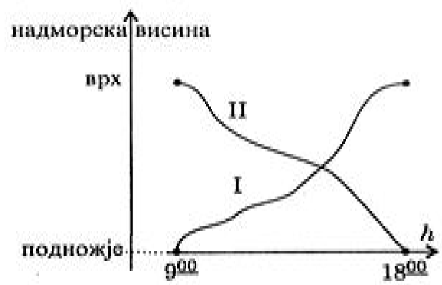
Нестандардна анализа

др Небојша Икодиновић, **Крагујевац**

Нестандардна анализа није засебна област математике, већ пре свега техника која има многобројне примене у великом броју других области, у математичкој анализи, теорији вероватноће, физици, бесконачној комбинаторици итд. Важност ове методе огледа се првенствено у томе што најчешће нуди једноставније и интуитивније сагледавање поменутих области. Нестандардну анализу је створио Абрахам Робинсон, релативно скоро, 1961. године у раду **Non-Standard Analysis**, користећи старе идеје, пре свега, Готфрида Лајбница. Основна идеја при овом заснивању је добро позната у математици: увођење *нових* („*идеалних*") елемената у циљу поједностављења неке теорије о извесним математичким објектима.

Увод

Пример. У понедељак, тачно у $9^{\underline{00}}$ h ујутру човек је почео, утабаном стазом, да се пење на планински врх, и освојио га је тачно у $6^{\underline{00}}$ h увече. Провео је ноћ на њему. Сутрадан, опет у $9^{\underline{00}}$ h ујутру, почео је да силази, истом стазом, и био је на подножју тачно у $6^{\underline{00}}$ h увече. Докажимо да је алпиниста у одређеном тренутку, оба дана у исто време, био на истој надморској висини. Следећа мисао може да нам сугерише одговор: Замислимо да је другог дана други алпинист почео да се пење утврђеном стазом на врх, у тренутку када је први почео да силази, тј. тачно у $9^{\underline{00}}$ h ујутру. Како први силази а други се пење, обојица истом стазом, они се у одређеном тренутку морају срести, тј. у исто време бити на истој надморској висини.

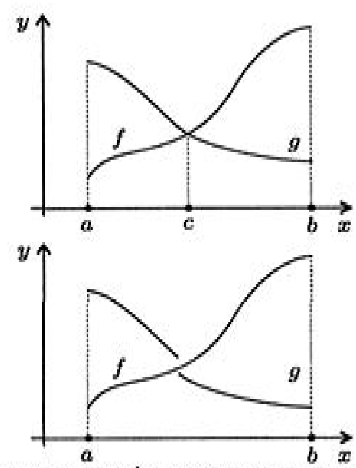


Решење постављеног проблема даје математичка анализа. Непрекидна линија I, која одговара путањи алпинисте првог дана, а која спаја тачку ($9^{\underline{00}}$, подножје) са тачком ($18^{\underline{00}}$, врх), мора сећи такође непрекидну линију II која одговара путањи алпинисте другог дана, која спаја тачку ($9^{\underline{00}}$, врх) са тачком ($18^{\underline{00}}$, подножје). Али не смемо се у математици ослањати на слике већ нам је неопходна строга дефиниција непрекидности, при чему ћемо стално имати слике на уму. Наше решење задатка можемо преформулисати у теорему математичке анализе.

Теорема 1. Ако су $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ и $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ две функције непрекидне у свакој тачки из $[a, b]$, такве да за a и b, $a < b$, важи

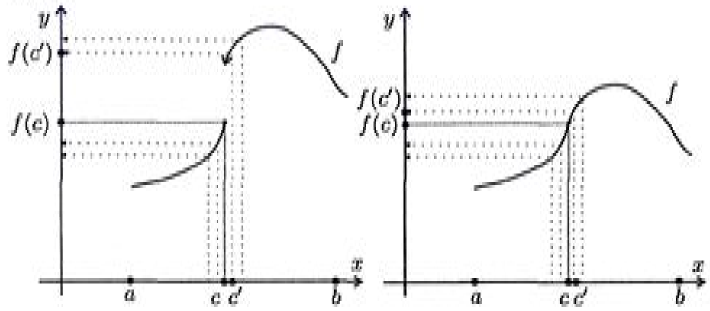
$$f(a) < g(a) \text{ и } f(b) > g(a),$$

тада постоји c између a и b, $a < c < b$, тако да је $f(c) = g(c)$.



Суштинска претпоставка претходне теореме је непрекидност функција f и g у свим тачакама домена; уколико бар једна од функција није непрекидна у бар једној тачки тврђење не мора да важи.

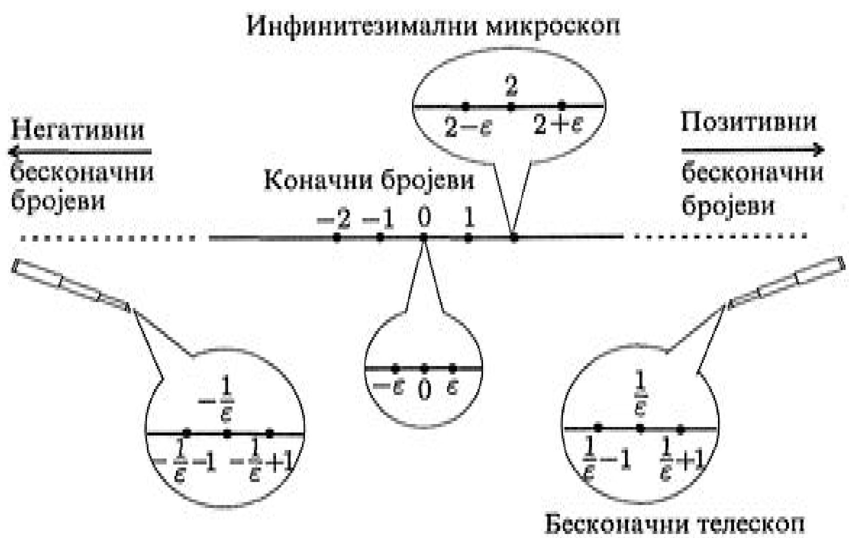
Иако имамо јаку интуицију у вези са појмом непрекидности, то није довољно за сигуран ход кроз математику. Неопходна нам је строга дефиниција која ће на прави начин изразити нашу интуитивну представу: функција f је непрекидна у тачки c ако за свако c' које се „мало" разликује од c, односно које је „блиско" броју c, вредности $f(c)$ и $f(c')$ се такође „мало" разликују једна од друге.



Невоља је што не можемо на задовољавајући начин да дефинишемо релације „бити близак" или „мало се разликовати" на скупу реалних бројева; никоја два реална броја нису довољно блиска. Овај проблем превазилазимо проширивањем скупа реалних бројева. Сетимо се да смо слично поступали при отклањању „тешкоћа" које смо имали са скуповима бројева $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$.

Хиперреална права

Увешћемо један нов скуп бројева, који поред реалних садржи и бесконачно мале и бесконачно велике бројеве. Бројеви овог скупа називају се *хиперреални бројеви*. Скуп хиперреалних бројева означавамо са ${}^*\mathbb{R}$ и конструишемо (дефинишемо) га помоћу скупа реалних бројева $\mathbb{R}$, слично као што скуп $\mathbb{R}$ конструишемо помоћу рационалних бројева. Овом приликом нећемо изводити ову конструкцију, већ ћемо истаћи својства хиперреалних бројева која су нам потребна за „рачун". На сличан начин се упознајемо и са структуром реалних бројева.



Сваки реалан број је елемент скупа ${}^*\mathbb{R}$ ($\mathbb{R} \subset {}^*\mathbb{R}$), али скуп ${}^*\mathbb{R}$ има и других елемената (који нису реални бројеви). Број ε је *бесконачно мали* или *инфинитезимала*, ако је $-a < \varepsilon < a$, за сваки позитиван реалан број a.Једини реалан број који је инфинитезимала је 0! Постоје три врсте инфинитезимала у $^*\mathbb{R}$: позитивне, негативне и нула. Малим (индексираним) грчким словима $\varepsilon, \delta, \ldots$ $(\varepsilon_1, \delta_1, \ldots, \varepsilon_2, \ldots)$ означаваћемо инфинитезимале. Постојање инфинитезимала, тј. бесконачно малих бројева, има за последицу постојање и бесконачно великих хиперреалних бројева. Ако је ε позитивна инфинитезимала, тада је $-\varepsilon$ негативна инфинитезимала, али је $\frac{1}{\varepsilon}$ *бесконачан позитиван број*, тј. хиперреалан број већи од сваког реалног броја, док је $-\frac{1}{\varepsilon}$ *бесконачан негативан број*, тј. хиперреалан број мањи од сваког реалног броја. Хиперреални бројеви који нису бесконачни називају се *коначни хиперреални бројеви.*

Круг представља „инфинитезимални микроскоп" који је довољно моћан да нам покаже бесконачно мале делове хиперреалне праве. Скуп $\mathbb{R}$ је расут међу коначним бројевима. Део хиперреалне праве који садржи бесконачне бројеве можемо видети „бесконачним телескопом".

Целокупан рачун са хиперреалним бројевима је заснован са три основна принципа који повезују реалне и хиперреалне бројеве: ***Принцип екстензије (проширења), Принцип трансфера (преноса) и Принцип стандардног дела.***

Принцип екстезије. (а) Скуп реалних бројева је подскуп скупа хиперреалних бројева, односно реална права је део хиперреалне праве.
(б) Уређење скупа хиперреалних бројева је проширење уобичајеног уређења $<$ скупа $\mathbb{R}$.
(в) Постоји хиперреалан број већи од нуле а мањи од сваког позитивног реалног броја. Другим речима, постоји бар једна позитивна инфинитезимала, па постоје и хиперреални бројеви који нису реални!
(г) Основне операције на скупу $^*\mathbb{R}$ су сабирање $(+)$ и множење $(\cdot)$ и задовољавају сва алгебарска својства које имају операције $+$ и $\cdot$ скупа $\mathbb{R}$*.
(д) Свакој реалној функцији реалне промењиве $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, одговара хиперреална функција $^*f : {}^*D \to {}^*\mathbb{R}$, за неки скуп $^*D$, $D \subset {}^*D \subset {}^*\mathbb{R}$. Функцију $^*f$ зваћемо *природна екстензија* (проширење) функције f, из разлога које ћемо навести касније.

Принцип трансфера. Све особине исказане једнакостима и неједнакостима повезаним уобичајеним исказним везницима *и, или, ако … онда …, ако и само ако, није* које важе за реалне бројеве важе и за хиперреалне бројеве; такође, сви услови којим је одређена дефинисаност неког реалног израза представљају услове за дефинисаност одговарајућих хиперреалних израза. На пример, за произвољне хиперреалне бројеве x и y важи:

(1) $x + y = y + x$; (2) ако је $0 < x < y$, онда је $0 < \dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$;

(3) израз $\dfrac{x}{0}$ није дефинисан; (4) $(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$;

(5) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$; (6) ако је $x > 0$ и $y > 0$, онда је $\log_2(xy) = \log_2 x + \log_2 y$.

Према Принципу трансфера следи да свака реална функција и њена природна екстензија имају исте вредности када се примене на реалне бројеве, што је разлог за назив „природна екстензија", али и за изостављање * као префикса. На пример, уместо $^*\sin\varepsilon$, $^*\sqrt[3]{x+\varepsilon}$ и сл. писаћемо једноставно $\sin\varepsilon$, $\sqrt[3]{x+\varepsilon}$, остављајући да аргументи на које се примењује функција одреде да ли је реч о „обичној" реалној функцији или њеној природној екстензији. Принцип трансфера је користан и при рачунању са инфинитезималама. Тако, полазећи од неке инфинитезимале ε, можемо добити још бесконачно много инфинитезимала; на пример, ε^2 је

---

* Поменуте операције примењене на реалне бројеве своде се на уобичајено сабирање и множење.

позитивна инфинитезимала мања од ε, $0 < \varepsilon^2 < \varepsilon$, што следи према Принципу трансфера јер је $0 < x^2 < x$, за сваки реалан број x између 0 и 1. Ево још неких инфинитезимала (у растућем поретку): $\varepsilon^3, \varepsilon^2, \frac{\varepsilon}{100}, \varepsilon, 73\varepsilon, 100\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}$. Такође, добијамо и негативне инфинитезимале као што су $-\varepsilon, -\varepsilon^2, \dots$, али и многе друге хиперреалне бројеве: $1 + \sqrt[3]{\varepsilon}$, $(10 - \varepsilon)^2$, $\frac{2}{\varepsilon}, \dots$

Навешћемо сада нека правила која су од велике помоћи при утврђивању да ли је неки хиперреалан број инфинитезимала, коначан или бесконачан.

Нека правила рачунања са хиперреалним бројевима. Нека су ε, δ произвољне инфинитезимале, b и c коначни хиперреални бројеви који нису инфинитезимале, H и K бесконачни хиперреални бројеви и n произвољан природан број.

(1) Супротни бројеви

$-\varepsilon$ је инфинитезимала;

$-b$ је коначан и није инфинитезимала;

$-H$ је бесконачан;

(2) Реципрочне вредности

Ако је $\varepsilon \neq 0$, $\frac{1}{\varepsilon}$ је бесконачан;

$\frac{1}{b}$ је коначан и није инфинитезимала;

$\frac{1}{H}$ је инфинитезимала;

(3) Збир

$\varepsilon + \delta$ је инфинитезимала;
$b + \varepsilon$ је коначан и није инфинитезимала;
$b + c$ је коначан (можда и инфинитезимала);
$H + \varepsilon$ и $H + b$ су бесконачни;

(4) Производ

$\varepsilon \cdot \delta$ је инфинитезимала;
$\varepsilon \cdot b$ је инфинитезимала;
$b \cdot c$ је коначан и није инфинитезимала;
$H \cdot b$ и $H \cdot K$ су бесконачни;

(5) Количник

$\frac{\varepsilon}{b}$ и $\frac{\varepsilon}{H}$ су инфинитезимале;

$\frac{b}{c}$ је коначан и није инфинитезимала;

$\frac{b}{\varepsilon}$, $\frac{H}{\varepsilon}$ и $\frac{H}{b}$ су бесконачни ($\varepsilon \neq 0$);

(6) Корен

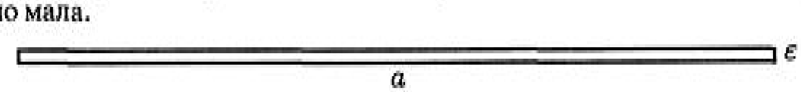
Ако је $\varepsilon > 0$, $\sqrt[n]{\varepsilon}$ је инфинитезимала;

Ако је $b > 0$, $\sqrt[n]{b}$ је коначан и није инфинитезимала;

Ако је $H > 0$, $\sqrt[n]{H}$ је бесконачан.

Приметимо да нису дата правила за следеће могућности: $\frac{\varepsilon}{\delta}$ (количник две инфинитезимале), $\frac{H}{K}$ (количник два бесконачна броја), $\varepsilon \cdot H$ (производ инфинитезимале и бесконачног броја) и $H + K$ (збир два бесконачна броја). Наиме, при свакој од ових могућности можемо добити инфинитезималу, коначан број који није инфинитезимала или неки бесконачан број, зависно од избора бројева ε, δ, H и K. Ево, на пример, три сасвим различита количника две инфинитезимале: $\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon}$ је инфинитезимала (једнака ε), $\frac{\varepsilon}{\varepsilon}$ коначан број који није инфинитезимала (једнак 1), $\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2}$ је бесконачан број. Слично је и у осталим случајевима.

Свако од наведених правила је и интуитивно јасно. На пример, ако је ε инфинитезимала а a коначан број, тада је $a \cdot \varepsilon$ инфинитезимала - површина „бесконачно танког" правоугаоника је бесконачно мала.



Такође, из искустава знамо да је реципрочна вредност малог броја велика, па је природно да је за инфинитезималу $\varepsilon \neq 0$, број $\frac{1}{\varepsilon}$ бесконачан број. Ни строг доказ није тежак; за сваки позитиван реалан број r, ако је ε позитивна инфинитезимала, онда је $0 < \varepsilon < \frac{1}{r}$, одакле следи да је $r < \frac{1}{\varepsilon}$; дакле, $\frac{1}{\varepsilon}$ је већи од сваког позитивног реалног броја.

Није тешко доказати следећа **правила о уређењу хиперреалних бројева.**
(1) Сваки хиперреалан број који се налази између две инфинитезимале је инфинитезимала.
(2) Сваки хиперреалан број који је измђу два коначна хиперреална броја је коначан.
(3) Сваки хиперреалан број већи од неког позитивног бесконачног броја је позитиван бесконачан број.
(4) Сваки хиперреалан број мањи од неког негативног бесконачног броја је негативан бесконачан број.
Докази су заиста једноставни. На пример, докажимо (3). Ако је H позитиван бесконачан број и $H < K$, тада је за сваки реалан број r, $r < H < K$, па је и $r < K$, те је K бесконачан позитиван број.

Веома важна релација на скупу $^*\mathbb{R}$ је релација „бесконачно блиско" $\approx$. Два хиперреална броја b и c су *бесконачно блиска*, у ознаци $b \approx c$, ако је њихова разлика $b - c$ инфинитезимала. На пример, ако је b произвољан хиперреалан број и ε инфинитезимала, тада је $\varepsilon \approx 0$, $b \approx b + \varepsilon$, итд. Лако се доказује да је $\approx$ релација еквиваленције на скупу $^*\mathbb{R}$. Такође, ако је $a \approx b$ и a је инфинитезимала (коначан, бесконачан број), онда је и b инфинитезимала (коначан, бесконачан број). Поменимо и да за свака два реална броја a и b из $a \approx b$ следи да је $a = b$.

Принцип стандардног дела.

Сваки коначан хиперреалан број је бесконачно близак тачно једном реалном броју. Ако је b коначан хиперреалан број, јединствен реалан који је бесконачно близак овом броју означавамо са $\mathrm{st}(b)$ и називамо га *стандардан део* од b. Бесконачни хиперреални бројеви немају стандардан део.

Директно из дефиниције следи: ако је b коначан хиперреалан број, онда је:
(1) $\mathrm{st}(b)$ реалан број;
(2) $b = \mathrm{st}(b) + \varepsilon$, за неку инфинитезималу ε;
(3) $b = \mathrm{st}(b)$, уколико је b реалан број.

Правила рачунања стандардног дела. Нека су a и b коначни хиперреални бројеви и n природан број. Тада је

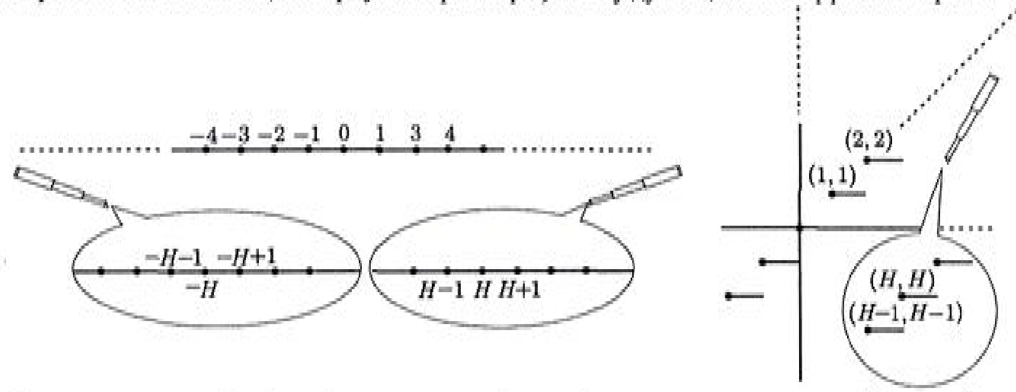
(1) $\mathrm{st}(-a) = -\mathrm{st}(a)$; (2) $\mathrm{st}(a+b) = \mathrm{st}(a) + \mathrm{st}(b)$;
(3) $\mathrm{st}(a-b) = \mathrm{st}(a) - \mathrm{st}(b)$; (4) $\mathrm{st}(a \cdot b) = \mathrm{st}(a) \cdot \mathrm{st}(b)$;
(5) $\mathrm{st}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\mathrm{st}(a)}{\mathrm{st}(b)}, \mathrm{st}(b) \neq 0$; (6) $\mathrm{st}(a^n) = (\mathrm{st}(a))^n$;
(7) $\mathrm{st}(\sqrt[n]{a}) = \sqrt[n]{\mathrm{st}(a)}, a \geqslant 0$; (8) $a \leqslant b \Rightarrow \mathrm{st}(a) \leqslant \mathrm{st}(b)$.

Као илустрацију, доказаћемо једнакост (4). Ако је $r = \mathrm{st}(a)$ и $s = \mathrm{st}(b)$, тада је $a = r + \varepsilon$ и $b = s + \delta$, за неке инфинитезимале ε и δ, па је

$$ab = (r+\varepsilon)(s+\delta) = rs + r\delta + s\varepsilon + \varepsilon\delta,$$

одакле је $\mathrm{st}(ab) = \mathrm{st}(rs + r\delta + s\varepsilon + \varepsilon\delta) = rs = \mathrm{st}(a)\,\mathrm{st}(b)$.

У скупу $^*\mathbb{R}$ посебно се издвајају хиперцели бројеви који представљају проширење скупа целих бројева. Скуп хиперцелих бројева садржи уобичајене (коначне) целе бројеве, али и бесконачне позитивне и негативне хиперцеле бројеве. Хиперцели бројеви задовољавају исте алгебарске законе као и цели бројеви и распоређени су дуже целе хиперреалне праве.



Скуп хиперцелих бројева је скуп слика функције *цео део* са доменом $^*\mathbb{R}$: ако је x неки хиперреалан број, $[x]$ је највећи хиперцео број y такав да је $y \leqslant x$. Према принципу трансфера, сваки хиперреалан број x је између два хиперцела броја: $[x] \leqslant x < [x] + 1$. Такође, збир, разлика, производ хиперцелих бројева је хиперцео број. Једно од најважнијих тврђења је да се за сваки позитиван бесконачан хиперцео број H сваки низ $(a_n)_{n \leqslant H} = (a_1, a_2, \ldots, a_H)$ хиперреалних бројева, у одређеном смислу, понаша као обичан коначан низ реалних бројева; на пример, **сваки овакав низ има највећи и најмањи елемент** итд.

Непрекидност

Сада смо спремни да строго уведемо појам непрекидности неке функције $f : D \to \mathbb{R}$ у некој тачки c из D.

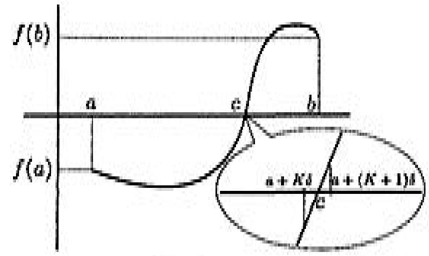
Кажемо да је функција f *нейрекидна* у тачки c ако за сваки хиперреалан број x (из $^*D$) бесконачно близак тачки c, $f(x)$ је бесконачно блиско броју $f(c)$, тј. $x \approx c \Rightarrow f(x) \approx f(c)$. Или еквивалентно, за сваку инфинитезималу ε важи $\mathrm{st}(f(c+\varepsilon)) = f(c)$. Према особинама функције st, из непрекидности функције f у тачки c следи и непрекидност функција $x \mapsto f(x) + g(x)$, $x \mapsto f(x) - g(x)$, $x \mapsto f(x) \cdot g(x)$, $x \mapsto \dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(c) \neq 0)$, $x \mapsto \sqrt[n]{f(x)}$ $(f(c) > 0)$ у тачки c.

Теорема 1, којом смо започели причу, непосредна је последица наредне теореме.

Теорема 2. Нека је f реална функција непрекидна у свакој тачки затвореног интервала $[a, b]$, таква да су $f(a)$ и $f(b)$ различитог знака. Тада функција f има нулу у интервалу (a, b), тј. постоји c из (a, b) такво да је $f(c) = 0$.

Доказ. Претпоставимо да је $f(a) < 0 < f(b)$. Нека је H неки бесконачан позитиван хиперцео број. Поделимо $^*[a, b]$ на H подинтервала једнаких, инфинитезималних, дужина $\delta = \dfrac{b-a}{H}$:

$$[a, a+\delta], [a+\delta, a+2\delta], \ldots, [a+(K-1)\delta, a+K\delta], \ldots, [a+(H-1)\delta, b].$$



Приметимо да за сваки хиперреалан број x, $a < x < b$ постоји јединствен хиперцео број L, $1 < L < H$, такав да је $a + (L-1)\delta \leqslant x < a + L\delta$. Нека је $a + K\delta$ највећа подеона тачка таква да је $f(a + K\delta) < 0$. Тада је

$$f(a + K\delta) < 0 \leqslant f(a + (K+1)\delta).$$

Како је f непрекидна у свакој тачки интервала $[a, b]$, имамо да је $f(a+K\delta) \approx f(a+(K+1)\delta)$, па је $f(a+K\delta) \approx 0$. Ако ставимо да је $c = \mathrm{st}(a+K\delta)$, имамо да је $f(c) = \mathrm{st}(f(a+K\delta)) = 0$. □

ПРИМЕР. Једначина $1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{x} - \sqrt[3]{x} = 0$ има бар једно решење у интервалу $[0, 1]$.

Како је функција $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \sqrt{x} - \sqrt[3]{x}$ непрекидна у свакој тачки интервала $[0, 1]$ и $f(0) = 1$, $f(1) = -\frac{1}{2}$, према претходној теореми следи да постоји c из $[0, 1]$ да је $f(c) = 0$.

Доказаћемо на крају једну веома важну теорему математичке анализе, познату као **Вајерштрасова теорема**, која има читав низ значајних последица.

ТЕОРЕМА 3. Ако је реална функција f непрекидна у свакој тачки затвореног интервала $[a, b]$, тада постоје x_1 и x_2 из $[a, b]$ у којима ова функција достиже своју најмању, односно највећу вредност:

$$f(x_1) = \min_{a \leqslant x \leqslant b} f(x) \;\text{ и }\; f(x_2) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} f(x).$$

Доказ. Поделимо хиперинтервал $^*[a, b]$ на H (H је бесконачан позитиван хиперцео број) подинтервала једнаких, инфинитезималних, дужина $\delta = \dfrac{b-a}{H}$:

$$[a, a+\delta], [a+\delta, a+2\delta], \ldots, [a+(K-1)\delta, a+K\delta], \ldots, [a+(H-1)\delta, b].$$

Према принципу трансфера, постоји подеона тачка $a + K\delta$ таква да је $f(a + K\delta)$ највеће међу свим вредностима функције f у подеоним тачкама. Нека је $c = \mathrm{st}(a + K\delta)$. За сваки реалан број u из $^*[a, b]$ постоји L, $0 \leqslant L < H$, да је $a + L\delta \leqslant u < a + (L+1)\delta$. Како је $f(a + K\delta) \geqslant f(a + L\delta)$, имамо да је $\mathrm{st}(f(a + K\delta)) \geqslant \mathrm{st}(f(a + L\delta))$, одакле следи да је $f(c) \geqslant f(u)$. □

ЛИТЕРАТУРА

H. Jerome Keisler, *Elementary Calculus, An Infinitesimal Approach*, University of Wisconsin, 2000.

Статијата прв пат е објавена во списанието ТАНГЕНТА на ДМ на Србија во 2005/06 година