

Ристо Малчески, Скопје

НЕРАВЕНСТВА ВО ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК

Во оваа статија предмет на разгледување ќе бидат неравенства меѓу страните, висините, тежишните линии и радиусите на опишаната и впишаната кружница во правоаголен триаголник. Во редовната настава научи дека дека за катетите a, b и хипотенузата c важи Питагоровата теорема, т.е. дека важи

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

како и дека се точни равенствата

$$ab = ch = 2P, \quad R = \frac{c}{2}, \quad r = \frac{a+b-c}{2},$$

каде со P е означена плоштината на триаголникот, а со R и r се означени радиусите на опишаната и впишаната кружница во триаголникот, соодветно.

Задача 1. Нека a, b се катетите и c е хипотенузата на правоаголниот триаголник ABC . Докажи дека $a + b \leq c\sqrt{2}$.

Решение. *Прв начин.* Според Питагоровата теорема имаме $a^2 + b^2 = c^2$. Но,

$$a^2 + b^2 = \frac{(a+b)^2}{2} + \frac{(a-b)^2}{2} \geq \frac{(a+b)^2}{2},$$

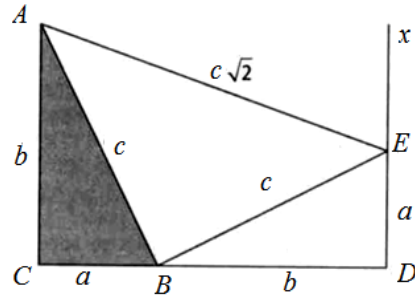
па затоа $c^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2}$, од каде добиваме $2c^2 \geq (a+b)^2$. Последното неравенство го коренуваме и го добиваме бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\frac{(a-b)^2}{2}$, т.е. ако и само ако $a = b$, што значи ако и само ако триаголникот е рамнокрак правоаголен.

Втор начин. Од Питагоровата теорема и неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува неравенството

$$\frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{\frac{c^2}{2}} = \frac{c}{\sqrt{2}},$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a = b$, што значи ако и само ако триаголникот е рамнокрак правоаголен.

Трет начин. Преку темето B ја продолжуваме катетата CB на правоаголниот триаголник до точката D така што $\overline{BD} = \overline{AC} = b$. Во точката D повлекуваме нормала Dx и на неа наоѓаме точка E таква што $\overline{DE} = \overline{CE} = a$. Сега, триаголникот ABE е рамнокрак правоаголен триаголник со



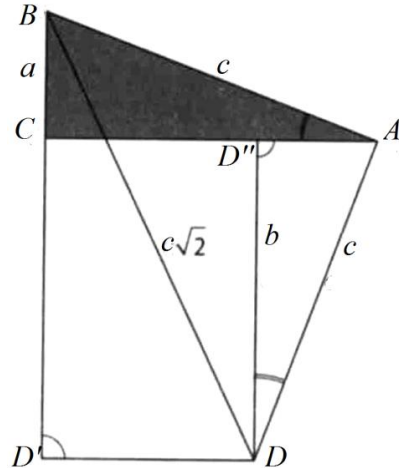
катети еднакви на c и хипотенуза еднаква на $c\sqrt{2}$. Затоа четириаголникот $ACDE$ е правоаголен трапез со висина CD , од каде следува $\overline{CD} \leq \overline{AE}$, односно $a + b \leq c\sqrt{2}$. Знак за равенство важи ако и само ако трапезот е правоаголник, што значи ако и само ако $a = b$.

Четврт начин. Конструираме рамнокрак правоаголен триаголник ABD , $\overline{AD} = \overline{AB} = c$ и $\angle BAD = 90^\circ$, а потоа повлекуваме нормали DD' и DD'' на правите BC и AC , соодветно ($D' \in BC$ и $D'' \in AC$). Правоаголните триаголници ABC и DAD'' се складни (Докажи!). Затоа

$$\overline{DD''} = \overline{AC} = b.$$

Четириаголникот $DD'CD''$ е правоаголен, па затоа $\overline{CD'} = b$. Според тоа,

$$\overline{BD'} = \overline{BC} + \overline{CD'} = a + b.$$



Понатаму, триаголникот BDD' е правоаголен со хипотенуза $c\sqrt{2}$, па затоа важи

$$a + b \leq c\sqrt{2}. \blacksquare$$

Задача 2. Ако h е висината спуштена кон хипотенузата c на правоаголен триаголник, тогаш $c \geq 2h$. Докажи!

Решение. *Прв начин.* Од Питагоровата теорема

$$a^2 + b^2 = c^2,$$

формулата за плошина на правоаголен триаголник $P = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$ и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува (цртеж десно):

$$c^2 = a^2 + b^2 \geq 2ab = 2ch,$$

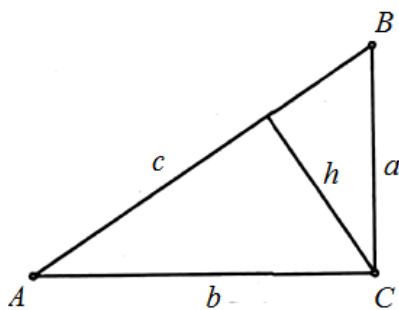
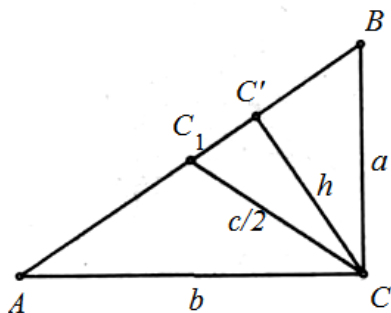
од каде добиваме $c \geq 2h$. Знак за равенство важи ако и само ако $a = b$, т.е. триаголникот е рамнокрак правоаголен.

Втор начин. Во правоаголен триаголник средината C_1 на хипотенузата е центар на опишаната кружница околу триаголникот, што значи дека

$$\overline{C_1B} = \overline{C_1A} = \overline{C_1C} = \frac{c}{2},$$

цртеж десно. Бидејќи хипотенузата е најголема страна на правоаголен триаголник, од триаголникот CC_1C' следува

$h \leq \frac{c}{2}$, т.е. $c \geq 2h$. Знак за равенство важи ако и само ако $C_1 \equiv C'$, т.е. триаголникот е рамнокрак правоаголен. ■



Задача 3. Докажи дека за плоштината P во правоаголен триаголник со хипотенуза c важи $P \leq \frac{c^2}{4}$.

Решение. Според задача 2, ако h е висината спуштена кон хипотенузата c на правоаголен триаголник, тогаш $c \geq 2h$, т.е. $h \leq \frac{c}{2}$. Според тоа, за плоштината P на триаголникот добиваме

$$P = \frac{1}{2}ch \leq \frac{1}{2}c \cdot \frac{c}{2} = \frac{c^2}{4}.$$

Јасно, според задача 2 знак за равенство важи ако и само ако $a = b$, т.е. ако и само ако триаголникот е рамнокрак правоаголен. ■

Задача 4. Ако a, b се катетите, h е висината спуштена кон хипотенузата c на правоаголен триаголник, тогаш

$$c + h \geq a + b.$$

Докажи!

Решение. Од $h > 0$ следува $h^2 > 0$. Сега, од Питагоровата теорема и равенството $ab = ch = 2P$ последователно добиваме

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

$$c^2 + h^2 > a^2 + b^2,$$

$$c^2 + h^2 + 2ch > a^2 + b^2 + 2ab,$$

$$(c + h)^2 > (a + b)^2.$$

Но, $a, b, c, h > 0$ па од последното неравенство следува $c + h \geq a + b$, што и требаше да се докаже. ■

Задача 5. Ако a, b се катетите, c е хипотенузата на правоаголен триаголник и r е радиусот на впишаната кружница во триаголникот, докажи дека

$$2r + c \geq 2\sqrt{ab}.$$

Решение. Имаме $r = \frac{a+b-c}{2}$, од каде добиваме $2r + c = a + b$. Сега, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$2r + c = a + b \geq 2\sqrt{ab}.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a = b$ и тогаш $c = a\sqrt{2}$, па затоа

$$r = \frac{2-\sqrt{2}}{2}a. \blacksquare$$

Задача 6. Ако t_a и t_b се тежишните линии соодветни на катетите a и b во правоаголниот триаголник ABC , тогаш

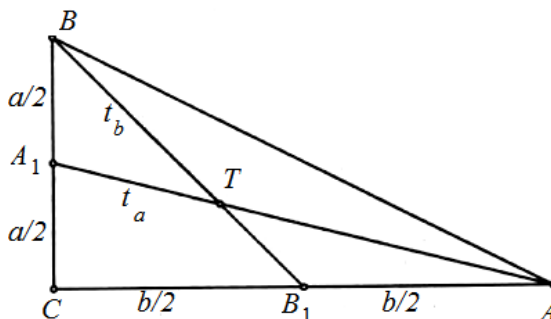
$$1 < \frac{t_a + t_b}{a + b} < \frac{3}{2}. \quad (1)$$

Докажи!

Решение. Од неравенството на триаголник за правоаголниот триаголник ACA_1 добиваме $t_a < \frac{a}{2} + b$, а од правоаголниот триаголник BCB_1 добиваме $t_b < \frac{b}{2} + a$. Последните две неравенства ги собираме и го добиваме неравенството

$$t_a + t_b < \left(\frac{a}{2} + b\right) + \left(\frac{b}{2} + a\right) = \frac{3}{2}(a + b),$$

кое е еквивалентно со десното неравенство во (1).



Бидејќи t_a и t_b се хипотенузи во правоаголните триаголници ACA_1 и BCB_1 , соодветно, важи $t_a > b$ и $t_b > a$. Последните две неравенства ги собираме и го добиваме неравенството

$$t_a + t_b > a + b,$$

кое е еквивалентно со левото неравенство во (1). ■

Задача 7. Докажи, ако t_a и t_b се тежишните линии соодветни на катетите a и b во правоаголниот триаголник ABC , тогаш

$$\frac{1}{2} < \frac{t_a}{t_b} < 2.$$

Решение. Од Питагоровата теорема применета на триаголниците AA_1C и BB_1C (цртеж годе) следува

$$t_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 \text{ и } t_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2.$$

Последните две равенства ги делиме и добиваме

$$\frac{t_a^2}{t_b^2} = \frac{a^2 + 4b^2}{b^2 + 4a^2}.$$

Но,

$$\frac{a^2+4b^2}{b^2+4a^2} = 4 - \frac{15a^2}{b^2+4a^2} < 4,$$

па затоа важи $\frac{1}{4} < \frac{t_a^2}{t_b^2} < 4$, а од тука го добиваме бараното двојно неравенство. ■

Задача 8. Докажи, ако t_a и t_b се тежишните линии соодветни на катетите a и b во правоаголникот триаголник ABC , а P е неговата плоштина, тогаш

$$\frac{5}{2}P \leq t_a t_b.$$

Решение. Во решението на претходната задача видовме дека важи $t_a^2 = (\frac{a}{2})^2 + b^2$ и $t_b^2 = (\frac{b}{2})^2 + a^2$. Ако ги помножиме овие две равенства, па потоа ги искористиме Питагоровата теорема, формулите за плоштина $P = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2}$ и неравенството $c \geq 2h$, добиваме

$$\begin{aligned} t_a^2 t_b^2 &= \frac{1}{4}(a^2 + 4b^2) \cdot \frac{1}{4}(b^2 + 4a^2) \\ &= \frac{1}{16}(4(a^2 + b^2)^2 + 9a^2 b^2) \\ &= \frac{1}{16}(4c^4 + 9c^2 h^2) \\ &\geq \frac{1}{16}(16c^2 h^2 + 9c^2 h^2) \\ &= (\frac{5}{2} \cdot \frac{ch}{2})^2 = (\frac{5}{2}P)^2, \end{aligned}$$

т.е. $t_a^2 t_b^2 \geq (\frac{5}{2}P)^2$. Со коренување на последното неравенство добиваме $\frac{5}{2}P \leq t_a t_b$. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако во неравенството $c \geq 2h$ важи знак за равенство, т.е. ако и само ако триаголникот е рамнокрак правоаголен. ■

Задача 9. Докажи, ако t_a и t_b се тежишните линии соодветни на катетите a и b , а t_c е тежишната линија повлечена кон хипотенузата во правоаголникот триаголник ABC , тогаш

$$\frac{t_a + t_b}{t_c} \leq \sqrt{10}.$$

Решение. Претходно видовме дека

$$t_a^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2 \text{ и } t_b^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 + a^2.$$

Ако ги собереме последните две равенства и ја искористиме Питагоровата теорема добиваме

$$t_a^2 + t_b^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2) = \frac{5}{4}c^2.$$

Но, $c = 2t_c$, па со замена во последното равенство добиваме

$$t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2.$$

Конечно, од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува неравенството

$$t_a + t_b \leq \sqrt{2(t_a^2 + t_b^2)} = \sqrt{2 \cdot 5t_c^2} = t_c \sqrt{10},$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $t_a = t_b$, т.е. ако и само ако триаголникот е рамнокрак правоаголен. ■

Задача 10. Докажи дека во правоаголен триаголник важи неравенството

$$R \geq (1 + \sqrt{2})r.$$

Решение. Во задача 1 докажавме дека $a + b \leq c\sqrt{2}$. Ако последното неравенство го помножиме со $1 + \sqrt{2}$, последователно добиваме:

$$(a + b)(1 + \sqrt{2}) \leq c\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}),$$

$$(a + b)(1 + \sqrt{2}) \leq c(2 + \sqrt{2}) = c(1 + \sqrt{2}) + c,$$

$$(a + b - c)(1 + \sqrt{2}) \leq c.$$

Сега, ако искористиме дека $c = 2R$ и $2r = a + b - c$, добиваме

$$2R \geq 2(1 + \sqrt{2})r, \text{ т.е. } R \geq (1 + \sqrt{2})r. \blacksquare$$

Задача 11. Докажи дека во правоаголен триаголник важи неравенството

$$\frac{a+b+c}{2h} \geq 1 + \sqrt{2}.$$

Решение. Од Питагоровата теорема, равенството $ab = ch$ и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\begin{aligned}\frac{a+b+c}{2h} &= \frac{c(a+b+c)}{2ab} = \frac{c(a+b)}{2ab} + \frac{c^2}{2ab} \\ &= \frac{(a+b)\sqrt{a^2+b^2}}{2ab} + \frac{a^2+b^2}{2ab} \\ &\geq \frac{2\sqrt{ab}\cdot\sqrt{2ab}}{2ab} + \frac{2ab}{2ab} = 1 + \sqrt{2}.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a = b$, т.е. триаголникот е рамнокрак правоаголен. ■

Задача за самостојна работа

1. Докажи, ако во правоаголен триаголник t_a и t_b се тежишните линии соодветни на катетите a и b , тогаш точно е неравенството $\frac{\sqrt{5}}{2} \leq \frac{t_a+t_b}{a+b}$.

2. Докажи, ако t_a и t_b се тежишните линии соодветни на катетите a и b , а r е радиусот на впишаната кружница во правоаголен триаголник тогаш точно е неравенството

$$t_a^2 + t_b^2 \geq 5r^2(3 + 2\sqrt{2}).$$

3. Докажи дека во правоаголен триаголник важи неравенството

$$\sqrt{2} - 1 < \frac{r}{h} < \frac{1}{2},$$

каде r е радиусот на впишаната кружница, а h е висината над хипотенузата.

4. Нека R и r се радиусите на опишаната и впишаната кружница и P е плоштината на правоаголниот триаголник. Докажи дека

$$R + r \geq \sqrt{2P}.$$

5. Докажи, ако во правоаголен триаголник t_a и t_b се тежишните линии соодветни на катетите a и b , тогаш точно е неравенството

$$t_a^2 + t_b^2 \geq \frac{5}{8}(a+b)^2.$$

6. Нека a, b се катетите и h е висината повлечена над хипотенузата во правоаголен триаголник. Докажи го неравенството

$$a + b \geq 2h\sqrt{2}.$$

7. Нека a, b се катетите, c е хипотенузата на правоаголен триаголник и $n > 3$ е природен број. Докажи го неравенството

$$a^n + b^n < c^n.$$

Литература

1. Малчески, Р. (2021). Неравенства меѓу средините, <https://matematickitalent.mk>
2. Малчески, С. (2021). Неравенства меѓу средините и примена, <https://matematickitalent.mk>