p$, што е нормална на рамнината $\pi$. Повлечената нормала низ точката $M$ ја прободува дадената рамнина во некоја точно одредена точка $O$, која се вика *подножје* на повлечената нормала $p$ од точката $M$ кон рамнината $\pi$.




Црт. 80

На рамнината $\pi$ да означиме и неколку други точки $A$, $B$, $C$, ... кои се различни од подножјето $O$, и истите да ги соединиме со точката $M$ (црт. 80). Ако ги измериме и споредиме должините на отсечките $MA$, $MB$, $MC$ и $MO$, ќе забележиме дека: должината на нормалната отсечка $MO$ е помала од должината на секоја коса отсечка $MA$, $MB$, $MC$, ..., т.е.

$$\overline{MO} < \overline{MA}; \quad \overline{MO} < \overline{MB}; \quad \overline{MO} < \overline{MC}, \ldots$$

Значи, растојанието од точката $M$ до подножјето на повлечената низ неа нормала $p$ на рамнината $\pi$ е помало од растојанието на точката $M$ до која било друга точка од рамнината $\pi$.

Според тоа, од сите точки на рамнината $\pi$ најблиска точка до дадената точка $M$ е точката $O$. Затоа, **растојанието од точката $M$ до подножјето $O$ на повлечената нормала од $M$ на $\pi$, се вика растојание од точката $M$ до рамнината $\pi$.**

**Ако две рамнини се паралелни, тогаш секоја точка од едната рамнина е на еднакво растојание до другата рамнина. Покажете го тоа на моделот на коцка.**

Затоа *растојание меѓу две паралелни рамнини* се вика растојанието на која и да **било точка, што ѝ припаѓа на едната од нив до другата рамнина.**

## 13. 5. НОРМАЛНИ РАМНИНИ

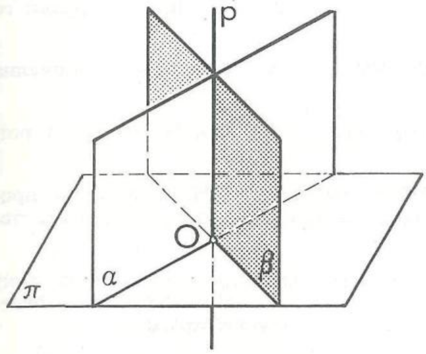
Нека е дадена рамнината $\pi$ и правата $p$, која е нормална на рамнината $\pi$ (црт. 81.), т.е. $p \perp \pi$. Знаеме дека во просторот постојат бесконечно многу рамнини кои ја содржат правата $p$. На цртежот поставени се само две такви рамнини $\alpha$ и $\beta$, од кои секоја ја содржи правата $p$, т.е.

$$p \subset \alpha \quad \text{и} \quad p \subset \beta.$$

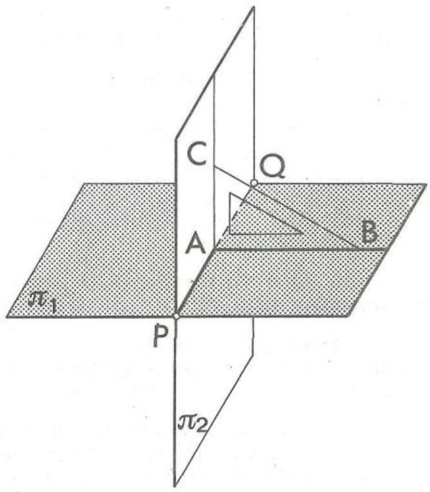
За рамнините $\alpha$ и $\beta$, кои ја содржат правата $p$, која е нормална на дадената рамнина $\pi$, велиме дека и тие ***се нормални на рамнината*** $\pi$, и пишуваме: $\alpha \perp \pi$ и $\beta \perp \pi$.

Според тоа, **ако една од две рамнини содржи барем една права, која е нормална на другата рамнина, тогаш тие две рамнини велиме дека се заемно нормални или нормални една на друга.**

Заемната нормалност на две рамнини $\pi_1$ и $\pi_2$ кои се сечат по правата $PQ$ ја испитуваме со помош на правоаголен триаголник како што е покажано на црт. 82.




Црт. 81




Црт. 82

За две рамнини кои се сечат, но не се нормални една на друга, велиме дека *се сечат косо*, односно дека *се наведени* или *коси* една спрема друга.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** За кои две прави велиме дека се нормални една на друга?

**2.** Кога една права е нормална на дадена рамнина?

**3.** За кои две рамнини велиме дека се нормални една на друга?

**4.** Каква положба имаат околните рабови на училницата спрема рамнината на таванот?

**5.** Каква заемна положба имаат две прави, што се нормални на иста рамнина? Покажи го тоа со два молива и еден картон!

**6.** Именувај и напиши неколку големи печатни букви од нашата азбука, кај кои гледаш нормални отсечки!

**7.** Земи две прави жици и постави ги нормално една на друга, но при тоа: а) двете да се хоризонтални, б) двете да се вертикални, в) едната хоризонтална, а другата вертикална, г) двете да се во коса положба! Кој од тие случаи е невозможен?

**8.** Каква положба има рамнината на вратата спрема рамнината на подот, кога таа е: а) затворена, б) отворена?

**9.** Земи три жици и постави ги така, што секоја од нив да е нормална на секоја од другите две! Покажи кои три раба на коцката имаат таква заемна положба!

**10.** Дадена рамнина има вертикална положба. Каква положба ќе има една права што е нормална на неа? Покажи го тоа со помош на молив и картон!

**11.** Земи еден лист хартија, превиткај го два пати, така што кога ќе го развиткаш, на него да добиеш две нормални прави!

**12.** Нацртај една права и обележи една точка, што не припаѓа на правата! Одреди го растојанието на таа точка до правата!

**13.** Ако точката ѝ припаѓа на правата, колкаво е нејзиното растојание до таа права?

**14.** Нацртај три прави во рамнината на тетратката во различна положба и обележи една точка од рамнината, која не припаѓа ни на една од тие прави. Одреди го растојанието на таа точка до секоја од правите!

**15.** Што значи кога ќе речеме: а) правата е вертикална, б) правата е нормална на дадена рамнина?

**16.** Што значи кога ќе речеме: а) една права има коса положба во просторот, б) правата е коса спрема некоја рамнина?

**17.** Нацртај еден произволен остар агол $MON$! На кракот $OM$ обележи три произволни точки $A$, $B$ и $C$ и од нив повлечи нормали на другиот крак. Одреди ги растојанијата на точките $A$, $B$ и $C$ до кракот $ON$!

**18.** Нацртај две заемно паралелни прави $a$ и $b$! На едната права обележи неколку различни точки $A, B, C, \ldots$ и од нив спушти нормали на другата права! Што забележуваш? Какви се растојанијата на точките $A, B, C, \ldots$ до другата права?

**19.** Нацртај две заемно паралелни прави $p$ и $q$ и одреди го нивното растојание!

**20.** Ако три прави се паралелни меѓу себе, а едната од нив е нормална на некоја рамнина, во каква положба се другите две прави спрема таа рамнина?

**21.** Дадени се две рамнини што се сечат, а нивната пресечна права е нормална на некоја трета рамнина. Каква заемна положба има секоја од првите две рамнини спрема третата рамнина?

Г Л А В А III

# КРУЖНИЦА И КРУГ

## § 14. КРУЖНИЦА И КРУГ

**Кружница е множество на сите точки во рамнината, што се наоѓаат на дадено растојание $r$ од една фиксна точка $O$ од таа рамнина.**

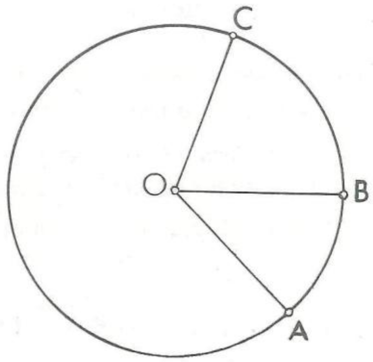
Точката $O$ се вика *центар на кружницата*; а секоја отсечка, која го сврзува центарот $O$ со која и да било точка од кружницата, се вика *радиус на кружницата*.

Бидејќи секоја точка од кружницата ($A$, $B$, $C$, . . .) е на растојание $r$ од центарот $O$, тоа сите радиуси на кружницата ќе имаат должина еднаква на бројот $r$ (црт. 83.), т. е. $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC} = \ldots = r$

Значи, сите радиуси на една кружница се складни отсечки со должина $r$. Затоа и должината на радиусот на кружницата, често, пократко ја викаме само *радиус на кружницата*.

Колку кружници можат да се нацртаат во рамнината со центар во дадена точка $O$ и со даден радиус $r = 2\ cm$? (Зошто?)

Со дадена точка како центар и даден радиус може да се нацрта само една кружница. Кружницата со центар $O$ и радиус $r$ симболички ќе ја означуваме вака: $\kappa(O, r)$.



Црт. 83

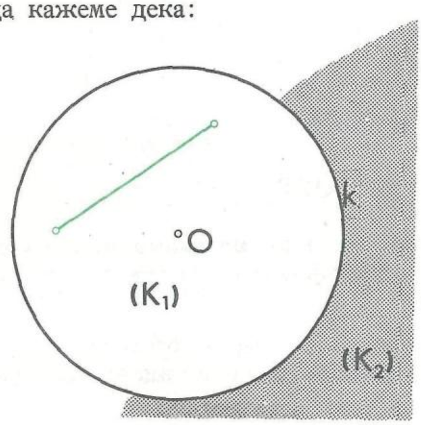
Ако две кружници имаат складни радиуси, тогаш и тие *се складни*, бидејќи тие секогаш можат да се доведат до совпаѓање.

На црт. 84. нацртана е кружница $\kappa(O, r)$. Гледаме, дека таа го разбива множеството точки од рамнината (што не припаѓаат на $\kappa$) на две подмножества (два дела) и тоа: $K_1$ — множеството на точките што припаѓаат на делот од рамнината, што е ограничен со кружницата $\kappa$ (внатрешна област на кружницата) и $K_2$ — множество на точките што не припаѓаат ниту на $\kappa$, ниту на $K_1$ (надворешна област на кружницата).

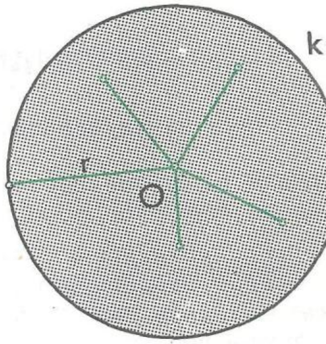
Внатрешната област $K_1$ на кружницата $k$ е конвексна, бидејќи ако кои и да било две точки од областа $K_1$ се соединат со отсечка, тогаш целата таа отсечка се содржи во неа (црт. 84.).

Унијата од кружницата $k$ и нејзината внатрешна област $K_1$ претставува нова геометриска фигура во рамнината, која се вика *круг*.

Лесно уочуваме дека кругот се состои од оние и само оние точки од рамнината, чие растојание од една фиксна точка $O$ од таа рамнина не е поголемо од $r$, т. е. помало или еднакво на $r$ (црт. 85.). Затоа, можеме да кажеме дека:




Црт. 84




Црт. 85

**Круг е множество на сите точки во рамнината чије растојание од една фиксна точка во таа рамнина не е поголемо од $r$.**

Точката $O$ — центар на кружницата е центар и на кругот, а радиусот на кружницата е радиус и на кругот.

Два круга се складни (конгруентни) ако имаат складни радиуси.

## § 15. ТЕТИВА И ДИЈАМЕТАР

Нацртајте една кружница и соединете кои и да било две различни нејзини точки $A$ и $B$ (црт. 86.). Добиената отсечка $AB$ се вика *тетива* на кружницата $k$ $(O, r)$. Тетиви на кружницата се и отсечките $CD$, $EF$, $MM$ (црт. 86.). Значи:

**Тетива на кружницата е отсечка, чии крајни точки ѝ припаѓаат на кружницата.**

Очигледно е дека кружницата има бесконечно многу тетиви. Некои од нив се складни ; некои поголеми, а други помали. Најголеми тетиви се оние што минуваат низ центарот на кружницата.

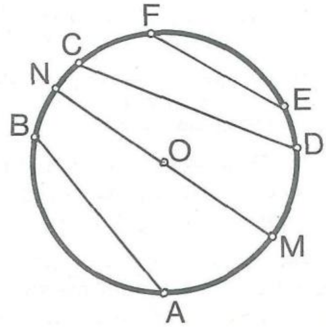
**Тетива, што минува низ центарот на кружницата се вика дијаметар.**

Кружницата има, исто така, бесконечно многу дијаметри, но сите тие се складни еден на друг. (Зошто?)

Должината на дијаметарот ја означуваме со $d$, и таа е еднаква на $2r$, т. е. $d=2r$. (Зошто?).

Секоја тетива на дадена кружница е тетива и на соодветниот круг, а исто и дијаметарот на кружницата е дијаметар и на кругот што е соодветен на неа.

Дијаметарот ги дели кружницата и кругот на два складни делови — полукружница и полукруг. Уверете се во тоа сами, со превиткување.



Црт. 86

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Што е кружница? Припаѓа ли на кружницата нејзиниот центар?

**2.** Што е радиус на кружницата?

**3.** Со што е определена кружницата? Нацртај две кружници со заеднички центар, а со радиуси $r_1=2$ *cm*, и $r_2=3$ *cm*!

**4.** Што е круг? Припаѓа ли на кругот неговиот центар?

**5.** Во рамнината на тетратката означи две точки $A$ и $B$. Потоа, нацртај кружница со центар во точката $A$, а која да минува низ точката $B$!

**6.** Какви се две кружници или два круга со еднакви радиуси?

**7.** Нацртај отсечка со должина $\overline{AB}=3$ *cm*. Потоа, одреди ги оние точки од рамнината кои од крајните точки на отсечката $AB$ се на растојание 2 *cm*. Колку такви точки постојат?

**8.** Нацртај отсечка со должина $\overline{AB}=7$ *cm*. Одреди го множеството точки од рамнината, кои од точката $A$ се на растојание 3 *cm*, а од точката $B$ на растојание 2 *cm*. Какво е тоа множество?

**9.** Дадена е права $p$ и точка $S$, што припаѓа на правата $p$. Одреди го множеството точки од правата $p$, чие растојание од точката $S$ е: а) еднакво на 3 *cm*, б) помало од 3 *cm*, в) не поголемо од 3 *cm*, г) не помало од 3 *cm*, д) поголемо од 3 *cm*!

**10.** Што е тетива, а што дијаметар на кружницата?

**11.** Колку радиуси можеш да повлечеш во една кружница? А колку дијаметри?

**12.** Нацртај една кружница и во неа повлечи неколку радиуси и дијаметри! Потоа, спореди ги: а) радиусите, б) дијаметрите, в) радиусите и дијаметните!

**13.** Зошто во кружницата не можат да се повлечат: а) два паралелни радиуса, б) два паралелни дијаметри? А можат ли да се повлечат две паралелни тетиви? Зошто?

**14.** Нацртај кружница со радиус $r=23$ *mm*! Колкава е должината на најголемата тетива, што може да се повлече во неа?

**15.** Нацртај кружница со радиус $r=2$ *cm*. Земи една точка од неа и означи ја со $A$, а потоа повлечи две тетиви, $AB$ и $AC$ долги 3 *cm*!

**16.** Нацртај кружница и повлечи еден нејзин дијаметар! Потоа, означи неколку точки од кружницата и од нив повлечи тетиви, што ќе бидат: а) паралелни на дијаметарот, в) нормални на дијаметорот!

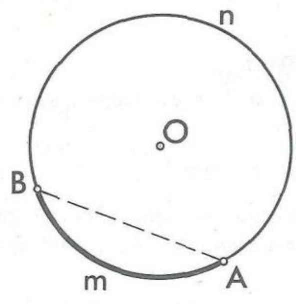
**17.** Нацртај две кружници со заеднички центар $O$ и радиуси 2 *cm* и 4 *cm*. Каде лежат точките $M$, чие растојание од $O$ е: а) $\overline{OM} < 2$ *cm*, б) $\overline{OM} \leqslant 4$ *cm*, в) $\overline{OM} > 4$ *cm*, г) $2 \leqslant \overline{OM} \leqslant 4$ *cm*, д) $\overline{OM} = 2$ *cm*?

**18.** Нацртај круг со центар во точката $O$ и радиус $r = 3$ *cm*. Можат ли да се најдат точки $M$ и $S$, што припаѓаат на кругот, а нивното растојание да е: а) $\overline{MS} = 2$ *cm*, б) $\overline{MS} = 3$ *cm*, в) $\overline{MS} = 5$ *cm*, г) $\overline{MS} = 6$ *cm*, д) $\overline{MS} = 7$ *cm*?

## § 16. КРУЖЕН ЛАК

Нацртајте една кружница и уочите кои и да било две нејзини точки $A$ и $B$ (црт. 87.).

Точките $A$ и $B$ ја разделуваат кружницата на два дела. Секој од тие делови $AmB$ и $AnB$, вклучувајќи ги и точките $A$ и $B$ се вика *кружен лак*, со крајни точки $A$ и $B$. Според тоа:




Црт. 87

**Кружен лак е дел од кружницата, ограничен со две различни нејзини точки, вклучувајќи ги и тие точки.**

Кружен лак, чии краеви се крајните точки на еден дијаметар на кружницата, се вика *полукружница*.

Очигледно е дека, кои и да било две различни точки $A$ и $B$ од кружницата определуваат два кружни лака, од кои едниот, $AmB$ е помал од полукружницата, а другиот, $AnB$ — поголем од полукружницата (црт. 87.). Гледаме дека, крајните точки на тие кружни лаци определуваат и една тетива $AB$ на кружницата. За тетивата $AB$ велиме дека им соодветствува на секој од кружните лаци $AmB$ и $AnB$.

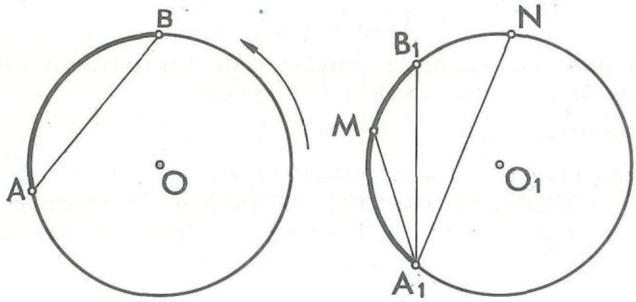
Кружниот лак $AmB$ на црт. 87., што е помал од полукружницата, симболички го означуваме вака: $\widehat{AB}$, за разлика од тетивата $AB$, што ги соединува неговите крајни точки $A$ и $B$.

## § 17. СКЛАДНОСТ И СПОРЕДУВАЊЕ НА КРУЖНИ ЛАЦИ

Кружните лаци можат да се споредуваат.

Да се споредат два кружни лака значи да се утврди дали тие се складни или нескладни; а ако се нескладни, кој од нив е поголем, а кој помал.

Споредување на кружни лаци можеме да вршиме само ако тие ѝ припаѓаат на една кружница или на две складни кружници. Тоа го вршиме така, што нацртуваме две кружници со складни радиуси и тоа едната од нив, на пример таа што е со центар во $O$, да е на провидна хартија (црт. 88.). Кругот што е нацртан на провидната хартија го поставуваме врз другиот круг така, што центрите да им се совпаднат. Гледаме дека се совпаѓаат и кружниците. Зошто?




Црт. 88

Потоа, провидниот круг го вртиме околу центарот $O$ во насока на стрелката се додека почетната точка $A$ на лакот $\overset{\frown}{AB}$ не се поклопи со почетната точка $A_1$ на лаците $\overset{\frown}{A_1B_1}$, $\overset{\frown}{A_1M}$ и $\overset{\frown}{A_1N}$ од другиот круг. Притоа утврдуваме:

1. Ако точката $B$ од лакот $\overset{\frown}{AB}$ се совпадне со точката $B_1$ од лакот $\overset{\frown}{A_1B_1}$ на другиот круг, тогаш велиме дека кружните лаци $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{A_1B_1}$ *се складни* и запишуваме:

$$\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{A_1B_1}.$$

Бидејќи крајните точки на лаците $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{A_1B_1}$ се, истовремено, и крајни точки на тетивите $AB$ и $A_1B_1$, тогаш следува дека:

$$AB \cong A_1B_1, \text{ т. е.}$$

**Ако два лака се складни, тогаш складни се и нивните соодветни тетиви, и обратно.**

2. Ако точката $M$ од кружниот лак $\overset{\frown}{A_1M}$ се совпадне не со $B$, но со некоја друга точка од лакот $\overset{\frown}{AB}$ на вториот круг, тогаш лакот $\overset{\frown}{A_1M}$ е дел од лакот $\overset{\frown}{AB}$, па велиме дека лаците не се складни и тоа: лакот $\overset{\frown}{AB}$ *е поголем* од лакот $\overset{\frown}{A_1M}$, кое го запишуваме:

$$\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{A_1M}.$$

Исто така, може да се уочи дека и соодветните тетиви $AB$ и $A_1M$ на лаците $AB$ и $A_1M$ не се складни и тоа:

$$AB > A_1M, \text{ т. е.}$$

**Во иста кружница или складни кружници на поголеми кружни лаци им одговараат и поголеми тетиви,** и обратно.

3. Ако точката $N$ од кружниот лак $\widehat{A_1N}$ не се совпадне ни со една точка од лакот $\widehat{AB}$ на првиот круг, тогаш лаците $\widehat{AB}$ и $\widehat{A_1N}$, исто така, не се складни и тоа: лакот $\widehat{AB}$ *е помал* од лакот $\widehat{A_1N}$, кое го запишуваме:

$$\widehat{AB} < \widehat{A_1N}$$

Гледаме дека и тетивите што им одговараат на тие лаци не се складни и тоа:

$$AB < A_1N, \text{ т. е.}$$

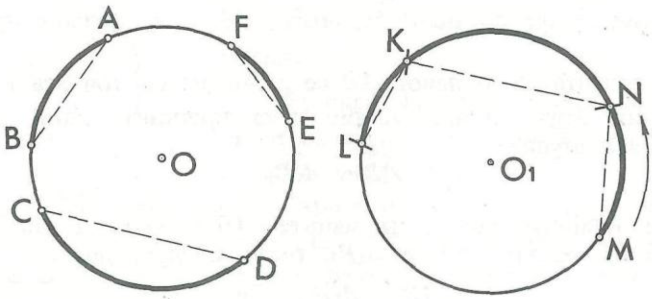
**Во иста или во складни кружници, на помали кружни лаци им одговараат и помали тетиви, и обратно.**

Од изложеново следува дека:

**Споредувањето на два кружни лака може да се врши и преку споредување на тетивите што им одговараат.** Споредувањето, пак на тетивите е значително полесно, бидејќи се врши со помош на шестар.

## § 18. ОПЕРАЦИИ СО КРУЖНИ ЛАЦИ

**1.** На кружницата со центар во точката $O$, нека се дадени три кружни лака: $\widehat{AB}$, $\widehat{CD}$ и $\widehat{EF}$ (црт. 89.).




Црт. 89

Ако сакаме да ги собереме тие лаци, нацртуваме друга складна кружница со центар во точката $O_1$.

Го отвораме шестарот, и ја земаме тетивата $AB$ што му одговара на кружниот лак $\widehat{AB}$, а потоа од некоја произволна точка $M$ на другата кружница ја пренесуваме, со добиениот отвор на шестарот, тетивата $AB$, во насока на стрелката. По таков начин добиваме одредена точка $N$, каде што $\overline{MN} \cong \overline{AB}$, а исто и $\overset{\frown}{MN} \cong \overset{\frown}{AB}$. При тоа, велиме дека сме го пренеле лакот $\overset{\frown}{AB}$ на другата кружница со ист радиус.

Како што гледаме, пренесувањето на кружниот лак го вршиме со пренесување на тетивата што му одговара.

За да го пренесеме кружниот лак $\overset{\frown}{CD}$, ја измеруваме тетивата $CD$, што му одговара на кружнниот лак $\overset{\frown}{CD}$ и ја пренесуваме на другата кружница од точката $N$ во истата насока на стрелката. Така се добива втората одредена точка $K$, каде што $\overline{NK} \cong \overline{CD}$, а исто и $\overset{\frown}{NK} \cong \overset{\frown}{CD}$.

На ист начин ја пренесуваме и тетивата $EF$, што одговара на кружниот лак $\overset{\frown}{EF}$, од точката $K$ на другата кружница, каде што $\overline{KL} \cong \overline{EF}$, а исто и $\overset{\frown}{KL} \cong \overset{\frown}{EF}$.

По таков начин на другата кружница добиваме кружен лак $\overset{\frown}{ML}$, кој се вика збир на дадените кружни лаци $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ и $\overset{\frown}{EF}$ на првата кружница (црт. 89.). Тоа го запишуваме вака:

$$\overset{\frown}{ML} \cong \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{EF}$$

Ние ќе се ограничеме само на случаите кога добиениот збир (кружниот лак $\overset{\frown}{ML}$) не е поголем од целата кружница. Покажете дека:

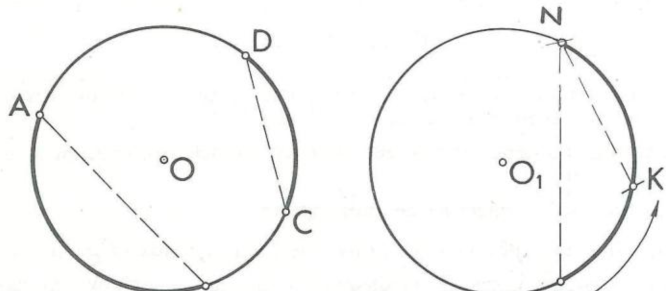
**За собирањето на кружни лаци важи комутативниот и асоцијативниот закон на збирот,** т. е.

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} \cong \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{AB} \quad \text{и}$$

$$(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}) + \overset{\frown}{EF} \cong \overset{\frown}{AB} + (\overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{EF}).$$

**2.** Нека се дадени два кружни лака $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$ ($\overset{\frown}{AB} > \overset{\frown}{CD}$) на кружницата со центар во точката $O$ (црт. 90).

Ако сакаме да ги извадиме тие лаци, нацртуваме друга складна кружница со центар во точката $O_1$. Со отвор на шестарот го пренесуваме прво кружниот лак $\overset{\frown}{AB}$ од некоја точка $M$ на другата кружница, во насока на стрелката. Така добиваме одредена точка $N$, каде што $\overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{MN}$.



Црт. 90

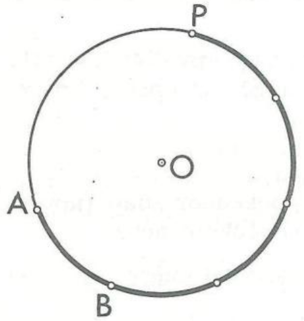
Потоа, со отвор на шестарот го земаме другиот кружен лак $\overset{\frown}{CD}$ и го пренесуваме од точката $N$ во спротивна насока на стрелката на другата кружница. Како резултат на тоа, добиваме друга одредена точка $K$, каде што $\overset{\frown}{CD} \cong \overset{\frown}{NK}$.

Кружниот лак $\overset{\frown}{MK}$ се вика *разлика* на кружните лаци $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$ (црт. 90.). Тоа го запишуваме вака:

$$\overset{\frown}{MK} \cong \overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}.$$

**3.** Ако даден кружен лак $\overset{\frown}{AB}$ во збирот се јавува неколку пати, на пример 4 пати, како собирок, тогаш тој збир $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AB}$ пократко го запишуваме како производ од природниот број 4 и дадениот кружен лак $\overset{\frown}{AB}$, т. е. $4 \cdot \overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AB}$. Според тоа:

**Да се помножи даден кружен лак $\overset{\frown}{AB}$ со некој природен број $n$ значи да се одреди збирот $\underbrace{\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AB} + \ldots + \overset{\frown}{AB}}_{n \text{ пати}}$.**




Црт. 91

На црт. 91. кружниот лак $\overset{\frown}{AB}$ помножен е со бројот 5, па добиваме дека е $5 \cdot \overset{\frown}{AB} \cong \overset{\frown}{ABP}$.

Очигледно е дека, при множењето добиениот кружен лак — производ, може да се случи да биде поголем од целата кружница. Тоа зависи од големината на дадениот кружен лак и од природниот број $n$. Но ние ќе се ограничиме само на случаите кога добиениот производ (кружен лак) е помал од целата кружница. Ќе покажеме дека:

**За множењето на кружните лаци со природен број важи дистрибутивниот закон.**

Навистина: $3(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}) \cong (\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}) + (\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}) + (\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}) \cong$
$\cong \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{CD} \cong 3 \cdot \overset{\frown}{AB} + 3 \cdot \overset{\frown}{CD}$, т. е.

$$3(\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD}) \cong 3 \cdot \overset{\frown}{AB} + 3 \cdot \overset{\frown}{CD}.$$

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Нацртај кружница, означи неколку кружни лаци и повлечи ги со испрекината линија тетивите што одговараат на секој од тие лаци!

**2.** Повлечи три различни тетиви во една кружница и означи ги со ... кружните лаци што им одговараат!

**3.** Кои кружни лаци можат да се споредуваат?

**4.** Во една кружница обележи два кружни лака, а потоа спореди ги!

**5.** Какви се тетивите, што им одговараат на два складни кружни лака?

**6.** На какви делови ќе се раздели кружницата, ако повлечеш два нејзини нормални еден на друг дијаметри? Направи цртеж!

**7.** Нацртај кружница со радиус $r = 2$ *cm*, потоа на неа обележи кружен лак што одговара на тетива долга а) 2 *cm*, б) 3 *cm*, в) 4 *cm*!

**8.** Одреди (нацртај) ја тетивата, што одговара на четвртина од кружницата со радиус $r = 23$ *mm*!

**9.** Нацртај една кружница и разделија истата на: а) два, б) четири складни кружни лака!

**10.** Нацртај кружен лак, што одговара на тетива, чија должина е еднаква на радиусот на кружницата!

**11.** Колкав дел од кружницата е лакот, што го опишува малата стрелка на часовникот за: а) 3 часа, б) 6 часа, в) 1 час, г) 9 часа?

**12.** Нацртај една кружница, повлечи ги дијаметарот $AB$ и на него една паралелна тетива $CD$. Покажи со споредување дека е: $\overset{\frown}{AC} \cong \overset{\frown}{BD}$!

**13.** Нацртај две складни кружници и во секоја од нив обележи по еден произволен лак, на пример, $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$. Можат ли тие лаци да се споредуваат и како ќе утврдиш кој од нив е поголем?

**14.** Нацртај една кружница, означи на неа три кружни лака, а потоа собери ги!

**15.** На една кружница, одејќи во иста насока, означи ги точките $A$, $B$, $C$, $D$, $E$. Одреди кој лак ќе претставува збир на лаците: а) $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{BC}$, б) $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ и $\overset{\frown}{DE}$, в) $\overset{\frown}{CD}$, $\overset{\frown}{DE}$, $\overset{\frown}{EA}$, и $\overset{\frown}{AB}$, г) $\overset{\frown}{ABC}$, $\overset{\frown}{CD}$ и $\overset{\frown}{DE}$! Запиши го резултатот!

**16.** Нацртај кружница, означи на неа два лака, а потоа одземи ги!

**17.** На една кружница, одејќи во иста насока, означи ги точките $K$, $L$, $M$ и $N$. Одреди кој лак ќе биде разлика на лаците: а) $\overset{\frown}{KLM}$ и $\overset{\frown}{ML}$, б) $\overset{\frown}{MNK}$ и $\overset{\frown}{KN}$, в) $\overset{\frown}{KLN}$ и $\overset{\frown}{NML}$.

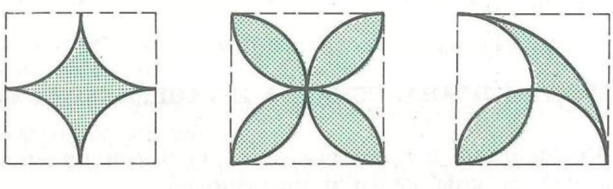
**18.** Нацртај кружница со радиус $r = 3\ cm$ и два лака на неа $\overset{\frown}{AB}$ и $\overset{\frown}{CD}$, што им одговараат на тетивите $\overline{AB} = 38\ mm$ и $\overline{CD} = 26\ mm$. Одреди ја разликата на лаците: $\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{CD}$.

**19.** Нацртај кружница со радиус $r = 4\ cm$ и на неа означи три лака $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{CD}$ и $\overset{\frown}{EF}$, кои им припаѓаат на тетивите $\overline{AB} = 5\ cm$, $\overline{CD} = 7\ cm$, $\overline{EF} = 62\ mm$. Потоа нацртај друга кружница со ист радиус и на неа одреди го лакот: а) $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} + \overset{\frown}{EF}$, б) $\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} - \overset{\frown}{EF}$!

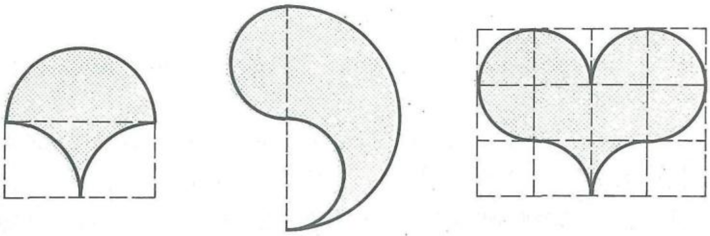
**20.** На дадена кружница означи четири произволни различни точки со $A$, $B$, $C$, и $D$. Колку тетиви и кружни лаци одредуваат тие точки на кружницата? Точките земај ги во парови!

**21.** Даден е некој помал кружен лак $\overset{\frown}{AB}$. Конструирај го лакот: а) $3 \cdot \overset{\frown}{AB}$, б) $4 \cdot \overset{\frown}{AB}$, в) $5 \cdot \overset{\frown}{AB}$!

**22.** Разгледај ги цртежите 92 и 93 и со помош на шестар и линијар нацртај такви во тетратката!



Црт. 92

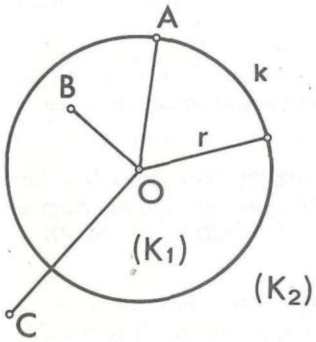


Црт. 93

# § 19. ЗАЕМНИ ПОЛОЖБИ НА ТОЧКА, ПРАВА И КРУЖНИЦА

## 19. 1. КРУЖНИЦА И ТОЧКА

Нацртајте кружница $\kappa\ (O;\ r)$ (црт. 94.). Ако во истата рамнина уочиме неколку различни точки $A$, $B$, $C$, ... ќе забележиме дека секоја од нив во однос на кружницата $\kappa\ (O;\ r)$ може да заземе една од следниве три положби:




Црт. 94

1°. Точката ($A$) припаѓа на кружницата, т. е. $A \in \kappa\ (O;\ r)$;

2°. Точката ($B$) припаѓа на внатрешната област $K_1$ на кружницата, т. е. $B \in K_1$;

3°. Точката ($C$) припаѓа на надворешната област $K_2$ на кружницата, т. е. $C \in K_2$ (црт. 94.).

Ако во секоја од тие положби го споредиме растојанието на уочената точка од центарот на кружницата со радиусот на истата, ќе видиме дека: $\overline{OA} = r$; $\overline{OB} < r$; $\overline{OC} > r$. Според тоа:

1°. **Точката ($A$) припаѓа на кружницата,** ако нејзиното растојание до центарот е еднакво на радиусот, т. е. ако $\overline{OA} = r$;

2°. **Точката ($B$) припаѓа на внатрешната област на кружницата,** ако нејзиното растојание до центарот е помало од радиусот, т. е. ако $\overline{OB} < r$.

3°. **Точката ($C$) припаѓа на надворешната област на кружницата,** ако нејзиното растојание до центарот е поголемо од радиусот на кружницата, т. е. ако $\overline{OC} > r$.

## 19. 2. КРУЖНИЦА И ПРАВА. СЕКАНТА И ТАНГЕНТА НА КРУЖНИЦА

На црт. 95. нацртана е кружница $\kappa\ (O; r)$ и три прави $a$, $b$ и $p$, кои лежат на рамнината на која лежи и кружницата.

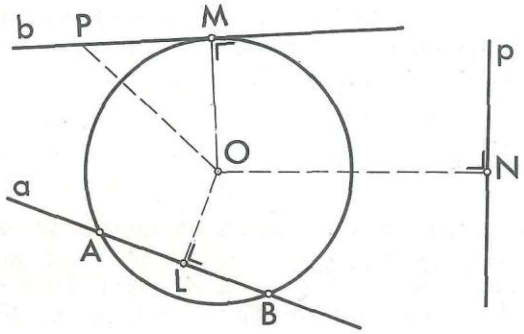
Од сликата гледаме дека:

1°. Правата $a$ и кружницата $\kappa(O;\ r)$ имаат две заеднички точки $A$ и $B$, т. е.

$$\kappa(O; r) \cap a = \{A; B\}.$$

**Правата, која со дадена кружница има две заеднички точки, велиме дека ја сече кружницата и се вика секанта на кружницата.**

Двете заеднички точки на секантата и кружницата се викаат *пресечни точки.*




Црт. 95

2°. Правата $b$ и кружницата $\kappa(O;\ r)$ имаат само една заедничка точка $M$, т. е.

$$\kappa(O; r) \cap b = \{M\}$$

**Права, која со дадена кружница има само една заедничка точка, а со неа лежат на една рамнина, велиме дека ја допира кружницата и се вика тангента на кружницата.**

Заедничката точка на тангентата и кружницата се вика *точка на допирањето* или, само, *допирна точка*.

3°. Правата $c$ и кружницата $\kappa(O; r)$ немаат ниту една заедничка точка, т. е.

$$\kappa(O; r) \cap p = \varnothing.$$

Во тој случај велиме дека правата $p$ целата лежи на надворешната област на кружницата или дека *лежи надвор* од кружницата.

Според тоа, дадена права и кружница што лежат на една рамнина, можат да заземат една од следниве три различни заемни положби:

1°. Правата ја сече кружницата во две точки, тогаш таа е секанта на кружницата;

2°. Правата ја допира кружницата во една точка, тогаш таа е тангента на кружницата; или

3°. Правата нема ниту една заедничка точка со кружницата, тогаш таа лежи надвор од кружницата.

Да ги разгледаме одделно секоја од тие положби.

Од центарот на кружницата да повлечеме нормали на правите $a$, $b$ и $p$ и подножјата на тие нормали нека бидат точките $L$, $M$ и $N$ (црт. 95.).

При тоа должините на осечките $OL$, $OM$ и $ON$ ќе ни го дадат растојанието на центарот на кружницата до $a$, $b$ и $p$. Ако ги споредиме тие растојанија со радиусот на кружницата, ќе најдеме дека:

$$OL < r, \quad OM = r, \quad ON > r.$$

Ако растојанието од центарот на кружницата до која и да било права го обележиме со $c$, тогаш можеме да кажеме дека:

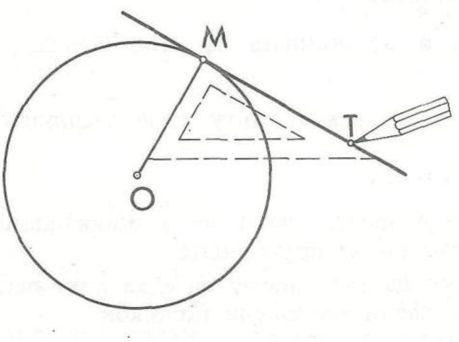
1°. **Правата ($a$) е секанта на кружицацата,** ако нејзиното растојание до центарот на кружницата е помало од радиусот, т. е. $c < r$;

2°. **Правата ($b$) е тангента на кружницата,** ако нејзиното растојание до центарот на кружницата е еднакво на радиусот, т. е. $c = r$;

3°. **Правата ($p$) лежи надвор од кружницата,** ако нејзиното растојание до центарот на кружницата е поголемо од радиусот, т. е. $c > r$.

Ако правата $b$ ја допира кружницата во точката $M$ (црт. 95.), тогаш секоја друга точка од правата $b$ ќе лежи надвор од кружницата. Тоа значи дека растојанието на која и да било друга точка, на пример точката $P$, од правата $b$ до центарот ќе биде поголемо од радиусот $OM$ на кружницата. Според тоа, радиусот во допирната точка $M$ ќе биде најкратка од сите отсечки што го соединуваат центарот $O$ со која и да било точка од правата $b$. Но, бидејќи од сите отсечки, што можат да се повлечат од една точка кон некоја права, најкратката отсечка е и нормална на таа права, т. е. $OM \perp b$, тоа можеме да кажеме дека:

**Тангентата е нормална на радиусот во допирната точка на кружницата.**




Ако треба да се нацрта тангента во некоја точка $M$ на кружницата, чиј центар е во точката $O$ (црт. 96.), постапуваме вака:

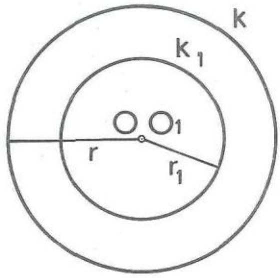
Го повлекуваме радиусот на допирната точка $M$, а потоа со помош на правоаголниот триаголник низ точката $M$ повлекуваме нормала $MT$ на радиусот $OM$, како што е покажано на црт. 96. Така нацртаната нормала $MT$ е бараната тангента на кружницата во точката $M$.

### 19. 3. ДВЕ КРУЖНИЦИ

Две кружници можат да имаат заеднички центар или различни центри.

Кружници, што имаат заеднички центар се викаат *концентрични кружници*. Такви се кружниците на црт. 97.

Две кружници, пак, што имаат различни центри се викаат *ексцентрични кружници*. Растојанието меѓу центрите на таквите кружници, т. е. должината на отсечката која ги соединува нивните центри, се вика *централно растојание*, кое обично се обележува со буквата $c$, $\overline{OO_1} = c$



Црт. 97

Сите можни најразлнични заемни положби што можат да ги заземат две ексцентрични кружници со радиуси $r$ и $r_1$, ќе ги распоредиме во следниве три групи:

**1°. Кружниците немаат ниту една заедничка точка, т. е.**

$$\kappa(O; r) \cap \kappa_1(O_1; r_1) = \varnothing .$$

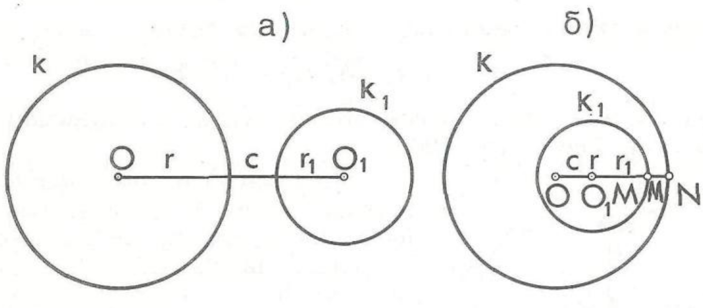
Тогаш се можни два случаја:

а) **Кружниците се наоѓаат надвор една од друга** (црт. 98. а).

Во тој случај нивното централно растојание е поголемо од збирот на радиусите, т. е. $c > r + r_1$.

б) **Кружниците се наоѓаат внатре една во друга** (црт. 98, б).

Во тој случај нивното централно растојание е помало од разликата на радиусите, т. е. $c < r - r_1$, бидејќи $c + \overline{MN} = r - r_1$ (црт. 98, б).



Црт. 98

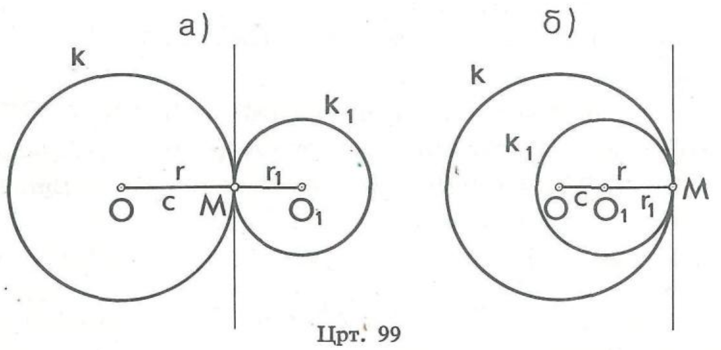
И концентричните кружници со различни радиуси можеме да ги вброиме во оваа група кружници, што немаат заеднички точки и лежат внатре една во друга, но кај нив специфично е тоа што централното растојание им е еднакво на нула, т. е. $c = 0$.

**2°. Кружниците имаат само една заедничка точка ($M$), т. е.**

$$\kappa(O; r) \cap \kappa_1(O_1; r_1) = \{M\}.$$

Тогаш велиме дека кружниците *се допираат*, а заедничката точка им се вика *допирна точка*. И во овој случај можни се два подслучаи:

а) **Кружниците се допираат и лежат надвор една од друга** (велиме тие се допираат однадвор) (црт. 99. а). Во тој случај нивното централно растојание е еднакво на збирот од радиусите т.е. $c = r + r_1$;;




Црт. 99

б) **Кружниците се допираат и лежат внатре една во друга** (велиме: тие се допираат однатре) (црт. 99. б). Во тој случај, нивното централно растојание е еднакво на разликата од радиусите, т.е.

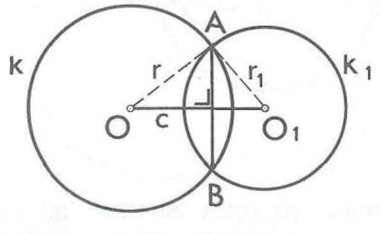
$$c = r - r_1 \quad \text{при} \quad r > r_1.$$

И во двата случаја, кога кружниците се допираат; тие имаат една заедничка тангента во допирната точка $M$, која е нормална на правата што минува низ центрите $O$ и $O_1$ на двете кружници.

### 3°. Кружниците имаат две заеднички точки $A$ и $B$, т.е.

$$\kappa(O;\ r) \cap \kappa_1(O_1;\ r_1) = \{A,\ B.\}$$

Тогаш велиме дека кружниците *се сечат*, а заедничките точки се викаат *пресечни точки* (црт. 100.).




Црт. 100

Ако едната од пресечните точки, на пример точката $A$, ја соединиме со центрите на двете кружници, ќе добиеме отворена искршена линија $OAO_1$, со крајни точки $O$ и $O_1$.

Да се потсетиме: должината на секоја отворена искршена линија е поголема од растојанието меѓу нејзините крајни точки. Според тоа:

Централното растојание на двете кружници што се сечат е помало од збирот на радиусите на кружнипите, т.е. $c < r + r_1$.

Меѓутоа, може да се покаже (тоа ќе го сториме покасно) дека: централното растојание на двете кружници што се сечат секогаш е поголемо пак од разликата на радиусите, т.е. $c > r - r_1$.

Релациите $r - r_1 < c$ и $c < r + r_1$ можат да се запишат заедно и вака:

$$r - r_1 < c < r + r_1.$$

За сите погоре разгледани случаи не е тешко да се увериме дека ќе важат и следниве обратни тврдења:

1. Ако е $c > r + r_1$ или $c < r - r_1$, тогаш кружниците немаат ниту една заедничка точка, и тоа: ако е $c > r + r_1$, тогаш тие лежат надвор една од друга, а ако е $c < r - r_1$, тие лежат внатре една во друга.

2. Ако е $c = r + r_1$ или $c = r - r_1$, кружниците имаат само една заедничка точка, т.е. тие се допираат, и тоа: ако е $c = r + r_1$, тогаш тие се допираат однадвор, а ако е $c = r - r_1$, тогаш тие се допираат однатре.

3. Ако е $r - r_1 < c < r + r_1$, тогаш кружниците имаат две заеднички точки, т.е. тие се сечат.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Колку и кои заемни положби можат да заземат во рамнината една точка и дадена кружница?

**2.** Колку и кои заемни положби можат да заземат во рамнината една права и дадена кружница?

**3.** Дадена е кружница со радиус $r = 4$ *cm* и една точка $T$, чие растојание од нејзиниот центар е: а) 3 *cm*, б) 40 *mm*, в) 5 *cm*. Каква положба има таа точка во однос на кружницата?

**4.** Дадена е кружницата $\kappa$ и една точка $M \in \kappa$. Одреди ја онаа точка од кружницата, која е најдалеку од точката $M$!

**5.** Дадена е кружница со радирс $r = 27$ *mm*. Нејзиниот центар е на растојание од една права: а) 2 *cm*, б) 27 *mm*, в) 3 *cm*. Каква положба има таа права спрема кружницата? Направи цртеж!

**6.** Што е тангента на кружницата и кои својства ги има таа?

**7.** Во дадена точка од кружницата нацртај тангента кон неа!

**8.** Во крајните точки на еден дијаметар конструирани се тангенти на кружницата. Каква заемна положба имаат тие тангенти? Зошто?

**9.** Дадена е кружницата $\kappa$ и точка $M \notin \kappa$. Одреди ја онаа точка од кружницата, која е: а) најблиску до точката $M$, б) најдалеку од точката $M$!

**10.** Дадена е кружница и една права $p$, што лежи надвор од неа. Одреди ја онаа точка од кружницата, која е: а) најблиску до правата $p$, б) најдалеку од правата $p$!

**11.** Дадена е правата $p$ и точката $C \notin p$. Конструирај кружница со центар во точката $C$, а да се допира со правата $p$!

**12.** Какво множество од точки образуваат центрите на кружниците, кои се допираат до дадена права во една нејзина дадена точка? Направи цртеж!

**13.** Нацртај кружница и една права, што ја сече кружницата. Одреди ја онаа точка од кружницата која е најдалеку од правата!

**14.** Во каква заемна положба се наоѓаат две кружници со радиуси $r$ и $r_1$ и централно растојание $c$, ако е: а) $r = 32$ *mm*, $r_1 = 18$ *mm*, $c = 54$ *mm*; б) $r = 26$ *mm*, $r_1 = 14$ *mm*, $c = 4$ *mm*; в) $r = 2$ *cm*, $r_1 = 12$ *mm*, $c = 25$ *mm*; г) $r = 17$ *mm*, $r_1 = 1$ *cm*, $c = 0$; д) $r = 3$ *cm*, $r_1 = 16$ *mm*, $c = 14$ *mm*; ѓ) $r = 28$ *mm*, $r_1 = 13$ *mm*, $c = 1$ *cm*.?

**15.** Нацртај кружница со радиус $r = 4$ *cm* и означи една произволна точка $M$ на неа. Потоа конструирај друга кружница со радиус 25 *mm*, која ќе ја допира првата кружница: а) однадвор, в) однатре во точката $M$.

**16.** Какво множество од точки образуваат центрите на кружниците со даден радиус $r$, а кои се допираат до друга дадена кружница: а) однадвор, б) однатре. Направи цртеж!

**17.** Какво множество од точки образуваат центрите на сите кружници, што се допираат со друга дадена кружница во одредена точка од неа.

**18.** Колку точки може да содржи пресекот на: а) права и кружница б) две кружници со складни радиуси, в) две кружници со нескладни радиуси?

**19.** Колку точки може да содржи пресекот на: а) права и круг, б) два круга?

**20.** Да се одредат радиусите на две концентрични кружници, ако дијаметарот на поголемата кружница е разделен од помалата кружница на три дела, кои се долги 4 *cm*, 6 *cm*, 4 *cm*!

**21.** Да се одредат радиусите и централното растојание на две кружници, што се наоѓаат внатре една во друга, ако дијаметарот на поголемата кружница, што минува низ центарот на помалата кружница, е разделен од помалата кружница на три дела, кои се долги: а) 7 *cm*, 6 *cm*, 2 *cm*; б) 4 *cm*, 3 *cm*, 7 *cm*!

**22.** Колкаво е централното растојание на две кружници со складни радиуси, од кои секоја минува низ центарот на другата кружница?

ГЛАВА IV

# АГЛИ

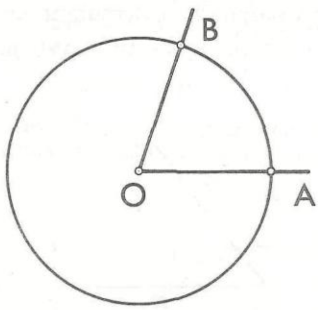
## § 20. ЦЕНТРАЛЕН АГОЛ

Нацртајте една кружница и од нејзиниот центар повлечете две полуправи (црт. 101.). Полуправите ќе образуваат два агла: еден конвексен и еден конкавен.

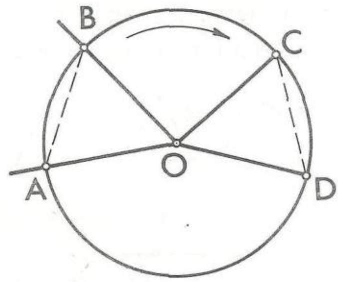
**Агол, чие теме е во центарот на кружницата, се вика централен агол.**

Ќе ги разгледуваме само конвексните централни агли.

Краците на конвексниот централен агол $AOB$ велиме дека го зафаќаат кружниот лак $\widehat{AB}$ (црт. 102.), а со тоа и тетивата $AB$. За лакот $\widehat{AB}$ и тетивата $AB$ велиме дека му *соодветствуваат* **(одговараат)** на централниот агол $AOB$, и обратно: централниот агол $AOB$ дека му одговара на лакот $\widehat{AB}$, односно на тетивата $AB$.




Црт. 101




Црт. 102

Да видиме каква зависност постои помеѓу централните агли и тетивите и кружните лаци, што им одговараат на тие централни агли.

Нека централните агли $AOB$ и $COD$ (црт. 102) се складни, т.е.

$$\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle COD.$$

Ако делот $AOB$ од кругот, го вртиме во рамнината на кружницата околу центарот $O$ во насока на стрелката, додека радиусот $OA$ не се совпадне со $OC$, тогаш радиусот $OB$ ќе се совпадне со $OD$ (зошто)?. Оттука гледаме дека кружниот лак $\widehat{AB}$ ќе се совпадне со лакот $\widehat{CD}$, а исто така и тетивата $AB$ ќе се совпадне со тетивата $CD$. Значи добиваме:

$$\widehat{AB} \cong \widehat{CD} \text{ и } AB \cong CD.$$

Според тоа:

**Ако два централни агла во кружницата се складни, тогаш складни се и на нив соодветните кружни лаци, односно тетиви.**

Ако потоа претпоставиме дека: на кружницата лаците $\widehat{AB}$ и $\widehat{CD}$ се складни, т.е. $\widehat{AB} \cong \widehat{CD}$, тогаш знаеме дека ним им одговараат складни тетиви $AB \cong CD$, и ако со движење ги доведеме до совпаѓање, ќе дојдеме до следниов обратен заклучок:

**Ако два кружни лака (односно тетиви) во кружницата се складни, тогаш складни се и на нив соодветните централни агли.**

Горниве два заклучка често заедно ги искажуваме вака:

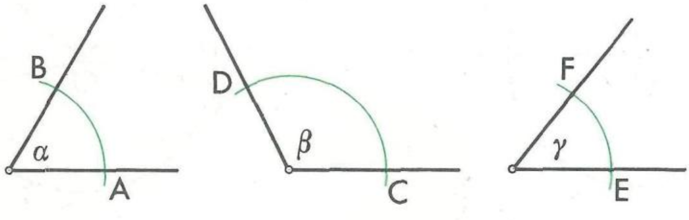
**Два централни агла во кружницата се складни ако и само ако нивните соодветни лаци, односно тетиви, се складни.**

Овие заклучоци важат и за централни агли и нивните соодветни лаци и тетиви и во две складни кружиици.

## § 21. КОНСТРУКЦИЈА НА СКЛАДНИ АГЛИ

Нацртајте неколку агли и од нивните темиња нацртајте кружни лаци со складни радиуси (црт. 103.). Сите тие стануваат централни агли.

Ако некои од тие агли зафаќаат складни кружни лаци, видовме дека тие агли, исто така, се складни.



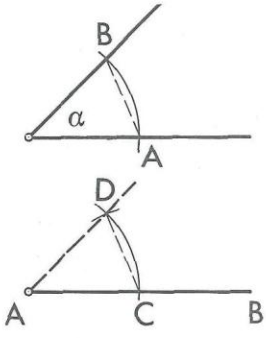

Црт. 103

Складноста на кружните лаци, нацртани со складни радиуси ја утврдуваме пак по тоа, дали им се складни тетивите што им одговараат, или не. Ова го користиме при конструирање на агол, што е складен на друг даден агол.

Нека е даден аголот $\alpha$ (црт. 104.). Да конструираме (нацртаме) друг агол скаладен на $\alpha$. Тоа го постигнуваме вака:

Конструираме една полуправа $AB$. Потоа со произволен, но ист отвор на шестарот, цртаме кружни лаци од темето на аголот $\alpha$ и од почетокот на полуправата $AB$. Со повторно отворање на шестарот ја земаме тетивата $AB$, што одговара на лакот $\overset{\frown}{AB}$, ја пренесуваме од точката $C$, пресекувајќи го лакот нацртан од почетокот на полуправата $AB$ во некоја точка $D$.

Така добиената точка $D$ ја сврзуваме со почетокот на полуправата и добиваме агол, што е складен на дадениот агол $\alpha$ (црт. 104.).



Црт. 104

### ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Кој агол се вика централен агол?

**2.** Нацртај кружница и два централни агла во неа!

**3.** Нацртај три агли и направи да станат централни на три складни кружници!

**4.** Каков однос постои помеѓу централните агли и тетивите и лаците, што им одговараат во една или во две складни кружници.

**5.** Нацртај две складни кружници со радиус $r = 3\,cm$. Во секоја од нив повлечи по една тетива долга 4 $cm$. Какви се лаците и централните агли што им одговараат на тие тетиви?

**6.** Каков централен агол му одговара на дијаметарот на кружницата?

**7.** Нацртај кружница со радиус $r = 2\,cm$ и во неа еден централен агол, што ѝ одговара на тетивата која е складна на радиусот на кружницата!

**8.** Нацртај кружница со радиус $r = 24\,mm$ и во неа повлечи два, нормални еден на друг, радиуси! Каков централен агол се добива и колкав кружен лак му одговара на тој агол?

**9.** Нацртај агол, што ќе биде складен на друг даден агол!

**10.** Нацртај три различни произволни агли, а потоа конструирај агли, што се поодделно складни на секој од нив!

## § 22. ОПЕРАЦИИ СО АГЛИ

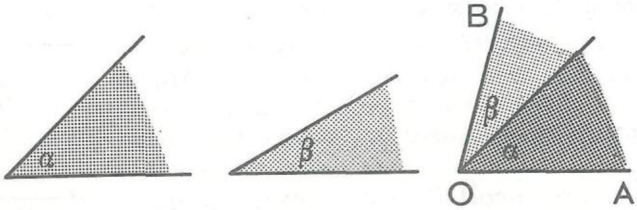
### 22. 1. СОБИРАЊЕ НА АГЛИ

Нека се дадени аглите $\alpha$ и $\beta$ (црт. 105.).

Со движење аглите $\alpha$ и $\beta$ секогаш можеме да ги доведеме во таква положба, што темињата и кои да било два крака да им се совпаднат, а нивните области да немаат ниту една заедничка точка, како што е покажано на црт. 105 б. Во таа положба велиме дека аглите $\alpha$ и $\beta$ *се надоврзани* еден на друг.

Унијата на надоврзаните агли $\alpha$ и $\beta$, претставува нов агол $\sphericalangle AOB$, кој се вика *збир* на аглите $\alpha$ и $\beta$. Тоа симболички го запишуваме вака:

$$\alpha + \beta \cong \sphericalangle AOB.$$



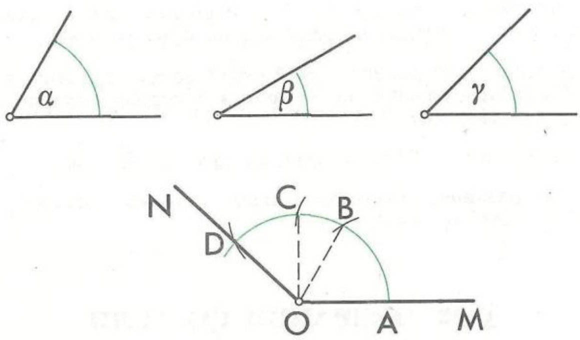

Црт. 105

На сличен начин, кога на збирот на два дадени агла надоврземе трет агол, добиваме нов агол кој се вика збир на трите агли, итн.

Да покажеме како конструктивно го одредуваме збирот на неколку дадени агли.

**Пример:** Да се соберат аглите $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ (црт. 106.).

Прво конструираме една полуправа $OM$. Потоа од темињата на аглите $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ и почетокот на полуправата $OM$ цртаме кружни лаци со произволни, но складни радиуси. Потоа, по кружниот лак, што е нацртан од почетокот на полуправата $OM$ и тоа од точката $A$ ја пренесуваме со отворот на шестарот тетивата што одговара на аголот $\alpha$. Така ја добиваме точката $B$.




Црт. 106

Од точката $B$, во истата насока потоа ја пренесуваме со отвор на шестарот тетивата што му одговара на аголот $\beta$ и ја добиваме точката $C$. Од точката $C$ на ист начин ја пренесуваме и тетивата што му одговара на третиот агол $\gamma$, со што добиваме уште една точка $D$ на кружниот лак, нацртан од почетокот на полуправата $OM$.

Добиената точка $D$ ја сврзуваме со почетокот на полуправата $OM$ и се добива аголот $MON$ (црт. 106.), кој претставува збир на аглите $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$, т.е.

$$\sphericalangle MON \cong \alpha + \beta + \gamma.$$

Покажете дека:

Кај собирањето на аглите важи комутативниот и асоцијативниот закон, т. е.

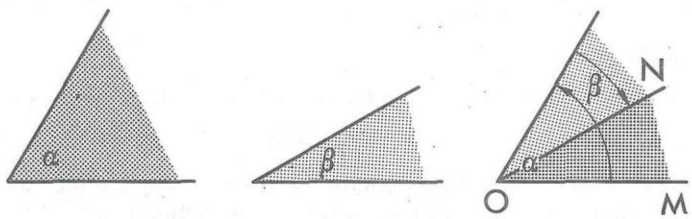
$$\alpha + \beta \cong \beta + \alpha \quad и \quad (\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma),$$

## 22. 2. ОДЗЕМАЊЕ НА АГЛИ

Што значи: од даден агол $\alpha$ да се одземе друг даден помал агол $\beta$? (црт. 107.). Тоа значи да се одреди трет агол $\gamma$, така што $\gamma + \beta \cong \alpha$.

Аголот $\gamma$ се вика *разлика* на дадените агли $\alpha$ и $\beta$ и пишуваме: $\gamma \cong \alpha - \beta$ ќе покажеме како ја одредуваме разликата на аглите $\alpha$ и $\beta$.

Помалиот агол $\beta$ со движење го доведуваме во таква положба, што темето и едниот негов крак да се совпаднат со темето и едниот крак на поголемиот агол $\alpha$, но при тоа целата област на аголот $\beta$ да се содржи во областа на аголот $\alpha$ како што е покажано на црт. 107.

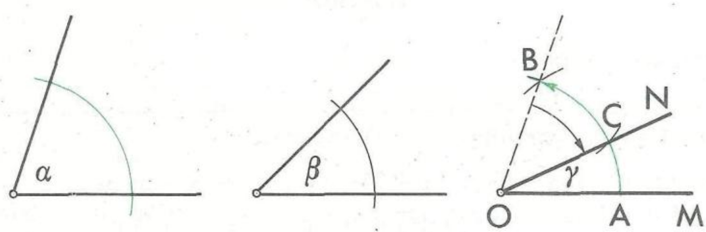



Црт. 107

При тоа, непоклопената област на аголот $\alpha$ одредува нов агол $MON$, кој, всушност, е бараната *разлика* на дадените агли $\alpha$ и $\beta$, бидејќи $\sphericalangle MON + \beta \cong \alpha$. Според тоа:

$$\sphericalangle MON \cong \alpha - \beta.$$

Да покажеме сега како конструктивно ја одредуваме разликата на два нескладни дадени агли $\alpha$ и $\beta$ $(\alpha > \beta)$ (црт. 108.).




Црт. 108

Разликата $\alpha-\beta$ конструктивно ја наоѓаме вака: прво повлекуваме една полуправа $OM$, потоа од темињата на аглите $\alpha$ и $\beta$ и почетокот на полуправата $OM$ цртаме кружни лаци со произволни, но складни радиуси.

Потоа, по кружниот лак, што е нацртан од почетокот на полуправата $OM$ и тоа од точката $A$, во една насока ја пренесуваме со отвор на шестарот тетивата, што му одговара на аголот $\alpha$. Така добиваме една точка $B$. Сега со отвор на шестарот од точката $B$, само во спротивна насока од правата, ја пренесуваме тетивата што му одговара на аголот $\beta$ и по таков начин добиваме уште една точка $C$, која лежи на кружниот лак $\widehat{AB}$.

Така добиената точка $C$ ја сврзуваме со почетокот на полуправата $OM$, па добиениот агол $MON$ ќе претставува разлика на аглите $\alpha$ и $\beta$, т.е.

$$\sphericalangle MON \cong \alpha-\beta.$$

## 22. 3. МНОЖЕЊЕ НА АГОЛ СО ПРИРОДЕН БРОЈ

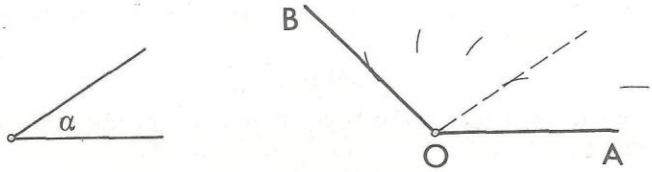
Што значи даден агол $\alpha$ да се помножи со некој природен број?

**Да се помножи даден агол $\alpha$ со природен број $n \geqslant 2$. значи да се одреди збирот $\underbrace{\alpha+\alpha+\alpha+\ldots+\alpha}_{n \text{ пати}}$, во кој аголот $\alpha$ се појавува $n$ пати како собирок.**

На црт. 109. аголот $\alpha$ е помножен со бројот 4, и гледаме дека е

$$4\cdot\alpha \cong \sphericalangle AOB.$$

Очигледно е дека при множењето, аголот — производ може да се случи да биде поголем од полниот агол. Тоа зависи од големината на дадениот агол и од природниот број. Но, ние ќе се ограничиме само на случаите кога добиениот производ претставува агол — не поголем од полниот агол.




Црт. 109

Ќе покажеме дека:

При множењето на аглите со природен број важи дистрибутивниот закон на множењето во однос на собирањето.

Навистина: $3(\alpha+\beta) \cong (\alpha+\beta)+(\alpha+\beta)+(\alpha+\beta) \cong$

$$\cong \alpha+\alpha+\alpha+\beta+\beta+\beta \cong 3\alpha+3\beta, \text{ т.е.}$$

$$3(\alpha+\beta) \cong 3\alpha+3\beta.$$

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Нацртај три различни остри агли и собери ги! Каков агол може да биде нивниот збир?

**2.** Нацртај два тапи агла, потоа собери ги! Каков агол ќе претставува нивниот збир?

**3.** Од еден прав агол одземи еден кој да било остар агол! Каков агол ќе добиеш?

**4.** Каков агол се добива кога два различни тапи агла: а) се соберат, б) се одземат еден од друг?

**5.** Нацртај три различни агли, потоа одреди го конструктивно нивниот збир!

**6.** Нацртај два нескладни агла, потоа одреди ја конструктивно нивната разлика!

**7.** Нацртај произволен остар агол, а потоа конструирај го аголот: а) $2\alpha$; б) $3\alpha$, в) $4\alpha$!

**8.** Нацртај два агла $\alpha$ и $\beta$ ($\alpha > \beta$), потоа конструирај го аголот: а) $\alpha + \beta$, б) $\alpha - \beta$, в) $2\alpha + \beta$, г) $2\alpha - \beta$, д) $\alpha + 2\beta$!

**9.** Покажи дека за собирањето на агли важат комутативнтот и асоцијативниот закон!

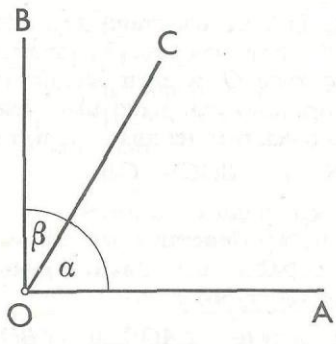
## § 23. КОМПЛЕМЕНТНИ И СУМПЛЕМЕНТНИ АГЛИ

**1.** Нацртајте еден прав агол $AOB$ (црт. 110.). Потоа, од неговото теме $O$ повлечете некоја полуправа $OC$, која припаѓа на внатрешната област на правиот агол $AOB$.

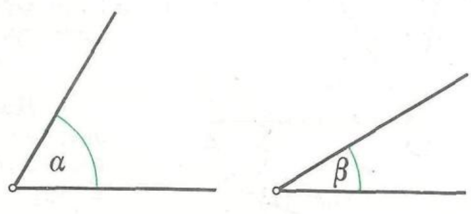
Полуправата $OC$ го разбива правиот агол $AOB$ на два остри агла $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle COB$.

За секој од острите агли $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle COB$ (црт. 110.) велиме дека *го дополнува* другиот остар агол до прав агол.

Нацртајте ги аглите $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle COB$ и одделно како на црт. 111.




Црт. 110




Црт. 111

**Два агла, чиј збир е прав агол, се викаат комплементни агли.**

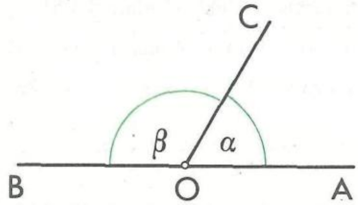
А за секој од нив велиме дека е *комплемент* (дополнение до прав агол) на другиот.

Комплементот на даден остар агол конструктивно го наоѓаме кога од правиот агол ќе го извадиме дадениот агол. Покажете го тоа!

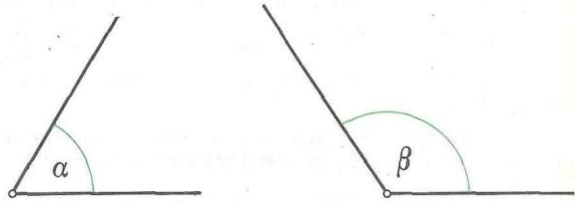
**2.** На цртеж 112. е нацртан еден рамен агол $AOB$ и од неговото теме повлечена е полуправа $OC$, која припаѓа на неговата внатрешна област.

Очигледно е дека полуправата $OC$ во овој случај го разбива рамниот агол $AOB$ на два нови агла: $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle COB$, чиј збир е рамен агол.

Добиените агли $\sphericalangle AOC$ и $\sphericalangle COB$ на црт. 113. нацртани се и одделно.



Црт. 112



Црт. 113

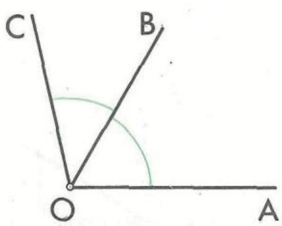
**Два агла, чиј збир е рамен агол се викаат суплементни агли.** А за секој од нив велиме дека е *суплемент* на другиот.

Суплементот на даден (остар или тап) агол конструктивно го наоѓаме кога од рамниот агол ќе го извадиме дадениот агол.

Каков агол е суплементот на правиот агол?

## § 24. СОСЕДНИ, НАПОРЕДНИ И ВКРСТЕНИ АГЛИ

Досега аглите ги разгледувавме независно од нивната заемна положба во рамнината. Во овој параграф ќе разгледаме некои посебни заемни положби на два агла во рамнината.



Црт. 114

**1.** На црт. 114. се нацртани два агла $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle BOC$ во таква положба, што тие имаат заедничко теме $O$ и еден заеднички крак $OB$, кој претставува, како што гледаме, граница на областите на двата агла, т.е.

$$(\sphericalangle AOB) \cap (\sphericalangle BOC) = OB.$$

**Два агла, со заедничко теме и еден заеднички крак, а областите им лежат на различни страни од заедничкиот крак, се викаат соседни агли.**

Такви се аглите $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle BOC$ (црт. 114.).

Унија на соседните агли $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle BOC$ претставува некој нов агол $\sphericalangle AOC$, т.е. $(\sphericalangle AOB) \cup (\sphericalangle BOC) = \sphericalangle AOC$, кој се вика нивен збир.

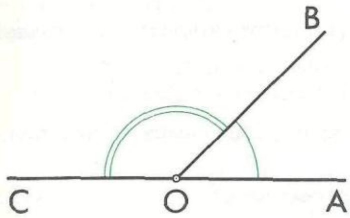
Збирот на два соседни агла може да биде кој да било од познатите видови агли.

**2.** Во специјален случај, ако збирот на два соседни агла е рамен агол, тогаш такви два соседни агла ги викаме уште и *напоредни агли.* Такви се соседните агли $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle BOC$ на црт. 115. Во тој случај, незаедничките краци на соседните агли $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle BOC$ образуваат една права $AC$ (црт. 115). Според тоа:

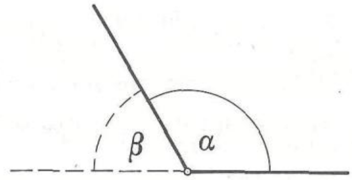
**Два агла, кои имаат заедничко теме и еден заеднички крак, а другите два крака им образуваат една права, се викаат напоредни агли.**

Напоредни агли можеме да добиеме и вака:

Ако кој да било крак на даден агол $\alpha$ го продолжиме зад неговото теме, ќе добиеме нов агол $\beta$, кој заедно со дадениот агол образува напоредни агли (црт. 116.). При тоа велиме дека $\beta$ е напореден агол со $\alpha$, и обратно: $\alpha$ е напореден агол со аголот $\beta$.



Црт. 115



Црт. 116

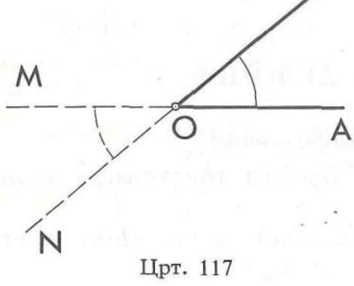
Бидејќи збирот на напоредните агли е рамен агол, тогаш јасно е дека:

**Напоредните агли се суплементни.**

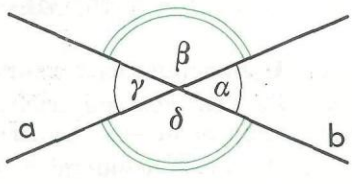
**3.** Нацртајте еден произволен агол $\sphericalangle AOB$ и продолжете ги неговите краци зад темето $O$ (црт. 117.). Аголот што го градат продолженијата на краците, ако го разгледаме заедно со дадениот агол, ќе забележиме дека тие два агла имаат заедничко теме, а нивните краци образуваат (припаѓаат на) две прави, што се сечат.

**Два агла, кои имаат заедничко теме, а краците на едниот агол се продолженија од краците зад темето на другиот агол, се викаат вкрстени агли.**

Две прави $a$ и $b$ кои се сечат, образуваат четири агли: $\alpha$; $\beta$; $\gamma$ и $\delta$ (црт. 118). Аглите $\alpha$ и $\gamma$ се вкрстени, но и аглите $\beta$ и $\delta$, исто така, се вкрстени.



Црт. 117



Црт. 118

Велиме дека аголот $\alpha$ е вкрстен со аголот $\gamma$, и обратно: аголот $\gamma$ е вкрстен со аголот $\alpha$. Истото важи и за другиот пар вкрстени агли: $\beta$ и $\delta$.

Ако едниот вкрстен агол, на пример, аголот $\sphericalangle AOB$ (црт. 117.), го исечеме и го поставиме врз другиот нему вкрстен агол $\sphericalangle MON$, ќе забележиме дека тие два агла се совпаѓаат. Провери го тоа на други вкрстени агли. Притоа се уверуваме дека:

**Вкрстените агли се складни.**

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Кои два агла се викаат комплементни, а кои суплементни?

**2.** Нацртај еден остар агол, а потоа одреди го конструктивно: а) неговиот комплемент, б) неговиот суплемент!

**3.** Нацртај еден тап агол, а потоа конструирај го неговиот суплемент!

**4.** Нацртај два остри агла, собери ги, па за добиениот збир најди го конструктивно неговиот суплемент!

**5.** Кои два агла се викаат напоредни, а кои вкрстени агли?

**6.** Нацртај еден: а) остар, б) тап агол и конструирај го на него напоредниот агол!

**7.** Нацртај еден остар и еден тап агол, а потоа конструирај ги нивните вкрстени агли!

**8.** Какви се напоредните агли, ако тие се складни еден на друг?

**9.** Можат ли напоредните агли, да бидат: а) и двата остри, б) и двата тапи, в) и двата прави, г) едниот прав, а другиот тап агол?

**10.** Нацртај две прави кои се сечат и покажи колку пара напоредни, а колку пара вкрстени агли се образувани?

**11.** Правите $AB$ и $CD$ се сечат во точката $M$. Збирот на аглите $AMC$ и $BMD$ е рамен агол. Одреди каков е аголот $AMD$!

**12.** Нацртај три прави, кои се сечат, сите во една точка. Колку пара вкрстени агли се образуваат?

**13.** Ако две прави се сечат и ако еден од добиените агли е прав, какви се другите агли?

**14.** Даден е еден тап агол. Нацртај само со помош на линијар складен агол на дадениот!

## § 25. МЕРЕЊЕ НА АГЛИ. АГЛОМЕР

**1.** Видовме дека аглите можеме да ги споредуваме.

За два складни агла велиме дека имаат еднаква големина, а за два нескладни агли — различна големина.

Значи, големината е општо својство на секој агол. Затоа, аглите можеме да ги разгледуваме и како величини од одреден вид.

Големината на аголот, како и на секоја друга величина, ја одредуваме со мерење. За таа цел треба да избереме некој произволен агол за кого усвојуваме дека има големина еднаква на 1. Тој агол го викаме *единичен агол* или *единица мерка*.

Големината на аголот $\sphericalangle AOB$ симболички ќе ја означуваме со $\widehat{AOB}$, за разлика од означувањето со $\sphericalangle AOB$ на самиот тој агол разгледуван како геометриска фигура (множество од точки). На пример, на слика 119. се нацртани два складни агла $\sphericalangle AOB$ и $\sphericalangle MNP$, т.е. $\sphericalangle AOB \cong \sphericalangle MNP$.

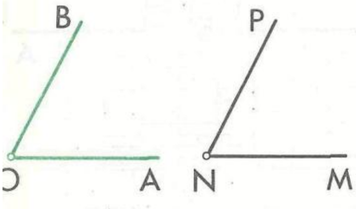
Тие имаат и еднаква големина, кое го запишуваме: $\widehat{AOB} = \widehat{MNP}$.

Ако аглите се означени со една буква $A$; $B$; $C$; $\alpha$; $\beta$; $\gamma$; . . . , тогаш нивната големина, обично, ја означуваме со истите букви без знакот „$\frown$“ над нив. На пример, ако е $\alpha \cong \beta$, тогаш наместо $\widehat{\alpha} = \widehat{\beta}$, пократко пишуваме само $\alpha = \beta$.

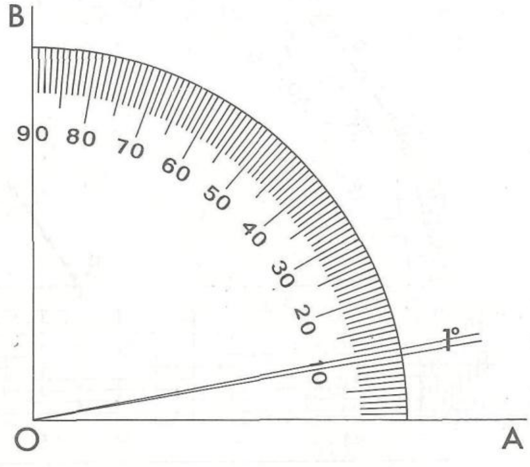
За основна единица мерка за мерење на аглите применен е *правиот агол*. Неговата големина ја означуваме со знакот $\llcorner$, што го ставаме по бројот во неговата горна половина, на пример: $1^{\llcorner}$, $2^{\llcorner}$, итн.

Помали единици мерки за мерање на аглите се: *аголвен степен* (°), *агловна минута* (′) и *агловна секунда* (″).

**Агловен степен е 90-ти дел од правиот агол** (црт. 120.). и го означуваме со знакот „°“, кој се става по бројот во неговата горна половина вака: 1° На пример, ако аголот $AOB$ содржи 27 аглови степени, тоа го запишуваме вака: $\widehat{AOB} = 27°$.




Црт. 119




Црт. 120

Правиот агол содржи 90 агловни степени, т.е. $1^{\llcorner} = 90°$.

Рамниот агол содржи $2^{\llcorner}$ или 180°, а полниот агол содржи $4^{\llcorner}$ или 360°.

**Агловна минута е 60-ти дел од агловниот степен** и се означува со (′) т.е. $1° = 60'$; а **агловна секунда е 60-ти дел од агловната минута** и се означува со (″), т.е. $1' = 60''$, односно

$$1° = 60' = 3600''.$$

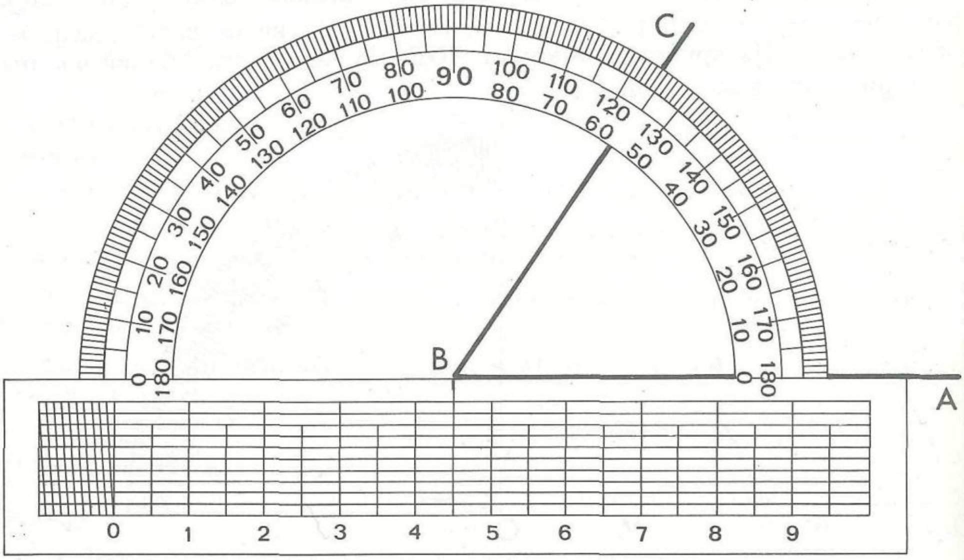
Ако аголот $\alpha$ содржи 38 агловни степени, 27 агловни минути и 45 агловни секунди, тоа кратко го запишуваме вака: $\alpha = 38°27'45''$.

**2.** Мерењето на аглите го вршиме со специјална направа — *агломер* (сл. 121.).

Агломерот може да биде направен од метал или некоја пластична материја. Тој има форма на полукруг и е исечен во средината.

Надворешната полукружница е разделена на 180 складни делови (степени). Забележуваме дека на нашите агломери не се означени деловите од степенот, т.е. минутите и секундите. Постојат други направи со кои ги мериме тие мали делови од аголот. Тие се употребуваат во науката и техниката, каде што се потребни многу поточни мерења.

Нацртајте еден произволен агол $ABC$ (црт. 121.). За да го измериме тој агол, постапуваме вака: го поставуваме агломерот врз аголот $ABC$, така што центарот на агломерот, обележен со цртичка, да падне во темето $B$ на аголот $ABC$, а дијаметарот на агломерот да се поклопи со еден од краците на аголот, на пример со кракот $AB$ (црт. 121.). Тогаш другиот крак $BC$ ќе помине низ еден од разделите на агломерот. Потоа ги избројуваме зафатените раздели со краците на аголот. Тој број ни покажува колку агловни степени содржи дадениот агол.



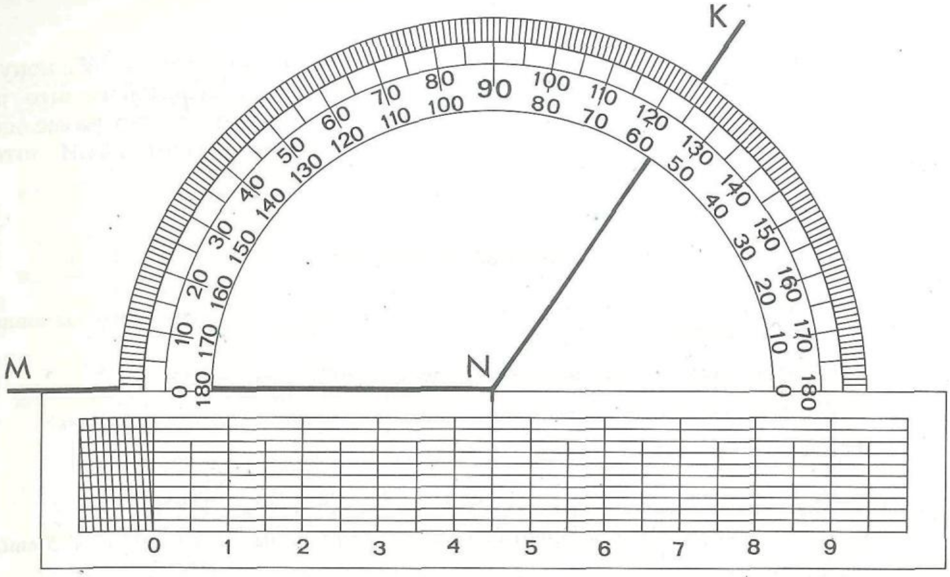

Црт. 121

Аголот $ABC$ гледаме дека има $\widehat{ABC} = 56°$ (црт. 121.).

Некои агломери имаат една скала, а некои две скали. Кај агломерите што имаат две скали треба да се внимава на која скала ќе се прочита големината на аголот.

На пример, да го измериме аголот $MNK$ (црт. 122.).

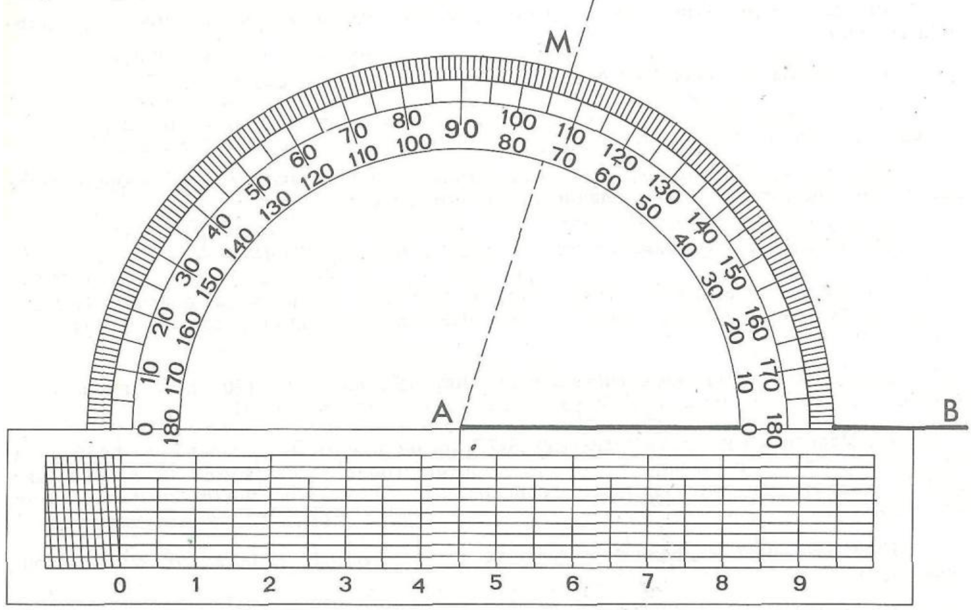
Го поставуваме агломерот врз аголот $MNK$, како што е покажано на цртежот и гледаме дека: $\widehat{MNK} = 124°$ (црт. 122.).



Црт. 122

Агломерот го употребуваме и за цртање на агли со зададена големина. Да нацртаме агол од 73°. Тоа го правиме вака:

Конструираме една полуправа $AB$, потоа го поставуваме агломерот, така што неговиот центар да се поклопи со почетокот на полуправата, а дијаметарот на агломерот да ја поклопи полуправата $AB$ (црт. 123.).



Црт. 123

Кога агломерот е така поставен, со креда или со молив ја обележуваме точката во која ќе падне поделбата на скалата на агломерот, што ја одредува големината на аголот, т.е. 73°. Таа точка потоа ја сврзуваме со почетокот на полуправата $AB$ и со тоа го добиваме аголот $BAM$ што има 73°.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Со кои мерни единици ги мериме аглите? Што е агловен степен, агловна минута и агловна секунда?

**2.** Колку степени има: а) правиот, б) рамниот, в) полниот агол?

**3.** Кои агли ги викаме остри, тапи и конкавни? Какви се тие по големина?

**4.** Прочитај ги записите: $\widehat{AOB} = 58°$; $\widehat{MON} = 37°30'45''$; $\alpha = 26°$!

**5.** Од каков вид се аглите: 20°; 30°; 45°; 90°; 100°; 225°; 3000′!

**6.** Колку степени опишува врвот на минутната стрелка на часовникот за: а) 5 мин, б) 15 мин, в) 26 мин, г) $\frac{1}{2}$ час?

**7.** Колку степени ќе опише врвот на стрелката од часовникот за: 1 час, б) 2 часа, в) 3 часа, г) 5 часа?

**8.** Колкав агол образуваат стрелките на часовникот, кога тие покажуваат точно: а) $1^h$; б) $2^h$; в) $3^h$; г) $4^h$; д) $6^h$; ѓ) $8^h$; е) $9^h$?

**9.** Нацртај три различни остри агли, обележи ги, а потоа измери ги со агломер и запиши ја големината на секој од нив!

**10.** Нацртај два тапи агла, обележи ги, измери ги со агломер и запиши ја нивната големина!

**11.** Нацртај два конкавни агла и измери ја нивната големина!

**12.** Со помош на агломер нацртај агли, чија големина да е: а) 7°; б) 32°; в) 105°; г) 200°; д) 270°; ѓ) 338°.

**13.** Нацртај еден произволен агол, а потоа, со помош на агломер, нацртај уште два други агла што ќе бидат складни на првиот агол!

**14.** Колку степени имаат аглите: $2^{\llcorner}$; $3^{\llcorner}$; $4^{\llcorner}$; $\frac{1^{\llcorner}}{2}$; $\frac{1^{\llcorner}}{3}$; $\frac{1^{\llcorner}}{5}$; $\frac{1^{\llcorner}}{6}$; $\frac{1^{\llcorner}}{90}$?

**15.** Нацртај некој агол $\alpha$. Потоа нацртај друг агол кој по твоја проценка, ќе биде складен со аголот $\alpha$. Потоа измери ги со агломер двата агла и одреди за колку си погрешил!

**16.** Нацртај ги од око следниве агли: 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, потоа провери со агломер за колку си погрешил! Повтори го истото уште два пати!

**17.** Нацртај еден произволен агол $AOB$, па од темето $O$ повлечи една полуправа $OC$, која, по твоја проценка, ќе го преполовува аголот $AOB$. Потоа, измери ги така добиените делови и најди за колку си погрешил! Повтори ја истата постапка уште два пати!

**18.** Какви агли се добиваат кога ќе се преполови еден: а) остар, б) тап, в) конкавен агол?

**19.** Нацртај три-четири кружници со различни радиуси и во секоја од нив нацртај по еден централен агол што одговара на тетива, чија должина е еднаква на радиусот на кружницата! Измери ги така добиените агли! Што забележуваш?

**20.** Нацртај кружница и во неа повлечи еден дијаметар $AB$. Крајните точки на дијаметарот соедини ги со една која да било точка $M$ од кружницата, а потоа измери го аголот $AMB$. Повтори ја постапката неколку пати, така што секој пат точката $M$ да биде на различни места на кружницата. Што забележуваш? Каков е аголот $AMB$?

**21.** Еден брод плови во насока југозапад, а потоа свртува кон југ. За колкав агол бродот свртел од првобитната насока?

**22.** Колку степени има централен агол, на кого му одговара кружен лак еднаков на: $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{12}$ од кружницата?

**23.** Претвори го аголот $3276''$ во степени, минути и секунди!

**24.** Каков дел од кружницата претставува лакот што соодветствува на централен агол од: а) $45°$, б) $60°$, в) $72°$, г) $120°$?

## § 26. АРИТМЕТИЧКО СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА АГЛИ

Собирањето и одземањето на аглите, чии мерни броеви ни се познати, може да се изврши и аритметички, т.е. со сметање. Како тоа го вршиме ќе покажеме на следниве примери:

**Задача 1.** Да се соберат аглите: $\alpha = 23°$, $\beta = 38°$ и $\gamma = 65°$.

Големината на збирот на дадените агли ја наоѓаме со собирање на нивните мерни броеви, т.е.

$$\alpha + \beta + \gamma = 23° + 38° + 65° = 126°.$$

**Задача 2.** Да се одреди разликата $\alpha - \beta$, ако е $\alpha = 84°$ и $\beta = 56°$!

Бараната разлика ја наоѓаме: $\alpha - \beta = 84° - 56° = 28°$.

**Задача 3.** Да се соберат аглите: $\alpha = 48°\ 27'\ 45''$, $\beta = 32°\ 15'\ 36''$ и $\gamma = 52°\ 42'\ 40''$!

Прво ги напишуваме мерните броеви на дадените агли еден под друг и тоа да бидат секунди под секунди, минути под минути и степени под степени. Потоа ги собираме одделно секундите, па минутите и на крајот степените. На пример:

$$\begin{array}{r} \alpha = \ 48°\ 27'\ 45'' \\ \beta = \ 32°\ 15'\ 36'' \\ \gamma = \ 52°\ 42'\ 40'' \\ \hline \alpha + \beta + \gamma = 132°\ 84'\ 121'' \end{array}$$

Ако земеме предвид дека: $60'' = 1'$ и $60' = 1°$; тогаш $121'' = 2'\ 1''$, а $84' = 1°24'$, па наместо збирот $\alpha + \beta + \gamma = 132°\ 84'\ 121''$, пишуваме:

$$\alpha + \beta + \gamma = 133°\ 26'\ 1''.$$

**Задача 4.** Да се одреди разликата $\alpha - \beta$, ако е $\alpha = 74°\ 53'\ 38''$ и $\beta = 55°\ 18'\ 25''$!

Под мерниот број на аголот $\alpha$ го напишуваме мерниот број на аголот $\beta$ и ги одземаме одделно, прво секундите па минутите и на крајот степените. Така наоѓаме:

$$\begin{array}{r} \alpha = 74^\circ\ 53'\ 38'' \\ \beta = 55^\circ\ 18'\ 25'' \\ \hline \alpha - \beta = 19^\circ\ 35'\ 13'' \end{array}$$

**Задача 5.** Да се одземат аглите: $\alpha = 65^\circ\, 13'\, 25''$ и $\beta = 48^\circ\, 45'\, 38''$.

По напишувањето на мерните броеви на аглите еден под друг:

$\alpha = 65^\circ\ 13'\ 25''$

$\beta = 48^\circ\ 45'\ 38''$, гледаме дека од $25''$ не можеме да одземеме $38''$, а исто така и $45'$ не можеме да одземеме од $13'$. Во таков случај прибегнуваме кон позајмување, т.е. од $13'$ земаме $1'$ и ја претвораме во секунди $1' = 60''$; потоа од $65^\circ$ земаме $1^\circ$ и го претвораме во минути $1^\circ = 60'$. Така мерниот број на аголот $\alpha$ сега можеме да го запишеме:

$$\alpha = \overset{64^\circ}{\cancel{65^\circ}}\ \overset{72'}{\cancel{13'}}\ \overset{85''}{\cancel{25''}} = 64^\circ\ 72'\ 85'',$$

па потоа одземањето лесно го извршуваме:

$$\begin{array}{r} \alpha = 64^\circ\ 72'\ 85'' \\ \beta = 48^\circ\ 45'\ 38'' \\ \hline \alpha - \beta = 16^\circ\ 27'\ 47'' \end{array}$$

**Задача 6.** Одземи го аголот $\alpha = 53^\circ\ 14''$ од правиот агол!

Правиот агол има $90^\circ$, што можеме да го запишеме и вака: $89^\circ\ 59'\ 60''$. Тогаш, одземањето не претставува тешкотија.

$$\begin{array}{r} 90^\circ = 89^\circ\ 59'\ 60'' \\ \alpha = 53^\circ\ 00'\ 14'' \\ \hline 90^\circ - \alpha = 36^\circ\ 59'\ 46'' \end{array}$$

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Собери ги аглите: а) $52^\circ\, 34' + 17^\circ\, 8'\, 48'' + 120^\circ = ?$

б) $45^\circ\, 35' + 68^\circ\, 18'\, 50'' + 86^\circ\, 48' = ?$

в) $150^\circ + 98^\circ\, 45' + 25^\circ\, 15' + 12^\circ = ?$

г) $68^\circ + 105^\circ\, 20' + 47^\circ\, 59' + 40^\circ = ?$

д) $24^\circ\, 36'\, 28'' + 45^\circ\, 12' + 64^\circ\, 25' = ?$

**2.** Пресметај ја разликата на аглите:

а) $56^\circ - 38^\circ = ?$

б) $125^\circ - 63^\circ\, 15' = ?$

в) $84^\circ\, 15'\, 8'' - 49^\circ\, 25' = ?$

г) $54^\circ\, 24'\, 24'' - 18^\circ\, 45'\, 45'' = ?$

д) $180^\circ - 44^\circ\, 28'\, 56'' = ?$

ѓ) $90^\circ - 42^\circ$

е) $100^\circ - 36^\circ\, 25' = ?$

ж) $75^\circ\, 37'\, 23'' - 36^\circ\, 25'\, 30'' = ?$

з) $98^\circ\, 52'\, 14'' - 63^\circ\, 35' = ?$

ѕ) $135^\circ\, 22'\, 45'' - 68^\circ = ?$

**3.** Изврши ги означените операции со аглите:

а) $26^\circ 42' 18'' + 56^\circ 3' 25'' - 33^\circ 27' 45'' = ?$
б) $250^\circ - (62^\circ 30' 54'' + 134^\circ 25' 6'') = ?$
в) $180^\circ - 52^\circ 48' 50'' - (29^\circ 43' 15'' + 13^\circ 12' 45'')?$
г) $90^\circ + 32^\circ 15' - (90^\circ - 83^\circ 35') = ?$

**4.** Од збирот на аглите $48^\circ 15' 50'$ и $27^\circ 35' 20''$ одземи ја нивната разлика!

**5.** Нацртај ги аглите $\alpha = 58^\circ$ и $\beta = 35^\circ$, потоа одреди го конструктивно аголот: а) $\alpha + \beta$; б) $\alpha - \beta$. Добиениот агол потоа измери го со агломер!

**6.** Нацртај го аголот $\alpha = 43^\circ$, потоа конструирај го аголот $2\alpha$!

**7.** Нацртај три различни агли, измери ги со агломер, потоа собери ги и нацртај го со агломер нивниот збир!

**8.** Едниот од два напоредни агла има: а) $25^\circ 30'$, б) $40^\circ 45'$, в) $60^\circ 25'$, г) $90^\circ$, д) $135^\circ$, ѓ) $163^\circ 14' 50''$. Колкав е другиот агол?

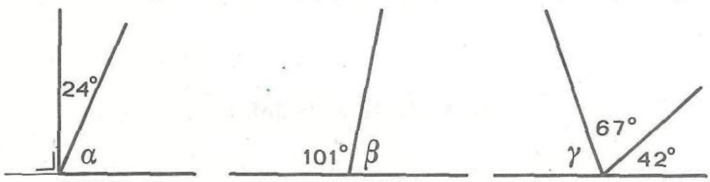
**9.** Еден од аглите, што ги образуваат две прави кои се сечат, изнесува $\frac{2\llcorner}{3}$. Одреди колку изнесуваат другите агли!

**10.** Ако еден агол е $50^\circ$, колкав е неговиот: а) комплемент, б) суплемент?

**11.** Одреди го комплементот и суплементот за секој од аглите:
а) $25^\circ 33'$, б) $42^\circ 15'$, в) $58^\circ$, г) $75^\circ$, д) $81^\circ 50'$!

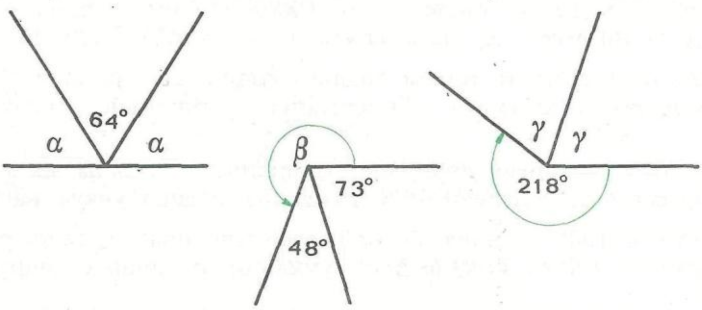
**12.** Можат ли два вкрстени агла да бидат: а) комплементни, б) суплементни; и во кој случај?

**13.** Поголемиот од два комплементни агла е три пати поголем од другиот. Колку изнесува големината на секој од нив?




Црт. 124

**14.** На цртежите на црт. 124. и 125. одреди ја големината на аглите што се означени со грчки букви. Аглите што се означени со исти букви се складни.




Црт. 125

**15.** Еден од аглите, што се образувани при пресекувањето на две прави, е: а) за $30^\circ$ поголем, б) за $40^\circ$ помал, в) 4 пати помал од еден од останатите агли. Пресметај ја големината на секој од тие агли!

ГЛАВА V

# ПРАКТИЧНА РАБОТА НА ТЕРЕН

## § 27. БРОЕН И ЛИНИСКИ РАЗМЕР

Ако сакаме во тетратката или на училишната табла да го нацртаме училишниот двор или дел од него, на пример игралиштето за ракомет, ќе забележиме дека не можеме да ги нацртаме во нивната природна големина, бидејќи и тетратката и таблата се премногу мали за тоа. Во таков случај прибегнуваме кон *намалено цртање*, т. е. истите ги цртаме во намален вид.

### 27. 1. БРОЕН РАЗМЕР

Училишниот двор нека има форма на правоаголник, со должина 90 *m* и ширана 70 *m*. Ако цртежот го изведуваме во тетратката, должината и ширината на училишниот двор ќе ги намалиме 1000 пати, па добиваме:

Природната должина на дворот е 90 $m = 9000$ *cm*. Кога ќе ја намалиме 1000 пати, таа ќе стане: $9000 : 1000 = 9$ (*cm*). А ширината на дворот е 70 $m = 7000$ *cm*. со намалувањето ќе стане: $7000 : 1000 = 7$ (*cm*).

Потоа, во тетратката цртаме правоаголник, со должина 9 *cm* и ширина 7 *cm* и велиме дека тој го претставува училишниот двор во намален вид.

За да означиме дека природната должина и ширина на училишниот двор на цртежот се намалени 1000 пати, тоа го запишуваме вака: 1 : 1000.

Записот 1 : 1000 се вика *броен размер* или кратко, само, *размер* и се чита: „1 спрема 1000". Велиме дека училишниот двор е нацртан во размер 1 : 1000.

Бројниот размер покажува колку пати должините на отсечките на цртежот се помали од должините на соодветните отсечки во природата. На пример, размерот 1 : 1000 покажува дека на 1 единица (1 *mm*) од цртежот, одговараат 1000 единици (1000 *mm*) во природата.

Цртежот, што го претставува училишниот двор, игралиштето, градината или некој друг дел од земјината површина во одреден размер, се вика *план* или *карта*.

Плановите се цртаат во различни размери: 1 : 10, 1 : 50, 1 : 100, 1 : 200, 1 : 500, 1 : 1 000, 1 : 5 000, 1 : 10 000, 1 : 1 000 000, итн. Кој размер ќе го избереме при цртањето на некој план зависи од големината на делот на теренот што го цртаме, како и од димензиите на листот хартија на кој сакаме да цртаме.

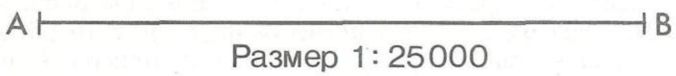
Со помош на размер можат да се решат следниве три вида задачи:

**Задача 1.** Еден прав канал за наводнување е долг 2 *km*. Нацртај го каналот во размер 1 : 25 000!

Размерот 1 : 25 000 бара должината на каналот на планот да биде 25 000 пати помала од неговата стварна должина. Ако стварната должина 2 $km = 2\,000 m = 200\,000$ *cm* ја поделиме со 25 000, ќе добиеме:

$$200\,000 \ cm : 25\,000 = 8 \ cm.$$

Потоа, конструираме отсечка $AB$ со должина 8 *cm* (црт. 126.). Таа ќе го претставува каналот во размер 1 : 25 000.




Црт. 126

**Задача 2.** На географската карта на СР Македонија со размер 1 : 500 000, растојанието меѓу Скопје и Битола по права линија изнесува 21 *cm*. Колку километри изнесува правиот воздушен пат меѓу Скопје и Битола?

Размерот 1 : 500 000 покажува дека на 1 *cm* од картата одговараат 500 000 $cm = 5\,000 \ m = 5 \ km$ во природата. Сперед тоа, стварната оддалеченост по права воздушна линија меѓу Скопје и Битола, ќе изнесува:

$$5 \ km \cdot 21 = 105 \ km.$$

**Задача 3.** Да се одреди бројниот размер на планот, ако сакаме должината од 360 *m.* на него да биде претставена со отсечка долга 12 *cm*.

Стварната должина 360 *m* прво треба да ја изразиме во сантиметри, а потоа ќе најдеме на 1 *cm* од планот колку сантимери одговараат на теренот. Така наоѓаме: 360 $m = 36\,000 \ cm$; а $36\,000 : 12 = 3\,000$.

Според тоа, на 1 *cm* од планот ќе одговараат 3000 *cm* од природата. Значи, бројниот размер на планот ќе биде 1 : 3 000.

### 27. 2. ЛИНИСКИ РАЗМЕР

Ако ги погледаме географските карти, ќе забележиме дека на секоја од нив, покрај означениот броен размер се наоѓа и *лиииски размер*.

Линиски размер е една отсечка или лента (црт. 127.), која е изделена спрема бројниот размер така, што од неа многу лесно и брзо може да се одреди вистинското растојание меѓу кои да било две точки на картата.

На секој броен размер му одговара и соодветен линиски размер.

Бројниот размер на еден план нека е 1:100. Да се нацрта неговиот линиски размер!


Црт. 127

Размерот 1:100 покажува дека на 1 *cm* од планот одговараат 100 *cm*, односно 1 *m* во природата. Линискиот размер ќе го нацртаме вака:

Повлекуваме една права и на неа означуваме една произволна точка со нула (0), На лево од таа точка пренесуваме 1 *cm* и го разделуваме на 10 еднакви делови — милиметри, а на десно од точката *O* пренесуваме 5—6 пати по 1 *cm* (црт. 128.). На 1 *cm* од така нацртаниот линиски размер одговара 1 *m* на теренот, а на 1 *mm* одговара 1 *dm*.


Црт. 128

Да нацртаме линиски размер, што одговара на броен размер 1:5000.

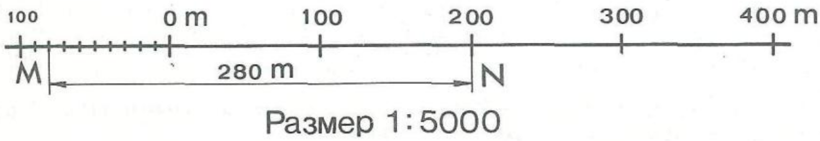
Размерот 1:5000 покажува дека на секои 100 *m* во природата одговара 5000 пати помала должина на линискиот размер, т. е.

$$100\ m : 5\,000 = 10\,000\ cm : 5\,000 = 2\ cm.$$

Според тоа, 2 *cm* на линискиот размер ќе одговараат на 100 *m* во природата (црт. 129), а 2 *mm* на 10 *m* во природата. Цртањето на линискиот размер го вршиме на ист начин како во првиот пример.

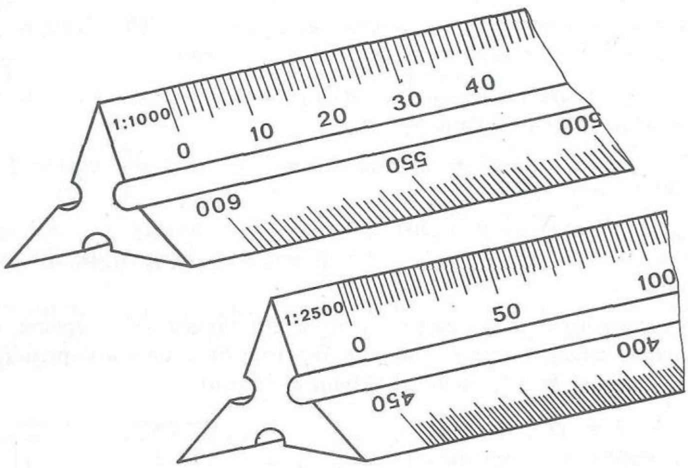
Со помош на линискиот размер рековме дека лесно и брзо може да се одреди вистинското растојание меѓу две точки на планот. Тоа станува вака: Го отвараме шестарот колку што е растојанието меѓу точките *M* и *N* на планот, па тој отвор го пренесуваме на линискиот размер, на кој го читаме бараното растојание меѓу тие две точки на теренот. На пример:

Ако планот е работен во размер 1 : 5 000, растојанието меѓу точките *M* и *N* кога ќе го пренесеме на линискиот размер како на црт. 129, ќе најдеме дека тоа во природата изнесува 280 *m*.




Црт. 129

За уште поголемо олеснување во работата со планови, изработени во одредени размери, се користат и специјално за таа цел направени *размерни линијари* или *размерници* (црт. 130.).




Црт. 130

Размерниот линијар, обично, содржи шест линиски размери, кои се отпечатени на дрвени, метални или бакелитни прачки, што се вградени на него. На размерниот линијар, обично, се нанесени следниве размери: 1 : 100 1 : 200, 1 : 250, 1 : 400, 1 : 500 и 1 : 750; а може и други.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Што значи да се нацрта планот на училишниот двор во размер 1 : 300, 1 : 500, 1 : 1 000, 1 : 2 500?

**2.** Игралиштето за кошарка е долго 30 *m*, а широко 16 *m*. Што значи да се нацрта намалено во размер 1 : 500? Направи го тоа!

**3.** Нацртај ги намалено во размер 1 : 50 следниве отсечки, што се долги: а) 4 *m*, б) 5 *m*, в) 275 *cm*, г) 1 *m* 25 *cm*.

**4.** Нацртај отсечка, долга 40 *m*, во размер 1 : 500, а потоа истата отсечка нацртај ја во размер 1 : 1 000. Што забележуваш?

**5.** Најголема река во СФРЈ е Сава, која е долга 940 *km*, а во СРМ е Вардар, чија должина е 388 *km*. Нацртај ги реките Сава и Вардар намалено со две отсечки во размер 1 : 10 000 000!

**6.** Градското фудбалско игралиште е долго 120 *m*, а широко 60 *m*. Нацртај го неговиот план во размер: а) 1 : 1 000, б) 1 : 1 200!

**7.** Измери се што е потребно и нацртај го планот на една соба од вашиот стан во размер 1 : 100:

**8.** На карта, изработена во размер 1 : 250 000, колкава должина одговара на должината: а) 1 *km*, б) 8 *km*, в) 15 *km*, г) 60 *km* на теренот?

**9.** Еден план е изработен во размер 1 : 50 000. а) Која должина на теренот одговара на должината 42 *cm* од планот?, б) која должина на планот одговара на должината 8 *km* од теренот?

**10.** Темелите на една куќа на планот во размер 1 : 100 се нацртани со отсечки 9 *cm* и 16 *cm*. Колкави се стварните димензии на темелите?

**11.** Во каков размер е работен еден план, ако на него должината 30 *m* е нацртана со отсечка долга: а) 15 *cm*, б) 9 *cm*, в) 5 *cm*?.

**12.** Во кој размер се наоѓаат а) 1 *cm* спрема 1 *m*, б) 1 *mm* спрема 1 *km*, в) 1 *dm* спрема 1 *km*, г) 5 *mm* спрема 1 *m*?

**13.** На планот со размер 1 : 500 две точки се оддалечени една од друга на: а) 3 *cm*, б) 5 *cm*, в) 12 *cm*. Одреди ја стварната оддалеченост на тие точки една од друга на теренот!

**14.** Земи географска карта на СФРЈ и од неа одреди ја стварната оддалеченост по права воздушна линија меѓу: а) Скопје и Белград, б) Скопје и Струмица, в) Прилеп и Куманово, г) Кавадарци и Тетово, д) Охрид и Дојран!

**15.** На цртежот 131. нацртан е планот на еден двособен стан во размер 1 : 200. Со помош на планот одреди ги димензиите на собите и другите простории во станот!

**16.** Нацртај ги линиските размери, што одговараат на бројните размери: 1 : 10, 1 : 20, 1 : 250, 1 : 300, 1 : 500!

**17.** Нацртај го линискиот размер, што одговара на вашата географска карта на СРМ и со помош на него одреди ја оддалеченоста по права воздушна линија меѓу Скопје и Гевгелија и Скопје и Охрид!

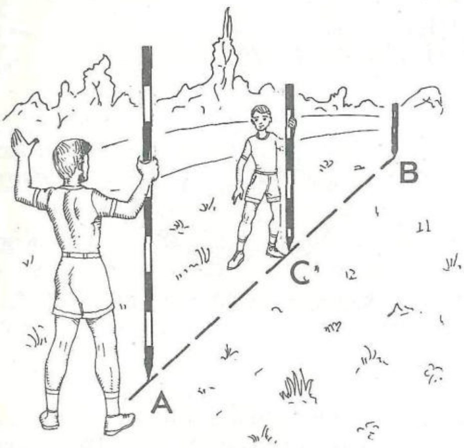
**18.** Изработи линиски размер од хартија или картон, што одговара на бројниот размер 1 : 1 250 000, земајќи за основна единица на него 10 *km*.


Црт. 131

## § 28. ТРАСИРАЊЕ НА ПРАВИ И МЕРЕЊЕ НА РАСТОЈАНИЈА НА ТЕРЕНОТ

**1.** Да се трасира (да се постави) права низ две точки на теренот значи, да се обележат, со помош на трасирки и колчиња, и други нејзини точки, освен дадените точки. Тоа го правиме вака:

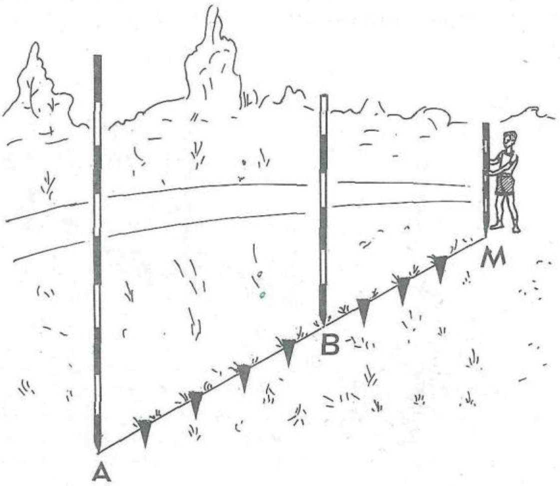
Во две дадени точки *A* и *B* на теренот, забиваме по една трасирка во вертикална положба (црт. 132.). Потоа, еден ученик застанува при трасирката во точката *A* и визира (гледа со едното око) од неа во правец кон трасирката во точката *B*. Друг ученик зема трета трасирка, застанува некаде помеѓу точките *A* и *B* и се движи на лево — на десно, сè додека неговиот другар не го извести дека првата трасирка, ги закрива другите две трасирки (црт. 132). Потоа, вториот ученик на местото каде ја држел трасирката забива едно колче. Тоа колче на теренот означува една точка *C*, која лежи (припаѓа) на правата *AB*. На ист начин можат да се означат со колчиња и други точки на правата *AB*.




Црт. 132

Понекогаш станува потребно правата определена со точките *A* и *B* да се продолжи во едната насока, на пример, зад точката *B*. Тоа може да го изврши и само еден ученик вака: тој зема една трасирка и застанува во таква точка *M*, од која кога визира, трасирката што ја држи да ги закрива трасирките што се забодени во точките *A* и *B* (црт. 133.). Потоа, така определената точка ученикот ја обележува со едно колче. На ист начин можат да се одредат и други точки од правата *AB*.

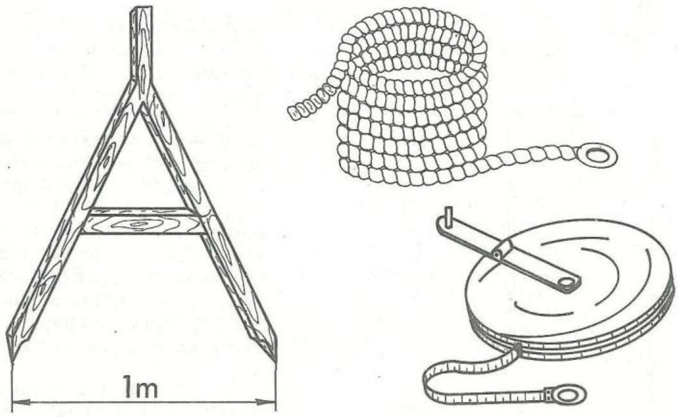
Кога на опишаниот начин се обележат доволно точки од правата што сакаме да мине низ дадените две точки *A* и *B*, велиме дека со тоа таа е трасирана.




Црт. 133

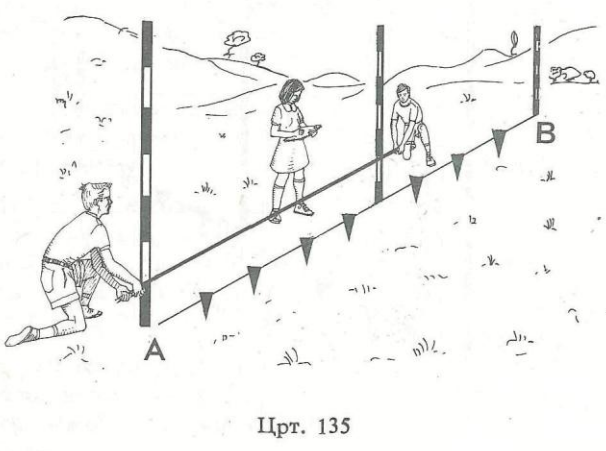
**2.** Мерењето на поголеми растојанија на теренот го вршиме со помош на јаже, челична лента или полски шестар (црт. 134.)

Јажето и челичната лента обично се долги 10 *m* или 20 *m*. Челичната лента е разделена на метри и сантимери, а на јажето метрите се означени со јазли или обоени кончиња.




Црт. 134

Мерењето на растојанијата на теренот со јаже или челична лента го вршат два ученика. Првиот ученик го држи почетокот на лентата (или јажето) и застанува при почетната точка во која е забодена трасирката. Вториот ученик ја развива лентата до крај, ја затегнува добро во правец на трасираната должина и, при крајот на истата, забива едно колче (црт. 135.). Потоа, двајцата истовремено тргнуваат напред, додека првиот ученик не дојде до забиеното колче. Тука тој повторно го става почетокот на лентата, а вториот ја затегнува истата и при крајот забива ново колче. Така продолжуваат сè додека предниот ученик не стигне до крајната точка на мерената должина. Ако при последното нанесување не се помести точно целата лента, тогаш вториот ученик чита на лентата каде паднала крајната точка од должината. На крајот се пресметува: ако е лентата долга 20 *m*, а истата е пренесена 3 пати и преостанатиот дел е 12 *m*, тогаш мереното растојание ќе изнесува $20 \cdot 3 + 12 = 72$ (*m*).




Црт. 135

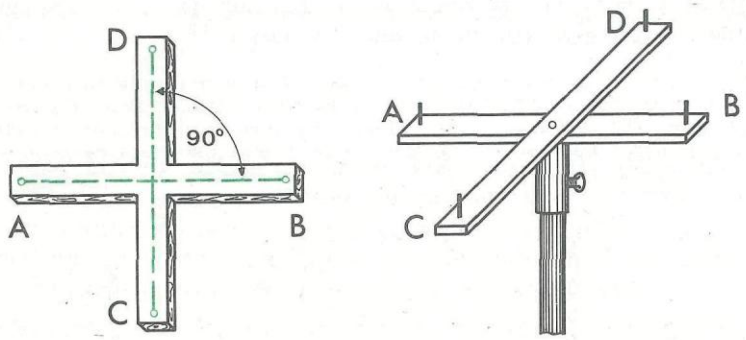
За побрзо мерење на растојанијата на теренот често се користи и полскиот шестар (црт. 134.). Тој е направен од две летви, кои на крајот се заострени. Растојанието меѓу заострените краци на шестарот, обично, изнесува 1 *m*.

Начинот на ракувањето со полскиот шестар во многу е сличен на тој со обичниот метар. Отворот на шестарот го пренесуваме едно по друго по мерената должина и велиме: колку пати тој ќе се пренесе, толку метри ќе има и бараното растојание.

## § 29. ТРАСИРАЊЕ НА НОРМАЛНИ ПРАВИ. ЕКЕР

Нормални прави во тетратката и на таблата цртаме со помош на правоаголниот триаголник. А на теренот нормални прави поставуваме (трасираме) со посебна направа, која се вика *екер* (црт. 136.).

Екер е обичен дрвен крст, врз чии краци се нацртани две заемно нормални отсечки $AB \perp CD$. Во крајните точки на тие отсечки заковани се шајчиња, што стојат нормално на рамнината на крстот. Крстот се прицврстува нормално на еден стап (статив), чија должина е околу 1,5 *m*, така што тој може да се врти околу стативот како околу некоја оска (црт. 136.).




Црт. 136

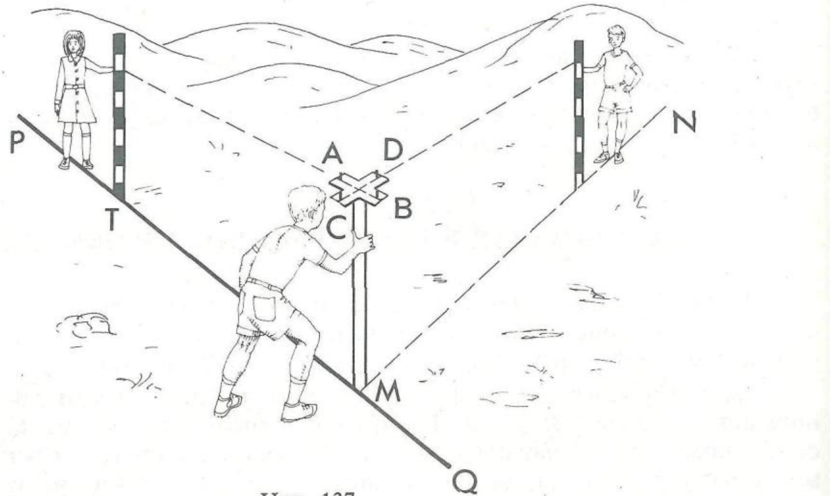
Кога стативот на екерот ќе го забодиме во некоја точка на теренот, во вертикална положба, рамнината на крстот ќе заземе хоризонтална положба (Зошто?).

Со помош на екер можат да се решат следниве задачи:

**Задача 1.** Да се трасира нормала кон една однапред трасирана права $PQ$ во една нејзина точка $M$ (црт. 137.)!

Во некоја точка $T$, што лежи на трасираната права $PQ$, забодуваме една трасирка во вертикална положба, а во точката $M$ го забодуваме екерот, исто така, во вертикална положба. Потоа, еден ученик го врти екерот и визира долж едната летва, сè додека клинчињата $A$ и $B$ на него не ја закријат поставената трасирка во точката $T$. Кога тоа е постигнато го прицврстуваме екерот за стативот. Потоа, ученикот визира долж другата летва на екерот, а другиот ученик поставува друга трасирка во таква точка $N$ на теренот, при што таа да лежи на правецот што го одредуваат другите две клинчиња $C$ и $D$ на екерот низ кои визира сега првиот ученик (црт. 137.).

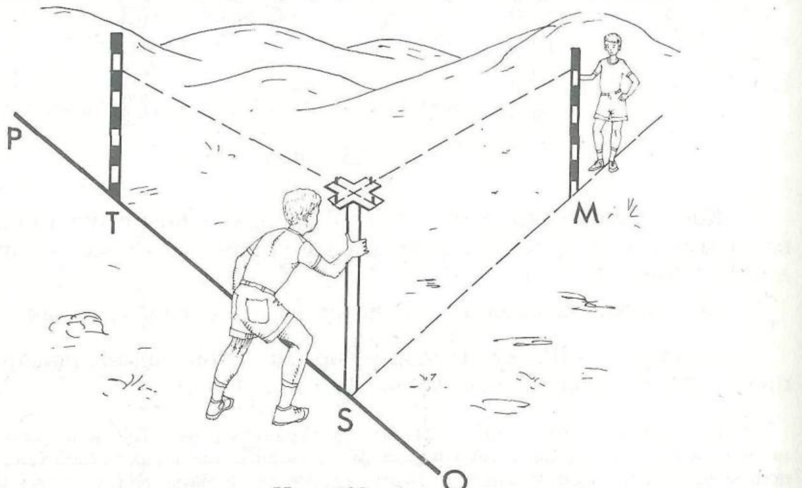
На крајот ја трасираме правата $MN$ која минува низ така одредената точка $N$ и дадената точка $M$, во која е забоден екерот. Таа права $MN$ е нормална на правата $PQ$, што требаше да ја трасираме.




Црт. 137

**Задача 2.** Низ дадена точка $M$ на теренот да се трасира права, која е нормална на друга трасирана права $PQ$ (црт. 138.).

Еден ученик забодува трасирка во точката $M$, а друг ученик го поставува екерот во некоја точка на правата $PQ$. Ученикот ја насочува едната летвичка на екерот по трасираната права $PQ$. (Објасни како!). Потоа, тој визира долж другата летва на екерот и го мести екерот по правата $PQ$, сè додека двете клинчиња на летвата, низ кои визира, не ја закријат трасирката што е забодена во точката $M$ (црт. 138.). Кога тоа е постигнато, точката $S$ во која стои екерот, ученикот ја означува со едно колче или трасирка.




Црт. 138

На крајот ја трасираме правата $SM$, која минува низ така одредената точка $S$ и дадената точка $M$. Таа права е бараната нормала, што требаше да ја трасираме низ точката $M$ кон правата $PQ$.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Како се обележуваат точките на теренот?

**2.** Што значи да се трасира една права на теренот? Како тоа го постигнуваме?

**3.** Кои направи се потребни за трасирање на права на теренот?

**4.** Како постапуваме при садењето дрвја во прави редови?

**5.** На израмнет терен трасирај некоја отсечка $AB$, а потоа продолжи ја во двете насоки!

**6.** Како ги мериме растојанијата на теренот? Со кои направи го вршиме тоа?

**7.** Со помош на јаже или челична лента измери ја должината и ширината на училишната зграда!

**8.** Со полски шестар измери ја должината на вашиот училишен двор!

**9.** На некој рамен терен обележи три точки $A$, $B$ и $C$, кои не лежат на една права, а потоа трасирај ги и измери ги должините на отсечките $AB$, $BC$ и $AC$!

**10.** Трасирај една права и од една нејзина точка одмери 64 $m$!

**11.** Трасирај една права и на неа обележи една точка $T$. Низ точката $T$ потоа трасирај друга права, која ќе биде нормална на првата!

**12.** Трасирај една права на теренот и обележи некоја точка $P$, што лежи надвор од неа. Низ точката $P$ потоа трасирај друга права која ќе биде нормална на првата права!

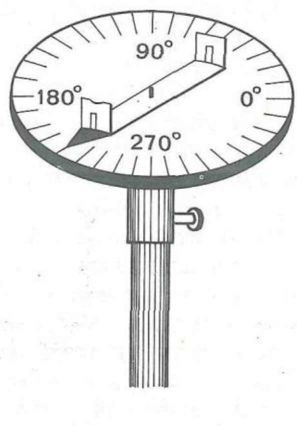
## § 30. ПОЛСКИ АГЛОМЕР. МЕРЕЊЕ АГЛИ ВО ПРИРОДАТА

**1.** При теренското мерење, често се бара да се измери овој или оној агол. Мерењето на аглите на теренот, чии краци се хоризонтални, го вршиме со специјална направа, што се вика *полски агломер*.

Полскиот агломер се состои од еден *кружен диск* и една подвижна прачка (шина), таканаречена *алхидада*. Кружниот диск на периферијата е изделен на 360°, на која скала можат да се разликуваат барем четвртинките од аголниот степен (15′, 30′, 45′). Таа скала што се наоѓа на кружниот диск се вика *лимбус* (црт. 139.). Во центарот на кружниот диск е прицврстена алхидадата, која може да се движи околу тој центар, а на краиштата завршува со стрелки.

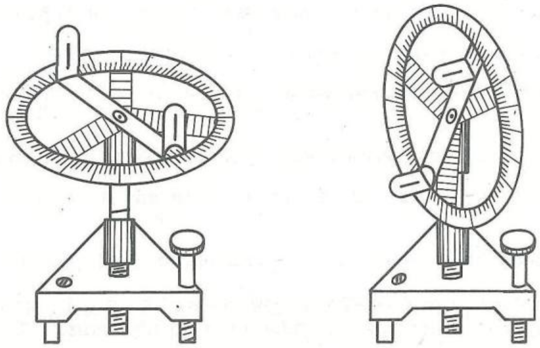
На алхидадата се наоѓаат два процепа (отвори), низ кои се врши визирањето во одредена насока.

Кружниот диск на долната страна на центарот е прицврстен на еден дрвен или друг статив, кој е нормален на рамнината на дискот (црт. 139.).



Црт. 139

На црт. 140, се гледа фабрички изработен полски агломер. Кај него кружниот диск може да се прицврсти на оската на стативот во хоризонтална или вертикална положба. Според тоа, со ваков полски агломер можат да се мерат аглите во природата и во хоризонтална и во вертикална рамнина.



Црт. 140

**2.** Да видиме сега како, со помош на полскиот агломер, ги мериме аглите на теренот, чии краци се хоризонтални.

Треба да се измери аголот $\sphericalangle ABC$ (црт. 141).!

Во темето $B$ на тој агол цврсто во земја го забодуваме полскиот агломер. При тоа, треба да внимаваме кружниот диск да биде во хоризонтална положба, тоа можеме да го провериме со помош на либела. На двата крака од аголот избираме по една точка $M$ и $N$, во кои поставуваме ученици да држат по една трасирка во вертикална положба. Кај полскиот агломер се поставуваат други два ученика, од кои едниот го изведува мерењето, а другиот ги бележи резултатите од мерењето.

Ученикот што го врши мерењето, со движење на алхидата ја доведува истата во таква положба, што низ нејзините два процепа да ја види прво едната трасирка, на пример, таа во точката $M$. Тогаш велиме дека ученикот преку процепите на алхидата *визирал* во правец на трасирката, што е држана во точката $M$ на кракот $AB$.

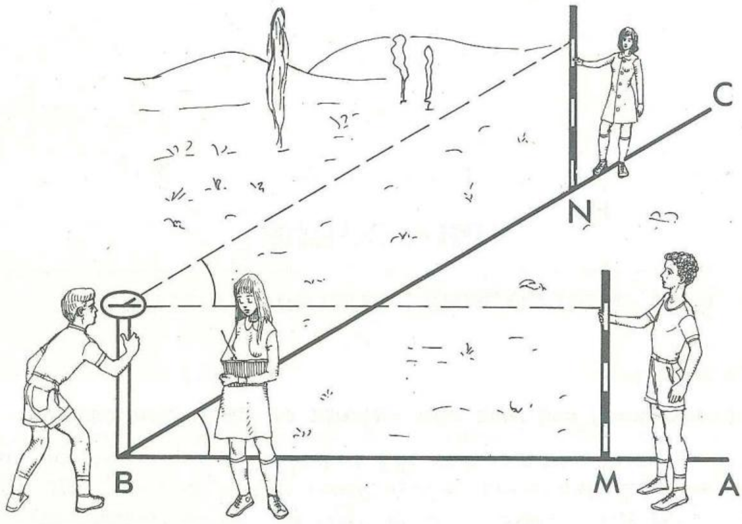
Потоа, ученикот што го врши мерењето на лимбусот го отчитува бројот на степените и деловите од нив, каде што застанала стрелката на алхидадата.

Резултатот од отчитувањето го забележува другиот ученик, што води дневник. Потоа, првиот ученик полека ја приближува алхидадата, додека низ нејзините процепи не ја согледа другата трасирка, што е држана во точката $N$. Кога визирањето во правец на трасирката $N$ е завршено, ученикот го отчитува на лимбусот бројот на степените, каде што застанала стрелката на алхидадата. Другиот ученик и тој резултат од отчитувањето го запишува во дневникот.

Сега сметаме: ако резултатот од првото отчитување, на пример, бил 34°, а резултатот од второто отчитување бил 82° тогаш разликата на резултатите од тие две отчитувања, т. е. $82° - 34° = 48°$, ќе ни ја даде големината на мерениот агол.

Значи, имаме $\widehat{ABC} = 48°$

Заради контрола, мерењето на аголот $\sphericalangle ABC$ го повторуваме уште еднаш. Ако при второто мерење добиеме ист мерен број за аголот $\sphericalangle ABC$, тогаш велиме дека мерењето е извршено правилно. Ако при второто мерење не добиеме ист мерен број тогаш мерењето го изведуваме по трет и четврти пат, а со цел да се пронајде причината за направената грешка.




Црт. 141

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Што е тоа полски агломер и зошто ни служи?

**2.** Кои се главните составни делови на полскиот агломер? Обиди се самиот да направиш полски агломер!

**3.** Како се врши мерењето на хоризонтални агли на теренот?

ГЛАВА VI

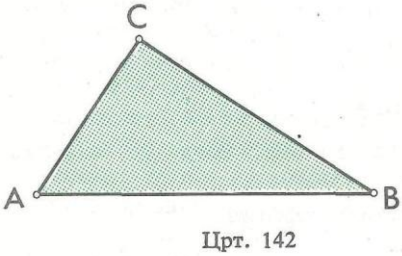
# ТРИАГОЛНИК

## §. 31. ТРИАГОЛНИК. ОСНОВНИ ЕЛЕМЕНТИ

Да се потсетиме:

**Многуаголник, кој има три страни се вика триаголник.**

Земете (уочете) кои да било три точки $A$, $B$ и $C$, кои не припаѓаат на иста права. Тие три точки определуваат и три отсечки $AB$, $BC$ и $AC$ (црт. 142.). Така нацртаните отсечки $AB$, $BC$ и $AC$ образуваат една затворена искршена линија, која пак, ограничува еден одреден дел од рамнината, на која припаѓаат точките $A$, $B$ и $C$.




Црт. 142

Геометриската фигура, која се состои од затворената искршена линија $ABC$ и делот од рамнината што е ограничен со неа, претставува триаголник (црт. 142.).

Точките $A$, $B$ и $C$ се викаат *темиња* на триаголникот, а отсечките $AB$, $BC$ и $AC$ (што се определени со темињата), се викаат *страни* на триаголникот.

Кои да било две полуправи, што содржат по една страна на триаголникот, при секое негово теме образуваат по еден конвексен агол. Конвексниот агол при секое теме на триаголникот се вика *внатрешен агол*, или кратко само *агол* на триаголникот.

Секој триаголник има три страни и три (внатрешни) агли. Тоа се *основни екементи* на триаголникот.

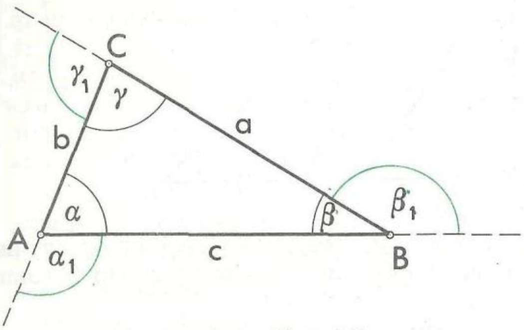
Аглите, што се напоредни со внатрешните агли на триаголникот, се викаат *надворешни агли* на триаголникот.

На црт. 143 внатрешните агли на триаголникот $ABC$ се означени со $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; а надворешните агли со $\alpha_1$; $\beta_1$; $\gamma_1$.

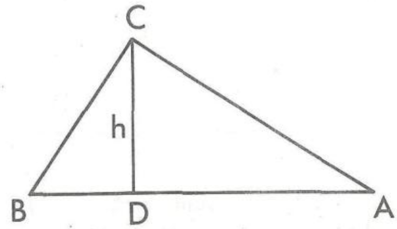
Триаголниците ги обележуваме со три големи печатни латински букви, што ги ставаме по една при секое теме; а при запишувањето зборот „триаголник" се заменува со знакот „$\Delta$". На пример: $\triangle ABC$.

Ако триаголникот е означен со буквите $A$, $B$ и $C$, тогаш аголот при темето $A$, обично, го означуваме со $\alpha$, аголот при темето $B$ — со $\beta$, а аголот при темето $C$ — со $\gamma$.

Во триаголникот $ABC$ страната $BC$ (што лежи спроти темето $A$) се вики *спротивна* на темето $A$, страната $BC$ — спротивна на темето $B$, а страната $AB$ — спротивна на темето $C$.




Црт. 143




Црт. 144

Должините на страните на триаголникот $ABC$: $BC$, $AC$ и $AB$ ги означуваме соодветно со буквите $a$, $b$ и $c$, т. е.

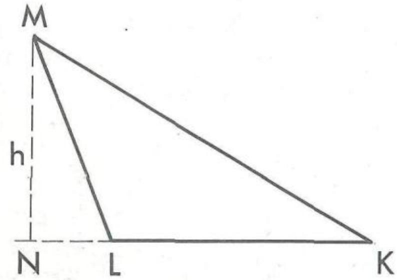
$$\overline{BC}=a; \quad \overline{AC}=b; \quad \overline{AB}=c,$$

а заради краткост на искажувањето, должините на страните на триаголникот $a$, $b$ и $c$ често ги викаме и само страни на тој триаголник.

Страните на триаголникот можат да бидат зададени и геометриски со три отсечки, со должини $a$, $b$ и $c$.

Нацртајте еден триаголник $ABC$ (црт. 144.). Од едно негово теме, на пример од темето $C$, да повлечеме нормала на спротивната страна $AB$. Отсечката од таа нормала, заклучена меѓу темето $C$ и подножјето на нормалата, се вика *висина* на триаголникот (отсечката $CD$ на црт. 144.).

Висини во триаголникот $ABC$ можат да се повлечат и од другите две темиња $A$ и $B$ кон спротивните страни $BC$ и $AC$, или кон нивните продолженија. На пример, во триаголникот $KLM$, висината од темето $M$ е спуштена кон продолжението на спротивната страна $KL$ (црт. 145.).



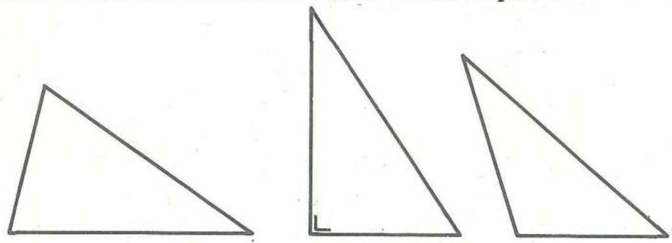

Црт. 145

Должината на висината на триаголникот, обично, ја означуваме со буквата $h$, а во зависност од тоа кон која страна на триаголникот е повлечена, кон буквата $h$ ја допишуваме една од буквите $a$, $b$ или $c$ (вака: $h_a$, $h_b$ или $h_c$).

## § 32. ВИДОВИ ТРИАГОЛНИЦИ

Има најразлични триаголници. Нив можеме да ги делиме на видови во зависност од нивните страни и агли.

Да видиме прво каква поделба можеме да извршиме на множеството на сите триаголници, во зависност од нивните страни.

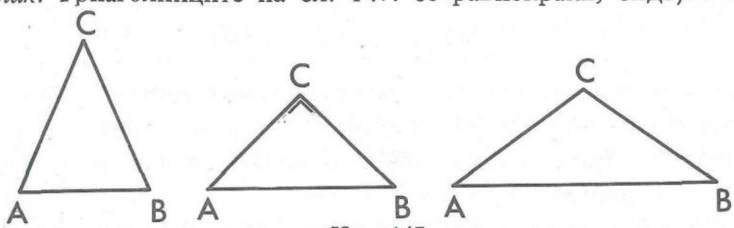


Црт. 146

Знаеме дека, секој триаголник има три страни. Може да се случи некои од страните на триаголникот да се складни, или ниеден пар негови страни да нѐ се складни.

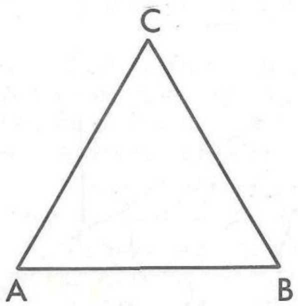
Триаголник на кој ниеден пар страни не се складни, се вика *разностран триаголник*. Триаголниците на црт. 146. се разнострани. Уверете се во тоа!

Триаголник, на кој барем две страни се складни се вика *равнокрак триаголник*. Триаголниците на сл. 147. се равнокраки, бидејќи $AC \cong BC$.




Црт. 147

Помеѓу равнокраките триаголници има и такви на кои сите три страни се складни. Триаголник, на кој трите страни се складни, се вика *равностран триаголник* (црт. 148.).

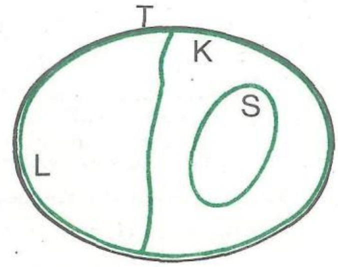



Црт. 148

Складните страни на равнокракиот триаголник, што не е равностран, се викаат *краци*, а третата страна е *основа* на триаголникот. Покажете кои страни на секој равнокрак триаголник на црт. 147. се краци, а која страна е основа.

Ако множеството на сите триаголници го означиме со буквата $T$, множеството на сите разнострани триаголници со $L$, множеството на сите равнокраки триаголници со $K$, а множеството на сите равнострани триаголници со $S$, тогаш поделбата на триаголниците според страните, можеме да ја претставиме со дијаграмот како на црт. 149. Од дијаграмот гледаме дека: $L \cup K = T$; $L \cap K = \varnothing$ и $S \subset K$.

Тоа значи дека множествата $L$ и $K$ се дисјунктни множества т.е. секој триаголник е или разностран или равнокрак; а секој равностран триаголник е и равнокрак.




Црт. 149

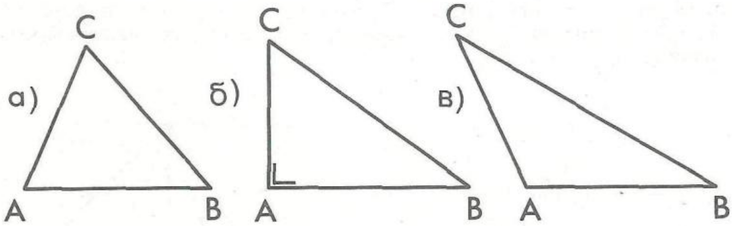
Да видиме сега каква поделба на триаголниците можеме да извршиме според нивните агли.

Секој триаголник има три (внатрешни) агли. Очигледно е дека и трите агли на триаголникот се конвексни (остри, прави или тапи). Покасно ќе видиме дека триаголникот може да има најмногу еден прав или еден тап агол, додека другите два агла секогаш се остри.

Во зависност од тоа дали еден од аглите на триаголникот е прав, или тап, или трите агли се остри; триаголниците ги делиме на остроаголни, правоаголни и тапоаголни.

Триаголник, на кој трите агли се остри, се вика *острoаголен триаголник* (црт. 150. а).

Триаголник, на кој еден од аглите е прав, а другите два се остри, се вика *правоаголен триаголник* (црт. 150. б).




Црт. 150

Страните на правоаголниот триаголник имаат и посебни имиња. Страната, што лежи спроти правиот агол се вика *хипотенуза*; а другите две страни — *катети*.

Правиот агол во правоаголниот триаголник, обично, го означуваме со знакот ∟.

Триаголник на кој еден од аглите е тап, а другите два се остри, се вика *тапоаголен триаголник* (црт. 150. в).

Очигледно е дека: секој триаголник е или остроаголен, или правоаголен или тапоаголен.

Од црт. 146. и 147. се гледа дека разностраните и равнокраките триаголници можат да бидат остроаголни, правоаголни или тапоаголни: но равностраните триаголници се само остроаголни (црт. 148.).

Какво множество е пресекот од множеството на сите равнокраки триаголници и множеството на сите правоаголни триаоголници?

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Што е триаголник? Нацртај два триаголника и означи ги!

**2.** Што се темиња, а што страни на триаголникот?

**3.** Што се внатрешни агли, а што надворешни агли на триаголникот?

**4.** Нацртај триаголник $ABC$ и означи му ги основните елементи, потоа покриј го цртежот со рака и одговори на следниве прашања: а) спроти која страна лежи аголот $\gamma$?, б) кое теме лежи спроти страната $c$?, в) кој агол лежи спроти страната $BC$?, г) со кои темиња е ограничена страната $b$?

**5.** Колку триаголници гледаш на црт. 151.? Запиши кои се тие!

**6.** Како се делат триаголниците според страните, а како според аглите?

**7.** Нацртај по еден од трите вида триаголници според: а) аглите; б) страните; и исечи ги!

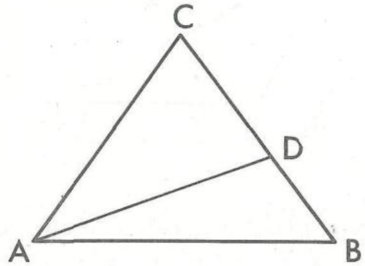
**8.** Нацртај триаголник $ABC$, измери му ги страните и аглите, а потоа запиши кои елементи се поголеми, а кои помали!

**9.** Нацртај еден остроаголен триаголник и повлечи ги трите негови висини! Што е висина на триаголникот?

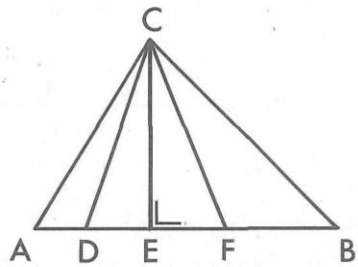
**10.** Нацртај по еден правоаголен и тапоаголен триаголник, означи ги и повлечи ги нивните висини!

**11.** Колку триаголници гледаш на црт. 152 и кој од каков вид е според страните и аглите? Што претставува отсечката $CE$ за секој од тие триаголници?

**12.** Нартај по еден остар, прав и тап агол. По краците на секој од тие агли, почнувајќи од темето, пренеси складни отсечки и соедини ги така добиените точки! Какви триаголници се добиваат?




Црт. 151




Црт. 152

**13.** Нацртај правоаголен триаголник со катети долги 3 *cm* и 4 *cm*!

**14.** Нацртај рамнокрак правоаголен триаголник со катети долги по 5 *cm*!

**15.** Конструирај рамностран триаголник, чија страна е долга: 3 *cm*.

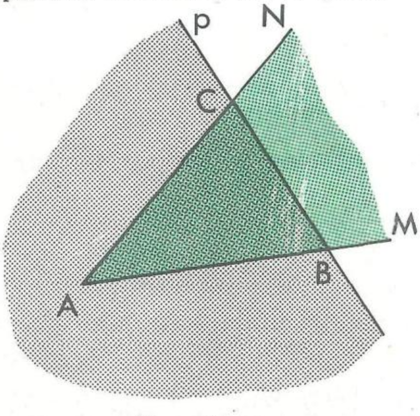
**16.** Нацртај рамнокрак тапоаголен триаголник, чијшто тап агол има 123°, а крацитие му се долги по 4 *cm*!

**17.** Нацртај одоко со слободна рака по еден: рамнокрак и рамностран триаголник. Испитај со шестар со колкава точност си ги нацртал тие триаголници! Истото повтори го уште два пати!

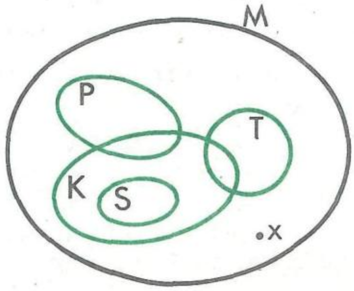
**18.** Нацртај кружница со центар во точката $O$ и радиус 3 *cm*. Потоа од некоја произволна точка $A$ на кружницата, пренеси го радиусот еднoподруго, како тетива, по кружницата. Така добиените точки $A, B, C, D, E$ и $F$ соедини ги со центарот $O$, а потоа соедини ги еднoподруго и една со друга. Какви триаголници се добиваат и колку?

**19.** На црт. 153. триаголникот $ABC$ претставува пресек од аголот $MAN$ и полурамнината $pA$. Дали секогаш пресекот од еден агол и една полурамнина претставува триаголник?

**20.** Покажи дека триаголникот $ABC$ може да се претстави и како пресек на три полурамнини! Покажи го тоа со цртеж!




Црт. 153




Црт. 154

**21.** На дијаграмот на црт. 154. со буквата $M$ означено е множеството на сите триаголници, со $P$ — множеството на сите правоаголни триаголници, со $T$ множеството на сите тапоаголни триаголници, со $K$ — множеството на сите рамнокраки триаголници, а со $S$ — множеството на сите рамнострани триаголници. Разгледај го тој дијаграм и објасни: а) какви множества од триаголници претставуваат пресеците: а) $P \cap K$ и $T \cap K$; б) зошто е: $P \cap S = \varnothing$; $T \cap S = \varnothing$; $S \subset K$; в) каков триаголник е елементот означен со $x$?

**22.** Увери се дека висините на рамнокракиот триаголник, што се повлечени од темињата при основата кон краците, се складни!

**23.** Поделбата на триаголниците според аглите претстави ја со соодветен дијаграм!

## § 33. РЕЛАЦИИ МЕЃУ СТРАНИТЕ НА ТРИАГОЛНИКОТ

На прв поглед изгледа дека од кои да било три отсечки секогаш може да се образува триаголник. Ќе покажеме дека тоа секогаш не е можно. На пример:

Да земеме три стапчиња со должина $a = 6$ $cm$, $b = 3$ $cm$ и $c = 2$ $cm$.

Ако од нив се обидеме да образуваме триаголник, ќе добиеме фигура како на црт. 155., од која гледаме дека стапчињата $b$ и $c$ не можат да се составаат и да го образуваат триаголникот. Значи, од тие три стапчиња (отсечки) не може да се образува триаголник. Тоа ни покажува дека помеѓу страните на триаголникот постојат некои определени релации (соодноси).


Црт. 155

Нацртајте еден триаголник и измерете му ги страните! Страните на триаголникот $ABC$ на црт. 156. се измерени: $a = 3$ $cm$, $b = 6$ $cm$, $c = 7$ $cm$.

Ако ги собереме должините на две по две страни од тој триаголник:

$$a + b = 3\ cm + 6\ cm = 9\ cm$$
$$a + c = 3\ cm + 7\ cm = 10\ cm$$
$$b + c = 6\ cm + 7\ cm = 13\ cm$$

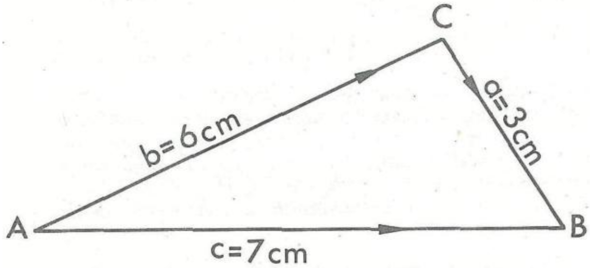
и ја споредиме должината на секоја страна со збирот од должините на другите две страни, ќе утврдиме дека:

**Секоја страна на триаголникот е помала од збирот на другите две страни,** т. е.

$$a < b + c; \quad b < a + c \quad \text{и} \quad c < a + b$$

До истиот заклучок можеме да дојдеме и на следниов начин:

Знаеме дека најкраток пат помеѓу две точки е праволинискиот пат, т. е. патот по отсечката што ги сврзува тие точки. Според тоа, преминувајќи од точката $A$ во точката $B$ по отсечката $AB$, изминуваме пократок пат, отколку ако преминуваме од точката $A$ преку точката $C$ до точката $B$ (црт. 156.), бидејќи тогаш се движиме по отворената искршена линија $AC + CB$.




Црт. 156

Оттука следува дека:

$$\overline{AB} < \overline{AC} + \overline{CB} \quad \text{или} \quad c < b + a.$$

На сличен начин доаѓаме до заклучок дека е и: $b < c + a$ и $a < b + c$.

Ова е во согласност и со заклучокот во § 10, а имено дека: *должината на секоја отворена искршена линија е поголема од растојанието меѓу нејзините крајни точки.*

Ако сега ги најдеме разликите од должините на две по две од страните на триаголникот $ABC$ (црт. 156.):

$$c = 7\ cm; \quad b - a = 6\ cm - 3\ cm = 3\ cm.$$
$$b = 6\ cm; \quad c - a = 7\ cm - 3\ cm = 4\ cm$$
$$a = 3\ cm; \quad c - b = 7\ cm - 6\ cm = 1\ cm,$$

а потоа ја споредиме должината на секоја страна на триаголникот со разликата од должините на другите две страни, ќе заклучиме дека:

**Секоја страна на триаголникот е поголема од разликата на другите две страни,** т. е.

$$c > b - a; \quad b > c - a \quad \text{и} \quad a > c - b.$$

Горниве две утврдени релации меѓу страните на триаголникот, заедно можат да се искажат и вака:

**Секоја страна на триаголникот е помала од збирот на другите две страни, а поголема е од нивната разлика,** т. е.

$$c - b < a < c + b$$

**Задача:** Дадени се должините на две страни на триаголникот: $a = 8$ *cm* и $b = 5$ *cm*. Што може да се каже за должината на третата страна?

Бидејќи е $a + b = 13$ *cm*, а $a - b = 3$ *cm*, тогаш согласно со горниве релации, должината на третата страна $c$ мора да биде помала од 13 *cm*, а поголема од 3 *cm*, т. е.

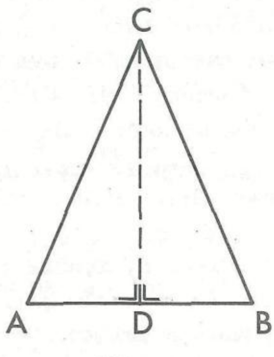
$$3\ cm < c < 13\ cm.$$

## § 34. РЕЛАЦИИ МЕЃУ СТРАНИТЕ И АГЛИТЕ НА ТРИАГОЛНИКОТ

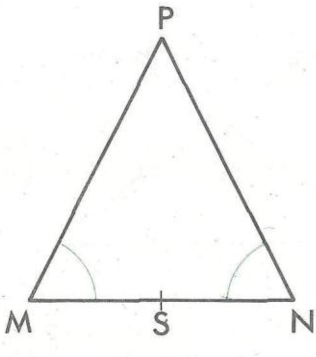
Нацртајте еден равнокрак триаголник $ABC$ ($AC \cong BC$) (црт. 157.)!

Што можете да тврдите за аглите $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ што лежат спроти складните страни $AC$ и $BC$?

Ако равнокракиот триаголник $ABC$ го исечеме и превиткаме по висината $CD$ (што е повлечена од темето $C$ кон основата $AB$), тогаш страните $AC$ и $BC$ ќе се совпаднат (бидејќи се складни). Со тоа ќе се совпаднат и темињата $A$ и $B$. Ќе се совпаднат, исто така, и правите агли при точката $D$ (Зошто?). Очигледно е дека во тој случај ќе се совпаднат и отсечките $AD$ и $BD$, а со тоа и аглите $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$.




Црт. 157




Црт. 158

Значи, аглите $\sphericalangle A$ и $\sphericalangle B$ се складни, т. е. $\sphericalangle A \cong \sphericalangle B$.

Според тоа, **спроти складни страни во триаголникот лежат складни агли.**

Сега нацртајте еден триаголник $MNP$ кој има два складни (остри) агли ($\sphericalangle M \cong \sphericalangle N$). Тоа ќе го направите кога во крајните точки на една произволна отсечка $MN$ ќе конструирате складни агли $\sphericalangle M$ и $\sphericalangle N$. (црт. 158.). Што можете да тврдите за спротивните страни $MP$ и $NP$ во тој триаголник?

Ако триаголникот $MNP$ го исечеме и превиткаме околу средишната точка $S$ на страната $MN$, така што темињата $M$ и $N$ да се совпаднат, тогаш ќе се совпаднат и другите краци $MP$ и $NP$ на аглите $\sphericalangle M$ и $\sphericalangle N$ (Зошто?)

Значи, страните $MP$ и $NP$ се складни, т. е. $MP \cong NP$.

Според тоа, **спроти складни агли во триаголникот лежат складни страни.**

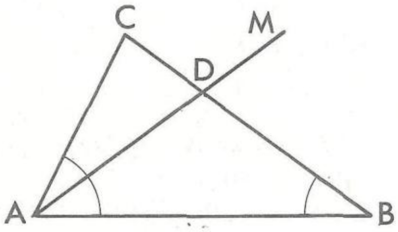
За ова тврдење велиме дека е *обратно* на првото тврдење; а за првото дека е обратно на второто тврдење. Тие две тврдења заедно ги искажуваме вака:

**Спроти складни страни во триаголникот лежат складни агли, и обратно, спроти складни агли лежат складни страни.**

Нацртајте $\triangle ABC$, во кој $\sphericalangle A > \sphericalangle B$ (црт. 159.)!

Да видиме каква релација постои меѓу спротивните страни $BC$ и $AC$ во тој триаголник.

Ако од темето $A$ повлечеме полуправа $AM$, така што $\sphericalangle BAM \cong \cong \sphericalangle ABC$, тогаш таа полуправа ќе припаѓа на аголот $\sphericalangle A$ и ќе ја пресече страната $BC$ во некоја внатрешна точка $D$ (Зошто?) (црт. 159.).




Црт. 159

Врз основа на горниов заклучок: Од $\sphericalangle BAM \cong \sphericalangle ABC$ следува дека $AD \cong BD$. Значи, триаголникот $ABD$ е равнокрак.

Од триаголникот $ADC$, имаме: $AD + DC > AC$, а бидејќи е $AD + DC \cong BD + DC \cong BC$; тоа ќе биде и $BC > AC$,

Според тоа, **спроти поголем агол во триаголникот лежи и поголема страна,** т. е.

Ако е $\sphericalangle A > \sphericalangle B$, тогаш е и $BC > AC$

Може да се покаже дека важи и обратното тврдење, а имено:

**Спроти поголема страна во триаголникот лежи и поголем агол.**

Последниве два заклучока, заедно можат да се искажат и вака:

**Спроти поголема страна во триаголникот лежи поголем агол, и обратно, спроти поголем агол лежи и поголема страна.**

Во правоаголниот триаголник најголема страна е хипотенузата (Зошто?).

А во тапоаголниот триаголник најголема е страната што лежи спроти тапиот агол, бидејќи тој агол е најголем агол во тој триаголник.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Исечи од жица три парчиња, со должина: а) 5 *cm*, 8 *cm*, 9 *cm*; б) 4 *cm*, 5 *cm*, 8 *cm*; в) 3 *cm*, 4 *cm*, 8 *cm*; г) 5 *cm*, 2 *cm*, 7 *cm*. Потоа, испробај дали од нив може да се составаат триаголници!

**2.** Нацртај три триаголника, измери ги страните, а потоа: а) спореди го збирот, б) спореди ја разликата на кои да било две страни со третата страна! Што утврдуваш при тоа?

**3.** Кој услов треба да го исполнуваат три отсечки, за да може од нив да се состави триаголник?

**4.** Може ли да се нацрта равнокрак триаголник, чии страни се долги: а) $\overline{AB} = 5$ *cm*, $\overline{AC} = \overline{BC} = 4$ *cm*; б) $\overline{AB} = 7$ *cm*, $\overline{AC} = \overline{BC} = 3$ *cm*? Зошто?

**5.** Две страни на еден равнокрак триаголник се долги: а) 4 *cm* и 9 *cm*, б) 8 *cm* и 5 *cm*, в) 10 *cm* и 5 *cm*. Која од нив е основа, а која крак? Зошто?

**6.** Две страни на равнокракиот триаголник $ABC$ имаат должина: а) 2 *cm* и 5 *cm*; б) 4 *cm* и 7 *cm*; в) 3 *cm* и 6 *cm*. Може ли да се утврди должината на основата и краците на тој триаголник?

**7.** Нацртај еден триаголник, измери му ги страните и аглите, а потоа спореди го аголот, што лежи спроти најголемата страна со другите два агла на тој триаголник! Што забележуваш?

**8.** Нацртај еден равнокрак триаголник, исечи го, а потоа превиткај го така, што краците да му се совпаднат! Што забележуваш?

**9.** Нацртај неколку рамнострани триаголници со различни страни и измери им ги аглите! Што забележуваш?

**10.** Која страна во правоаголниот и тапоаголниот триаголник е најголема? Зошто?

**11.** Нацртај неколку равнокраки триаголници со складни основи, а различни краци! Во кој од тие триаголници аголот што лежи спроти основата е најголем, а во кој најмал?

**12.** Нацртај неколку равнокраки триаголници со складни краци, а различни основи! Во кој од тие триаголници, аглите што лежат на основата се најголеми, а во кој најмали?

**13.** Должините на страните на еден триаголник се: а) $a = 8$ *cm*, $b = 7$ *cm*, $c = 11$ *cm*; б) $a = 9$ *cm*, $b = 5$ *cm*, $c = 6$ *cm*; в) $a = 3$ *cm*, $b = 7$ *cm*, $c = 5$ *cm*. Кој агол во секој од нив е најголем, а кој најмал?

**14.** Аглите во еден триаголник изнесуваат а) $\alpha = 72°$, $\beta = 58°$, $\gamma = 50°$; б) $\alpha = 63°$, $\beta = 90°$, $\gamma = 27°$; в) $\alpha = 48°$, $\beta = 34°$, $\gamma = 98°$. Која страна е најголема, а која најмала?

**15.** Основата на еден равнокрак триаголник е 5 *cm*, а кракот 7 *cm*. Кој агол е поголем: аголот при основата или аголот при врвот?

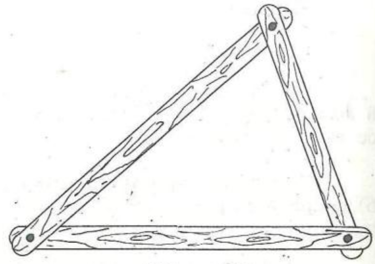
**16.** Во триаголникот $ABC$ е $a > b > c$. а) Може ли аголот $\beta$ да биде тап агол?, б) Може ли аголот $\gamma$ да биде прав агол?

**17.** Може ли аголот што лежи спроти најмалата страна во триаголникот да биде: а) прав, б) тап?

**18.** Каков е триаголникот $ABC$ ако сите негови агли се складни?

**19.** Земи три летвички, различни по должина, па прицврсти ги една за друга на нивните краишта со клинчиња, како на црт. 160. Дали добиената рамка на триаголникот ќе биде цврста или ќе може да ја менува својата форма, т. е. ќе можат ли аглите на триаголникот да се менуваат, а при тоа страните да му останат непроменети?

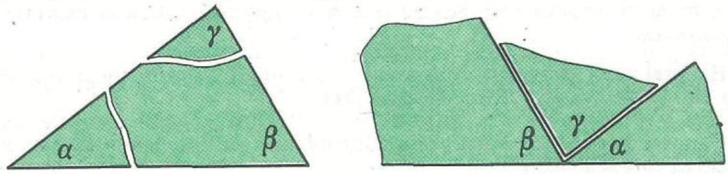
**20.** Две страни на еден триаголник се долги: а) 2 *cm* и 4 *cm*; б) 1 *cm* и 5 *cm*. Одреди колкава може да биде должината на третата страна, ако се знае дека нејзиниот мерен број е природен број?


Црт. 160

## §. 35. ЗБИР НА ВНАТРЕШНИТЕ АГЛИ НА ТРИАГОЛНИКОТ

Нацртајте еден произволен разностран триаголник и исечете го! Потоа, отсечете му ги аглите $\alpha$ и $\gamma$, па аголот $\gamma$ надоврзете го на аголот $\beta$; а аголот $\alpha$ надоврзете го на аголот $\gamma$, како на црт. 161.

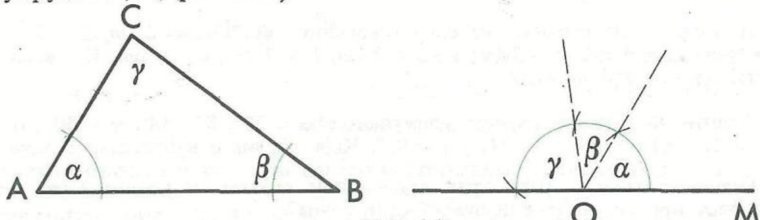
Ќе забележите дека збирот на трите внатрешни агли на триаголникот претставува рамен агол (црт. 161.).



Црт. 161

Збирот на внатрешните агли на кој да било триаголник може да се одреди и конструктивно.

За таа цел ќе нацртаме една полуправа *OM*. Потоа, со произволен, но ист отвор на шестарот ќе нацртаме кружни лаци од темето на секој агол на триаголникот и од почетокот на полуправата *OM*, кој е поголем од полукружница (црт. 162.).



Црт. 162

Од полуправата *OM* потоа ги пренесуваме со помош на шестар еден по друг трите внатрешни агли на триаголникот $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$, за да го добиеме нивниот збир. Ќе видиме дека: збирот на внатрешните агли $\alpha$, $\beta$ и $\gamma$ е рамен агол. Според тоа:

**Збирот на внатрешните агли на секој триаголник е рамен агол,** т. е. тој е еднаков на 180°.

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°.$$

Врз основа на оваа зависност меѓу внатрешните агли на триаголникот, следува дека:

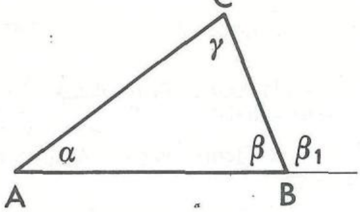
1°. **Триаголникот може да има најмногу еден прав или еден тап внатрешен агол.** (Зошто?);

2°. **Збирот на острите агли во секој правоаголен триаголник изнесува 90°.** (Зошто?);

3°. **Секој внатрешен агол на рамностраниот триаголник има по 60°.** (Зошто?).

## § 36. ЗБИР НА НАДВОРЕШНИТЕ АГЛИ НА ТРИАГОЛНИКОТ

Рековме дека: аглите, што се напоредни на внатрешните агли на триаголникот, се викаат надворешни агли на триаголникот (црт. 143.)



Црт. 163

Нацртајте еден произволен триаголник $ABC$ и продолжете ја страната $AB$ преку темето $B$ (црт. 163.). Продолжението на страната $AB$ со страната $BC$ ќе го образува надворедниот агол $\beta_1$ што е напореден на внатрешниот агол $\beta$ на дадениот триаголник $ABC$.

Ако ги разгледаме цртежите 161. и 163. заедно, ќе забележиме дека: $\beta + (\gamma + \alpha) = 180°$, а од црт. 163. гледаме дека: $\beta + \beta_1 = 180°$.

Оттука уочуваме дека, надворешниот агол $\beta_1$ изнесува колку збирот на аглите $\alpha$ и $\gamma$, т. е. $\beta_1 = \alpha + \gamma$.

До сличен заклучок ќе дојдеме и по однос на надворешните агли $\alpha_1$ и $\gamma_1$. Според тоа:

**Надворешниот агол на триаголникот е еднаков (односно е складен) на збирот на двата внатрешни несоседни нему агли,** т. е.

$$\alpha_1 = \beta + \gamma; \quad \beta_1 = \alpha + \gamma; \quad \gamma_1 = \alpha + \beta.$$

Штом секој надворешен агол на триаголникот е еднаков на збирот на два внатрешни (несоседни) агли; тогаш очигледно е дека:

**Надворешниот агол на триаголникот секогаш е поголем од кој да било внатрешен несоседен со него агол.**

Значи, од релацијата $\beta_1 = \alpha + \gamma$ следуваат и релациите:

$$\beta_1 > \alpha \quad \text{и} \quad \beta_1 > \gamma.$$

Да видиме сега што можеме да тврдиме за збирот на надворешните агли на триаголникот. Тој ќе биде:

$$\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = (\beta + \gamma) + (\alpha + \gamma) + (\alpha + \beta) = \beta + \gamma + \alpha + \gamma + \alpha + \beta =$$
$$= (\alpha + \beta + \gamma) + (\alpha + \beta + \gamma) = 180° + 180° = 360°.$$

Според тоа:

**Збирот на надворешните агли на триаголникот еднаков е на 360°**, т. е.

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=360°.$$

До истиот заклучок можеме да дојдеме и на следниов начин:

Бидејќи напоредните агли се суплементни, тоа од црт. 143. имаме:

$$\alpha+\alpha_1=180°;\quad \beta+\beta_1=180°;\quad \gamma+\gamma_1=180°,$$

па збирот од сите внатрешни и надворешни агли на триаголникот ќе биде:

$$\alpha+\beta+\gamma+\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=3\cdot 180°.$$

Но, бидејќи е $\alpha+\beta+\gamma=180°$, тоа збирот само на надворешните агли на триаголникот ќе биде: $\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=540°-180°$, т. е.

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=360°.$$

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Ако еден од аглите на триаголникот е: а) прав, б) тап, какви се другите два негови агла?

**2.** Зошто аглите при основата на кој да било рамнокрак триаголник секогаш се остри?

**3.** Зошто аглите на рамностраниот триаголник изнесуваат секој по 60°?

**4.** Одреди го аголот $\gamma$, ако: а) $\alpha=56°$ и $\beta=28°$; б) $\alpha=88°$ и $\beta=49°$; в) $\alpha=107°\ 12'$ и $\beta=50°\ 25'$; г) $\alpha=72°\ 35'$ и $\beta=57°\ 18'$; д) $\alpha=76°\ 50'\ 14''$ и $\beta=48°\ 26'\ 52''$!

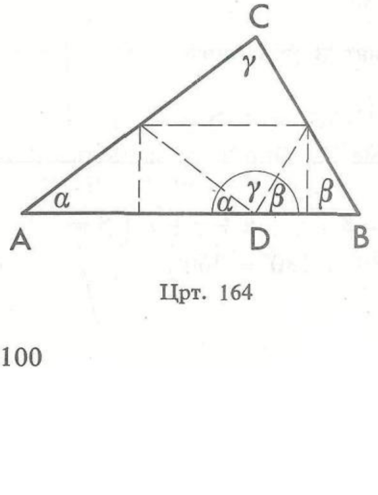
**5.** Одреди го аголот при врвот на рамнокракиот триаголник, ако аголот при основата изнесува: а) $\alpha=51°$, б) 48°, в) 58° 15′ 30″!

**6.** Одреди го аголот при основата на рамнокракиот триаголник, ако аголот при врвот изнесува: а) $\gamma=86°$, б) 90°, в) 108°, г) 120°!

**7.** Колкави се аглите на рамнокракиот правоаголен триаголник?

**8.** Триаголникот $ABC$ превиткај го на три места така, што неговите агли да се поставаат еден до друг, а со заедничко теме во некоја точка $D$, како што е покажано на црт. 164.! Што утврдуваш со тоа?

**9.** Еден од острите агли на правоаголниот триаголник изнесува: а) 41° 38′ б) 63° 15′, в) 28° 42′ 15″, г) 37° 27′ 52″. Одреди го другиот остар агол на тој триаголник!



Црт. 164

**10.** Нацртај два остри агла, а потоа конструирај таков трет агол, така што тие да можат да бидат внатрешни агли на еден триаголник!

**11.** Еден од острите агли на правоаголниот триаголник е 4 пати поголем од другиот остар агол. Одреди ги аглите на тој триаголник!

**12.** Познати се два агла на триаголникот $ABC$: $\alpha=83°$ и $\beta=48°$. Одреди која страна на тој триаголник е најголема, а која најмала!

**13.** Аголот при врвот на еден рамнокрак триаголник изнесува 72°. Која страна на тој триаголник е поголема: основата или кракот?

**14.** Аголот при основата на еден равнокрак триаголник изнесува 55°. Која страна на тој триаголник е поголема: кракот или основата?

**15.** Во еден равнокрак триаголник, аголот при врвот е за 18° поголем од аголот при основата. Одреди ги аглите на тој триаголник!

**16.** Во еден равнокрак триаголник, аголот при основата е за 15° поголем од аголот при врвот. Одреди ги аглите на тој триаголник!

**17.** Во триаголникот $ABC$: $\alpha = 47° \, 30'$ а аголот $\gamma$ е за $34° \, 30'$, поголем од $\alpha$: Одреди го аголот $\beta$.

**18.** Каков е триаголникот, ако збирот на двата негови агла е: а) еднаков на прав агол, б) помал од прав агол?

**19.** Разликата на острите агли во еден правоаголен триаголник е 23°. Одреди ги аглите на тој триаголник!

**20.** Одреди ги аглите на правоаголен триаголник, ако еден од острите агли е 2 пати поголем од другиот остар агол!

**21.** Два од аглите на еден триаголник соодветно се еднакви на два од аглите на друг триаголник. Какви се по големина третите агли? Зошто?

**22.** Збирот на еден од аглите при основата и аголот при врвот на равнокракиот триаголник изнесува $136° \, 42'$. Одреди ги аглите на триаголникот!

**23.** Каков е триаголникот, ако: а) еден од неговите агли е поголем од збирот на другите два агла, б) еден од неговите агли е еднаков на збирот на другите два агла, в) најголемиот од неговите агли е помал од збирот на другите два агла?

**24.** Во равнокракиот триаголник $ABC$ аголот при основата е два пати поголем од аголот при врвот. Одреди ги аглите на тој триаголник!

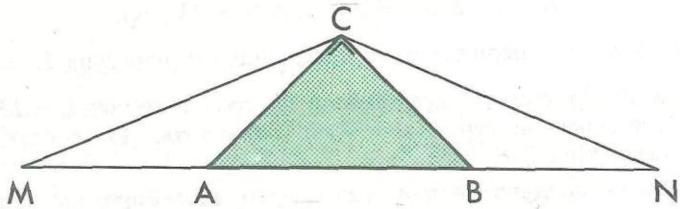
**25.** Даден е аголот при основата на еден равнокрак триаголник. Конструирај го аголот при врвот на тој триаголник, без да го црташ триаголникот!

**26.** Може ли надворешниот агол да биде помал од некој внатрешен агол на триаголникот?

**27.** Колку најмногу остри надворешни агли може да има триаголникот?

**28.** Триаголникот $ABC$ има еден надворешен остар агол. Од каков вид е тој триаголник?

**29.** Даден е равнокрак правоаголен триаголник $ABC$ со прав агол во темето $C$ (црт. 165.). Хипотенузата $AB$ продолжи ја зад точките $A$ и $B$ до точките $M$ и $N$ со отсечки, што се складни на краците. Потоа, точките $M$ и $N$ соедини ги со темето $C$, со што ќе го добиеш триаголникот $MNC$. Одреди ги аглите на триаголникот $MNC$!




Црт. 165

**30.** Еден од надворешните агли на триаголникот е два пати поголем од внатрешниот несоседен со него агал. Од каков вид е тој триаголник?

**31.** Надворешниот агол при врвот на еден равнокрак триаголник изнесува 150°. Одреди ја големината на внатрешните агли на тој триаголник!

**32.** Надворешниот агол при основата на еден равнокрак триаголник изнесува 120°. Одреди ја големината на аглите на тој триаголник!

## § 37. ПЕРИМЕТАР НА ТРИАГОЛНИКОТ

Видовме дека збирот од должините на сите страни на многуаголникот се вика *йериметар* на многуаголникот, и го означивме со буквата $L$. Според тоа:

**Периметарот на триаголникот** $ABC$ **е еднаков на збирот од должините на неговите страни,** т. е.

$$L = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{AC}.$$

Кај разностраниот триаголник, ако должините на страните ги означиме со $a$, $b$ и $c$, формулата за неговиот периметар, ќе гласи:

$$L = a + b + c$$

Кај рамнокракиот триаголник, ако должината на основата ја означиме со $a$, а должината на кракот со $b$, тогаш формулата за неговиот периметар ќе гласи:

$$L = a + b + b \quad \text{или} \quad L = a + 2b.$$

А за рамностраниот триаголник со должина на страна $a$, формулата за неговиот периметар го добива видот

$$L = a + a + a \quad \text{или} \quad L = 3a$$

Да решиме неколку задачи во врска со периметарот на триаголникот.

**Задача 1.** Да се одреди периметарот на триаголникот, чии страни се долги: $a = 7\ cm$, $b = 1\ dm$ и $c = 60\ mm$.

Мерните броеви на должините на страните бидејќи се разноимени броеви, прво ќе треба да ги претвориме во едноимени броеви, на пример во сантиметри: $a = 7\ cm$, $b = 1\ dm = 10\ cm$, $c = 60\ mm = 6\ cm$.

Ако сега мерните броеви на должините на страните на дадениот триаголник ги замениме во формулата за периметар, ќе добиеме:

$$L = a + b + c = 7 + 10 + 6 = 23\ (cm).$$

Значи, бараниот периметар на триаголникот изнесува $L = 23\ cm$.

**Задача 2.** Дадени се периметарот на триаголникот $L = 23\ cm$ и должините на двете негови страни $a = 9\ cm$ и $b = 6\ cm$. Да се одреди должината на третата страна $c$!

Задачата се сведува на изнаоѓање еден од собирците, кога е познат нивниот збир и другите два собирока.

Од алгебрата ни е познато дека непознатиот собирок го наоѓаме кога од вкупниот збир на сите собирци го извадиме збирот на познатите собирци. Според тоа, бараната должина на страната $c$, ќе биде:

$$c = L - (a + b)$$

или

$$c = 23 - (9 + 6) = 23 - 15 = 8\ (cm).$$

**Задача 3.** Да се пресмета должината на основата на еден рамнокрак триаголник, кога се дадени неговиот периметар $L = 18\ cm$ и должината на кракот $b = 7\ cm$.

Должината на основата на рамнокракиот триаголник ќе ја одредиме, кога од неговиот периметар го извадиме збирот на должините на двата крака $b + b$ или $2b$, па така наоѓаме:

$$a = L - 2b = 18 - 2 \cdot 7 = 18 - 14 = 4\ (cm).$$

**Задача 4.** Да се пресмета должината на кракот на еден рамнокрак триаголник, ако се дадени неговиот периметар $L = 21\ cm$ и должината на неговата основа $a = 5\ cm$.

Прво ќе одредиме колку изнесува должината на двата крака заедно т. е. $2b = ?$ Должината на двата крака заедно ќе изнесува:

$$2b = L - a \text{ или } 2b = 21 - 5 = 16\ (cm).$$

Кога знаеме колку изнесува должината на двата непознати складни крака заедно, тогаш должината само на едниот крак ќе ја има половината од таа вредност, т. е. $b = \frac{16}{2} = 8\ (cm)$.

Значи, непознатиот крак има должина $b = 8\ (cm)$.

**Задача 5.** Да се одреди должината на страната на рамностран триаголник, ако неговиот периметар изнесува $L = 24\ cm$.

Бидејќи периметарот на рамностраниот триаголник е 3 пати поголем од должината на страната, т. е. $L = 3a$, тогаш јасно е дека должината на страната пак ќе биде 3 пати помала од периметарот, т. е.

$$a = \frac{L}{3} \quad \text{или} \quad a = \frac{24}{3} = 8\ (cm).$$

Значи страната на рамностраниот триаголник е долга $a = 8\ cm$.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Што е периметар на многуаголникот?

**2.** Дворот на едно земјоделско семејство, што има форма на шестоаголник, е заграден со 4 реда бодликава жица. Пресметај колку метри жица е употребено, ако страните на дворот се долги: 83 *m*, 56 *m*, 115 *m*, 94 *m*, 39 *m* и 74 *m*!

**3.** Пресметај го периметарот на еден триаголник, чии страни се долги: $a = 5\ cm$; $b = 80\ mm$ и $c = 1\ dm$!

**4.** Пресметај го периметарот на рамнокрак триаголник со основа долга $a = 6\ cm$; и крак долг $b = 1\ dm$!

**5.** Колкав е периметарот на рамностран триаголник, ако страната му е долга: а) 17 *cm*, б) 4 *dm*, в) 25 *m*?

**6.** Периметарот на рамностран триаголник изнесува: а) 12 *cm*, б) 21 *dm*, в) 165 *cm*. Одреди ја должината на страната на триаголникот.

**7.** Периметарот на еден равнокрак триаголник изнесура 21 *cm*, а основата му е долга 5 *cm*. Пресметај ја должината на кракот!

**8.** Периметарот на равнокрак триаголник изнесува 19 *cm*. Ако кракот му е долг 7 *cm*, пресметај ја должината на основата!

**9.** Периметарот на еден разностран триаголник изнесува 28 *cm*. Одреди ја должината на страната $b$ на триаголникот, ако другите две страни му се долги; $a = 7$ *cm* и $c = 12$ *cm*!

**10.** Одреди го периметарот на триаголникот $ABC$, ако е познато: $\overline{AB} = 12$ *cm*; $\overline{BC} = \overline{AB} - 3$ *cm* и $\overline{AC} = \overline{BC} + 2$ *cm*!

**11.** Периметарот на триаголникот, $ABC$ е еднаков на 48 *cm*. Одреди ги должините на страните $BC$ и $AC$ на тој триаголник, ако $\overline{AB} = 18$ *cm* и $\overline{BC} = \overline{AB} - 5$ *cm*!

**12.** Дадени се должините на две страни на триаголникот: $a - 9$ *cm* и $b = 6$ *cm*! Ако должината на третата страна не е позната, одреди во кои граници ќе се наоѓа периметарот на триаголникот!

Г Л А В А VII

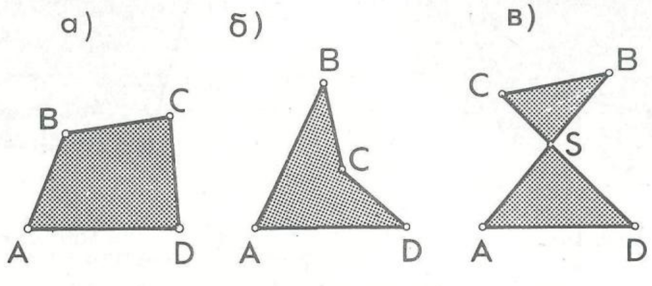
# ЧЕТИРИАГОЛНИК

## § 38. ЧЕТИРИАГОЛНИК. ОСНОВНИ ЕЛЕМЕНТИ

Да се потсетиме:

**Многуаголник кој има четири страни се вика четириаголник.**

Во рамнината на тетратката (таблата) уочете четири точки $A$, $B$, $C$ и $D$, такви што никои три од нив да не припаѓаат на иста права. Потоа соединете ги тие точки (по укажаниот ред) со отсечки $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$. Во зависност од меѓусебната положба на избраните точки, ќе ги добиеме затворените искршени линии ($a$), ($b$) и ($c$) на црт. 166., кои се состојат од четири отсечки.




Затворените искршени линии ($a$) и ($b$) ограничуваат по еден одреден дел од рамнината (нивна внатрешна област), што на цртежот е шрафирана. Но тоа не е случај и со искршената линија ($c$), кај која, пак, несоседните страни $AB$ и $CD$ се сечат во некоја точка ($S$). Затворените искршени линии од видот ($c$) нема да ги разгледуваме.

Геометриската фигура, која се состои од затворената искршена линија $ABCD$, која лежи, на една рамнина и нема ниту еден пар несоседни страни кои се сечат; заедно со делот од рамнината што е ограничен со неа, претставува четириаголник (црт. 166. а, б).

Точките $A$, $B$, $C$ и $D$ се викаат *темиња* на четириаголникот, а страните (отсечките) на затворената искршена линија — *страни* на четириаголникот.

Четириаголникот го обележуваме, како и триаголникот, со големи печатни латински букви, што ги ставаме по една при секое теме. На пример: четириаголник $ABCD$ (црт. 166.).

Секој четириаголник може да се разгледува и како пресек на два агла $\measuredangle BAD$ и $\measuredangle BCD$ (црт. 167.), т.е.

$$(\measuredangle BAD) \cap (\measuredangle BCD) = ABCD,$$

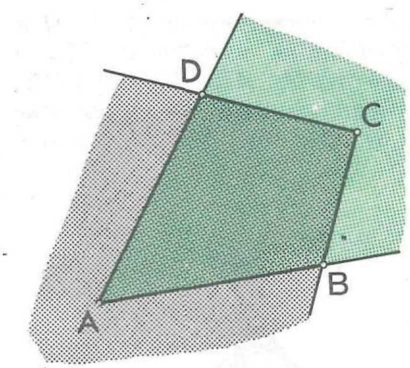
при што, $ABCD \subset (\measuredangle BAD)$ и $ABCD \subset (\measuredangle BCD)$.

Меѓутоа, пресекот не на секои два агла претставува четириаголник. Покажи го тоа графички!

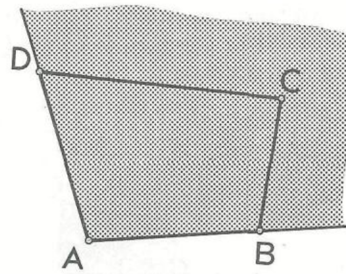
Четириаголникот може да биде *конвексен* (црт. 166. а) или *конкавен* (црт. 166. в). Кој четириаголник е конвексен, а кој конкавен? (види §11).

Ние ќе ги разгледуваме само конвексните четириаголници и под зборот „четириаголник" ќе подразбираме конвексен четириаголник.

Секои две полуправи, кои содржат по една страна на четириаголникот при секое негово теме образуваат по два агла. Оној од тие два агла, на кој му припаѓа целиот (конвексен) четириаголник, се вика *внатрешен агол* на четириаголникот (црт. 168.), или кратко, само, *агол* на четириаголникот.



Црт. 167



Црт. 168

Секој четириаголник има четири страни и четири (внатрешни) агли. Тоа се неговите *основни елементи*.

Црт. 169

Аглите, што се напоредни на внатрешните агли на конвексниот четириаголник се викаат негови *надворешни агли*.

На црт. 169. внатрешните агли на четириаголникот $ABCD$ означени се со $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ и $\delta$, а надворешните агли со $\alpha_1$, $\beta_1$, $\gamma_1$ и $\delta_1$.

Кај триаголникот спроти секоја страна лежи агол и теме; а спроти секое теме и агол лежи страна.

Кај четириаголникот: спроти секоја страна лежи страна, која се вика *сӣроӣивна сӣрана*; а спроти секое теме и (внатрешен) агол лежи пак теме (*сӣроӣивно ӣеме*) и агол (*сӣроӣивен агол*).

На пример: На црт. 169. кај четириаголникот $ABCD$:

спротивни страни се: $AB$ и $CD$; $BC$ и $AD$;

спротивни темиња се: $A$ и $C$; $B$ и $D$;

спротивни агли се: $\alpha$ и $\gamma$; $\beta$ и $\delta$.

Две страни на четириаголникот, кои имаат еден заеднички крај (теме) се викаат *соседни сӣрани*, а два агла, чии темиња се во крајните точки на иста страна, се викаат *ӣрилегнаӣи агли* на таа страна. На пример, кај четириаголникот на црт. 169. соседни страни се: $AB$ и $AD$; $AB$ и $BC$; $BC$ и $CD$; $CD$ и $AD$. Прилегнати агли: на страната $AB$ се $\alpha$ и $\beta$; на страната $BC$ се $\gamma$ и $\beta$, итн.

Отсечката, која сврзува две спротивни темиња на четириаголникот се вика негова *дијагонала*. Колку дијагонали има четириаголникот?

## § 39. ЗБИР НА ВНАТРЕШНИТЕ АГЛИ НА ЧЕТИРИАГОЛНИКОТ

Нацртајте еден четириаголник $ABCD$ (црт. 170.)!. Ако повлечеме една негова дијагонала, на пример $AC$, таа ќе го подели четириаголникот на два триаголника $ABC$ и $ACD$.

Познато ни е дека збирот на внатрешните агли на секој триаголник изнесува 180°, тогаш имаме:

$$\hat{1}+\hat{B}+\hat{3}=180° \quad \text{и} \quad \hat{2}+\hat{4}+\hat{D}=180°.$$

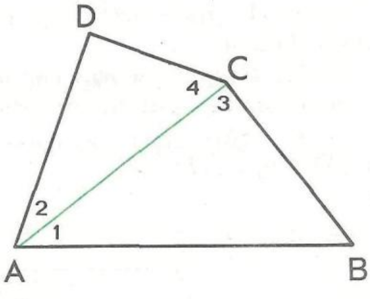
Ако ги собереме внатрешните агли и на двата триаголника, ќе добиеме:

$$\hat{1}+\hat{B}+\hat{3}+\hat{2}+\hat{4}+\hat{D}=360°.$$

Но бидејќи: $\hat{1}+\hat{2}=\hat{A}$ и $\hat{3}+\hat{4}=\hat{C}$;

тогаш добиваме: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}+\hat{D}=360°$ или

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta=360°.$$




Црт. 170

Според тоа: **збирот на внатрешните агли на четириаголникот е еднаков на 360°.**

Покажавме дека: збирот на надворешните агли на триаголникот изнесува 360°. Покажете сами дека: **збирот на надворешните агли и на четириаголникот изнесува 360°.**

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Нацртај еден четириаголник, означи го и прочитај го!

**2.** Колку изнесува збирот на внатрешните агли на четириаголникот? Покажи го тоа на еден четириаголник конструктивно!

**3.** Аглите на еден четириаголник се складни еден на друг. По колку изнесува секој од нив?

**4.** Можат ли внатрешните агли на четириаголникот да бидат: а) сите остри, б) сите прави, в) сите тапи? Зошто?

**5.** Можат ли два агла на четириаголникот да бидат прави, а другите два остри? Зошто?

**6.** Трите агли на четириаголникот се прави. Каков е четвртиот негов агол?

**7.** Ако трите агли на четириаголникот се: $\alpha = 68°$, $\beta = 134°$, $\gamma = 82°$, колку изнесува четвртиот агол?

**8.** Одреди го четвртиот агол $\delta$ на четириаголникот $ABCD$, ако се познати другите три агла: а) 56°, 78°, 120°; б) 72°, 90°, 110°; в) $\alpha = 85°$, $\beta = \delta$, $\gamma = 58°$!

## § 40. ПОДЕЛБА НА ЧЕТИРИАГОЛНИЦИТЕ

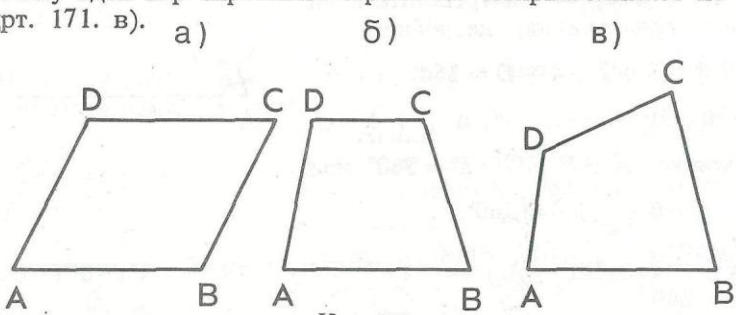
Поделбата на четириаголниците на одделни видови може да се изврши на повеќе начини. Ние ќе ја усвоиме поделбата на конвексните четириаголници, што се заснова според заемната положба на нивните спротивни страни.

Знаеме, дека секој четириаголник има два пара спротивни страни. Очигледно е дека за нив (двата пара спротивни страни) постојат само следниве три можности:

1°. И двата пара спротивни страни на четириаголникот се паралелни (црт. 171. а);

2°. Само еден пар спротивни страни на четириаголникот се паралелни, а другиот пар спротивни страни се непаралелни (црт. 171. б);

3°. Ниту еден пар спротивни страни на четириаголникот не се паралелни (црт. 171. в).




Црт. 171

Поаѓајќи од тој факт, множеството на сите конвексни четириаголници можеме да го разделиме на три подмножества, кои имаат и посебни имиња: *паралелограми*, *трапези* и *трапезоиди*, и тоа:

**Четириаголник, кој има два пара паралелни страни, се вика паралелограм.**

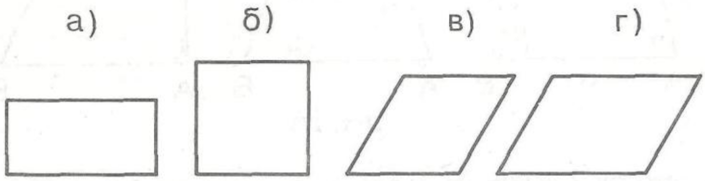
**Четириаголник, кој има само еден пар паралелни страни, се вика трапез.**

**Четириаголник, пак, кој нема ниту еден пар паралелни страни, се вика трапезоид.**

Да ги разгледаме одделно секој од тие три вида четириаголници!

**1.** На црт. 172. нацртани се четири четириаголници. Сите тие имаат по два пара паралелни страни, па според тоа, тие се паралелограми.

Лесно можеме да се увериме дека: спротивните страни на паралелограмот се складни, а исто така, и спротивните агли се складни. Тоа својство на паралелограмите било познато уште на Старите Грци.




Црт. 172

Но, од нацртаните паралелограми на црт. 172. гледаме дека: по однос на страните има и такви паралелограми, на кои сите страни им се складни, а не само спротивните; а по однос на аглите има и такви на кои сите агли им се складни (прави) а другите, пак, имаат два остри (складни) и два тапи (складни) агли.

Според тоа, и паралелограмите можеме да ги делиме на видови и тоа според страните и според аглите. Таа поделба ја вршиме вака:

**Паралелограм, на кој сите агли му се прави, се вика правоаголник** (црт. 172. а, б).

**Паралелограм, на кој сите страни му се складни, се вика ромб** (црт. 172. б, в).

**Паралелограм, на кој сите агли му се прави и сите страни му се складни, се вика квадрат** (црт. 172. б).

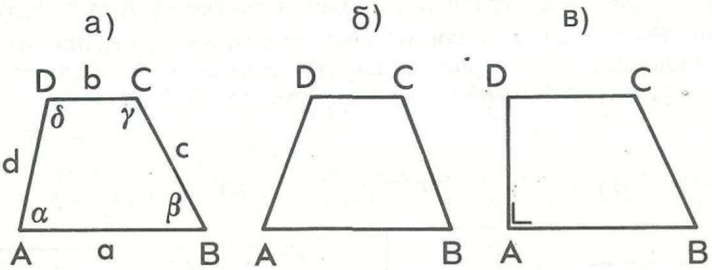
Според вака извршената поделба на паралелограмите, квадратот е специјален случај на правоаголник (правоаголник со складни страни) и специјален случај на ромб (ромб со прави агли).

Од ова следува дека: секој квадрат е правоаголник, но не секој правоаголник е квадрат. Исто така: секој квадрат е ромб, но не секој ромб е квадрат.

Паралелограм, кој не е ниту правоаголник, ниту ромб; па според тоа не е и ниту квадрат, се вика *ромбоид*. Таков е паралелограмот на црт. 172. г.

**2.** Паралелните страни на трапезот се викаат *основи* на трапезот, а непаралелните—*краци* на трапезот. Должините на основите на трапезот, обично, ги означуваме со буквите $a$ и $b$, а должините на краците со $c$ и $d$ (црт. 173. а).

Ако краците на трапезот се складни ($AD \cong BC$), тој трапез се вика *рамнокрак трапез*. (црт. 173. б).

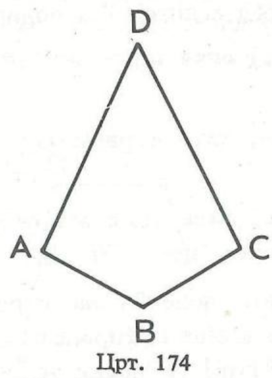



Црт. 173

Ако еден од краците на трапезот е нормален на неговите основи, таков трапез се вика *правоаголен трапез*. Трапезот на црт. 173. в, е правоаголен, бидејќи е $AD \perp AB$.

Очигледно е дека рамнокраките и правоаголните трапези се подмножества од множеството на сите трапези. Тоа се само посебни видови трапези.

**3.** Од множеството на сите трапезоиди (четириаголници кои немаат ниту еден пар паралелни страни), ќе ги издвоиме посебните трапезоиди кои имаат две по две соседни складни страни.

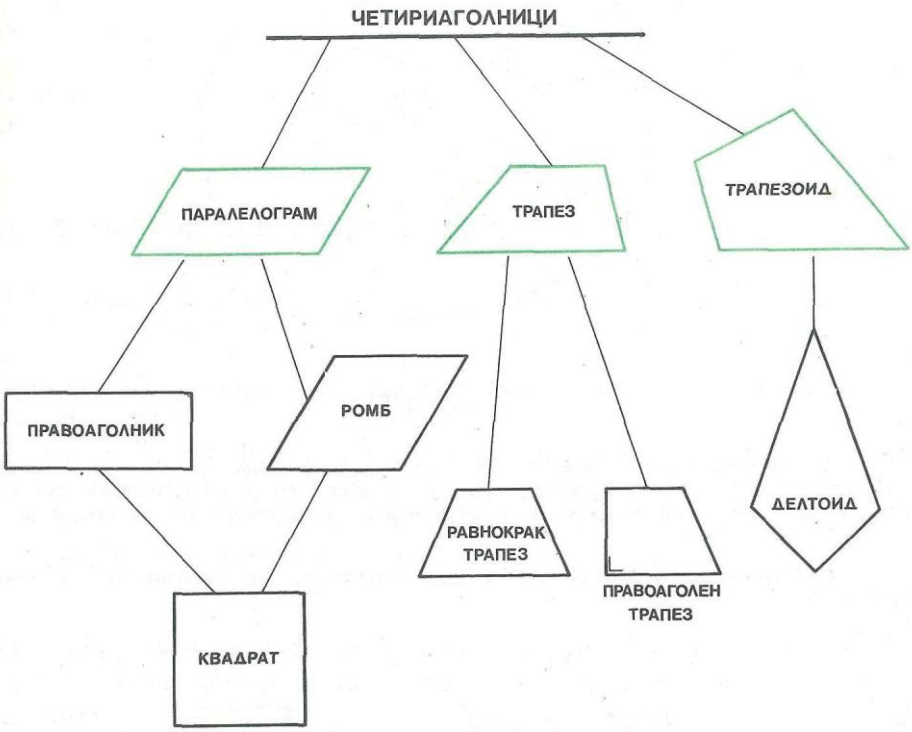



Црт. 174

**Трапезоид, кој има две по две соседни складни страни, се вика делтоид.**

Таков е трапезоидот на црт. 174., кај кого што $AB \cong BC$ и $AD \cong CD$.

Усвоенава поделба на конвексните четириаголници целосно може да се претстави со следнава шема:




## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Какви видови четириаголници разликуваме и кои се тие? Нацртај неколку четириаголници и покажи кој од каков вид е!

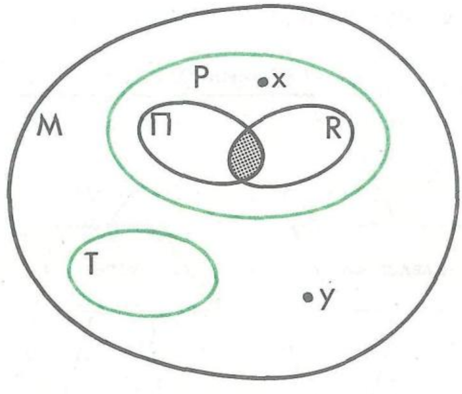
**2.** Кои услови треба да ги исполнуваат страните на четириаголникот, за тој да биде: а) паралелограм, б) трапез, в) трапезоид?

**3.** Како ги делиме паралелограмите според страните, а како според нивните агли?

**4.** По што се разликува квадратот: а) од ромбот, б) од правоаголникот?

**5.** Направи од штички рамка на квадрат и правоаголник! Со притиснување на спротивните темиња, што се добива?

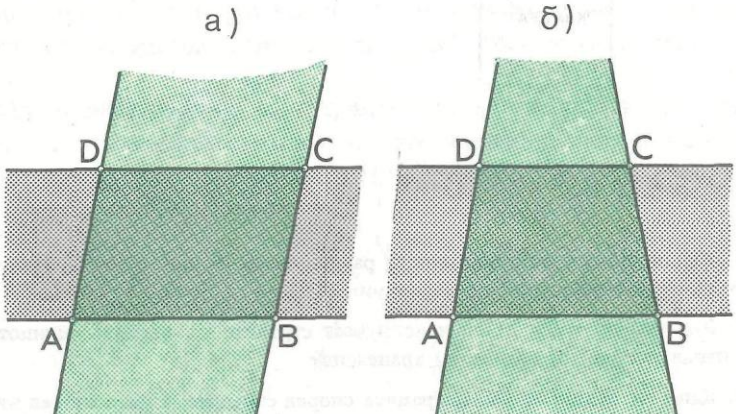
**6.** На дијаграмот на црт. 175. со буквата $M$ е означено множеството на сите конвексни четириаголници, со $T$ — множеството на сите трапези, со $P$ — множеството на сите паралелограми, со $\Pi$ — множеството на сите правоаголници, со $R$ — множеството на сите ромбови. Разгледај го тој дијаграм и одговори на следниве прашања: а) Какво множество од четириаголници претставува пресекот $\Pi \cap R$?, б) Зошто е $P \cap T = \varnothing$?, в) Какви четириаголници се елементите означени со $x$, со $y$?




Црт. 175

**7.** Паралелограмот може да се разгледува и како пресек на две ленти (црт. 176. а). Лента е дел од рамнината, што е издвоен со две паралелни прави, вклучувајќи ги и тие прави. Како може да се разгледува трапезот (како пресек на кои две фигури)? (црт. 176. б).

**8.** Пресек на кои две ленти претставува: а) правоаголникот, б) ромбот, в) квадратот?




Црт. 176

**9.** Кои од следниве искази се точни: а) Ромб, кој има барем еден прав агол претставува квадрат, б) Правоаголник, на кој две соседни страни му се складни, претставува квадрат, в) Четириаголник, кој има два прави агла претставува правоаголник, г) Четириаголник, на кој сите страни му се складни претставува ромб!

**10.** Какви триаголници се добиваат, кога кај квадратот, правоаголникот, ромбот се повлече: а) само едната дијагонала, б) и двете дијагонали?

**11.** Нацртај два рамнострани триаголника со складни страни! Исечи ги и придружи ги еден до друг! Каква геометриска фигура ќе добиеш?

**12.** Може ли трапезот да има само еден прав агол? А може ли да има три прави агли? Зошто?

**13.** Каква фигура се добива ако ги продолжиш краците на рамнокракиот трапез до нивното пресекување?

**14.** Може ли делтоидот да има: а) еден прав агол, б) два прави агла, в) три прави агла?

## § 41. ПЕРИМЕТАР НА ПРАВОАГОЛНИК И КВАДРАТ

Периметарот на четириаголникот го пресметуваме исто како и периметарот на триаголникот, кога ќе ги собереме должините на сите негови страни.

Тука ќе се ограничиме на одредувањето на периметарот само на правоаголник и квадрат.

Знаеме дека правоаголникот има две по две спротивни страни складни, а соседните страни во општ случај не се складни. Ако должините на нескладните страни ги означиме со $a$ и $b$, тогаш формулата за пресметување периметарот на правоаголникот ќе гласи:

$$L = 2a + 2b \quad \text{или} \quad L = 2(a + b).$$

Кај квадратот, пак, сите страни се складни. Ако должината на неговата страна ја означуваме со $a$, тогаш формулата за периметар на квадратот ќе гласи:

$$L = 4a.$$

**Задача 1.** Да се пресмета периметарот на квадрат, чија страна е долга $a = 7 cm$.

Решение: $L = 4 \cdot 7 = 28$ $(cm)$.

**Задача 2.** Да се одреди должината на страната на квадрат, ако неговиот периметар е $L = 24$ $cm$.

Од $L = 4a$ имаме $a = \frac{L}{4}$, т.е. $a = \frac{24}{4} = 6$ $(cm)$.

**Задача 3.** Позната е должината на едната страна на правоаголникот, $a = 5$ $cm$ и неговиот периметар $L = 16$ $cm$. Да се одреди должината на другата негова страна!

Од формулата за периметар на правоаголникот $L = 2a + 2b$, јасно е дека удвоената должина на страната $b$ ќе ја добиеме кога од периметарот ќе ја одземеме удвоената должина на страната $a$, т. е.

$$2b = L - 2a.$$

А бараната должина на таа страна ќе биде: $b=\frac{L-2a}{2}$.

Заменувајќи ги мерните броеви на периметарот и страната $a$ во добиената формула, наоѓаме:

$$b=\frac{L-2a}{2}=\frac{16-2\cdot 5}{2}=\frac{16-10}{2}=\frac{6}{2}=3\ (cm).$$

## § 42. ПЛОШТИНА НА ПРАВОАГОЛНИК И КВАДРАТ

Линиите и површините, односно правата и рамнината, се геометриски фигури од различен вид. Ограничениот дел од една права се вика *отсечка*, а ограничениот дел од рамнината се вика *геометриска слика*. Геометриски слики се, на пример, триаголникот, правоаголникот, квадратот, кругот и др. Геометриските слики се состојат само од точките што лежат на нивната контура (граница) и точките од нивната „внатрешна област". Според тоа, отсечката, кружницата и кружниот лак не се сметаат геометриски слики, бидејќи немаат внатрешна област.

Видовме дека отсечките можат да се споредуваат и да се мерат, односно, секоја отсечка има своја точно определена должина.

Поимот должина го воведуваме како геометриска величина, која ги карактеризира отсечките (ограничени делови од правата). На сличен начин ќе го воведеме и поимот *плоштина на геометриските слики.*

Плоштина е геометриска величина од посебен вид, која ги карактеризира геометриските слики (ограничени делови од рамнината).

Велиме:

**Секоја геометриска слика има своја определена плоштина.**

Плоштината на геометриската слика, како и секоја друга величина, може да се мери и да се изразува со броеви. При мерењето на плоштината, мерената геометриска слика се споредува со некој квадрат, чија плоштина е примена за единица. Тој квадрат се вика *единичен квадрат* или *единица мерка* за мерење плоштината на геометриските слики.

Во практиката се покажало згодно, единиците мерки за плоштина да бидат усогласени со единиците мерки за должина на отсечките. На пример, од должинските единици: метар ($m$), дециметар ($dm$), сантиметар ($cm$) и милиметар ($mm$) се добиваат единиците мерки за плоштина:

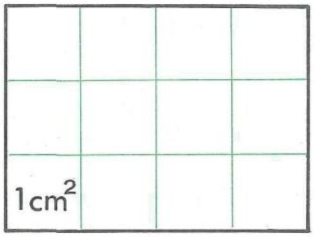
*квадратен метар* ($m^2$), *квадратен дециметар* ($dm^2$), *квадратен сантиметар* ($cm^2$), и *квадратен милиметар* ($mm^2$).

**Еден квадратен метар ($m^2$) е плоштината на квадрат, со страна долга 1 $m$.**

Плоштината на геометриските слики ја означуваме со буквата $P$.

Да видиме сега како ја одредуваме плоштината на правоаголник и квадрат.

Една од страните на правоаголникот ја викаме *основа*, а другата соседна страна — *висина* на правоаголникот. Должините на основата и висината на правоаголникот се викаат негови *димензии*.




Црт. 177

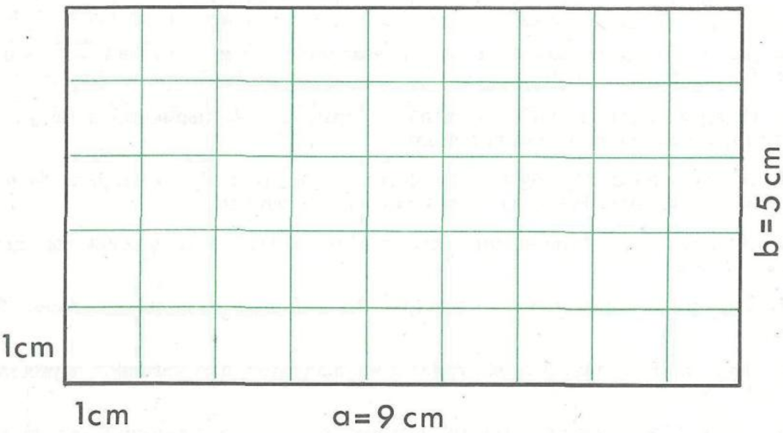
На цртеж 177. е нацртан правоаголник со страни долги 4 $cm$ и 3 $cm$.

Очигледно е дека правоаголникот може да се покрие со $4 \cdot 3 = 12$ единични квадрати, со плоштина 1 $cm^2$. Според, тоа, бараната плоштина на правоаголникот на црт. 177. е $P = 12\ cm^2$.

Ако должините на страните на правоаголникот ги означиме со $a$ и $b$, за неговата плоштина ќе ја добиеме формулата:

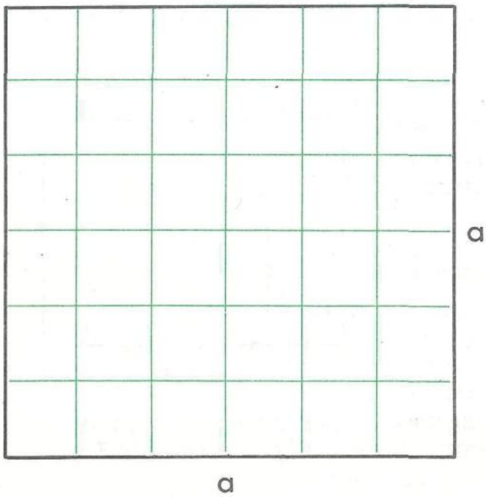
Според тоа: $$P = ab$$

**Плоштината на правоаголникот е еднаква на производот од неговите две димензии.**




Црт. 178

На пример, ако правоаголникот има димензии: $a = 9\ cm$; $b = 5\ cm$. тогаш неговата плоштина ќе биде: $P = ab = (9 \cdot 5)\ cm^2 = 45\ cm^2$.



Црт. 179

При тоа, секогаш треба да се има предвид следното: пред да ги замениме мерните броеви на димензиите во формулата за плоштина на правоаголникот, нив претходно треба да ги изразиме во иста мерна единица за должина. Во тој случај, плоштината на правоаголникот ќе се изрази со соодветна мерна единица за плоштина.

Бидејќи квадратот е специјален случај на правоаголник (правоаголник со складни страни), на кој димензиите се еднакви $b = a$; затоа неговата плоштина ќе биде:

$$P = a \cdot a \text{ или } P = a^2.$$

На пример: квадрат со страна долга $a = 6$ *cm* (црт. 179.) има плоштина $P = a^2 = 6^2\ (cm^2) = 36\ cm^2$.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Да се одреди периметарот на правоаголник, чии димензии се: а) $a = 7$ *cm*, $b = 4$ *cm*; б) $a = 6$ *dm*, $b = 40$ *cm*!

**2.** Измери сè што е потребно, а потоа пресметај го периметарот на училишната табла, масата, корицата на учебникот и др.

**3.** Околу едно фискултурно игралиште, со должина 98 *m* и ширина 54 *m*, направена е патека за трчање. Најди ја должината на таа патека!

**4.** Нацртај правоаголник, чиј периметар е 32 *cm*, а должината на една негова страна да е 12 *cm*!

**5.** Одреди го периметарот на квадрат, чија страна е долга: а) 8 *cm*; б) 12 *cm*; в) 54 *mm*!

**6.** Одреди ја, должината на страната на квадратот, ако неговиот периметар изнесува 28 *cm*!

**7.** Да се одреди плоштината на правоаголник, чии димензии се: а) $a = 8$ *cm*, $b = 5$ *cm*; б) $a = 72$ *cm*, $b = 4$ *dm*!

**8.** Одреди ја плоштината на квадрат, чија страна е долга: а) $a = 4$ *cm*, б) $a = 6$ *cm*; в) $a = 12$ *cm*!

**9.** Машинската сала на една фабрика има форма на правоаголник со димензии $a = 48$ *m* и $b = 20$ *m*. Колку машини можат да се поставт во неа, ако за секоја машина е потребно 8 $m^2$ површина?

**10.** Колку килограми сено е добиено од една ливада, која има форма на правоаголник со димензии 325 $m$ и 180 $m$, ако од секој ар (100 $m^2$) е добиено по 40 $kg$ сено?

**11.** Пресметај ја плоштината на една леа, што има форма на квадрат, со страна долга 28 $m$!

**12.** Еден градинар посадил со зелка една правоаголна леа, долга 48 $m$ и широка 18 $m$. Есента тој набрал средно по 5 зелки од 1 $m^2$ површина, колку зелки набрал од целата леа?

**13.** Игралиштето за ракомет треба да се асфалтира. Тоа има димензии 48 $m$ и 24 $m$. Колку килограми асфалт е потребно, ако за секој квадратен метар асфалтирана површина е потребно 45 $kg$ асфалт?

**14.** Одреди дали вашата училница е доволно осветлена, ако се знае дека за нормално осветлување на училницата е потребно плоштината на прозорците да не биде помала од $\frac{1}{5}$ од плоштината на подот!

**15.** Трасирај правоаголна леа со ширина 3 $m$, така што таа да има плоштина 42 $m^2$. Колку треба да биде долга леата?

**16.** Една нива, чијашто плоштина изнесува 1 $ha$, има форма на правоаголник со должина 125 $m$ Колку изнесува ширината на нивата?

**17.** Два тракториста се натпреварувале. Едниот изорал една правоаголна парцела со димензии 238 $m$; 175 $m$; а другиот за истото време изорал друга парцела, која имала форма на квадрат, со страна долга 210 $m$. Кој го добил натпреварот?

**18.** Еден базен има форма на квадрат, на кој надворешната страна му е долга 6 $m$. Базенот е опколен со асфалтирана патека која е широка 2 $m$. Одреди ја плоштината на таа патека!

**19.** Како ќе се промени плоштината на правоаголникот, ако: а) должината на основата се зголеми 3 пати, а должината на висината му остане непроменета; б) должината на основата и висината се зголемат 3 пати; в) должината на основата се зголеми 6 пати, а должината на висината се намали 2 пати, г) должините на основата и висината се намалат 2 пати?

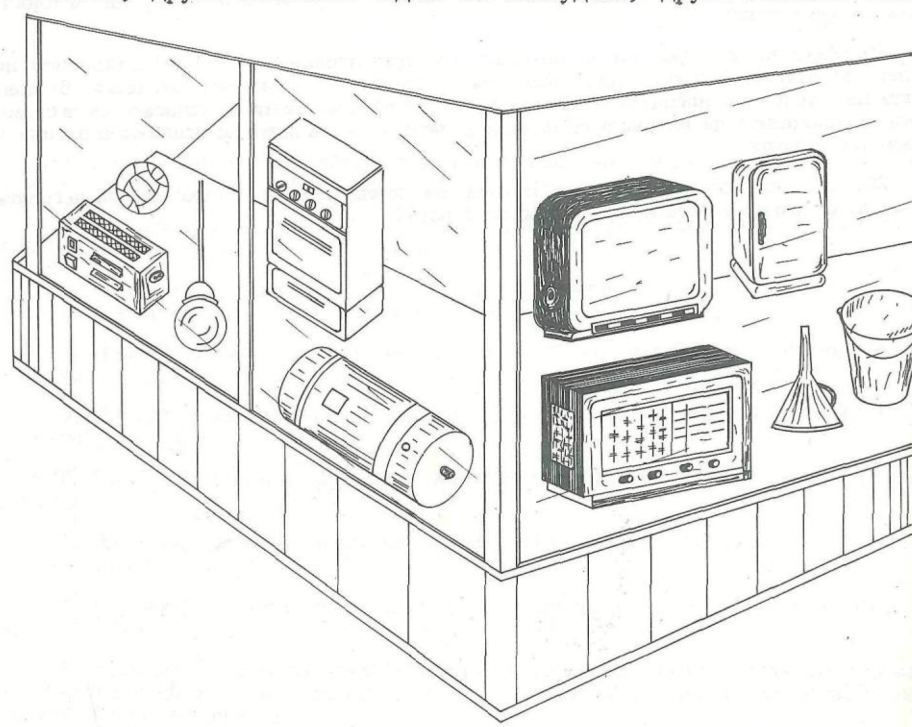
**20.** Како ќе се промени плоштината на квадрат, ако должината на неговата страна: а) се зголеми 4 пати, б) се намали 3 пати?

Г Л А В А VIII

# ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА

## § 43. ГЕОМЕТРИСКО ТЕЛО

Каде и да погледаме околу нас: во училницата, на улицата, во продавницата (црт. 180.), во нашиот дом итн., насекаде се среќаваме со различни предмети како на пример: клупа, стол, орман, радио, фрижидер печка, топка итн. Сите тие имаат најразлични својства. На пример, едни се полесни, други потешки. Едни се постудени, други потопли. Секое



Црт. 180

тело има своја тежина и одредена температура. Тврдите тела имаат и одредена *форма*; едни имаат форма на квадар, други — форма на цилиндар, конус, топка итн.

Секое тело има одредена *големина* и зазема некое место (*положба*) во просторот. Од овие и сите други многубројни својства, геометријата ги проучува само следниве три својства на телата: нивната форма, големина и положба во просторот.

Својствата на телата: формата, големината и положбата се викаат *геометриски својства на телата.*

Тело, кое би ги имало само тие три својства, ќе претставува само дел од просторот, ограничен од сите страни. Такво тело се вика *геометриско тело*. Според тоа:

**Геометриско тело е ограничен дел од просторот, кој има определена форма, големина и положба.**

Геометриското тело е нераздвојно од материјалното, т.е. тоа не може да постои како нешто одделно. Претстава за него се добива, кога во нашите мисли ги запоставиме многубројните својства на материјалното тело, а ја задржиме само неговата форма големина и положба во просторот.

Проучувањето на геометриските својства на телата го вршиме на некои стварни материјални тела, кои ги правиме, обично, од картон, дрво, гипс, лим, жица или од некоја друга материја. Таквите тела, што служат за проучување на геометриските својства на телата, се викаат *модели*.

Границите, што го издвојуваат геометриското тело од останатиот простор претставуваат некои површини, кои можат да бидат рамни или криви. Геометриското тело се состои само од точките, што лежат на неговите граници и точките од издвоениот со нив дел од просторот („внатрешни точки" на телото).

Според тоа, дали геометриските тела се ограничени само со рамни површини, или, пак, со рамни и криви површини, или само со крива површина, сите тела ги делиме на *рабести* и *облести* и тоа:

Геометриско тело, што е ограничено само со рамни површини се вика *рабесто* (или *кошесто*) тело; а она што е ограничено само со криви површини или со криви и рамни површини, се вика *облесто* тело.

## § 44. ПРАВА ПРИЗМА. ПОИМ И ЕЛЕМЕНТИ

Нека $\pi$ и $\pi_1$ се две паралелни рамнини (сл. 181.). На рамнината $\pi$ да земеме еден кој и да било многуаголник, на пример, петаголник $ABCDE$, и низ неговите темиња да повлечеме нормали на рамнината $\pi$.

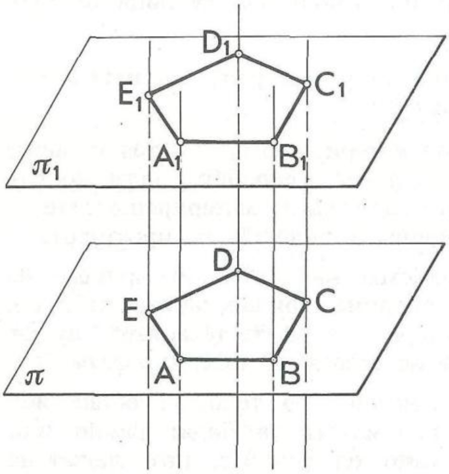
Очигледно е дека така повлечените нормали ќе бидат нормални и на рамнината $\pi_1$; а меѓу себе се сите паралелни. (Зошто?).

Тие нормали ќе ја прободат рамнината $\pi_1$ во пет точно определени точки $A_1$; $B_1$; $C_1$; $D_1$ и $E_1$, кои определуваат друг петаголник $A_1B_1C_1D_1E_1$ во рамнината $\pi_1$ (црт. 181.).

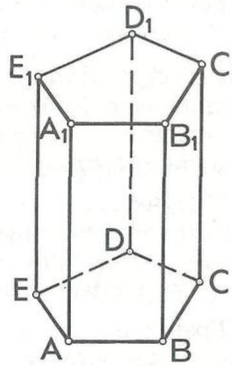
Ако рамнината $\pi_1$ паралелно ја лизгаме по $A_1A$, ќе дојде до совпаѓање на петаголникот $ABCDE$ со $A_1B_1C_1D_1E_1$. Во таков случај велиме дека тие се *складни* и пишуваме $ABCDE \cong A_1B_1C_1D_1E_1$.

Четириаголниците $ABB_1A_1$; $BCC_1B_1$; $CDD_1C_1$; итн. се правоаголници (црт. 181.). (Зошто?).

Површината, која се состои од двата складни паралелни петаголника $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ и петте правоаголника $ABB_1A_1$; $BCC_1B_1$; . . . (сл. 182), ограничуваат одреден дел од просторот. Тој дел од просторот претставува рабесто тело, кое се вика *петстрана права призма*.

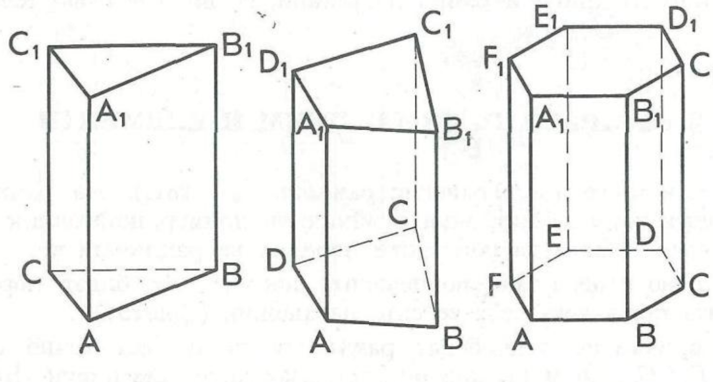



Црт. 181




Црт. 182

Ако во рамнината $\pi$, наместо петаголник земевме триаголник, четиаголник, односно шестаголник (црт. 181), на сличен начин ќе добиевме други рабести тела, кои се викаат *тристрана, четиристрана*, односно *шестстрана права призма* (црт. 183.).




Црт. 183

**Права призма е рабесто геометриско тело, ограничено со два паралелни складни многуаголници и со онолку правоаголници колку што страни има секој од тие многуаголници.**

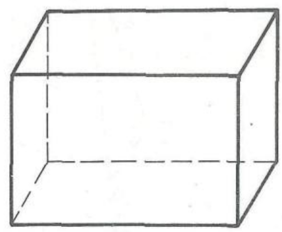
Двата складни многуаголника и сите правоаголници, што ја сочинуваат површината на правата призма, се викаат *страни* на правата призма, и тоа: двата складни многуаголника се викаат уште и *основи* (или *базиси*) на призмата, а правоаголниците — *околни страни* на призмата. Сите околни страни на призмата заедно ја сочинуваат околната површина (или *обвивка*) на призмата.

Отсечките во кои се спојуваат страните на призмата се викаат *рабови* на призмата, а крајните точки на рабовите — *темиња* на призмата.

Рабовите, што лежат на основите на призмата се викаат *основни рабови* на призмата ($AB$, $BC, \ldots,$ $A_1B_1$, $B_1C_1, \ldots$ на црт. 182.), а сите други рабови — *околни рабови* на призмата ($AA_1$, $BB_1$, $CC_1, \ldots$ на црт. 182.).

Сите околни рабови на правата призма се нормални на основите на призмата и се складни еден на друг.

Права четиристрана призма, чии основи се правоаголници, се вика *правоаголен паралелопипед* или, кратко, *квадар* (црт. 184). Според тоа познатото тело квадар претставува призма и тоа, права четиристрана призма, чии основи и околни страни се правоаголници.



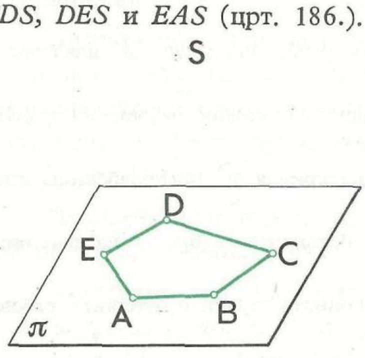
Црт. 184

А какво тело е коцката? И коцката е призма, и тоа: права четиристрана призма, чии основи и околни страни се складни квадрати.

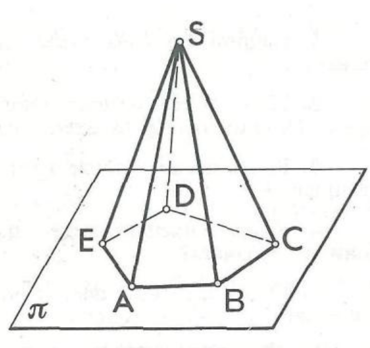
Должините на кои да било три раба на квадарот, кои излегуваат од едно исто негово теме, се викаат *димензии* на квадарот.

## § 45. ПИРАМИДА. ПОИМ И ЕЛЕМЕНТИ

Во рамнината $\pi$ нацртајте еден произволен многуаголник, на пример, петаголникот $ABCDE$, и надвор од рамнината земете (уочете) една која да било точка $S$ (црт. 185.). Потоа, точката $S$ соединете ја со секое теме на петаголникот $ABCDE$. Така се добиваат и пет триаголника: $ABS$, $BCS$, $CDS$, $DES$ и $EAS$ (црт. 186.).




Црт. 185

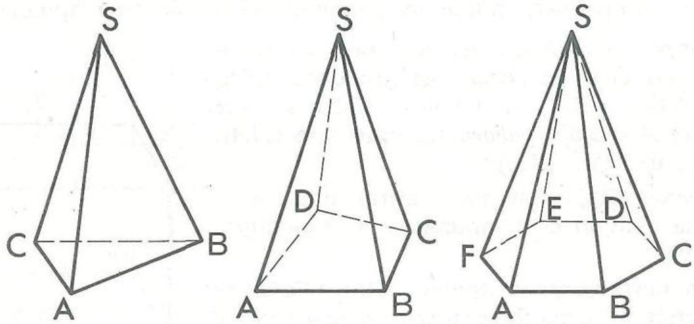



Црт. 186

Површината, која се состои од петаголникот $ABCDE$ и петте триаголника, ограничува одреден дел од просторот, кој се вика *пешстрана пирамида*.

Ако во рамнината $\pi$, наместо петаголник, земевме триаголник, четириаголник, односно шестаголник, на сличен начин ќе добиевме: *тристрана*, *четиристрана*, односно *шестстрана пирамида* (црт. 187.).

**Пирамида е рабесто геометриско тело ограничено со еден многуаголник и онолку триаголници (сите со едно заедничко теме), колку што страни има многуаголникот.**




Црт. 187

Многуаголникот се вика *основа* (или *базис*) на пирамидата; триаголниците што имаат заедничко теме $S$, се викаат *околни страни* на пирамидата; а точката (темето) $S$ — *врв* на пирамидата.

Сите околни страни заедно ја сочинуваат околната површина или *обвивката* на пирамидата.

Отсечките $AB$, $BC$, $CD$, . . . , што ја ограничуваат основата на пирамидата, се викаат *основни рабови*, а отсечките $AS$, $BS$, $CS$ итн., што не лежат на основата, се викаат *околни рабови* на пирамидата.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Нацртај по една права тристрана, четиристрана, петстрана и шестстрана призма!

**2.** Што се тоа основи, околни страни, основни и околни рабови на правата призма? Покажи го тоа на еден модел на права призма!

**3.** Каква заемна положба имаат и какви се по должина околните рабови на правата призма?

**4.** Каква зависност постои помеѓу бројот на основните и бројот на околните рабови на призмата?

**5.** Каква зависност постои помеѓу бројот на околните страни и околните рабови на призмата?

**6.** Што е квадар, а што коцка?

7. Со какви фигури е ограничен квадарот, ако трите негови димензии се еднакви?

8. Нацртај по една тристрана, четиристрана и петстрана пирамида!

9. Каква зависност постои помеѓу бројот на основните и околните рабови на пирамидата?

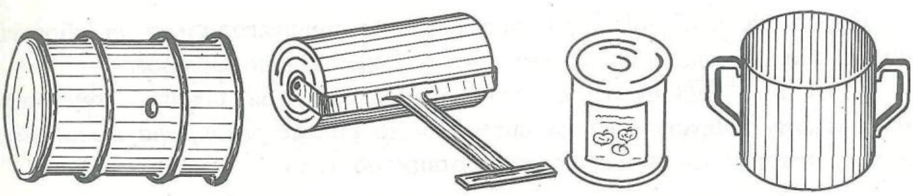
10. Колку најмногу страни може да има: а) призмата, б) пирамидата?

11. Може ли сите околни рабови на пирамидата да се складни еден на друг?

## § 46. ЦИЛИНДАР. ПОИМ И ЕЛЕМЕНТИ

Добро ви е позната формата на телата што ги гледаме на црт. 188.: буре за бензин, ваљак, кутија од конзерва и лонец.

Секое од тие тела е ограничено со два паралелни складни круга и една крива површина. Тие облести тела се викаат *цилиндри*, а кривата површина со која се обвиени, се вика *цилиндрична површина*.



Црт. 188

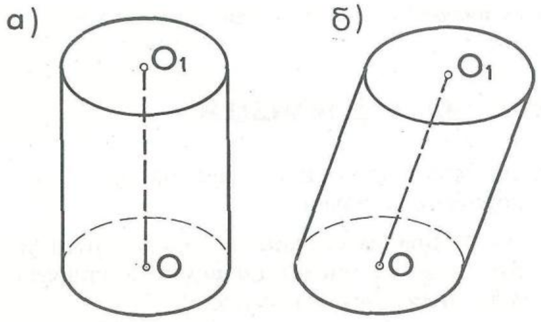
**Цилиндар е облесто геометриско тело, ограничено со два паралелни складни круга и една цилиндрична површина.**

Паралелните складни кругови се викаат *основи* (или базиси) на цилиндарот, а цилиндричната површина — околна површина или *обвивка* на цилиндарот.

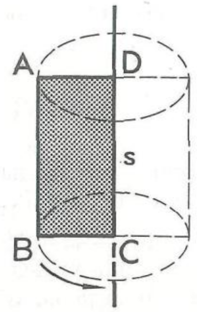
Правата која минува низ центрите на двете основи се вика *оска* на цилиндарот (правата $OO_1$ на црт. 189.). Кога оската на цилиндарот е нормална спрема основите, велиме дека цилиндарот е *йрав* (црт. 189. а), а ако оската е коса спрема основите, тогаш за тој цилиндар велиме дека е *кос* (црт. 189. б).

Правиот цилиндар може да се добие со вртење на еден правоаголник околу една своја страна.

Да земеме еден модел на правоаголник исечен од картон или лим и по една од неговите страни (на пример, долж страната $CD$) да прицврстиме една жица $s$ (црт. 190.). Ако моделот на правоаголникот почнеме да го вртиме околу страната *CD*, ќе се образува цилиндар. Страната *CD*, односно правата *s*, околу која се врти правоаголникот, претставува оска на образуваниот цилиндар. Страната *AB*, при вртењето на правоаголникот ја образува цилиндричната површина, а другите две страни *AD* и *BC* ги образуваат основите (круговите) на цилиндарот (црт. 190.).




Црт. 189



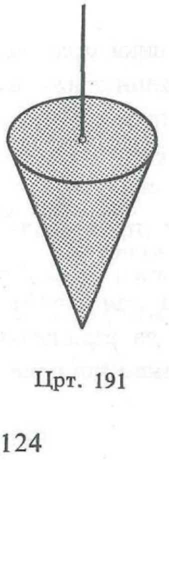

Црт. 190

Отсечката *AB*, која при вртењето на правоаголникот ја образува цилиндричната површина, се вика *генератриса* на цилиндарот.

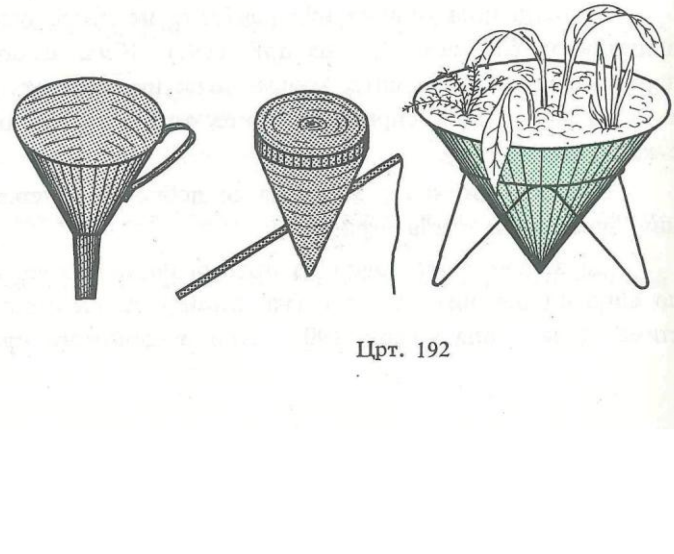
Тела што настануваат со вртење (ротација) на некоја геометриска фигура околу избрана оска на вртењето, се викаат ***ротациони тела.*** Според тоа, правиот цилиндар е едно ротационо тело.

## § 47. КОНУС. ПОИМ И ЕЛЕМЕНТИ

За утврдување на вертикалната положба на правите и рамнините се служевме со направата висок (црт. 191.). Металниот дел на високот е тело ограничено со еден круг и една крива површина, која завршува во една точка (црт. 191.). Таква форма имаат и: инката, вртелешката и саксијата за цвеќе на црт. 192.



Црт. 191



Црт. 192

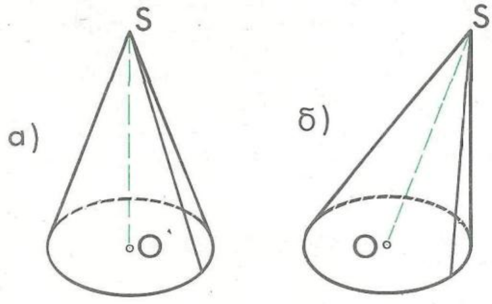
Тие облести тела се викаат *конуси*, а кривата површина со која се обвиени, се вика *конусна површина*.

**Конус е облесто геометриско тело, ограничено со еден круг и една конусна површина.**

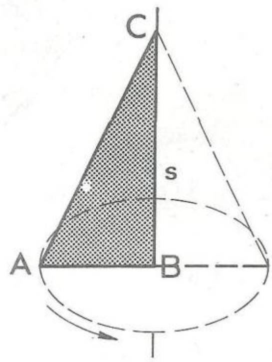
Кругот се вика *основа* (*базис*) на конусот, а кривата конусна површина — околна површина или *обвивка* на конусот. Точката во која завршува конусната површина, се вика *врв* на конусот.

Правата, која минува низ врвот и центарот на основата, се вика *оска* на конусот (правата $SO$ на црт. 193.). Ако оската на конусот е нормална на основата, велиме дека конусот е *йрав* (црт. 193. а). Ако, пак, оската е коса спрема основата, тогаш за тој конус велиме дека е *кос* (црт. 193. б).

Правиот конус, исто така, е ротацино тело, кое се добива со вртење на еден правоаголен триаголник $ABC$ околу една негова катета (на пример, околу катетата $BC$) (црт. 194.).




Црт. 193




Црт. 194

Катетата $BC$, односно правата $BC$, околу која се врти правоаголниот триаголник, претставува оска на образуваниот конус. Другата катета ($AB$) при вртењето ја образува основата (кругот) на конусот, а хипотенузата ($AC$) — конусната површина или обвивката на конусот.

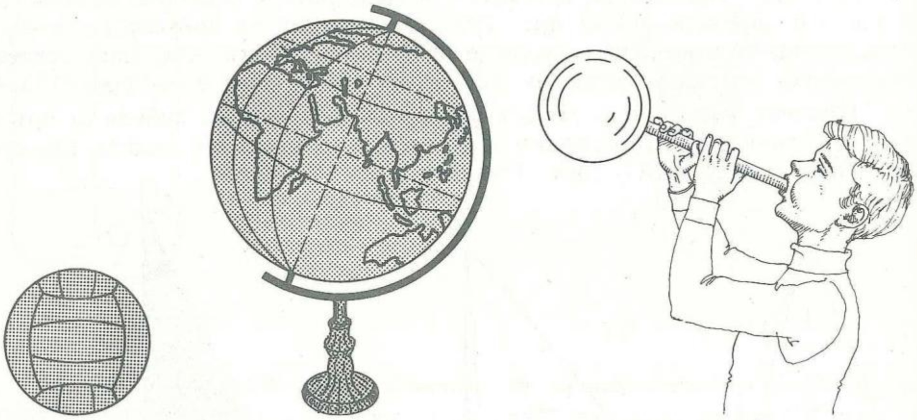
Отсечката $AC$, која при вртењето на правоаголниот триаголник ја образува конусната површина, се вика *генерайриса* на конусот. Бидејќи при вртењето таа зазема различни положби, велиме дека генератриса на конусот е секоја отсечка, која го сврзува врвот со која да било точка од кружницата на основата на конусот.

Сите генератриси на правиот конус се складни една со друга.

## § 48. ТОПКА. ПОИМ И ЕЛЕМЕНТИ

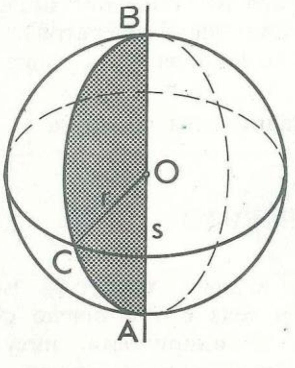
На црт. 195. можат да се видат: топка за играње, глобус и меур од сапуница. Како што гледаме, секое од тие три тела е ограничено само со една крива површина, која не личи ниту на цилиндричната, ниту на конусната површина. Таа крива површина нема ни рабови, ни врвови, но го има тоа својство, што сите нејзини точки се еднакво оддалечени од една внатрешна фиксна (постојана) точка на телото. За секое од горните тела велиме дека има форма на *тойка*, а кривата површина со која секое од нив е ограничено, ја викаме *тойкина йовршина* или *сфера*.

**Топка е облесто геометриско тело, ограничено со една крива површина, чии точки се еднакво оддалечени од една внатрешна фиксна точка.**



Црт. 195.

Внатрешната фиксна точка се вика *ценшар* на топката, а отсечката што ја сврзува која и да било точка од топкината површина со нејзиниот центар, се вика *радиус* на топката. Отсечката, што сврзува две точки од површината на топката и минува низ центарот, се вика *дијамешар* на топката.




Црт. 196

Топката е ротационо тело, кое настанува со вртење на еден полукруг околу неговиот дијаметар (црт. 196).

Полукружницата $ACB$ при вртењето ја образува топкината површина, со која е ограничена топката, а дијаметарот $AB$— *оскаша* на топката. Од фактот, што сите точки од полукружницата се еднакво оддалечени од нејзиниот центар $O$, станува јасно дека и сите точки од топкината површина се еднакво оддалечени од центарот на топката.

**Топкина површина или сфера е множеството на сите точки во просторот, кои се еднакво оддалечени од една фиксна точка.**

**1.** Именувај неколку тела кои имаат форма на цилиндар!

**2.** Како настанува цилиндарот? Покажи го тоа со еден модел на правоаголник!

**3.** По цилиндричната површина можат ли да се повлечат паралелни прави и како?

**4.** Што претставува множеството на сите точки во просторот, кои се наоѓаат на дадено еднакво растојание од дадена права?

**5.** Правоаголникот *ABCD* се врти околу страната *AB*. Што образува при тоа вртење: а) точката *C*, б) точката *D*, в) страната *AD*, г) страната *BC*, д) страната *CD*, ѓ) правоаголникот *ABCD*?

**6.** Во прав цилиндар постои ли точка што е еднакво оддалечена од секоја точка на кружниците на двете основи од тој цилиндар? Која е таа точка?

**7.** Именувај неколку тела кои имаат форма на конус!

**8.** Како настанува конусот? Покажи го тоа со еден модел на правоаголен триаголник!

**9.** Правоаголен триаголник *ABC* со прав агол во темето *B*, се врти околу катетата *BC*. Што образува при тоа вртење: а) точката *A*, б) страната *AB*, в) страната *AC*, г) страната *BC*, д) триаголникот *ABC*?

**10.** Во прав конус постои ли точка, што е еднакво оддалечена од секоја точка на кружницата на основата и врвот на конусот? Која е таа точка?

**11.** Како настанува топката? Покажи го тоа со еден модел на полукруг или круг!

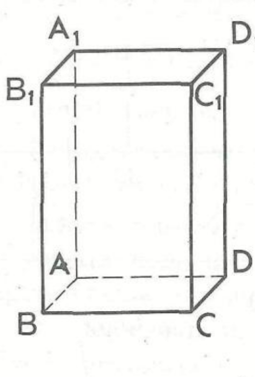
**12.** Што претставува множеството на сите точки во просторот, кои од дадена точка *S* се наоѓаат на растојание: а) еднакво на 4 *cm*, б) не поголемо од 4 *cm*?

## § 49. МРЕЖА И МОДЕЛ НА КВАДАР И КОЦКА

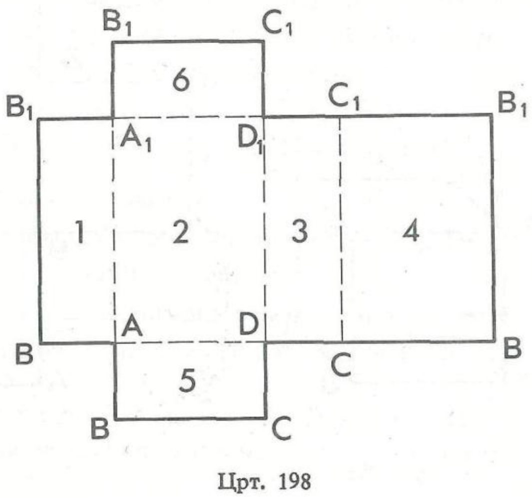
Земете еден модел на квадар од лим или картон (сл. 197.),

Ако во рамнината на една страна на квадарот ги собориме (легнеме) сите други негови страни, ќе ја добиеме *мрежата* на квадарот (црт. 198).

Гледаме дека мрежата на квадарот се состои од шест правоаголници, од кои два по два се складни. Правоаголниците 1, 2, 3 и 4 ја сочинуваат обвивката на квадарот, а правоаголниците 5 и 6 — основите на квадарот (црт. 198.).




Црт. 197

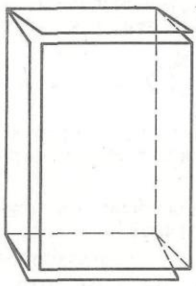



Црт. 198

Складни правоаголници во мрежата на квадарот се правоаголниците 1 и 3; 2 и 4; и 5 и 6.

За да направиме модел на квадар од картон, потребно е прво да ја нацртаме мрежата на квадарот.

Мрежата на квадарот ја цртаме така, што прво ќе нацртаме четири правоаголника еден до друг, што ќе ни ги претставуваат околните страни на квадарот. Правоаголниците 1 и 3, а исто и 2 и 4, треба да се со еднакви димензии. Потоа, над страните $BC$ и $B_1C_1$ од правоаголникот 2, нацртуваме други два правоаголника со висина што е еднаква на должината на правоаголникот 1 или 3 (црт. 198).

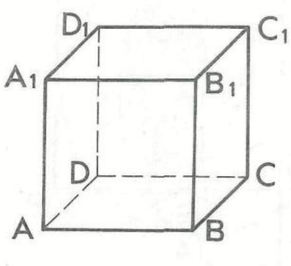


Црт, 199

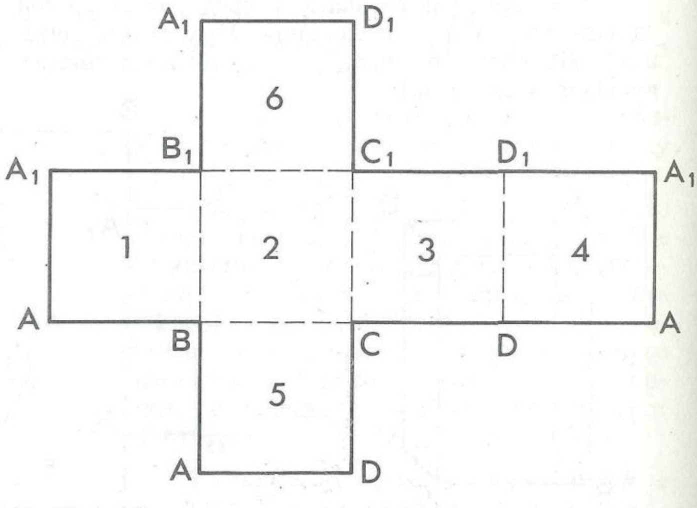
Потоа, така нацртаната мрежа на квадарот ја исекуваме, а по испрекинатите линии што ги одделуваат правоаголниците еден од друг истата ја свиткуваме и го склопуваме моделот на квадратот (црт. 199.).

Квадарот се црта како на црт. 197. Прво ја цртаме долната основа $ABCD$ на квадарот, а потоа од темињата $A$, $B$, $C$ и $D$ издигаме нормални отсечки со должина еднаква на должината на околниот раб на квадарот. На крајот ги соединуваме горните крајни точки $A_1$, $B_1$, $C_1$ и $D_1$ на нацртаните нормални отсечки и со тоа ја добиваме сликата на квадратот (црт. 197.).

И мрежата на коцката (сл. 200.). ја добиваме кога целата нејзина површина (сите 6 квадрати) ја положиме да лежи во рамнината на една нејзина страна (сл. 201.).




Црт. 200




Црт. 201

Цртањето на мрежата на коцката го правиме така, што прво нацртуваме четири складни квадрати поредени еден до друг, а потоа над спротивните страни на кој да било од тие квадрати нацртуваме уште два такви квадрати.

Моделот на коцка го склопуваме на сличен начин како и моделот на квадар. А сликата на коцката ја цртаме исто како на црт. 200.

## § 50. ПЛОШТИНА НА ПОВРШИНАТА НА КВАДАР И КОЦКА

Од мрежата на квадарот гледаме дека неговата површина се состои од шест правоаголници. Значи, плоштината на површината на квадарот е еднаква на збирот од плоштините на правоаголниците со кои тој е ограничен.

*Бидејќи две по две спротивни страни на квадарот се складни правоаголници*, затоа плоштината на неговата површина можеме побрзо да ја одредиме, кога збирот од плоштините на трите различни страни (правоаголници) го помножиме со бројот 2.

Ако димензиите на квадарот ги означиме со буквите $a$, $b$ и $c$, поточно, ако должината на основата ја означиме со буквата $a$, ширината на основата со $b$, а висината на квадарот со $c$, тогаш правилото за пресметување плоштината на површината на квадарот можеме да го запишеме вака:

$$P = 2(ab + ac + bc).$$

**Задача:** Да се пресмета плоштината на површината на квадар, чиишто димензии се: $a = 12\ cm$, $b = 9\ cm$ и $c = 14\ cm$.

Плоштината на површината на квадарот ќе ја одредиме кога во горната формула буквите $a$, $b$ и $c$ ги замениме со мерните броеви на дадените димензии (претходно изразени во иста единица мерка), а ќе биде изразена во соодветната единица мерка за плоштина ($cm^2$).

$$P = 2(12 \cdot 9 + 12 \cdot 14 + 9 \cdot 14) = 2(108 + 168 + 126) = 2 \cdot 402 = 804\ (cm^2).$$

Значи, плоштината на површината на дадениот квадар е $P = 804\ cm^2$.

Формулата на плоштината на квадарот важи и во случај кога мерните броеви на неговите димензии се децимални броеви.

Бидејќи коцката е ограничена со шест складни квадрати, плоштината на нејзината површина ќе ја најдеме кога плоштината на еден од тие квадрати ја помножиме со бројот 6.

Ако должината на работ на коцката ја означиме со буквата $a$, формулата за пресметување плоштината на површината на коцката ќе биде:

$$P = 6a^2.$$

**Задача:** Да се одреди плоштината на површината на коцка, чиј раб е долг $a = 12\ cm$!

Решение: $P = 6a^2 = 6 \cdot 12^2 = 6 \cdot 144 = 864\ (cm^2)$.

Значи, плоштината на површината на коцката изнесува $P = 864\ cm^2$.

### ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Нацртај ја мрежата на квадар, чии димензии се: $a=6\ cm$, $b=4\ cm$, и $c=7\ cm$!

**2.** Направи модел на квадар од картон со димензии: $a=9\ cm$, $b=4\ cm$, и $c=5\ cm$!

**3.** Пресметај ја плоштината на површината на квадар, чии димензии се: а) $a = 18\ cm$, $b = 12\ cm$, $c = 2\ cm$; б) $a = 42\ cm$, $b = 27\ cm$, $c = 12\ cm$!

**4.** Нацртај ја мрежата на коцка со должина на работ: а) $2\ cm$, б) $3\ cm$, в) $28\ cm$!

**5.** Направи модел на коцка со должина на работ: а) $4\ cm$, б) $3\ cm$,

**6.** Пресметај ја плоштината на површината на коцка, чиј раб е долг: а) $11\ cm$, б) $8\ cm$, в) $7\ dm$!

**7.** Колку квадратни метри лим е потребно за изработување на 50 кутии, кои ќе имаат форма на коцка со должина на работ $24\ cm$!

**8.** Лимарот добил порачка да направи 400 кутии во форма на квадар, со димензии: $32\ cm$, $24\ cm$, $15\ cm$. Колку квадратни метри лим е потребно за тоа!

**9.** Даден е еден квадар со димензии $12\ cm$, $6\ cm$, $5\ cm$ и една коцка со должина на работ $7\ cm$. Одреди кое од тие две тела има поголема плоштина на површината?

**10.** Колку пати ќе се зголеми плоштината на површината на коцка, ако нејзиниот раб го зголемиме: а) 2 пати, б) 3 пати! Покажи го тоа на коцка со раб: $4\ cm$!

**11.** Даден е квадар со димензии: $5\ cm$, $3\ cm$ и $2\ cm$. Испитај колку пати ќе се зголеми плоштината на површината на тој квадар, ако секоја од неговите три димензии ја зголемиме: а) 2 пати б) 3 пати!

## § 51. ВОЛУМЕН НА КВАДАР И КОЦКА

Квадарот и коцката се геометриски тела, а геометриските тела се фигури од посебен вид, различен од линиите и површините. Тие секогаш зафаќаат некој дел од просторот, што е ограничен од сите страни.

Видовме дека ограничените делови од правата (отсечките), а исто и ограничените делови од рамнината (геометриските слики) можат да се споредуваат и да се мерат.

Ќе видиме дека и ограничените делови од просторот (геометриските тела) можат да се споредуваат и да се мерат.

Секое тело има свој точно определен *волумен.*

Волумен е геометриска величина од посебен вид, која ги карактеризира геометриските тела (ограничените делови од просторот) и е врзана исклучително само за нив.

Волуменот на телото, како и секоја друга величина (должина на отсечките, плоштина на геометриските слики и др.), може да се мери и да се изразува со броеви.

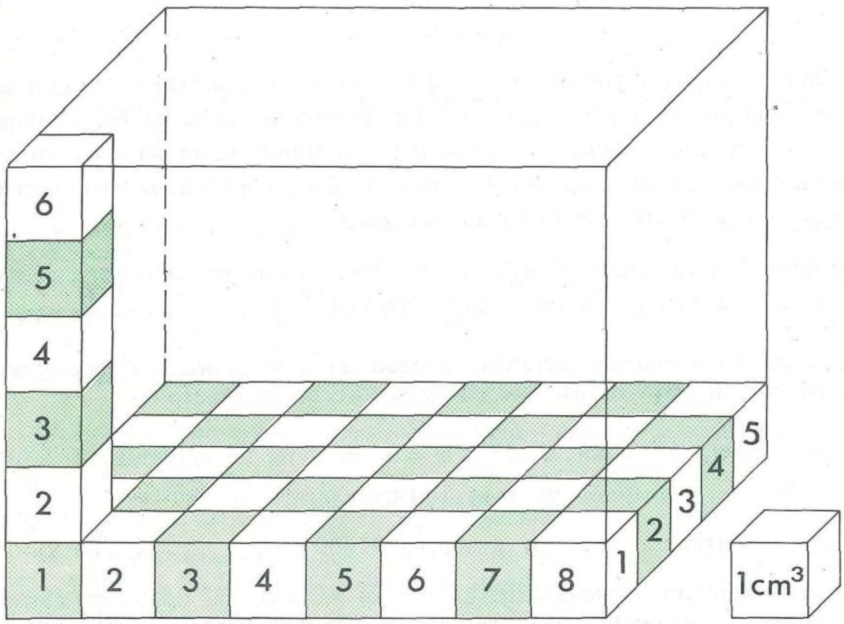
При мерењето на волуменот, мереното тело го споредуваме со некоја коцка, чиј волумен е примен за единица. Таа коцка се вика *единична коцка* или *единица мерка* за мерење на волуменот на телата.

И при избирањето на единиците мерки за волумен се покажало практично тие да бидат усогласени со единиците мерки за должина на отсечките. На пример, од должинските единици: $m$, $dm$, $cm$ и $mm$, се изведени единиците мерки за волумен: *кубен метар* ($m^3$), *кубен дециметар* ($dm^3$), *кубен сантиметар* ($cm^3$) и *кубен милиметар* ($mm^3$).

**Еден кубен метар ($m^3$) е волуменот на коцка, со раб долг 1 $m$.**

Волуменот на телата го означуваме со буквата $V$.

Да видиме сега како го одредуваме волуменот на квадар и коцка.




Црт. 202

Нека е даден квадар, чии димензии се: $a = 8\ cm$, $b = 5\ cm$ и $c = 6cm$ (црт. 202.). За да го одредиме волуменот на тој квадар, земаме повеќе единични коцки од по 1 $cm^3$. Потоа, по должината на работ на квадарот поставуваме такви коцки една до друга. Јасно е дека по должината на работ $a$ ќе поставиме 8 такви коцки, бидејќи тој е долг 8 $cm$. За да ја покриеме основата на квадарот со такви коцки, ќе треба да поставиме 5 реда по 8 коцки, т.е. $8 \cdot 5 = 40$ коцки од по 1 $cm^3$

Тоа е само еден пласт од коцки поставен при основата на квадарот. За да го исполниме целиот простор, што го ограничува дадениот квадар со коцки од 1 $cm^3$, јасно е дека ќе треба да поставиме 6 такви пластови по 40 коцки, т.е. $40 \cdot 6 = 240$ коцки од по 1 $cm^3$.

Според тоа, дадениот квадар содржи 240 $cm^3$, т.е. има волумен $V = 240\ cm^3$.

До истиот резултат ќе дојдеме и кога ќе ги помножиме мерните броеви на должината, ширината и висината на квадарот, т.е. $8 \cdot 5 \cdot 4 = 240$. Според тоа:

**Волуменот на квадарот е еднаков на производот од неговите три димензии,** т.е.

$$V = abc.$$

**Забелешка:** При употребата на формулите за плоштина на површината и волумен на квадарот, трите негови димензии треба да бидат изразени во иста единица мерка за должина. А, плоштината на површината (односно волуменот) на квадарот во тој случај се изразува во соодветната единица мерка за плоштина (односно волумен).

**Задача:** Да се пресмета кубатурата (волуменот) на ѕид, чии димензии се: должина 12 $m$, ширина 6 $dm$ и висина 3 $m$.

Пред да ги замениме мерните броеви на димензиите во формулата за волумен на квадар, истите ќе ги изразиме во дециметри:

$a = 12\ m = 120\ dm$; $b = 6\ dm$ и $c = 3\ m = 30\ dm$; па ќе добиеме:

$$V = 120 \cdot 6 \cdot 30 = 21600\ (dm^3).$$

Значи, кубатурата на ѕидот изнесува 21600 $dm^3$.

Бидејќи коцката е специјален случај на квадар, кај кого сите димензии се еднакви, волуменот на коцката го наоѓаме кога мерниот број на нејзиниот раб го помножиме три пати самиот со себе.

Формулата за волумен на коцката можеме да ја добиеме од формулата за волумен на квадар, кога во неа ќе ставиме дека е $b = c = a$. Така добиваме:

$$V = a \cdot a \cdot a \quad \text{или} \quad V = a^3.$$

**Волуменот на коцката е еднаков на кубот од должината на нејзиниот раб.**

**Задача:** Да се одреди волуменот на коцка, чиј раб е долг 16 *cm*!

Решение: $V = 16^3 = 16 \cdot 16 \cdot 16 = 4096\ (cm^3)$.

Значи, бараниот волумен на коцката е $V = 4096\ cm^3$.

## ПРАШАЊА И ЗАДАЧИ

**1.** Како се одредува волуменот на квадар, а како на коцка?

**2.** Одреди го волуменот на квадар, чии димензии се: а) $a = 3\ dm$, $b = 8\ dm$, $c = 2\ dm$; б) $a = 2\ m$, $b = 12\ dm$, $c = 5\ dm$!

**3.** Пресметај ја кубатурата (волуменот) на еден ѕид, што е долг 15 *m*, широк 4 *dm* и висок 3 *m*!

**4.** Тулата има димензии 25 *cm*, 12 *cm*, 6 *cm*. Колку тули оди во 1 $m^3$?

**5.** Колку тули се потребни за ѕидањето на еден ѕид, долг 9 *m*, широк 5 *dm* и висок 5 *m*?

**6.** Најди го волуменот на коцка, чијшто раб е долг: а) $a = 12\ cm$, б) $a = 8\ cm$ в) $a = 2\ dm$!

**7.** Најди го волуменот на една камена коцка за постилање на улиците, чијшто раб е долг 9 *cm*!

**8.** Најди го волуменот на една септичка јама, што има форма на коцка, со основен раб долг 3 *m*!

**9.** Една соба има волумен 72 $m^3$. Колку таа е висока, ако се знае дека е долга 6 *m*, а широка 4 *m*?

**10.** Училницата има димензии: должина 8 *m*, ширина 6 *m* и висината 5 *m*. Колку најмногу ученици можат да се сместат во неа, ако за секој ученик е потребно најмалку 6 $m^3$ воздух.

**11.** Најди го волуменот на една бетонска плоча, чии димензии се: 12 *m*, 8 *m*, 12 *cm*!

**12.** Најди го волуменот на една канта висока 4 *dm*, која за основа има квадрат со страна долга 25 *cm*!

**13.** Колкав треба да биде мерниот број на работ на коцката, така што нејзината плоштина и волумен да имаат еднакви мерни броеви?

**14.** Оловна коцка, со раб долг 18 *cm*, треба да се прелие во мали коцки со рабови долги по 3 *cm*, Колку такви коцки ќе се добијат?

**15.** Колку пати ќе се зголеми волуменот на една коцка, ако нејзиниот раб се зголеми: а) 2 пати, б) 3 пати, в) 5 пати? Покажи го тоа на коцка со раб долг 2 *cm*!

**16.** Даден е квадар со димензии: $a = 6\ cm$, $b = 4\ cm$ и $c = 3\ cm$. Колку пати ќе се зголеми или ќе се намали волуменот на тој квадар, ако: а) само неговата висина *c* ја зголемиме 5 пати, а другите две димензии останат непроменети, б) сите три димензии ги зголемиме 2 пати, в) должината ја зголемиме 4 пати, а ширината и висината ги намалиме секоја по 2 пати; г) должината ја намалиме 2 пати, ширината ја намалиме 3 пати, а висината ја зголемиме 12 пати?

**17.** Пресметај ја кубатурата на една греда која е долга 6 *m*, а за основа има квадрат со страна долга 2 *dm*!

**18.** Колку кубни метри штици се потребни за постилање на подот на една сала, чии димензии се: должина $25\ m$, и ширина $10\ m$, ако штиците се дебели $2\ cm$?

**19.** Најди го волуменот на една кутија, што има форма на коцка, чиј раб е долг $24\ cm$!

**20.** Познато ни е дека литарот е единица мерка за волумен на течностите и дека 1 литар $= 1\ dm^3$. Колку хектолитри има во $1\ m^3$?, а колку кубни сантиметри има во $1\ dl$.

**21.** Еден базен има волумен $45\ m^3$. Колку хектолитри вода собира тој? А колку литри?

**22.** Колку вода собира еден базен, кој има форма на квадар со димензии: должина $48\ m$, ширина $24\ m$ и длабочина $25\ dm$. За колку време ќе се наполни базенот, ако тој се полни од две цевки, од кои едната дава $65\ l$ во минута, а другата $35\ l$ во минута?

**23.** Колку треба да изнесува висината на еден сад, што има форма на квадар, чија должина е $25\ cm$ и ширина $16\ cm$, ако сакаме тој да собира $20\ l$.

**24.** Имаме еден квадар со димензии $12\ cm$, $9\ cm$, $5\ cm$; и една коцка со раб долг $8\ cm$. Одреди кое од тие две тела има: а) поголем волумен, б) поголема плоштина на површината!

## ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ

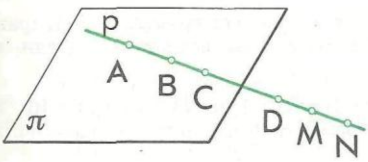
**1.** Точките $A$ и $B$ од правата $p$ лежат на рамнината $\pi$ (црт. 203.). Што можеш да кажеш за точките $C$, $D$, $M$ и $N$ од правата $p$? Каква положба имаат тие точки спрема рамнината $\pi$?

**2.** Дадени се две рамнини кои се сечат и една права што е паралелна со пресечката на двете рамнини. Каква положба зазема дадената права спрема секоја од двете рамнини?

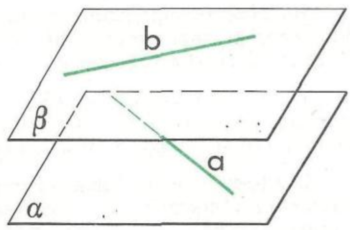
**3.** Дадени се две рамнини во просторот: една хоризонтална рамнина $h$ и една коса рамнина $k$. Во рамнината $k$ обележи една точка $M$, која да лежи надвор од рамнината $h$. Испитај дали низ точката $M$ во рамнината $k$ може да се повлече права, која да биде паралелна со рамнината $h$! Покажи го тоа со помош на два картона!

**4.** Мораат ли секогаш да се паралелни: а) две хоризонтални рамнини, б) две хоризонтални прави, в) две вертикални прави, г) две вертикални рамнини? Покажи го тоа со модели на прави и рамнини!

**5.** Кои заемни положби можат да ги имаат: а) две хоризонтални прави, б) две вертикални прави, в) хоризонтална права и вертикална рамнина, г) вертикална права и хоризонтална рамнина?




Црт. 203




Црт. 204

**6.** На црт. 204. разминувачките прави $a$ и $b$ лежат во две паралелни рамнини $\alpha$ и $\beta$. Направи цртеж, така што две разминувачки прави да припаѓаат на две рамнини што се сечат!

**7.** Може ли рамнината $\pi$ да сече: а) само една од две паралелни прави, б) само една од две прави што се сечат?

**8.** Каква заемна положба можат да имаат правите $p$ и $s$, ако е познато дека: $p \cap \pi = \{A\}$; $s \| \pi$?

**9.** На правата $p$ означени се три нејзини точки $A$, $B$ и $C$. Колку различни полуправи се образуваат при тоа и кои се тие?

**10.** Во рамнината $\pi$ повлечени се две паралелни прави $p$ и $q$ На колку дисјунктивни делови ја разбиваат рамнината $\pi$ правите $p$ и $q$?

**11.** Колку различни отсечки определуваат 3 различни точки, кои: а) припаѓаат, б) не припаѓаат на иста права?

**12.** Колку различни отсечки определуваат 4 различни точки, кои припаѓаат на една иста права $p$?

**13.** Што можеш да кажеш за правите $a$, $b$ и $c$, ако е познато дека: а) $a \perp c$, $c \perp b$; б) $a \perp c$, $c || b$; в) $a || c$, $c \perp b$; г) $a || c$, $c || b$?

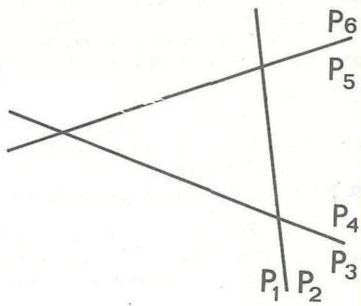
**14.** На слика 205. нацртани се три прави, кои две по две се сечат. Со $P_1$; $P_2$; $P_3, \dots$ означени се соодветните полурамнини на кои нацртаните прави ја разбиваат рамнината. Шрафирај ги фигурите што се определени со следниве релации:

а) $P_1 \cap P_4$: $P_2 \cap P_5$; в) $P_2 \cap P_6$; г) $(P_1 \cap P_5) \cap P_4$; д) $(P_2 \cap P_6) \cap P_3$;
ѓ) $(P_4 \cap P_5) \cap P_2$; е) $(P_4 \cap P_5) \cap (P_1 \cap P_5)$; ж) $(P_1 \cap P_3) \cap (P_3 \cap P_6)$!

**15.** Каква заемна положба имаат две прави, што се нормални на трета права, а лежат: а) во една рамнина; б) во различни рамнини?

**16.** Ако еден прав агол се врти околу еден свој крак, што образува другиот негов крак? Покажи го тоа со еден правоаголен триаголник!

**17.** Дадена е права $p$ и една точка $M$, што лежи на неа. Колку нормални прави можат да се повлечат во просторот низ точката $M$ на правата $p$? Каде лежат тие прави? Покажи!




Црт. 205

**18.** Нацртај отсечка $\overline{AB} = 5\ cm$. Потоа, нацртај две кружници со центри во точките $A$ и $B$, така што: а) двете кружници да имаат еднакви радиуси $r = 3\ cm$; б) едната кружница да има радиус $r_1 = 4\ cm$, а другата $r_2 = 2\ cm$; в) едната да има радиус 22 $mm$, а другата 28 $mm$! Во каква заемна положба се наоѓаат нацртаните кружници?

**19.** Нацртај кружница и повлечи во неа тетива $AB$! Во крајната точка $B$ на таа тетива нацртај друга тетива $BC$, која ќе е нормална на тетивата $AB$! Соедини ги точките $A$ и $C$! Што забележуваш? Каква е тетивата $AC$?

**20.** Нацртај агол $\alpha = 140^0$. Од темето на аголот $\alpha$ повлечи нормални полуправи на неговите краци, кои да припаѓаат на внатрешната област на аголот $\alpha$. Одреди го аголот $\beta$, што го образуваат нормалите!

**21.** Еден кружен лак претставува: а) 1/3, б) 1/4, в) 1/5, г) 1/8, д) 1/10 од кружницата. Одреди колку агловни степени има централниот агол, што му одговара на тој кружен лак!

**22.** Нацртај кружница со радиус $r = 5\ cm$, потоа во неа нацртај тетива, долга 5 $cm$. Измери го централниот агол, што ѝ одговара на нацртаната тетива!

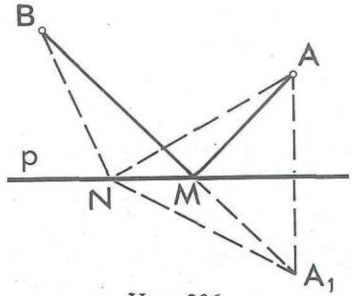
**23.** Даден е триаголник $MNP$. Без да го црташ триаголникот, одговори на следниве прашања: а) Кои страни го образуваат аголот $\measuredangle M$, б) Кој агол лежи спроти страната $MP$?, в) Која страна лежи спроти аголот $P$, а која спроти аголот $M$?

**24.** Две страни на еден триаголник се долги: а) $a = 6\ cm$ и $b = 10\ cm$; б) $a = 9\ cm$, $b = 4\ cm$. Одреди во кои граници може да се движи мерниот број на третата страна $c$!

**25.** Докажи дека висината, што е спуштена од темето на правиот агол кон хипотенузата во правоаголниот триаголник, е помала од секоја катета на тој правоаголен триаголник! Направи цртеж!

**26.** Дадени се права $p$ и две точки $A$ и $B$, што лежат на иста страна од неа (црт. 206.). На правата $p$ одреди ја онаа точка, на која збирот на растојанијата до двете дадени точки $A$ и $B$ е најмал!

**27.** Постои ли триаголник, таков што збирот на кои да било два негови внатрешни агла да е помал од $120^0$?

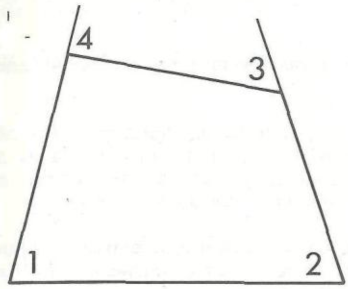



Црт. 206

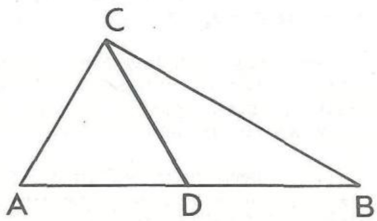
**28.** Постои ли триаголник, кој може да се раздели со некоја права на два остроаголни триаголника?

**29.** Разгледај о цртежот 207. и покажи дека е: $\widehat{1}+\widehat{2}=\widehat{3}+\widehat{4}$!

**30.** Во триаголникот $ABC$: $AC \cong AD \cong CD \cong DB$ (црт. 208.). Одреди ги големините на аглите на тој триаголник!

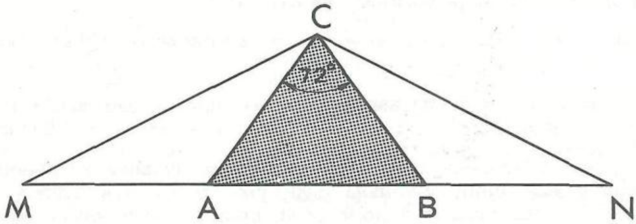



Црт. 207




Црт. 208

**31.** Во рамнокракиот триаголник $ABC$ ($AB \cong BC$) аголот при врвот изнесува $\widehat{C} = 72°$. Ако основата $AB$ му се продолжи од двете страни до точките $M$ и $N$ со отсечки што се складни на краците, т.е. $AM \cong AC \cong BC \cong BN$ како на црт. 209. и точките $M$ и $N$ се соединат со темето $C$, се добива триаголникот $MNC$. Одреди ги големините на внатрешните агли на триаголникот $MNC$!




Црт. 209

**32.** Во еден триаголнк, аголот $\beta$ е два пати поголем од аголот $\alpha$, а аголот $\gamma$ е три пати поголем од истиот агол $\alpha$. Одреди ги аглите на тој триаголник!

**33.** Во разностран триаголник, аголот $\alpha$ изнесува $30°$. Да се одредат другите агли, ако се знае дека аголот $\beta$ е два пати поголем од аголот $\gamma$!

**34.** Од каков вид е триаголникот, ако збирот на два негови остри агла е: а) помал од $90°$, б) поголем од $90°$, в) еднаков на $90°$?

**35.** Пресекот на два триаголника претставува отсечка, а нивната унија — правоаголник. Нацртај ја таа фигура!

**36.** Покажи дека: збирот од должините на дијагоналите на кој да било конвексен четириаголник е помал од неговиот периметар!

**37.** Колку најмногу прави надворешни агли може да има конвексниот многуаголник!

**38.** Кај кој многуаголник сите надворешни агли се тапи?

**39.** Колкава плоштина има една гаража за две лесни коли, кои се долги по $5\ m$ и широки $15\ dm$, а при услов меѓу колите и меѓу колите и ѕидовите, да има патеки широки по $1\ m$.

**40.** Училишниот двор има форма на квадрат со страна долга $46\ m$. Во еден агол од дворот се наоѓа училишната зграда, чиишто темели имаат форма на правоаголник со должина $30\ m$ и ширина $12\ m$. Пресметај ја плоштината на слободниот дел од училишниот двор!

**41.** Еден ходник кој е долг $18\ m$, а широк $4\ m$, треба да се поплочи со плочки што имаат форма на квадрат со страна долга $25\ cm$. Колку плочки се потребни за поплочување на ходникот?

**42.** Во една шума на $1\ a$, средно доаѓаат по 25 дрвја. Колку дрвја има во еден дел од таа шума, што има плоштина $86\ ha\ 7\ a$?

**43.** Земи еден модел на коцка и покажи: а) Кои две темиња од коцката се најодалечени?, б) Кој ти се чини дека е најкраток пат, одејќи по површината на коцката за да дојдеш од едното теме во другото? Потоа, расклопи го моделот на коцката и соедини ги тие темиња со отсечка! Дали го имаш погодено најкраткиот пат? Објасни го тоа!

**44.** Треба да се бетонираат 16 темели за машини, од кои секој има форма на коцка со раб $125\ cm$. Колку килограми цемент и колку кубни метри чакал е потребно за тоа, ако за $1\ m^3$ бетон е потребно $210\ kg$ цемент и $1\,250\ dm^3$ чакал?

**45.** Еден пливачки базен, во форма на квадар. има димензии: должина $12\ m$, ширина $8\ m$ и длабочина $3\ m$. Колку хектолитри вода треба да се стави во него, за да се наполни до половина?

**46.** Еден базен има домензии: должина $15\ m$. и ширина $10\ m$. Ако во базенот ставиме $3\ \ 00\ hl$ вода, до која висина ќе се наполни тој?

**47.** Една лимена кутија која има форма на квадар, чија основа е квадрат со страна $2\ dm$, собира 16 литри. Најди ја висината на кутијата?

**48.** Колкава собна површина можеме да покриеме со $420\ dm^3$ паркет, ако тој е дебел $2\ cm$?

**49.** Одреди ја плоштината на површината на еден квадар, ако е позната неговата должина $a = 16\ cm$, ширината $b = 11\ cm$ и неговиот волумен $V = 1\,232\ cm^3$!

**50.** Две групи работници се натпреварувале во копање на ровови. За одредено време првата група работници ископала еден ров долг $15\ m$, широк $12\ dm$ и длабок $18\ dm$; а втората група ископала ров долг $18\ m$, широк $1\ m$ и длабок $25\ dm$. Која група работници била подобра?

# ПРЕГЛЕД НА УПОТРЕБУВАНИТЕ СИМБОЛИ И ЕДИНИЦИ МЕРКИ

## I. ЗНАЧЕЊЕ НА СИМБОЛИТЕ

| Симбол | Употреба | Значење |
|---|---|---|
| $A, B, C, M$ | точки $A, B, C,$ | Ознаки за точки |
| $a, b, c, p$ | прави $a, b, c, p$ | Ознаки за прави |
| $\alpha, \beta, \gamma, \pi$ | рамнини $\alpha, \beta, \gamma, \pi$ | Ознаки за рамнини |
| $\{,\}$ | $\{A\}$ | Множество, кое се состои само од точката $A$ |
| | $\{A\ B\}$ | Множество од точките $A$ и $B$ |
| | $\{A, B, C\}$ | Множество од точкнте $A$, $B$ и $C$ |
| $\varnothing$ | $\varnothing$ | Ознака за празно множество |
| $\in$ | $A \in p$ | Точката $A$ ѝ припаѓа (лежи) на правата $p$ |
| | $M \in \pi$ | Точката $M$ ѝ припаѓа (лежи) на рамнината $\pi$ |
| $\notin$ | $C \notin p$ | Точката $C$ не ѝ припаѓа (не лежи) на правата $p$ |
| | $E \notin \pi$ | Точката $E$ не ѝ припаѓа (не лежи) на рамнината $\pi$ |
| $\subset$ | $p \subset \pi$ | Правата $p$ е содржана во (или лежи на) рамнината $\pi$ |
| $\not\subset$ | $q \not\subset \pi$ | $q$ не е содржана во (или не лежи на) $\pi$ |
| $\cap$ | $p \cap q$ | Знак за пресек на множества. $p$ пресек $q$ |
| $\cup$ | $p \cup \pi$ | Знак за унија на множества. $p$ унија $\pi$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\equiv$ | $A \equiv B$ | Точката $A$ се совпаѓа (идентична) со точката $B$ |
| $\not\equiv$ | $A \not\equiv C$ | $A$ не се совпаѓа (не е идентична) со $C$ |
| $\parallel$ | $p \parallel q$ | Знак за паралелност. $p$ е паралелна со $q$ |
| $\perp$ | $p \perp s$ | Знак за нормалност. $p$ е нормална на $s$ |
| $AB$ | Права $AB$ | Права што минува низ точките $A$ и $B$ |
| | полуправа $AB$ | Полуправа со почеток $A$, а што минува низ $B$ |
| | отсечка $AB$ | Отсечка со крајни точки $A$ и $B$ |
| $\overline{AB}$ | $\overline{AB}$ | Растојание од точката $A$ до точката $B$ |
| | $\overline{MS}$ | Должина на отсечката $MS$ |
| $=$ | $\overline{AB} = \overline{CD}$ | Знак за равенство. $\overline{AB}$ е еднаква со $\overline{CD}$ |
| $\neq$ | $\overline{AB} \neq \overline{MS}$ | $\overline{AB}$ е нееднаква со (различна од) $\overline{MS}$ |
| $<$ | $AB < CD$ | $AB$ е помала од $CD$ |
| $>$ | $AB > SM$ | $AB$ е поголема од $MS$ |
| $\leqslant$ | $\overline{AB} \leqslant \overline{KM}$ | $\overline{AB}$ е помала или еднаква со $\overline{KM}$ ($\overline{AB}$ не е поголема од $\overline{KM}$) |
| $\geqslant$ | $\overline{AB} \geqslant \overline{ST}$ | $\overline{AB}$ е поголема или еднаква со $ST$ ($\overline{AB}$ не е помала од $\overline{ST}$) |
| $\cong$ | $AB \cong CD$ | Знак за складност. $AB$ е складна со $CD$ |
| $+$ | $AB + CD$ | Знак за собирање. $AB$ плус $CD$ |
| $-$ | $AB - CD$ | Знак за одземање. $AB$ минус $CD$ |
| $\measuredangle$ | $\measuredangle ABC$ | Ознака за агол. Агол $ABC$ со теме во $B$ |
| $\frown$ | $\widehat{ABC}$ | Големина на аголот $ABC$ |
| | $\hat{1}$ | Големина на аголот 1 |
| $\llcorner$ | $\llcorner$ | Ознака за прав агол |
| $K$ | $K(O, r)$ | Кружница $K$ со центар во $O$ и радиус $r$ |
| $\widehat{AB}$ | $\widehat{AB}$ | Кружен лак $AB$ |
| $\Delta$ | $\Delta ABC$ | Ознака за триаголник. Триаголник $ABC$ |
| $L, P, V$ | | Ознаки соодветно за периметар, плоштина и волумен |

## II. ЕДИНИЦИ ЗА МЕРЕЊЕ И НИВНИТЕ ОЗНАКИ

### МЕРКИ ЗА ДОЛЖИНА

Основна единица: метар ($м$, $m$)

Помали изведени единици:

дециметар ($gм$, $dm$) $= \frac{1}{10}$ $м$

сантиметар ($см$, $cm$) $= \frac{1}{100}$ $м$

милиметар ($мм$, $mm$) $= \frac{1}{1000}$ $м$

микрон ($\mu$) $= \frac{1}{1\,000\,000}$ $м$

Поголеми изведени единици:

декаметар ($gкм$, $dkm$) $= 10$ $м$

хектометар ($хм$, $hm$) $= 100$ $м$

километар ($км$, $km$) $= 1000$ $м$

мегаметар ($Мм$, $Mm$) $= 1\,000\,000$ $м$

### МЕРКИ ЗА ПЛОШТИНА

Основна единица: квадратен метар ($м^2$, $m^2$)

Помали изведени единици:

квадратен дециметар ($gм^2$, $dm^2$) $= \frac{1}{100}$ $м^2$

квадратен сантиметар ($см^2$, $cm^2$) $= \frac{1}{10\,000}$ $м^2$

квадратен милиметар ($мм^2$, $mm^2$) $= \frac{1}{1000\,000}$ $м^2$

Поголеми изведени единици:

квадратен декаметар ($gкм^2$, $dkm^2$) или ар ($а$) $= 100$ $м^2$

квадратен хектометар ($хм^2$, $hm^2$) или хектар ($ха$, $ha$) $= 10\,000$ $м^2$

квадратен километар ($км^2$, $km^2$) $= 1\,000\,000$ $м^2$

### МЕРКИ ЗА ВОЛУМЕН

Основна единица: кубен метар ($м^3$, $m^3$)

Помали изведени единици:

кубен дециметар ($gм^3$, $dm^3$) $= \frac{1}{1000}$ $м^3$

кубен сантиметар ($см^3$, $cm^3$) $= \frac{1}{1\,000\,000}$ $м^3$

кубен милиметар ($мм^3$, $mm^3$) $= \frac{1}{1\,000\,000\,000}$ $м^3$

Поголеми изведени единици:

кубен декаметар ($gкм^3$, $dkm^3$) $= 1000$ $м^3$

кубен хектометар ($хм^3$, $hm^3$) $= 1\,000\,000$ $м^3$

кубен километар ($км^3$, $km^3$) $= 1\,000\,000\,000$ $м^3$

## МЕРКИ ЗА ВОЛУМЕН НА ТЕЧНОСТИ

Основна единица: литар (*л*, *l*)

Помали изведени единици:

децилитар $(дл,\ dl) = \frac{1}{10}\ л$

сантилитар $(сл,\ cl) = \frac{1}{100}\ л$

мililитар $(мл,\ ml) = \frac{1}{1000}\ л$

Поголеми изведени единици:

декалитар $(дкл,\ dkl) = 10\ л$

хектолитар $(хл,\ hl) = 100\ л$

килолитар $(кл,\ kl) = 1000\ л$

## МЕРКИ ЗА АГЛИ

Основна единица: прав агол (∟)

Помали изведени единици:

агловен степен (°); $1° = \frac{1^{∟}}{90}$

агловна минута (′); $1' = \frac{1}{60}$ од 1°

агловна секунда (″); $1'' = \frac{1}{60}$ од 1′

## III. АЗБУКИ

### ЛАТИНИЦА

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | a | а | N | n | ен |
| B | b | бе | O | o | о |
| C | c | це | P | p | пе |
| D | d | де | Q | q | ку |
| E | e | е | R | r | ер |
| F | f | еф | S | s | ес |
| G | g | ге | T | t | те |
| H | h | ха | U | u | у |
| I | i | и | V | v | ве |
| J | j | јот | W | w | дубл-ве |
| K | k | ка | X | x | икс |
| L | l | ел | Y | y | ипсилон |
| M | m | ем | Z | z | зед |

### ГРЧКА АЗБУКА

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Α | α | алфа | Ν | ν | ни |
| Β | β | бета | Ξ | ξ | кси |
| Γ | γ | гама | Ο | ο | омикрон |
| Δ | δ | делта | Π | π | пи |
| Ε | ε | епсилон | Ρ | ρ | ро |
| Ζ | ζ | зета | Σ | σ | сигма |
| Η | η | ета | Τ | τ | тау |
| Θ | θ | тхета | Υ | υ | ипсилон |
| Ι | ι | јота | Φ | φ | фи |
| Κ | κ | капа | Χ | χ | хи |
| Λ | λ | ламбда | Ψ | ψ | пси |
| Μ | μ | ми | Ω | ω | омега |

# СОДРЖИНА

## Глава I

## ТОЧКА, ПРАВА И РАМНИНА



## Глава II

## РАСТОЈАНИЕ. ПОЛУПРАВА, ОТСЕЧКА, АГОЛ

Глава III

КРУЖНИЦА И КРУГ



Глава IV

АГЛИ



Глава V

ПРАКТИЧНА РАБОТА НА ТЕРЕН



Глава VI

ТРИАГОЛНИК



Глава VII

ЧЕТИРИАГОЛНИК

## ГЛАВА VIII

## ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА

РОЗТ за учебници „Просветно дело“ — Скопје ул „Иво Рибар Лола“ б.б. Градски ѕид, блок IV

*

За издавачот
Михаило Ќорвезироски

*

Глигор Тренчевски
ГЕОМЕТРИЈА
за V одделение

*

Уредник
Кирил Милчев

*

Јазичен уредник
Мира Николова

*

Технички уредник
Трајко Димовски

*

Коректор
Николина Андовска

*

Ракописот е предаден во печат во јануари 1977 година. Печатењето е завршено во април 1977 година. Обем: 148 страни. Формат: 17 x 24 см. Тираж: 18.000 примероци. Книгава е отпечатена во Графичкиот завод „Гоце Делчев“ — Скопје (99/2026)

Според писменото мислење на Републичкиот секретаријат за култура бр. 07–1475/2 од 10.XII 1976 год. овој производ е ослободен од плаќање на данок на промет.