

## ПРВ МЕМОРИЈАЛЕН МАТЕМАТИЧКИ НАТПРЕВАР

### АЛЕКСАНДАР БЛАЖЕВСКИ - ЦАНЕ

17.11.2019

1. Даден е конвексен четириаголник  $ABCD$  во кој симетралите на внатрешните  $\angle ABC$  и  $\angle ADC$  имаат заедничка точка на дијагоналата  $AC$ . Докажете дека симетралите на внатрешните  $\angle BAD$  и  $\angle BCD$  имаат заедничка точка на дијагоналата  $BD$ .

(7 поени)

2. Во секое  $1 \times 1$  квадратче од  $m \times n$  табла е запишан по еден позитивен цел број. Дозволени се следниве трансформации:

(1) Во произволно избрана редица од таблата сите броеви да се намалат за 1.

(2) Во произволно избрана колона од таблата сите броеви да се удвојат.

Дали е секогаш возможно, после конечен број чекори, сите броеви запишани на таблата да се еднакви на  $-1$ ? (Одговорот да се образложи.)

(7 поени)

3. За дадени цели броеви  $n > 0$  и  $k > 1$ , нека  $F_{n,k}(x, y) = x! + n^k + n + 1 - y^k$ . Покажете дека само за конечно многу парови  $(a, b)$  од позитивни цели броеви важи  $F_{n,k}(a, b) = 0$ .

(7 поени)

Време за работа: 4.5 саати.



СОЈУЗ НА МАТЕМАТИЧАРИ НА МАКЕДОНИЈА

## РЕШЕНИЈА

1. Даден е конвексен четириаголник  $ABCD$  во кој симетралите на внатрешните  $\angle ABC$  и  $\angle ADC$  имаат заедничка точка на дијагоналата  $AC$ . Докажете дека симетралите на внатрешните  $\angle BAD$  и  $\angle BCD$  имаат заедничка точка на дијагоналата  $BD$ .

Решение: Нека  $E$  е заедничката точка на симетралите на  $\angle ABC$  и  $\angle ADC$  со дијагоналата  $AC$ , и нека  $M$  и  $N$  се пресеците на симетралите на  $\angle BAD$  и  $\angle BCD$ , соодветно, со дијагоналата  $BD$ . Од теоремата за симетрала на агол (применета за  $BE$  и  $DE$ ) добиваме:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC} \quad (2 \text{ поени})$$

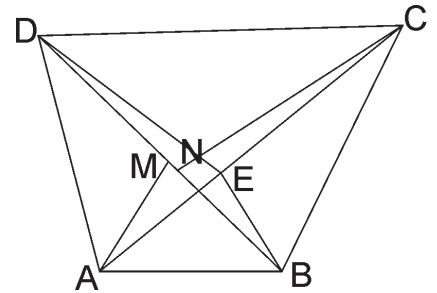
Од истата теорема (применета за  $AM$  и  $CN$ ) добиваме:

$$\frac{MB}{MD} = \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC} = \frac{BN}{ND} \Rightarrow \frac{BM}{MD} = \frac{BN}{ND} \quad (2 \text{ поени})$$

Ако додадеме 1 кон двете страни на последното равенство добиваме:

$$\frac{BM}{MD} + 1 = \frac{BN}{ND} + 1 \Rightarrow \frac{BM + MD}{MD} = \frac{BN + ND}{ND} \Rightarrow \frac{BD}{MD} = \frac{BD}{ND} \Rightarrow \overline{MD} = \overline{ND} \quad (2 \text{ поени})$$

Следствено, точките  $M$  и  $N$  се совпаѓаат; таа е посакуваната заедничка точка. (1 поен)



2. Во секое  $1 \times 1$  квадратче од  $m \times n$  табла е запишан по еден позитивен цел број. Дозволени се следниве трансформации:

- (1) Во произволно избрана редица од таблата сите броеви да се намалат за 1.
- (2) Во произволно избрана колона од таблата сите броеви да се удвојат.

Дали е секогаш возможно, после конечен број чекори, сите броеви запишани на таблата да се еднакви на  $-1$ ? (Одговорот да се образложи.)

Решение: Одговорот е потврден. Имено, ќе покажеме како, во конечен број чекори, може да се постигне сите броеви запишани во првата редица да се еднакви на 0, а притоа преостанатите броеви на таблата да се позитивни. (1 поен)

### Постапка

Нека  $G$  и  $M$ , соодветно, се најголемиот и најмалиот број во првата редица.

- Сè додека  $G - M > 0$ , оваа разлика може да се направи помала. Навистина, најпрво  $M-1$  пати последователно ја применуваме трансформацијата (1) врз првата редица, а потоа ја применуваме по еднаш трансформацијата (2) врз секоја колона кај која во првата редица (моментално) стои бројот 1. Така, новодобиената вредност на  $G - M$  е за 1 помала од старата. (3 поени)

- Доколку сите броеви во првата редица се меѓусебно еднакви, тогаш  $M$  пати (со моменталната вредност на  $M$ ) последователно ја применуваме трансформацијата (1) врз првата редица. (1 поен)
- 

Ја повторуваме опишаната постапка врз секоја од преостанатите редици. (1 поен)

На крајот, останува да ја примениме уште по еднаш трансформацијата (1) врз секоја редица од таблата. (1 поен)

3. За дадени цели броеви  $n > 0$  и  $k > 1$ , нека  $F_{n,k}(x, y) = x! + n^k + n + 1 - y^k$ . Покажете дека само за конечно многу парови  $(a, b)$  од позитивни цели броеви важи  $F_{n,k}(a, b) = 0$ .

Решение: Нека  $A = n^k + n + 1$ . Да забележиме дека постои прост делител  $p$  на  $A$ , таков што степенот  $t$  на  $p$  во канонската факторизација на  $A$  не е делив со  $k$ . Навистина, ако претпоставиме дека таков прост делител не постои, тогаш  $A$  мора да е  $k$ -ти степен на природен број. Последното не е можно бидејќи  $n^k < A < (n + 1)^k$ . **(3 поени)**

Нека  $F_{n,k}(a, b) = 0$ . Ќе покажеме дека  $a < (t + 1)p$ . Имено, ако  $a \geq (t + 1)p$ , тогаш од  $p^{t+1} \mid a!$  и  $p^t \mid A$ , следува  $p^t \mid b^k$ . Но, ова повлекува дека  $p^{\lfloor \frac{t}{k} \rfloor} \mid b$ , па така  $p^{k \lfloor \frac{t}{k} \rfloor} \mid b^k$ . Од друга страна,  $k \lfloor \frac{t}{k} \rfloor \geq t + 1$  (бидејќи  $k \nmid t$ ), и оттука  $p^{t+1} \mid A$ . Добиениот заклучок противречи на претпоставката дека  $t$  е степенот на  $p$  во канонската факторизација на  $A$ . **(3 поени)**

Преостанува да искористиме дека равенството  $a! + n^k + n + 1 - b^k = 0$  е еквивалентно со  $b = \sqrt[k]{a! + n^k + n + 1}$ . Следствено, за фиксни  $a$ ,  $n$  и  $k$ , постои најмногу еден природен  $b$  за кој  $F_{n,k}(a, b) = 0$ . **(1 поен)**

Значи, за дадени цели броеви  $n > 0$  и  $k > 1$ , равенката  $F_{n,k}(a, b) = 0$  има само конечно многу природни решенија.