

РЕШАВАЊЕ НА АРИТМЕТИЧКИ ЗАДАЧИ СО ДОВЕДУВАЊЕ ДО ПРОТИВРЕЧНОСТ

При решавањето на задачи во кои треба да се одговори на прашањето дали нешто постои, или наоѓаме пример со кој покажуваме дека бараниот објект постои или покажуваме дека таков објект не постои. Во вториот случај тоа најчесто се постигнува со доведување до противречност. Во нашите следни разгледувања ќе се осврнеме на неколку примери во кои доведувањето до противречност е ефикасен начин за решавање на овие задачи.

1. Определи го најголемиот број броеви кои може да бидат запишани еден по друг така што збирот на секои три последователно запишани броеви да е позитивен, а збирот на секои два последователно запишани броеви да е негативен.

Решение. Нека претпоставиме дека може да се запишат повеќе од три броја на саканиот начин и нека a, b, c, d се првите четири од запишаните броеви. Тогаш треба да се точни неравенствата

- 1) $a + b < 0$,
- 2) $b + c < 0$,
- 3) $c + d < 0$,
- 4) $a + b + c > 0$,
- 5) $b + c + d > 0$.

Ако ги собереме неравенствата 1), 2) и 3) добиваме $a + 2b + 2c + d < 0$, а ако ги собереме неравенствата 4) и 5) добиваме $a + 2b + 2c + d > 0$, што е противречност бидејќи не може истовремено еден ист збир да е и позитивен и негативен. Според тоа, може да се запишат не повеќе од три броја со саканото својство. Броевите $2, -3, 2$ се со саканото својство и нивниот број е 3. ■

2. Дали постојат природни броеви x и y такви што

$$\text{NZD}(x, y) + \text{NZD}(x+1, y+1) = x - y ?$$

Решение. Нека претпоставиме дека такви природни броеви постојат и нека $d = \text{NZD}(x, y)$. Бидејќи d е делител на $x - y$, заклучуваме дека d е делител на $\text{NZD}(x+1, y+1)$, па затоа $d \mid x+1$ и $d \mid y+1$. Сега од $d \mid x+1$ и $d \mid x$ следува $d \mid x+1 - x = 1$, т.е. $d = \text{NZD}(x, y) = 1$, што значи дека x и y се заемно прости. Нека сега $d' = \text{NZD}(x+1, y+1)$. Според тоа, $1 + d' = x - y$, т.е. $1 + d' = (x+1) - (y+1)$. Десната страна на последното равенство е делива со d' , па затоа и левата страна е делива со d' , што значи дека $d' \mid 1$, односно $d' = 1$. Според тоа, $x - y = 2$, па затоа x и y се со иста парност. Но, тоа значи дека ако тие се парни добиваме противречност со $d = 1$, а ако се непарни добиваме противречност со $d' = 1$. Конечно, од добиената противречност заклучуваме дека не постојат природни броеви x и y за кои е исполнето даденото равенство. ■

па затоа $3n + 4 + 6n + 7 = 2009$, т.е. $n = 222$. Конечно, бројот $k = 33 \dots 34$ го
222

задоволува условот на задачата. ■

5. Дали може на кружница да се запишат 2019 различни природни броја такви што за секои два соседни броја количникот на поголемиот и помалиот број да е прост број?

Решение. Нека претпоставиме дека е можно да се постават броевите a_i , $i = 1, 2, \dots, 2019$ на саканиот начин. Ако $a_i > a_{i+1}$, тогаш $\frac{a_i}{a_{i+1}} = p_j$, каде p_j е некој прост број. Ако $a_i < a_{i+1}$, тогаш $\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{1}{q_j}$, каде q_j е некој прост број.

Според условот на задачата $a_i \neq a_{i+1}$ за секој i . Тогаш

$$1 = \frac{a_1}{a_2} \cdot \frac{a_2}{a_3} \cdot \frac{a_3}{a_4} \cdot \dots \cdot \frac{a_{2004}}{a_{2005}} \cdot \frac{a_{2005}}{a_1} = \frac{p_1 p_2 \dots p_{k-1} p_k}{q_1 \cdot q_2 \dots q_{2019-k}}$$

Но, за да се добие 1, треба во броителот и именителот да имаме еднаков број броеви, т.е. треба $k = 2019 - k$, односно $2k = 2019$, што е противречност. ■

6. На левиот брег на една река има чамец, неколку рибари и 20 деца, а на десниот брег има само рибари без чамец. Во чамецот може да се превезат или еден рибар и едно дете или четири деца и не смее да се возат ниту помалку ниту повеќе луѓе. Дали може децата да се префрлат на десниот брег?

Решение. Да забележиме дека ако при првото префрлање од левиот на десниот брег одат 1 рибар и 1 дете, тогаш при обратното возење единствено може да се префрлат 1 рибар и 1 дете, што значи дека ситуацијата е како почетната. Затоа единствен чекор кој при првото префрлање има смисол е да се префрлат 4 деца. Сега да забележиме дека за да се избегне повторување на претходната ситуација следниот чекор мора да е спротивен на тукушто направениот чекор. Тоа значи дека секој чекор на префрлање, кој не води до претходно видена ситуација, е еднозначно определен. Така ја имаме следнава табела.

Лев брег (рибари и деца)	Десен брег (рибари и деца)
$a, 20$	$b, 0$
$a, 16$	$b, 4$
$a + 1, 17$	$b - 1, 3$
$a + 1, 13$	$b - 1, 7$
$a + 2, 14$	$b - 2, 6$
$a + 2, 10$	$b - 2, 10$
$a + 3, 11$	$b - 3, 9$
...	...

Забележуваме дека во секој момент бројот на децата на десниот брег на реката е или делив со 3, или при делење со 3 дава остаток 1. Но, бројот 20 при делење со 3 дава остаток 2, па затоа бројот на децата на десниот брег на реката никогаш не може да биде еднаков на 20. ■

