Општински натпревар 2017

I година

1АБ. Докажи дека за секој природен број n, вредноста на изразот $(n+1)(n-2)+(n+2)(n+3)$ е сложен број.

Решение. Дадениот израз го разложуваме на множители и добиваме

$$\begin{aligned}(n+1)(n-2)+(n+2)(n+3) &= n^2-n-2+n^2+5n+6 \\ &= 2n^2+4n+4=2(n^2+2n+2).\end{aligned}$$

Според тоа, за секој природен број n даденниот израз е делив со 2 и со $n^2+2n+2=(n+1)^2+1\geq 5$, што значи дека е сложен број.

2А. Определи ги сите природни броеви кои се помали од 10000, имаат цифра на единици 1 и можат да се престават во видот 5^m+8^n, $m,n\in\mathbb{N}$.

Решение. Бројот 5^m завршува на цифрата 5, па затоа е потребно бројот 8^n да завршува на цифрата 6. Бидејќи

$$8^1=8,\ 8^2=64,\ 8^3=512,\ 8^4=4096,\ 8^5>10000$$

следува дека $n=4$ и $8^4=4096$. Значи, $5^m<5904$. Бидејќи

$$5^1=5,\ 5^2=25,\ 5^3=125,\ 5^4=625,\ 5^5=3125,\ 5^6=15625>5964$$

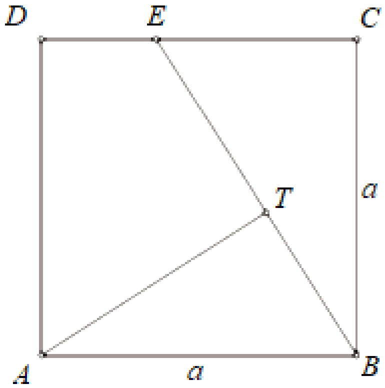
следува дека $m\in\{1,2,3,4,5\}$, па има 5 такви броеви:

$$\begin{aligned}5^1+8^4&=5+4096=4101\\ 5^2+8^4&=25+4096=4121\\ 5^3+8^4&=125+4096=4221\\ 5^4+8^4&=625+4096=4721\\ 5^5+8^4&=3125+4096=7221\end{aligned}.$$

2Б. Ако $xy=6$, $yz=9$ и $zx=24$, колку е вредноста на xyz?

Решение. Ако ги помножиме сите три равенства ќе добиеме $xyyzzx=6\cdot 9\cdot 24$, односно $x^2y^2z^2=3^2\cdot 4^2\cdot 3^2$. Последното равенство е еквивалентно со равенството $(xyz)^2=36^2$, од каде добиваме дека $xyz=36$ или $xyz=-36$.

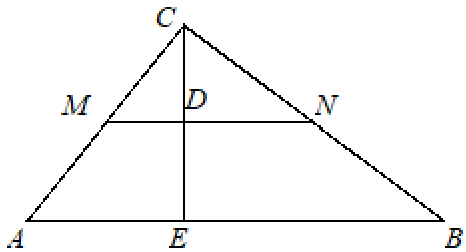
3А. Во внатрешноста на квадратот $ABCD$ одбрана е точка T таква што $\measuredangle ATB = 90°$, $\overline{BT} = 6\,\text{cm}$. Колкава е плоштината на квадратот ако правата BT ја сече страната CD во точката E и важи $\overline{CE} : \overline{ED} = 3:2$?



Решение. Од условот на задачата следува дека $\overline{CE} = 3k$, $\overline{ED} = 2k$ и $a = 5k$. Нека $\overline{AT} = x$. Триаголниците ABT и BEC се слични бидејќи се правоаголни и $\measuredangle BAT = \measuredangle EBC$ (агли со нормални краци). Според тоа, $\overline{BT} : \overline{EC} = \overline{AT} : \overline{BC}$, односно $6 : 3k = x : 5k$, па затоа $x = 10cm$. Од Питагорова теорема применета на триаголникот ABT следува $\overline{AB}^2 = \overline{AT}^2 + \overline{BT}^2$, односно $a^2 = 10^2 + 6^2$. Според тоа, плоштината на квадратот е $P = a^2 = 136\,\text{cm}^2$.

3Б. Во триаголникот ABC со страна $\overline{AB} = a$ и висина h, средната линија MN го дели триаголникот на триаголник MNC и трапез $ABMN$. Определи го односот на плоштините на триаголникот ABC и трапезот $ABMN$.

Решение. Нека $\overline{AB} = a$, $\overline{CE} = h$, $\overline{CD} = h_1$ и $\overline{MN} = m$. Бидејќи $\triangle ABC$ е сличен на $\triangle MNC$ со коефициент на сличност 2, имаме дека $\overline{CD} = h_1 = \frac{h}{2}$ и $\overline{MN} = m = \frac{a}{2}$. Според тоа,



$$P_{MNC} = \frac{ah}{8} \quad \text{и} \quad P_{ABMN} = P_{ABC} - P_{MNC} = \frac{ah}{2} - \frac{ah}{8} = \frac{3ah}{8},$$

па затоа

$$\frac{P_{ABMN}}{P_{ABC}} = \frac{\frac{3ah}{8}}{\frac{ah}{2}} = \frac{6ah}{8ah} = \frac{3}{4}.$$

4АБ. Определи ги сите четирицифрени броеви $\overline{abcd}$ такви што

$$\overline{cda} - \overline{abc} = 297 \text{ и } a + b + c = 23.$$

Решение. Равенката $\overline{cda} - \overline{abc} = 297$ можеме да ја запишеме во облик

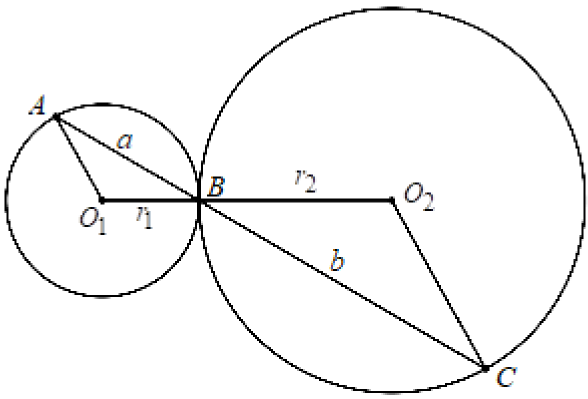
$$99(c - a) + 10(d - b) = 3 \cdot 99.$$

Сега, според теоремите за деливост во множеството природни броеви $99|10(d-b)$. Бидејќи $d-b$ или $b-d$ е цифра, тоа е можно ако и само ако $10(d-b)=0$, т.е. $d=b$. Но тогаш $99(c-a)=3\cdot 99$, од каде добиваме $c-a=3$, т.е. $c=a+3$. Ако пак сега замениме во $a+b+c=23$ добиваме $a+b+a+3=23$, т.е. $b+2a=20$, па затоа $b=2(10-a)$. Бидејќи b е цифра, $b\in\{0,2,4,6,8\}$, па според тоа $10-a\le 4$, т.е. $a\ge 6$. Бидејќи и c е цифра од равенството $c=a+3$, добиваме дека $a=6$. Сега е јасно дека $c=9$ и $b=8$. Значи, единствен број кој го задоволува условот од задачата е бројот $\overline{abcd}=6898$.

II година

1АБ. Две кружници се допираат однадвор. Низ допирната точка е повлечена права, која на кружниците отсекува тетиви чии должини се однесуваат како $5:7$. Најди ги радиусите на кружниците, ако растојанието меѓу нивните центри е 24.

Решение. Нека a е тетивата од кружницата $k_1(O_1,r_1)$, b е тетивата од кружницата $k_2(O_2,r_2)$ што ги отсекува правата .



Од условот на задачата и од сличноста на триаголниците ABO_1 и CBO_2 го добиваме системот

$$\begin{cases} r_1 : r_2 = 5:7 \\ r_1 + r_2 = 24 \end{cases}$$

од каде следува дека $r_1=10, r_2=14$.

2АБ. За реалните броеви x и y броевите x^2+y^2, x^3+y^3 и x^4+y^4 се рационални. Дали бројот $x+y$ е рационален?

Решение. Доволно е да се разгледаат два случаи, кога едниот од броевите е нула и кога двата броеви се различни од нула, т.е. треба да се разгледуваат случаите $xy=0$ и $xy\neq 0$.

Случај 1. Нека $xy=0$. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $y=0$ (случајот кога и двата броја се еднакви на нула е тривијален). Во тој случај

$$x^2+y^2=x^2+0^2=x^2 \text{ и } x^3+y^3=x^3+0^3=x^3.$$

Но, $x^2, x^3\in\mathbb{Q}$ па од својствата на рационалните броеви добиваме $x=\frac{x^3}{x^2}\in\mathbb{Q}$. Сега е јасно дека $x+y=x+0=x\in\mathbb{Q}$.

Случај 2. Нека $xy\neq 0$. Од равенството $(x^2+y^2)^2=x^4+y^4+2x^2y^2$ и од својствата на рационалните броеви, добиваме дека $(xy)^2\in\mathbb{Q}$. Но, тогаш од равенството $x^6+y^6=(x^2+y^2)(x^4-x^2y^2+y^4)$, следува дека $x^6+y^6\in\mathbb{Q}$. Од $x^6+y^6\in\mathbb{Q}$, својствата на рационалните броеви и равенството $(x^3+y^3)^2=x^6+y^6+2(xy)^3$, следува дека $(xy)^3\in\mathbb{Q}$. Сега, како и во случајот 1 имаме $xy=\frac{(xy)^3}{(xy)^2}\in\mathbb{Q}$. Од друга страна, $x+y=\frac{x^3+y^3}{x^2-xy+y^2}\in\mathbb{Q}$, што требаше да се докаже.

3А. Решенијата на квадратната равенка $x^2+px+q=0$, каде $p+q=2017$, се цели броеви. Определи ги тие решенија.

Решение. Според Виетовите формули за решенијата x_1 и x_2 важи

$$p+q=-(x_1+x_2)+x_1x_2=(x_1-1)(x_2-1)-1.$$

Но $p+q=2017$, па затоа

$$(x_1-1)(x_2-1)=2018.$$

Делители на 2018 се $\pm1,\ \pm2,\ \pm1009$ и ±2018. Ако земеме $|x_1|\leq|x_2|$, тогаш

$$x_1-1=-1 \text{ и } x_2-1=-2018,\ x_1-1=1 \text{ и } x_2-1=2018,$$

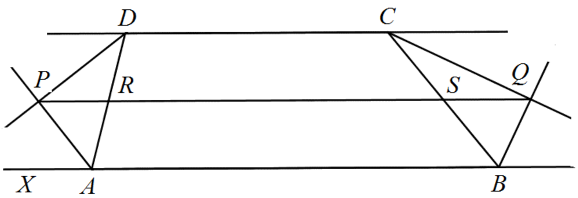
$$x_1-1=-2 \text{ и } x_2-1=-1009 \text{ и } x_1-1=2 \text{ и } x_2-1=1009,$$

од каде добиваме дека решенијата на равенката се:

$$x_1=0 \text{ и } x_2=-2017;\ x_1=2 \text{ и } x_2=2019;$$

$x_1 = -1$ и $x_2 = -1008$; и $x_1 = 3$ и $x_2 = 1010$.

4А. Даден е трапез $ABCD$ со поголема основа AB. Симетралите на надворешните агли во темињата A и D се сечат во точката P, а во темињата B и C во точката Q (види цртеж). Докажи, дека должината на отсечката PQ е еднаква на полупериметарот на трапезот.



Решение. Надворешните агли во A и D се суплементни, па затоа симетралите на надворешните агли во A и D се заемно нормални. Слично, симетралите на надворешните агли во B и C се заемно нормални. Нека PR е тежишна линија во правоаголниот триаголник ADP, тогаш $\overline{PR} = \frac{\overline{AD}}{2}$. Од друга страна $\overline{PR} = \overline{AR}$, од каде следува $\measuredangle RPA = \measuredangle RAP$ и $\measuredangle RAP = \measuredangle RAX$ (X е точка од правата AB, лево од A), па затоа $PR \| AX$ т.е. $PR \| AB$. Слично, $QS \| AB$, од каде следува дека $RS \| AB$. Значи точките P, R, S и Q се колинеарни, од каде добиваме дека

$$\overline{PQ} = \overline{PR} + \overline{RS} + \overline{SQ} = \frac{\overline{AD}}{2} + \frac{\overline{AB}+\overline{CD}}{2} + \frac{\overline{BC}}{2} = \frac{\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DA}}{2},$$

што и требаше да се докаже.

3Б. Ако за коефициентите a, b, c на равенката $ax^2 + bx + c = 0$ важи $a > 0$ и $b > a + c$, докажи дека таа има две различни реални решенија.

Решение. Ако $c \geq 0$, тогаш $b > a + c > 0$, па затоа

$$D = b^2 - 4ac > (a+c)^2 - 4ac = (a-c)^2 \geq 0,$$

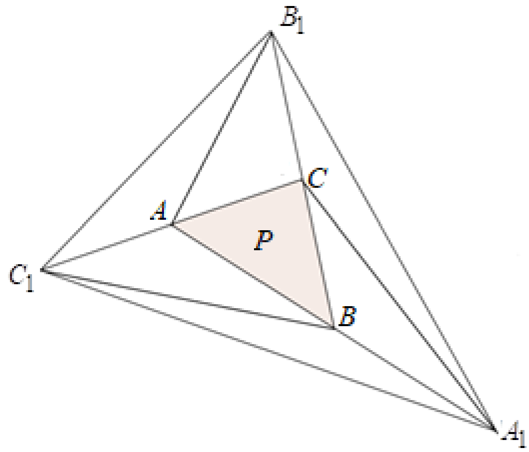
т.е. $D > 0$ и равенката има две различни реални решенија. Ако $c < 0$, тогаш

$$D = b^2 - 4ac \geq -4ac > 0$$

и равенката има две различни реални решенија.

4Б. Даден е триаголникот ABC чија плоштина е $2017\,cm^2$. Страните AB, BC и CA се продолжени преку темињата B, C и A за својата должина, така што $\overline{AB}=\overline{BA_1}$, $\overline{BC}=\overline{CB_1}$ и $\overline{CA}=\overline{AC_1}$. Пресметај ја плоштината на триаголникот $A_1B_1C_1$.

Решение. Ги повлекуваме отсечките CA_1, AB_1 и BC_1. Ги разгледуваме триаголниците ABC и BA_1C. Тие имаат еднакви страни, $\overline{AB}=\overline{BA_1}$, и заедничка висина спуштена од темето C. Значи, тие се еднаквоплоштни. Слично, еднаквоплоштни се и BA_1C и CA_1B_1, ABC и ACB_1, ACB_1 и C_1AB_1, ABC и AC_1B, AC_1B и BC_1A_1.



Затоа бараната плоштина е $7\cdot 2017=14119cm^2$.

III година

1А. Определи ја вредноста на параметарот a така што едниот корен на равенката $x^2-\frac{15}{4}x+a=0$ да е еднаков на квадратот на другиот нејзин корен.

Решение. Нека x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2-\frac{15}{4}x+a=0$ и нека важи $x_2=x_1^2$. Од Виетовите формули следува

$$\begin{cases} x_1+x_2=\frac{15}{4} \\ x_1x_2=a \end{cases},$$

и како $x_2=x_1^2$ добиваме

$$\begin{cases} x_1+x_1^2=\frac{15}{4} \\ x_1^3=a \end{cases}.$$

Од првата равенка во последниот систем имаме

$$x_1+x_1^2=\frac{15}{4} \quad\Leftrightarrow\quad 4x_1^2+4x_1-15=0 \quad\Leftrightarrow\quad (x_1)_1=-\frac{5}{2}\ \vee\ (x_1)_2=\frac{3}{2}.$$

Сега, од втората равенка на системот добиваме дека $a=-\frac{125}{8}$ или $a=\frac{27}{8}$.

1Б. Нека x_1 и x_2 се различните корени на равенката $2x^2-3x+4=0$. Пресметај ја вредноста на изразот $\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}$.

Решение. Од Виетовите врски имаме дека важи $x_1+x_2=\frac{3}{2};\ x_1x_2=2$. Тогаш

$$\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3}=\frac{x_1^3+x_2^3}{x_1^3x_2^3}=\frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1x_2)^3}=-\frac{45}{64}.$$

2АБ. Реши ја равенката $5^{x-2}\cdot 8^{\frac{4x-12}{3}}=20^{6-x}$.

Решение. Последователно, со еквивалентни трансформации добиваме:

$$5^{x-2}\cdot 8^{\frac{4x-12}{3}}=20^{6-x},$$
$$5^{x-2}\cdot (2^3)^{\frac{4x-12}{3}}=(2^2\cdot 5)^{6-x},$$
$$5^{x-2}\cdot 2^{4x-12}=2^{2(6-x)}\cdot 5^{6-x},$$
$$\frac{5^{x-2}\cdot 2^{4x-12}}{5^{6-x}\cdot 2^{12-2x}}=1,$$
$$5^{2x-8}\cdot 2^{6x-24}=1,$$
$$(5^2\cdot 2^6)^{x-4}=1,$$
$$x-4=0,$$
$$x=4.$$

3АБ. Пресметај ја вредноста на изразот

$$A=\operatorname{tg}5^\circ\cdot\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\cdot\operatorname{tg}65^\circ+\operatorname{tg}65^\circ\cdot\operatorname{tg}5^\circ.$$

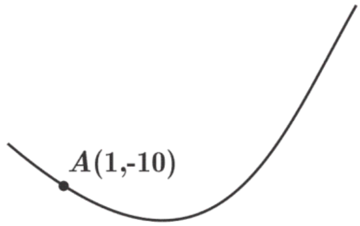
Решение. Со помош на тригонометриски идентитети добиваме:

$$\begin{aligned}A&=\operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}65^\circ+\operatorname{tg}65^\circ\operatorname{tg}5^\circ\\
&=\operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}20^\circ\operatorname{tg}(90^\circ-25^\circ)+\operatorname{tg}(90^\circ-25^\circ)\operatorname{tg}5^\circ\\
&=\operatorname{tg}5^\circ\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{ctg}25^\circ(\operatorname{tg}20^\circ+\operatorname{tg}5^\circ)\\
&=\frac{\sin5^\circ\sin20^\circ}{\cos5^\circ\cos20^\circ}+\frac{\cos25^\circ}{\sin25^\circ}\left(\frac{\sin20^\circ}{\cos20^\circ}+\frac{\sin5^\circ}{\cos5^\circ}\right)\\
&=\frac{\sin5^\circ\sin20^\circ}{\cos5^\circ\cos20^\circ}+\frac{\cos25^\circ}{\sin25^\circ}\cdot\frac{\sin20^\circ\cos5^\circ+\sin5^\circ\cos20^\circ}{\cos20^\circ\cos5^\circ}\\
&=\frac{\sin5^\circ\sin20^\circ}{\cos5^\circ\cos20^\circ}+\frac{\cos25^\circ}{\sin25^\circ}\cdot\frac{\sin25^\circ}{\cos20^\circ\cos5^\circ}\end{aligned}$$

$$=\frac{\sin 5^\circ \sin 20^\circ}{\cos 5^\circ \cos 20^\circ}+\frac{\cos 25^\circ}{\cos 20^\circ \cos 5^\circ}=\frac{\sin 5^\circ \sin 20^\circ+\cos 25^\circ}{\cos 5^\circ \cos 20^\circ}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ-\cos 25^\circ)+\cos 25^\circ}{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ+\cos 25^\circ)}=\frac{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ+\cos 25^\circ)}{\frac{1}{2}(\cos 15^\circ+\cos 25^\circ)}=1.$$

4А. Во Декартов правоаголен координатен систем даден е графикот на параболата $y=ax^2+bx+c$ на кој е означена точка $A(1,-10)$. Потоа координатните оски и скоро целата парабола се избришани (цртеж 1). Докажи дека $b^2+bc>a^2+ac.$



цртеж 1

Решение. Од цртежот е јасно дека параболата е отворена нагоре, па затоа $a>0.$ Точката A лежи на параболата, па затоа важи

$$0>-10=a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+c\,.$$

Од цртеж 1 заклучуваме дека темето на параболата има апсциса $\frac{-b}{2a}>1>0,$ па од $a>0$ следува дека важи $b<0.$ Според тоа, $b<0<a$ и ако во последните неравенства помножиме со $a+b+c<0$ го добиваме неравенството

$$(a+b+c)b>(a+b+c)a$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство.

4Б. Реши ја неравенката $\frac{x^2+3x-5}{x^2+3x+5}<1$.

Решение. Последователно добиваме

$$\frac{x^2+3x-5}{x^2+3x+5}<1 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2+3x-5}{x^2+3x+5}-1<0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2+3x-5-(x^2+3x+5)}{x^2+3x+5}<0$$

$$\Leftrightarrow\; \frac{-10}{x^2+3x+5}<0 \;\Leftrightarrow\; x^2+3x+5>0$$

$$\Leftrightarrow\; (x+\tfrac{3}{2})^2+\tfrac{11}{2}>0.$$

Последното неравенство е исполнето за секој реален број x, од каде што следува дека множеството решенија на неравенката е множеството реални броеви.

IV година

1АБ. Првиот член на една геометриска прогресија со позитивни членови е 9. Збирот од логаритмите (со основа 10) на првите шест членови е еднаков на една четвртина од збирот на логаритмите на следните девет членови. Определи го количникот на прогресијата.

Решение. Нека q е количникот на прогресијата. Бидејќи таа е со позитивни членови, следува $q>0$. Имаме

$$\lg a_1+\lg a_2+...+\lg a_6=\tfrac{1}{4}(\lg a_7+\lg a_8+...+\lg a_{15})$$

т.е.

$$\lg(a_1a_2...a_6)=\tfrac{1}{4}\lg(a_7a_8...a_{15}) \text{, или } a_1a_2...a_6=\sqrt[4]{a_7a_8...a_{15}}\,.$$

Сега, имаме

$$a_1a_1qa_1q^2...a_1q^5=\sqrt[4]{a_1q^6a_1q^7...a_1q^{14}} \text{, т.е. } a_1^6q^{\frac{5\cdot 6}{2}}=\sqrt[4]{a_1^9q^{\frac{14\cdot 15}{2}-\frac{5\cdot 6}{2}}}\,.$$

Оттука $a_1^6q^{15}=\sqrt[4]{a_1^9q^{90}}$, т.е. $a_1^{\frac{15}{4}}=q^{\frac{15}{2}}$, па затоа $q=(a_1^{\frac{15}{4}})^{\frac{2}{15}}=\sqrt{a_1}$. Бидејќи $a_1=9$ и $q>0$ добиваме $q=3$.

2АБ. Ако $x^2-3x+1=0$, колку е $x^9+x^7+x^{-9}+x^{-7}$?

Решение. Имаме $x\cdot\frac{1}{x}=1$, па затоа од Виетовите формули следува дека корени на равенката се x и $\frac{1}{x}$, што значи $x+\frac{1}{x}=3$, т.е. $1+x^2=3x$. Понатаму,

$$\begin{aligned}x^9+x^7+x^{-9}+x^{-7}&=x^7(x^2+1)+x^{-9}(1+x^2)\\&=(1+x^2)(x^7+x^{-9})\\&=3x(x^7+x^{-9})=3(x^8+x^{-8}).\end{aligned}$$

Од $x+x^{-1}=3$ следува $(x+x^{-1})^2=9$, односно $x^2+x^{-2}=7$.

Од $x^2+x^{-2}=7$ следува $(x^2+x^{-2})^2=49$, односно $x^4+x^{-4}=47$.

Од $x^4+x^{-4}=47$ следува $(x^4+x^{-4})^2=47^2=2209$, т.е. $x^8+x^{-8}=2207$.

Конечно, $x^9+x^7+x^{-9}+x^{-7}=3(x^8+x^{-8})=3\cdot 2207=6621$.

3А. Даден полиномот

$$P(x)=(x-2)^{2016}(x+2016)+(x-2)^{2015}(x+2015)+...+(x-2)(x+1)\,.$$

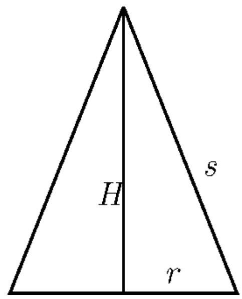
Определи го збирот на коефициентите на полиномот $P(x)$.

Решение. Збирот на коефициентите на било кој полином е еднаков на $P(1)$. Според тоа, збирот на коефициентите на полиномот $P(x)$ е еднаков на

$$P(1) = (-1)^{2016}(1+2016) + (-1)^{2015}(1+2015) + ... + (-1)(1+1)$$
$$= 2017 - 2016 + 2015 - 2014 + ... + 3 - 2.$$

Во последниот збир имаме 1008 парови чиј збир е 1, па затоа збирот на коефициентите на полиномот $P(x)$ е 1008.

3Б. Радиусот, висината и изводницата на прав кружен конус се последователни членови на една аритматичка прогресија. Одреди го волуменот на конусот ако плоштината на оскиниот пресек на конусот изнесува 300.



Решение. Имаме $r, H = r + x$ и $s = r + 2x$. Плоштината на оскиниот пресек е $P = \frac{2rH}{2} = rH = 300$, па затоа $x = \frac{300}{r} - r$. Понатаму, $s^2 = H^2 + r^2$, па затоа

$$(r + 2x)^2 = (r + x)^2 + r^2.$$

Од последново и од $x = \frac{300}{r} - r$ добиваме дека $r = 15$. Следува $x = 5$ и $H = 20$. Значи, $V = \frac{r^2 \pi H}{3} = 1500\pi$.

4А. Докажи дека

$$\underbrace{666.....666}_{n}{}^2 = \underbrace{444...444}_{n-1}3\underbrace{555...555}_{n-1}6,$$

за секој природен број n.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со помош на принципот на математичка индукција. Очигледно е дека $6^2 = 36$ и $66^2 = 4356$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n = k$, т.е.

$$\underbrace{666.....666}_{k}{}^2 = \underbrace{444...444}_{k-1}3\underbrace{555...555}_{k-1}6.$$

За $n = k + 1$, имаме

$$\underbrace{666.....666}_{k+1}{}^2 = (6\underbrace{000...000}_{k} + \underbrace{666...666}_{k})^2$$
$$= 36\underbrace{000...000}_{2k} + 7\underbrace{999...999}_{k-1}2\underbrace{000...000}_{k} + \underbrace{444...444}_{k-1}3\underbrace{555...555}_{k-1}6$$
$$= 36\underbrace{000...000}_{2k} + 8\underbrace{444...444}_{k-2}3\underbrace{555...555}_{k}6$$
$$= \underbrace{444...444}_{(k+1)-1}3\underbrace{555...555}_{(k+1)-1}6$$

што значи дека тврдењето важи и за $n=k+1$, па согласно принципот на математичка индукција тврдењето важи за секој природен број n.

4Б. Пресметај го збирот на броевите $5, 55, 555, 5555, ..., \underbrace{555...5}_{5555\text{ цифри}}$.

Решение. Последователно имаме

$$\begin{aligned}5+55+555+5555+...+\underbrace{555...5}_{5555\text{ цифри}} &= 5(1+11+111+...+\underbrace{11...1}_{5555\text{ цифри}})\\ &= 5(\tfrac{10-1}{9}+\tfrac{10^2-1}{9}+\tfrac{10^3-1}{9}+...+\tfrac{10^{5555}-1}{9})\\ &= \tfrac{5}{9}(10+10^2+10^3+...+10^{5555}-\tfrac{1}{9}\cdot 5555)\\ &= \tfrac{5}{9}(10\tfrac{10^{5555}-1}{9}-\tfrac{1}{9}\cdot 5555)\\ &= \tfrac{5}{81}(10^{5556}-5565)\end{aligned}$$