Ристо Малчески
Македонија

ДВА ДОКАЗИ НА НЕРАВЕНСТВОТО НА КОШИ-БУЊАКОВСКИ-ШВАРЦ

Во [1] е докажано неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц и со примена на истото се докажани неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина и неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина. Во оваа статија ќе презентираме уште два докази на ова познато неравенство и ќе разгледаме некои негови примени.

Теорема 1 (неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц). Ако $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, за $i=1,2,...,n$, тогаш

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2 , \tag{1}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако постои $\lambda \in \mathbb{R}$ таков што

$$a_i = \lambda b_i, \text{ за } i=1,2,...,n. \tag{2}$$

Доказ. *Прв начин*. Нека

$$A=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2},\ B=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \text{ и } x_i=\tfrac{B}{A}a_i^2,\ y_i=\tfrac{A}{B}b_i^2, \text{ за } i=1,2,...,n.$$

Ако искористиме дека за секои ненегативни реални броеви x и y важи неравенството меѓу средините, т.е. важи $\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}$, добиваме

$$|a_i b_i| = \sqrt{a_i^2 b_i^2} = \sqrt{\tfrac{B}{A}a_i^2 \cdot \tfrac{A}{B}b_i^2} \leq \tfrac{1}{2}(\tfrac{B}{A}a_i^2 + \tfrac{A}{B}b_i^2).$$

за $i=1,2,...,n$. Последните неравенства ги собираме и ако искористиме дека $A^2=\sum_{i=1}^{n} a_i^2$ и $B^2=\sum_{i=1}^{n} b_i^2$, добиваме

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}|a_i b_i| &\leq \sum_{i=1}^{n}\tfrac{1}{2}(\tfrac{B}{A}a_i^2+\tfrac{A}{B}b_i^2)=\tfrac{1}{2}(\tfrac{B}{A}\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\tfrac{A}{B}\sum_{i=1}^{n}b_i^2)\\ &=\tfrac{1}{2}(\tfrac{B}{A}\cdot A^2+\tfrac{A}{B}\cdot B^2)=\tfrac{1}{2}(BA+AB)=AB\\ &=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}.\end{aligned}$$

Од неравенството на триаголник за реални броеви следува неравенството $|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |a_i b_i|$, па затоа од горното неравенство следува неравенството

$$|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2},$$

кое е еквивалентно со неравенството (1). Знак за равенство важи ако и само ако важи знак за равенство во неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, т.е. ако и само ако $x_i = y_i$ и знак за равенство во неравенството на триаголник, т.е. ако и само ако призводите $a_i b_i$ се со ист знак. Ако $x_i = y_i$, тогаш $\frac{B}{A} a_i^2 = \frac{A}{B} b_i^2$, а тоа е еквивалентно со $a_i^2 = \frac{A^2}{B^2} b_i^2$, односно со $|a_i| = \frac{A}{B} |b_i|$. Но, уште мора производите $a_i b_i$ да се со ист знак, па затоа $a_i = \frac{A}{B} b_i$, за $i = 1, 2, ..., n$ или $a_i = -\frac{A}{B} b_i$, за $i = 1, 2, ..., n$, со што доказот е завршен.

Втор начин. Ако искористиме дека збир на квадрати на реални броеи е ненегативен број, тогаш со квадрирање на изразите во заградите и разделување на двојните збирови го добиваме неравенството

$$\begin{aligned}
0 &\leq \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 \\
&= \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (a_i^2 b_j^2 + a_j^2 b_i^2 - 2 a_i b_j a_j b_i) \\
&= \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i^2 b_j^2 + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_j^2 b_i^2 - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_i b_j a_j b_i \\
&= \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2 + \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \sum_{j=1}^{n} a_j^2 - \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \sum_{j=1}^{n} b_j a_j \\
&= \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{j=1}^{n} b_j^2 - (\sum_{i=1}^{n} a_i b_i)^2,
\end{aligned}$$

кое што е еквивалентно со неравенството (1). Знак за равенство важи ако и само ако за секои i, j важи $a_i b_j - a_j b_i = 0$, т.е. $a_i b_j = a_j b_i$. Ако $a_i = 0$, за секој $i = 1, 2, ..., n$, тогаш $a_i = 0 \cdot b_i$, за $i = 1, 2, ..., n$, т.е. $\lambda = 0$. Ако постои $k \in \{1, 2, ..., n\}$ таков што $a_k \neq 0$, тогаш за секој $i = 1, 2, ..., n$ од $a_k b_i = a_i b_k$ следува $b_i = \frac{b_k}{a_k} a_i$, за секој $i = 1, 2, ..., n$, т.е. $\lambda = \frac{b_k}{a_k}$. ■

Во [1], [2] и [3] се решени поголем број примери со примена на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц, а овде во продолжение ќе разгледаме уште една нестандардна примена на ова познато неравенство.

Пример 1. Определи ја најголемата можна вредност на функцијата $f(x,y)=2x+5y$, при услов $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$.

Решение. Со елементарна трансформација и користење на неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц добиваме

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2x+5y = 6\cdot\tfrac{x}{3}+20\cdot\tfrac{y}{4} \\ &\le \sqrt{6^2+20^2}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}} \\ &= 2\sqrt{109}\sqrt{\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}}. \end{aligned}$$

Но, $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$, па затоа

$$f(x,y)\le 2\sqrt{109}\cdot 1 = 2\sqrt{109}.$$

Притоа знак за равенство се достигнува ако $\frac{x}{3}=6\lambda,\ \frac{y}{4}=20\lambda$, каде $\lambda\in\mathbb{R}$ го определуваме од условот $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$. Значи, добиваме

$$(6\lambda)^2+(20\lambda)^2=1,$$

односно $\lambda=\frac{1}{2\sqrt{109}}$. Според тоа, функцијата достигнува максимум за $x=\frac{9}{\sqrt{109}}$, $y=\frac{40}{\sqrt{109}}$, кој максимум е $f(\frac{9}{\sqrt{109}},\frac{40}{\sqrt{109}})=2\sqrt{109}$. ■

Пример 2. Определи ја најголемата можна вредност на функцијата $f(x,y)=x+y+z$, при услов $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}+\frac{z^2}{12^2}=1$.

Решение. Како во пример 1, имаме

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x+y+z = 3\cdot\tfrac{x}{3}+4\cdot\tfrac{y}{4}+12\cdot\tfrac{z}{12} \\ &\le \sqrt{3^2+4^2+12^2}\cdot\sqrt{\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}+\frac{z^2}{12^2}} \\ &= 13\sqrt{\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}+\frac{z^2}{12^2}} = 13. \end{aligned}$$

Притоа знак за равенство се достигнува ако $\frac{x}{3}=3\lambda, \frac{y}{4}=4\lambda, \frac{z}{12}=12\lambda$, каде $\lambda\in\mathbb{R}$ го определуваме од условот $\frac{x^2}{3^2}+\frac{y^2}{4^2}+\frac{z^2}{12^2}=1$. Според тоа, добиваме

$$(3\lambda)^2+(4\lambda)^2+(12\lambda)^2=1, \text{ т.е. } \lambda=\frac{1}{13}.$$

Конечно, функцијата достигнува максимум за $x=\frac{9}{13}$, $y=\frac{16}{13}$, $z=\frac{144}{13}$ и тој максимум е $f(\frac{9}{13},\frac{16}{13},\frac{144}{13})=13$. ■

Литература

1. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
2. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства (второ издание), Армаганка, Скопје, 2019
3. Малчески, С.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц и негова примена, https://matematickitalent.mk, 25.9.2023
4. Wigren, T.: The Cauchy-Schwarz Inequality, Karlstad University, Faculty of Technology and Science, 2015