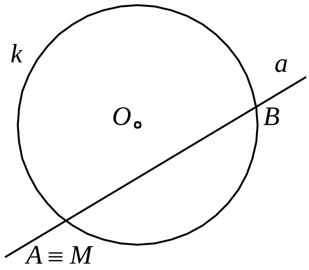
Виолета Василевска, Скопје

СТЕПЕН НА ТОЧКА ВО ОДНОС НА КРУЖНИЦА

Нека *M* е произволна точка и нека *k*(*O*,*r*) е кружница со центар *O* и радиус *r*. Низ точката *M* повлекуваме произволна права, која што ја сече кружницата *k* во точките *A* и *B*. Тврдиме дека производот $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$ не зависи од изборот на правата *a* низ точката *M*, т.е. дека има константна вредност. За да го покажеме тоа ќе ги разгледаме трите можни положби на точката *M* во однос на кружницата *к*, посебно.

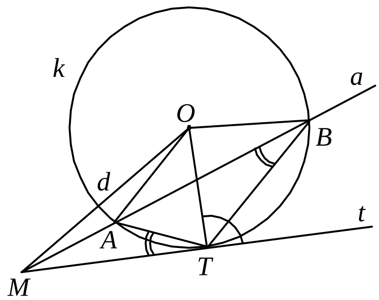


Crt. 1 a)

Прво, нека точката *M* лежи на кружницата *k*(*O*,*r*), црт. 1 а). Тогаш *M* се совпаѓа со една од точките *A* и *B*, па еден од броевите $\overline{MA}$, $\overline{MB}$ е нула, што значи дека $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=0=const$.

Сега, нека *M* е надворешна точка за кружницата *k*(*O*,*r*). Нека *m* е една од тангентите на *к* повлечени од *M*, која што ја допира кружницата *к* во точка *T*, црт. 1 б). Триаголниците *MAT* и *MTB* имаат заеднички агол кај темето *M*, а аглите *MTA* и *MBT* се еднакви како агол меѓу тангента и тетива, и периферен агол над лакот *TA*. Според тоа, $\Delta MAT \sim \Delta MTB$, од каде што следува дека

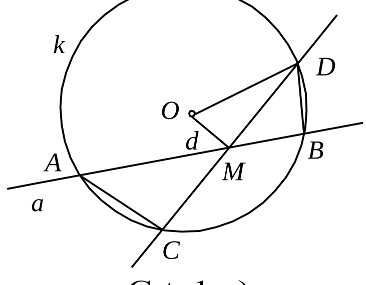
$$\overline{MA}:\overline{MT}=\overline{MT}:\overline{MB},$$



Crt. 1 b)

т.е. $\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MT}^2=d^2-r^2=const$.

На крајот, нека точката *M* е внатрешна за кружницата *k*(*O*,*r*), црт. 1 в). Низ точката *M* повлекуваме права нормална на правата *OM* која ја сече кружницата во точки *C* и *D*. За триаголниците *MCA* и *MBD* имаме: $\angle AMC=\angle BMD$, како вкрстени агли, и $\angle MCA=\angle MBD$, како периферискиагли над лакот *AD*. Значи, овие триаголници се слични, од каде што следува $\overline{MA}:\overline{MC}=\overline{MD}:\overline{MB}$, т.е.



Crt. 1 v)

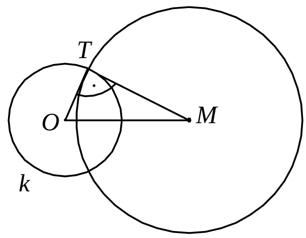
$$\overline{MA}\cdot\overline{MB}=\overline{MC}\cdot\overline{MD}=\overline{MD}^2=r^2-d^2=const .$$

Покажавме дека производот $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$ не зависи од изборот на правата *a* низ точката *M*, туку зависи само од радиусот *р* на кружницата *k*(*O*,*r*) и од растојанието

$d=\overline{OM}$ од точката M до центарот O на кружницата $k(O,r)$, т.е. зависи само од точката M и кружницата $k(O,r)$. Значи за произволна точка M и за произволна сечица a на $k(O,r)$ низ M, производот $\overline{MA}\cdot\overline{MB}$ е константен и е еднаков на $|d^2-r^2|$.

Степен на точката *M* во однос на кружницата *k*(*O, r*) е бројот d^2-r^2.

Кога точката M е надворешна за кружницата $k(O,r)$ степенот на M во однос на k е еднаков со $\overline{MT}^2$. Во тој случај кружницата со центар во M и радиус $\overline{MT}$ ја сече под прав агол кружницата $k(O,r)$, црт. 2.



Crt. 2

Пример 1. Даден е бројот c и кружницата $k(O,r)$. Да се најде геометриското место на точки M, чиј степен во однос на кружницата е c.

Решение. Нека $M(x,y)$ е точка од геометриското место. Тогаш важи:

$$s=\overline{OM}^2-r^2=(x-0)^2+(y-0)^2-r^2,$$

т.е. $x^2+y^2=s+r^2$. Ако $s+r^2>0$ тогаш геометриското место е кружница со центар во $O(0,0)$ и радиус $\sqrt{s+r^2}$. Ако $s+r^2=0$ тогаш геометриското место е точка $O(0,0)$. Ако $s+r^2<0$ тогаш не постојат точки M со такво својство.♦

Пример 2. Нека ABC е даден триаголник и нека M е ортогоналната проекција на темето C врз правата AB. Покажи дека:

а) ако аголот кај темето A е остар, тогаш

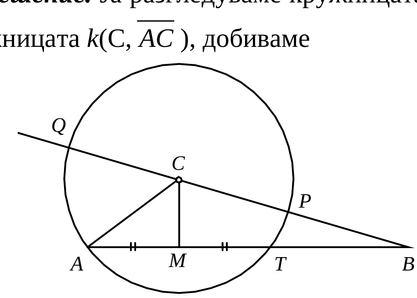
$$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AM} \tag{1}$$

б) ако аголот кај темето A е тап, тогаш

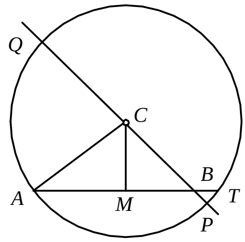
$$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2+2\overline{AB}\cdot\overline{AM} \tag{2}$$

Формулите (1) и (2) се познати како **Карноови формули**.

Решение. Ја разгледуваме кружницата $k(C,\overline{AC})$. Од степенот на $Б$ во однос на кружницата $k(C,\overline{AC})$, добиваме



Crt. 3



Crt. 4

$$\overline{BT}\cdot\overline{BA}=\overline{BQ}\cdot\overline{BP} \qquad (3)$$

а) Нека аголот кај темето A е остар. Можат да настанат два случаи $\overline{AC}<\overline{BC}$ и $\overline{AC}>\overline{BC}$.

Нека $\overline{AC}<\overline{BC}$. Од црт. 3 добиваме дека:

$$\overline{BT}=\overline{BA}-\overline{AT}=\overline{BA}-2\overline{AM} \qquad (4)$$

$$\overline{BP}=\overline{BC}-\overline{CP}=\overline{BC}-\overline{AC} \qquad (5)$$

$$\overline{BQ}=\overline{BP}+2\overline{AC}=\overline{BC}+\overline{AC}\,. \qquad (6)$$

Заменувајќи ги формулите (4), (5) и (6) во (3) добиваме

$$(\overline{AB}-2\overline{AM})\overline{AB}=\overline{BC}^2-\overline{AC}^2\,,$$

т.е. го добиваме бараното равенство (1).

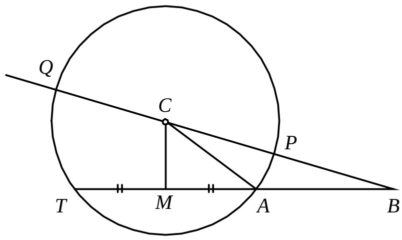
Аналогно е и во случај кога $\overline{AC}>\overline{BC}$, црт. 4.

б) Нека аголот кај темето A е тап, црт. 5. Тогаш добиваме:

$$\overline{BT}=\overline{BA}+\overline{AT}=\overline{BA}+2\overline{AM}$$

$$\overline{BP}=\overline{BC}-\overline{CP}=\overline{BC}-\overline{AC}$$

$$\overline{BQ}=\overline{BC}+\overline{AC}\,.$$



Crt. 5

Заменувајќи ги формулите (7), (8) и (9) во (3) добиваме

$$(\overline{AB}+2\overline{AM})\overline{AB}=\overline{BC}^2-\overline{AC}^2\,,$$

т.е. го добивме бараното равенство (2). ♦

Пример 3. Дадена е отсечката $\overline{AB}$. Да се најде точка M од отсечката $AБ$, таква што

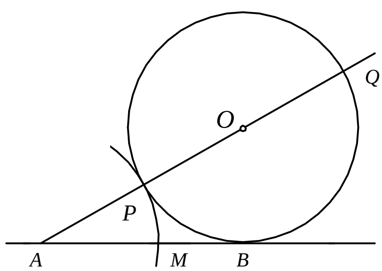
$$\overline{AB}:\overline{AM}=\overline{AM}:(\overline{AB}-\overline{AM})\,.$$

Ова правило за поделба на една отсечка се вика ***златен пресек***.

Решение. Нека означиме $\overline{AB}=a$, $\overline{AM}=x$ и $k\left(O,\frac{a}{2}\right)$ (црт. 6). Од произволна точка повлекуваме тангента кон кружницата. Нека допирната точка ја означиме со $Б$. На тангентата ја наоѓаме точката A така што $\overline{AB}=a$.

Од степенот на точката A во однос на кружницата $k\left(O,\frac{a}{2}\right)$, добиваме

$$\overline{AB}^2=\overline{AP}\cdot\overline{AQ}\,. \qquad (10)$$



Crt. 6

Нека $\overline{AP}=x$. Тогаш заменувајќи во (10) добиваме

$$a^2 = x(x+a).$$

Значи $\overline{AP} = x$ е бараната отсечка, па бараната точка M ќе ја најдеме во пресек на $k(A, \overline{AP})$ и отсечката $AБ$. ♦

Пример 4. Дадени се кружниците k_1 и k_2. Да се најде геометриското место на точки со својство: збирот на степените во однос на k_1 и k_2 да е константен.

Решение. Нека кружницата k_1 (k_2) има центар во точката $O_1(x_1, y_1)$ ($O_2(x_2, y_2)$) и радиус r_1 (r_2) и нека $M(x, y)$ е точка од бараното геометриско место, чии степени во однос на кружниците k_1 и k_2 се соодветно s_1 и s_2. Тогаш важи $s_1 + s_2 = C$, каде C е константа. Значи добиваме дека

$$\overline{O_1M}^2 - r_1^2 + \overline{O_2M}^2 - r_2^2 = C, \text{ т.е.}$$

$$(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2 + (x-x_2)^2 + (y-y_2)^2 = C + r_1^2 + r_2^2.$$

По средување на последното равенство се добива равенството

$$(x - \tfrac{x_1+x_2}{2})^2 + (y - \tfrac{y_1+y_2}{2})^2 = \tfrac{1}{2}(C + r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2). \qquad (11)$$

Ако $C + r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 > 0$, тогаш последната равенка е равенка на кружница со центар во точка $O(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$ и радиус

$$\sqrt{\tfrac{1}{2}(C + r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2)}.$$

Ако $C + r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 = 0$, тогаш единствена точка која ја задоволува равенката (11) е точката $O(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$.

Ако $C + r_1^2 + r_2^2 - x_1^2 - y_1^2 - x_2^2 - y_2^2 < 0$, тогаш не постои точка која ја задоволува равенката (11).

Значи бараното геометриско место на точки е кружница, точка или не постојат такви точки кои го задоволуваат бараниот услов. ♦

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. Нека c е степенот на точка M во однос на кружницата $k(O, p)$. Покажи дека:
- ако $M \in k$, тогаш $s = 0$;
- ако M е надворешна точка, тогаш $s > 0$;
- ако M е внатрешна точка, тогаш $s < 0$.

2. Да се конструира кружница која минува низ две дадени точки A и $Б$ и допира дадена права n.

3. Дадени се кружниците k_1 и k_2. Да се најде геометриското место на точки со својство: разликата на степените во однос на k_1 и k_2 да е константна.

Литература

[1] А. Самарџиски, *Хомотетија*, *Инверзија и задачите на Аполониј*, Скопје, 1988

[2] Ж. Мадевски, А. Самарџиски, Н Целакоски, *Геометрија* (за II клас на средното образование), Скопје, 1975

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија