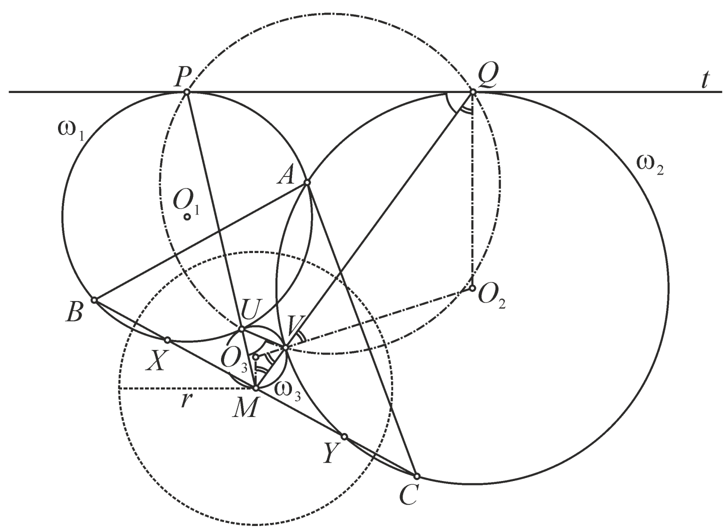
MMO 2025

Задача 1. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со $AB < AC$. Нека M е средишна точка на страната BC, а X и Y се точки на отсечките BM и CM, соодветно, така што $BX = CY$. Нека ω_1 е опишаната кружница на $\triangle ABX$ и ω_2 е опишаната кружница на $\triangle ACY$. Заедничката тангента t на ω_1 и ω_2 која е поблиску до A ги допира ω_1 и ω_2 во точки P и Q, соодветно. Нека правата MP ја сече ω_1 во U, а правата MQ ја сече ω_2 во V. Докажете дека опишаната кружница на $\triangle MUV$ ги допира ω_1 и ω_2.

Решение 1. Забележуваме дека $\overline{MU} \cdot \overline{MP} = \overline{MX} \cdot \overline{MB} = \overline{MY} \cdot \overline{MC} = \overline{MV} \cdot \overline{MQ}$, односно дека четириаголникот $UVQP$ е тетивен. **(2п)** Нека ω_3 е опишаната кружница околу $\triangle MUV$ и центрите на кружниците ω_1, ω_2 и ω_3 се O_1, O_2 и O_3, соодветно. Имаме $\angle O_3VM = 90° - \angle MUV = 90° - \angle PQV = \angle VQO_2 = \angle O_2VQ$, односно точките O_3, V и O_2 се колинеарни, а ω_3 и ω_2 се допираат во точката V. **(3п)** Слично, точките O_3, U и O_1 се колинеарни, а кружниците ω_3 и ω_2 се допираат во точката U. **(3п)** $\square$



Решение 2. Забележуваме дека $\overline{MU} \cdot \overline{MP} = \overline{MX} \cdot \overline{MB} = \overline{MY} \cdot \overline{MC} = \overline{MV} \cdot \overline{MQ} = r^2$. Ова повлекува дека инверзијата $I_{M,r}$ во однос на кружница со центар M и радиус r ги пресликува точките U, X, Y и V во точките P, B, C и Q, соодветно. **(2п)** Следствено, кружниците ω_1 и ω_2 се фиксни во однос на $I_{M,r}$, а t се пресликува во ω_3. Бидејќи t е заедничка тангента на ω_1 и ω_2, нејзината слика, т.е. кружницата ω_3, е тангентна на ω_1 и ω_2. **(6п)** $\square$

Задача 2. Нека $n > 2$ е цел број, $k > 1$ е реален број и $x_1, x_2, \dots, x_n$ се позитивни реални броеви, такви што $x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n = 1$. Докажете дека:

$$\frac{1+x_1^k}{1+x_2} + \frac{1+x_2^k}{1+x_3} + \dots + \frac{1+x_{n-1}^k}{1+x_n} + \frac{1+x_n^k}{1+x_1} \geq n\,.$$

Кога важи равенство?

Решение. Од неравенството меѓу аритметичка и геометриска средина имаме:

$$\frac{1+x_1^k}{1+x_2}+\frac{1+x_2^k}{1+x_3}+\cdots+\frac{1+x_{n-1}^k}{1+x_n}+\frac{1+x_n^k}{1+x_1}\geq$$
$$n\sqrt[n]{\frac{1+x_1^k}{1+x_2}\cdot\frac{1+x_2^k}{1+x_3}\cdot\ldots\cdot\frac{1+x_{n-1}^k}{1+x_n}\cdot\frac{1+x_n^k}{1+x_1}}=$$
$$n\sqrt[n]{\frac{1+x_1^k}{1+x_1}\cdot\frac{1+x_2^k}{1+x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1+x_{n-1}^k}{1+x_{n-1}}\cdot\frac{1+x_n^k}{1+x_n}}. \quad \textbf{(2п)}$$

Според ова доволно е да докажеме дека $\frac{1+x_1^k}{1+x_1}\cdot\frac{1+x_2^k}{1+x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1+x_{n-1}^k}{1+x_{n-1}}\cdot\frac{1+x_n^k}{1+x_n}\geq 1$. **(1п)**
Нека $t=\frac{k-1}{2}>0$. Така $k=2t+1$. Забележуваме дека

$$(1+a^{2t+1})-a^t(1+a)=1-a^t-a^{t+1}+a^{2t+1}=(1-a^t)(1-a^{t+1}). \quad \textbf{(1п)}$$

За $a>1$ двата множитела се позитивни, а за $a<1$ обата се негативни. Следствено, за секој позитивен реален број a важи:

$$1+a^{2t+1}\geq a^t(1+a)\,, \tag{1}$$

при што равенство важи ако и само ако $a=1$. **(2п)**
Користејќи го (1) за $k=2t+1$ добиваме:

$$\frac{1+x_1^k}{1+x_1}\cdot\frac{1+x_2^k}{1+x_2}\cdot\ldots\cdot\frac{1+x_{n-1}^k}{1+x_{n-1}}\cdot\frac{1+x_n^k}{1+x_n}\geq x_1^t\cdot x_2^t\cdot\ldots\cdot x_{n-1}^t\cdot x_n^t=1^t=1. \quad \textbf{(1п)}$$

Равенство важи ако и само ако $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$. **(1п)** □

Задача 3. На хоризонтално поставена бројна права, врз секој број $i\in\{1,2,\ldots,s\}$ е поставено купче од $t_i>0$ жетони. Сѐ додека барем едно купче содржи барем два жетона, ја повторуваме следнава постапка: избираме такво купче, нека се состои од $k\geq 2$ жетони, и најгорниот жетон од избраното купче го поместуваме долж бројната права за $k-1$ единечни позиции надесно. Кој е најголемиот природен број N врз кој може да биде поставен жетон? (Изразете го N како функција од $(t_i : i=1,\ldots,s)$.)

Решение. Ќе покажеме дека $N=\sum_{i=1}^s t_i$. Всушност, ќе покажеме дека крајната конфигурација (распределба на жетоните долж бројната права) е следнава: врз секој од броевите $1,2,\ldots,\sum_{i=1}^s t_i$ е поставен по еден жетон. **(1п)**

Започнуваме со забелешка дека најдолниот жетон во секое купче не се поместува во ниту еден момент. Ќе ги користиме следниве терминологија и ознаки. За произволна конфигурација P, секој жетон кој не е најдолниот во некое купче велиме дека е *слободен*. За позитивен цел број врз кој нема поставено ниту еден жетон велиме дека е *празен*. Нека $r(P)$ е најголемиот непразен цел број, $e(P)$ е бројот на празни позитивни цели броеви кои на бројната права се лево од $r(P)$, и $f(P)$ е бројот на слободни жетони. Дефинираме *тежина*, $w(P)$, на конфигурација P со $w(P)=r(P)-e(P)+f(P)$. **(1п)**

Тврдење 1. *Тежината на конфигурација е инваријанта.* Доколку промената $P\rightsquigarrow P'$ се состои од преместување жетон надесно врз непразен број, тогаш $r(P')=r(P)$, $e(P')=e(P)$ и $f(P')=f(P)$, па тежината останува непроменета. Ако пак промената $P\rightsquigarrow P'$ се состои од поместување жетон врз празно поле лево од $r(P)$, тогаш $r(P')=r(P)$ додека $e(P')=e(P)-1$ и $f(P')=f(P)-1$, па повторно $w(P')=w(P)$. Конечно, ако промената $P\rightsquigarrow P'$ се состои од преместување жетон надесно од $r(P)$ тогаш $f(P')=f(P)-1$ и $e(P')=e(P)+(r(P')-r(P)-1)$ (бидејќи има $r(P')-r(P)-1$ празни цели броеви помеѓу $r(P)$ и $r(P')$ во конфигурацијата P'). Следствено, $w(P')=w(P)$. **(2п)** ⋄

Следствено, за секоја конфигурација P која може да настане во текот на процесот важи $w(P) = s - 0 + \sum_{i=1}^{s}(t_i - 1) = \sum_{i=1}^{s} t_i$. **(1п)**

Тврдење 2. *За секоја тековна конфигурација P важи $e(P) \leq f(P)$.* Ќе докажеме дека за секој позитивен цел број $m \leq r(P)$ на сегментот $1, 2, \ldots, m-1$ има барем толку слободни жетони колку и празни броеви. При почетната конфигурација, $e(P) = 0$, па ова навистина важи за секој позитивен цел број $m \leq r(P)$. Под претпоставка дека ова важи за конфигурација P, нека P' се добива од P со поместување на жетон од бројот u врз бројот v. Јасно, тогаш тврденото важи за секој $m \leq u$ и за секој $m > v$ (според претпоставката за P). Има $v - u - 1$ слободни жетони врз u и најмногу $v - u - 1$ празни броеви помеѓу u и v. Значи, тврденото важи за секој $m \leq r(P')$. **(2п)** ⋄

Тврдење 3. *За крајната конфигурација P важи $e(P) = f(P) = 0$ и $r(P) = \sum_{i=1}^{s} t_i$.* Јасно, за крајната конфигурација P важи $f(P) = 0$. Според Тврдење 2, мора да важи и $e(P) = 0$. Имајќи предвид дека тежината на секоја конфигурација изнесува $\sum_{i=1}^{s} t_i$, заклучуваме дека $r(P) = w(P) + e(P) - f(P) = \sum_{i=1}^{s} t_i$. **(1п)** ⋄

□

Задача 4. Даден е полином $P(x) = ax^{75} + b$, каде a и b се заемно прости броеви кои припаѓаат во $\{1, 2, \ldots, 151\}$, кој го задоволува следниот услов: Постои најмногу еден прост број p така што за секој природен број k, $p \nmid P(k)$. Докажете дека за секој прост број $q \neq p$ постои природен број k, за кој $q^2 \mid P(k)$.

Решение. Ако $a = b = 1$, тогаш за секој цел број m, $P(m-1) \equiv a(-1)^{75} + a \equiv 0 \pmod{m}$. Претпоставуваме дека $a \neq b$ (односно барем еден од тие два броја е поголем од 1). **(1п)**
Како 2, 6, 10, 30 и 150 се делители на 150 и притоа 3, 7, 11, 31 и 151 се прости броеви, врз основа на малата теорема на Ферма можеме да заклучиме дека за $q \in \{3, 7, 11, 31, 151\}$ важи $x^{150} \equiv 1 \pmod{q}$ (под претпоставка дека $q \nmid x$) **(1п)**. Имајќи го ова во предвид, ако $q \nmid b$, тогаш $q \nmid x$, па за горенаведените q за кои исто така важи $q \neq p$, имаме

$$a^2 - b^2 \equiv a^2x^{150} - b^2 \equiv (ax^{75} + b)(ax^{75} - b) \pmod{q}.$$

Со додавање на случаите каде $q \nmid b$, можеме да заклучиме дека секој број меѓу $\{3, 7, 11, 31, 151\} \setminus \{p\}$ го дели $b(a^2 - b^2)$ $(*)$. **(1п)**
Понатаму, од условите на задачата можеме да забележиме дека за $q \neq p$ кој е делител на a, мора да важи дека q го дели b, што е контрадикција со претпоставката дека a и b се заемно прости, односно мора да важи $a = p^t$ за некој ненегативен цел број t (секако ако p од условите на задачата не постои, тогаш $a = 1$). На основа на $(*)$ можеме да заклучиме дека имаме еден од наредните три случаја: $p = 151$, односно ако не е тоа исполнето, тогаш $151 \mid b(a^2 - b^2)$, што ни ги дава случаите $b = 151$ и $a + b = 151$, ($151 \mid a - b$ повлекува дека $a = b$, што е веќе разрешен случај). **(1п)**
1° $b = 151$
Ако земеме $(*)$ за 31, тогаш важи $p = 31$ или $31 \mid a^2 - b^2$. Во првиот случај $a \in \{1, 31\}$ и на основа на $(*)$, 11 го дели

$$a^2 - b^2 = -(151 - a)(151 + a),$$

што не е можно за ниедна од двете потенцијални вредности на a. Ако $31 \mid 151^2 - a^2$, тогаш $a \in \{120, 89, 58, 27, 4, 35, 66, 97, 128\}$, што после отстранување на броевите кои не се степени на прост број имплицира $a \in \{4, 27, 89, 97, 128\}$. Меѓутоа, ова би значело дека $77 \mid 151^2 - a^2$ (поради $(*)$), што не важи за ниедна вредност на a. **(1п)**
2° $a + b = 151$
Повторно, можеме да заклучиме дека $p = 31$ или $31 \mid b(a-b)$. Во првиот случај имаме $a \in \{1, 31\}$, откај следува $b - a \in \{89, 149\}$. Меѓутоа ниедна од овие 2 вредности не е делива со ниту 7, ниту пак 11. Ако $31 \mid b$, тогаш $a - b \in \{89, 27, -35, -97\}$ но повторно во овој случај ниту b ниту $a - b$ не се дели со 7 ниту со 11. На сличен начин можеме да заклучиме дека ако $31 \mid a - b$, тогаш

$b \in \{122, 91, 60, 29\}$, а притоа само за $b = 91$ добиваме број кој се дели со 7 или 11. Но, во овој случај $p = 11$ и $a = 60$, што не е возможно. **(1п)**

3° $p = 151$

Јасно е дека $a \in \{1, 151\}$. За $a = 1$, ако $31 \mid b$, односно $b = 31c$, тогаш $b^2 - a^2 \equiv 4c^2 - 1 \pmod{11}$, што имплицира $c \pmod{1}1 \in \{5, 6\}$, но ова значи дека $b \geq 5 \cdot 31 > 151$. Ако $31 \mid b - a$, тогаш $(b, b + a) \in \{(32, 33), (63, 64), (94, 95), (125, 126)\}$ а само 33 се дели 11, меѓутоа ни 32, ни 33 не се деливи со 7, односно немаме решение во овој случај. Слично, ако $31 \mid b + a$, тогаш $(b, b - a) \in \{(30, 29), (61, 60), (92, 91), (123, 122)\}$, при што ниеден од овие броеви не се дели со 11. **(1п)**

Во случајот $a = 151$, ако $31 \mid b$, односно $b = 31c$, тогаш $a^2 - b^2 \equiv 9 - 4c^2 \pmod{11}$, та c е конгруентно со 4 или 7 модул 11, па единствената можност е $b = 124 \leq 151$. Но, $a^2 - b^2 = 27 \cdot 275$ не е деливо со 7. Слично постапуваме ако $11 \mid b$ т.е. $b = 11c$, односно имаме $a^2 - b^2 \equiv 16 + 3c^2 \pmod{31}$ кое се дели со 31 само кога c е конгруентно со 6 или 25 модул 31, што ни ја дава единствената можна вредност $b = 66 < 151$. Сега, го проверуваме условот за $q = 19$. Со оглед на тоа дека $19 \nmid 66$, ако $19 \mid P(k)$, тогаш $19 \nmid k$ и имаме

$$P(k) \equiv (8 \cdot 19 - 1)x^{6 \cdot 18 + 3} + 3 \cdot 19 + 9 \equiv -x^3 + 9 \pmod{19},$$

што имплицира дека $x^3 \equiv 9 \pmod{19}$. Меѓутоа тогаш би имале

$$1 \equiv x^{18} \equiv 9^6 \equiv 81^3 \equiv 5^3 \equiv 125 \equiv 11 \pmod{19},$$

што е контрадикција. Затоа заклучуваме дека $11 \cdot 31 \mid a^2 - b^2$. Како $11 \cdot 31 > 302 > a + b$, можеме да заклучиме и дека и 11 и 31 делат точно еден од $a - b$ и $a + b$, та $302 = 2a = 31c + 11d$, што има решение само за $c = 14 - 11s$, $d = 31s - 12$, за било кој цел број s. Но, единственото позитивно решение е $c = 3$, $d = 19$, што ни дава дека $a + b = 209$, односно дека $b = 58$ и $a - b = 93$, кои не се делат со 7. **(1п)** □

Забелешка. Единствениот полином кои ги задоволува условите на задачата е $P(x) = x^{75} + 1$, за кој веќе искоментиравме дека важи бараното бидејќи за произволен $m > 1$, $P(m-1)$ се дели со m.

Забелешка. Неколку дообјаснувања за распределбата на поени:

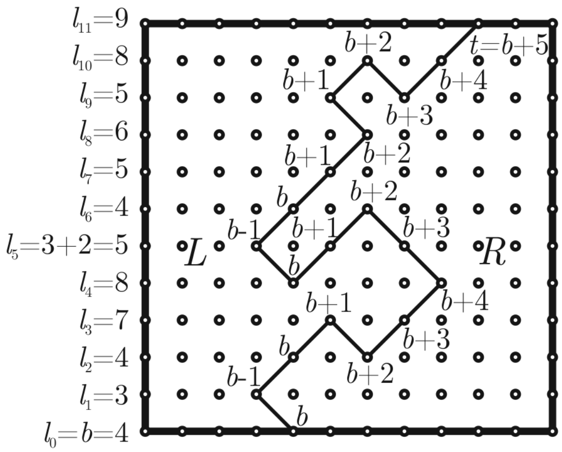
- Применување на малата теорема на Ферма на било кое множество прости броеви кое не го содржи тоа што е потребно за решавање на задачата вреди 0 поени;
- воочување дека a мора да биде степен на прост број не носи поени;
- нецелосно решавање на било кој од четирите потслучаи кои носат поени (односно неизложување на идејата корисна за тој потслучај) вреди 0 поени на соодветниот дел;
- грешка во пресметка во еден од потслучаите, во кој идејата за решавање е точна се наградува со соодветниот поен;
- констатацијата од претходната забелешката не носи поени.

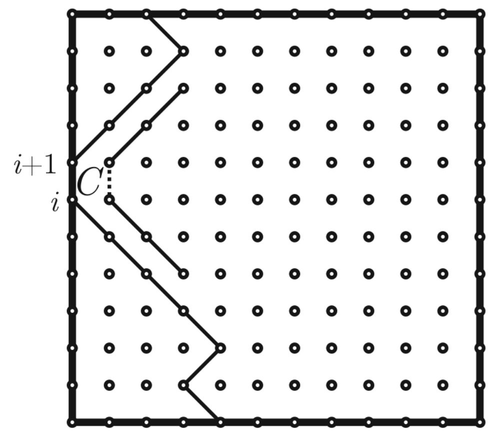
Задача 5. Нека $n > 1$ е природен број, а K е квадрат со страна n кој е разделен на n^2 единечни квадратчиња. За кои вредности на n квадратот K може да се разбие на n фигури со еднакви плоштини само со користење на дијагоналите на единечните квадратчиња, при што од секое единечно квадратче е искористена најмногу една дијагонала (може да има единечно квадратче од кое не е искористена ниту една дијагонала).

Решение. Прво ќе докажеме дека поделбата е невозможна за произволен непарен број $n > 1$. Нека F е фигура чии страни се состојат од дијагонали од единечните квадратчиња (и можеби делови од страните на K) и нека $f_0, f_1, \ldots, f_n$ е бројот на страни на единечни квадратчиња од соодветните хоризонтални линии кои се во фигурата. Бидејќи F се разбива на трапези и триаголници чии основи се овие страни и имаат висина 1, плоштината изнесува:

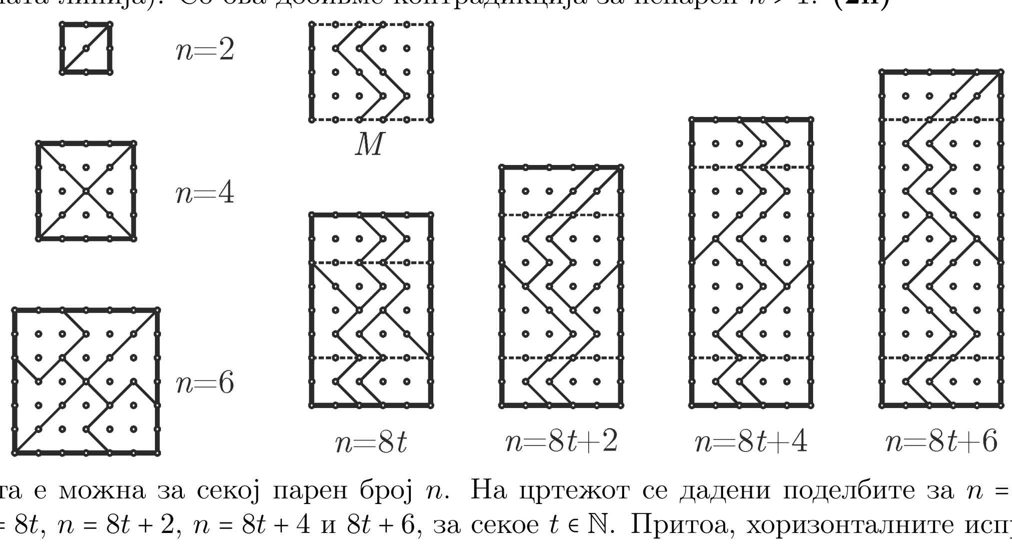
$$P_F = \frac{f_0 + f_1}{2} + \frac{f_1 + f_2}{2} + \cdots + \frac{f_{n-1} + f_n}{2} = \frac{f_0}{2} + f_1 + f_2 + \cdots + f_{n-1} + \frac{f_n}{2}. \quad \textbf{(1п)}$$

Според ова за плоштината да биде целобројна мора $f_0 + f_n$ да е парен. Да претпоставиме дека постои линија (од дијагонали) која почнува од долната страна на K и завршува на горната страна на K. Оваа линија го дели квадратот на две фигури: L - лево и R - десно (види цртеж лево). Нека b е почетната положба, а t крајната положба во соодветниот ред (броено од лево кон десно). Втората точка ќе биде на позиција $b-1$ или $b+1$ на втората линија и општо позицијата се менува за еден кога одиме на следна линија (нагоре или надолу). Ако n е непарен, b и t имаат различна парност, па $l_0 + l_n = b + t$ е непарен, од каде следува дека плоштината на L не е цел број. Заклучуваме дека не може да има ваква линија, а од причини на симетрија нема линија која почнува на левиот раб, а завршува на десниот раб од K. **(2п)**





Нека сега постои бараната поделба на квадрат K чија страна има непарна должина $n > 1$. Од претходната дискусија, делбените линии почнуваат долу и завршуваат лево или десно или почнуваат лево или десно, а завршуваат горе. Оттука следува дека постои „централна“ фигура C која содржи делови од сите страни на квадратот. За ваквата фигура сите c_i се барем 1, но од $P_C = \frac{c_0+c_n}{2} + c_1 + \cdots + c_{n-1} = n$ тие се точно 1. На границата на C постои единечна отсечка на левата страна од K, на пример меѓу i и $i+1$ (цртеж десно). Во овој случај $c_i > 1$ или $c_{i+1} > 1$, бидејќи во спротивно границата на K содржи страна од единечно квадратче (обележана со испрекината линија). Со ова добивме контрадикција за непарен $n > 1$. **(2п)**



Поделбата е можна за секој парен број n. На цртежот се дадени поделбите за $n = 2$, $n = 4$, $n = 6$, $n = 8t$, $n = 8t + 2$, $n = 8t + 4$ и $8t + 6$, за секое $t \in \mathbb{N}$. Притоа, хоризонталните испрекинати линии ни даваат позиции на кои ја додаваме фигурата M (на двете места истовремено) за да

го зголемиме t за 1, а „централната“ фигура (лента од долу до горе) се повторува $n-4$ пати за да се пополнат n колони (наместо 5) во квадратот. **(3п)**
Заклучуваме дека квадрат K со целобројна страна $n>1$ може да се подели на n фигури со еднаква плоштина ако и само ако бројот n е парен. $\square$

Забелешка. Еден поен може да се добие за поделба направена за $n=2k$, за секое $k \in \{1,2,3,4\}$, или за група $8t+2k$, за едно $k \in \{0,1,2,3\}$. Или вкупно два поена може да се добијат доколку се опфатени малите парни броеви n и барем две од групите $8t+2k$.