Емилија Камчева
Скопје

ПРИНЦИП НА ДИРИХЛЕ

Принципот на Дирихле е еден од наједноставните комбинаторни принципи, но тој често се користи во решавањето на разни комбинаторни задачи. Наједноставно кажано, овој принцип тврди дека ако, на пример, четири зајаци се сместени во три кафези, тогаш во еден кафез ќе има најмалку два зајаци. Пред да преминеме на разгледување на принципот на Дирихле, ќе разгледаме еден пример.

Пример 1. Во еден станбен блок живеат 33 деца кои учат во едно училиште. Ако во тоа училиште има 30 паралелки, докажи дека барем две деца учат во иста паралелка.

Решение. Ако се претпостави спротивно, т.е. дека во секоја паралелка нема повеќе од едно дете кое живее во станбениот блок , тогаш во станбениот блок треба да живеат не повеке од 30 деца. Бидејќи во станбениот блок живеат повеќе од 30 деца следува дека мора во една паралелка најмалку да учат две деца.

Во следната теорема ќе дадеме прецизна формулација на принципот на Дирихле.

Теорема 1 (елементарен случај). Нека n е природен број. Ако $n+1$ предмети се распоредени на произволен начин во n кутии, тогаш во една кутија има најмалку два предмета.

Доказ. Да претпоставиме дека во секоја кутија има најмногу по еден предмет. Бидејќи има само n кутии, добиваме дека во нив се распоредени најмногу $n\cdot 1=n$ предмети, што противречи на претпоставката дека се распоредени $n+1$ предмети.

Пример 2. Во една кутија има жолти и зелени топчиња. Кој е најмалиот број на топчиња кои треба да се извадат без гледање за да сме сигурни дека меѓу нив има најмалку две со иста боја?

Решение. Од елементарниот принципот на Дирихле, кутиите претставуваат изборот на бои, а тоа во нашиот случај е $n=2$ (зелена и жолта), додека предмети се топчињата. Потребни се да се извлечат најмалку $n+1$ топче, т.е. 3 топчиња.

Пример 3. Докажи дека во група од 367 луѓе секогаш има барем двајца што имаат роденден во ист ден.

Решение. Годината има најмногу 366 денови (предвид ја земаме и престапната година) и роденденот на секој од групата луѓе е во некој од овие денови. Бидејќи $367=366+1$, од принципот на Дирихле следува дека барем двајца од групата имаат роденден во ист ден.

Пример 4. Дали може броевите $-1,0,1$ да се распоредат во квадратна 5×5 таблица така што збирот на броевите во секој ред, секоја колона и секоја дијагонала да биде различен.

Решение. Збирот на пет броеви од множеството $\{-1,0,1\}$ може да биде број a таков што $-5\leq a\leq5$, што значи дека збирот може да прими најмногу 11 различни вредности. Но, квадратната 5×5 таблица има вкупно 12 колони, редови и дијагонали, па од принципот на Дирихле следува дека барем два збира на броевите во секој ред, секоја колона и секоја дијагонала мораат да бидат еднакви.

Пример 5. Дадени се пет произволни броеви. Докажи дека меѓу нив постојат барем два броја такви што нивната разлика е делива со 4.

Решение. Секој природен број при делење со 4 дава остаток 0, 1, 2 или 3. Значи постојат само четири можности (кутии). Сега од принципот на Дирихле следува дека, меѓу пет природни броеви мора да има барем два кои имаат ист остаток при делење со 4. Јасно, разликата на овие два броја е делива со 4.

Принципот на Дирихле може да се искаже и во поопшта форма, со чија помош можеме да решаваме посложени комбинаторни проблеми. Тоа ќе го направиме во следната теорема, но прво ќе го разгледаме следниов пример.

Пример 6. Во еден супермаркет се донесени 25 гајби со јаболки од три сорти. Во секоја гајба има само една сорта од јаболките. Да се докаже дека има најмалку 9 гајби со јаболка од иста сорта.

Решение. Ако од секоја сорта на јаболка има не повеќе од 8 гајби, тогаш вкупно би биле не повеќе од $8\cdot3=24$ гајби. Но бидејќи во маркетот се донесени 25 гајби тогаш мора од една од трите сорти да има најмалку 9 гајби јаболка.

Теорема 2 (општ случај). Нека $kn+r$ предмети $r\geq1$ се сместени во n кутии. Тогаш, барем во една кутија се сместени најмалку $k+1$ предмети.

Доказ. Да претпоставиме дека во секоја кутија има најмногу по k предмети. Бидејќи има само n кутии добиваме дека во нив се распоредени најмногу nk предмети, што и противречи на претпоставката дека се распоредени $kn+r>nk$ предмети.

Пример 7. Во Република Македонија има повеќе од 2150000 жители и на главата на секој од нив има најмногу по 300000 влакна. Докажи дека во Македонија има барем 8 луѓе со ист број влакна на главата.

Решение. Сите жители ќе ги поделиме во групи според бројот на влакната на главата. Вакви групи има 300001, т.е. група со 0 влакна, група со 1 влакно, ..., група со 300000 влакна, а луѓе има најмалку 2150000. Бидејќи

$$2150000=7\cdot300001+49993,$$

од обопштениот принцип на Дирихле следува дека мора да постои група во која има најмалку 8 луѓе со ист број влакна на главата. Доколку тоа не е случај, во секоја група ќе има најмногу по 7 луѓе, па нивниот број ќе биде 2100007, а тоа му противречи на бројот на жителите во Републиката.

Пример 8. Десет ученици на Олимпијада решиле вкупно 35 задачи. Некои од нив решиле само 1, 2 или 3 задачи. Докажи дека има ученик кој решил најмалку 5 задачи.

Решение. Ако еден ученик решил 1 задача, друг ученик 2 задачи и трет ученик решил 3 задачи, тогаш од вкупно 10 ученици ке останат $10-3=7$ ученици, а од вкупно 35 задачи ке останат решени $35-(1+2+3)=29$ задачи. Ако останатите 7 ученици решиле 29 задачи, тогаш од $29=7\cdot4+1$ и од теорема 2 следува дека мора еден да има решено најмалку 5 задачи.

Пример 9. Во едно одделение 40 ученици правеле три писмени задачи. Никој не добил оценка помала од 3 и секој добил по три различни оценки. Мила забележала дека во одделението има најмалку 7 ученици кои имаат иста оценка на секоја од трите писмени задачи. Дали Мила е во право?

Решение. За секој ученик постојат 6 можности, т.е. секој ученик ја добил следната подредена тројка оценки:

(3, 4, 5), (3, 5, 4), (4, 3, 5), (4, 5, 3), (5, 3, 4) и (5, 4, 3).

Затоа, учениците според добиените оценки можеме да ги поделиме на 6 групи. Во одделението има 40 ученици, а според добиените оценки се поделени во 6 групи. Од принципот на Дирихле следува дека постои група во која има најмалку 7 ученици, што значи дека Мила е во право.

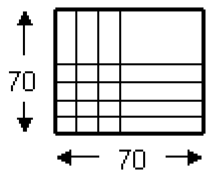
Пример 10. Дали секогаш е возможно меѓу било кои 100 цели броеви да се изберат 15 броеви такви што разликата на било кои два од избраните броја да биде делива со 7.

Решение. Остатоци кои може да се добијат при делење на било кои броеви со 7 , ќе ги сместиме во 7 класи. Во секоја од класите припаѓаат броевите кои при делење со 7 даваат остаток 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6. Секој цел број припаѓа во некоја од овие класи, па тоа важи и за нашите 100 броеви. Но, $100=7\cdot 14+2$ па од принципот на Дирихле следува дека во една класа мора да има најмалку 14+1=15 броеви. За два броја x и y од иста класа имаме $x=7k_1+r,\ y=7k_2+r,\ 0\leq r\leq 6$, па затоа $x-y=7(k_1-k_2)$, што значи дека одговорот на нашето прашање е потврден.

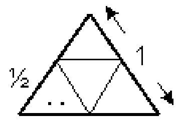
Принципот на Дирихле е познат и во таканаречената ***геометриска форма.*** Во овој случај нема да дадеме некои посебни теориски објаснувања, туку истиот ќе го објасниме со примери

Пример 11. Војник пука во мета која е во облик на квадрат со должина на страната од 70*cm*. Тој испукал 50 пати и секојпат целта ја погодил. Да се докаже дека на таа мета може да се најдат две дупки од погодените чие меѓусебно растојание е помало од 15cm.

Решение. Квадратот со страна од 70*cm* го делиме на 49 помали квадрати со должина на страните од 10*cm*. Бидејќи има 50 погодоци, тогаш од принцип на Дирихле , барем во еден од квадратите со страна 10 *cm* има 2 погодоци (дупки) од куршум. Нивното растојание е помало или еднакво од $10\sqrt{2}$ (дијагонала на квадрат со страна од 10*cm*), т.е. $d(x_1,x_2)\leq 10\sqrt{2}<15$, што и требаше да се докаже.



Пример 12. Ако во рамностран триаголник со страна $a=1cm$ се запишат 5 точки, тогаш две од нив се на растојание помало или еднакво од $\frac{1}{2}cm$. Докажи!



Решение. Рамностраниот триаголник со страна $a=1cm$ го делиме на 4 помали рамнострани триаголници со страна $a_1=\frac{1}{2}cm$, види цртеж. Имаме 5 точки и 4 триаголници, од принцип на Дирихле следува дека сигурно во еден од четирите рамнострани триаголници со должина на страна $a_1=\frac{1}{2}cm$ има барем две точки, а нивната одалеченост е сигурно помала или еднаква од $\frac{1}{2}$.

Пример 13. Во круг со плоштина $16cm^2$, дадени се 33 точки така што било три од нив не се колинеарни. Докажи дека од дадените точки може да се изберат три точки кои формираат триаголник чија што плоштина е помала од $1cm^2$.

Решение. Ако го поделиме кругот на 16 складни кружни исечоци, тогаш секој од нив ќе има површина од $1cm^2$. Бидеќи имаме 33 точки, $33=16\cdot 2+1$, па од општиот принцип на Дирихле следува дека во еден исечок мора да има најмалку три точки. Овие три точки се темиња на триаголник, кој се наоѓа во кружниот исечок, па затоа мора да има плоштина помала од него, т.е. помала од $1cm^2$.

Пример 14. Во квадрат со страна $1m$ на произволен начин се сместени 51 точка. Докажи дека меѓу овие 51 точка, постојат три точки кои можат да се покријат со круг чиј радиус е $\frac{1}{7}m$.

Решение. Квадратот го делиме на 25 еднакви квадрати со страна $0,2m$. Според принципот на Дирихле, постои квадрат со страна $0,2m$ кој содржи барем 3 од дадените 51 точка. Земаме 3 точки кои лежат во еден квадрат со страна $0,2m$. Но, $\frac{2}{7}>0,2\sqrt{2}$, што значи дека дијагоналата на квадратот е помала од дијаметарот на круг со радиус $\frac{1}{7}m$, па затоа квадратот може да се покрие со круг со радиус $\frac{1}{7}m$, т.е. 3 од дадените 51 точка можат да се покријат со круг со радиус $\frac{1}{7}m$.

На крајот од оваа работа ти предлагаме самостојно да ги решиш следниве задачи.

Задача 1. Во една шума има 1 000 000 елки. Познато е дека секоја од нив има повеќе од 600 000 иглички. Докажие дека во шумата постојат две елки со ист број на иглички.

Задача 2. Дадени се 12 броеви. Докажи дека може да избереш два броја чија разлика е делива со 11.

Задача 3. Докажи дека меѓу 14 природни броеви може да се најдат 2 броја чија разлика е делива со 13.

Задача 4. 15 туристи се обидувале да се искачат на врвот на една планина. Најстариот меѓу нив имал 33, а најмладиот 20 години. Докажи дека барем два туристи имале ист број на години.

Задача 5. Во едно училиште има 1280 ученици. Докажи дека постојат барем 2 ученика кои имаат исти иницијали и барем 4 ученика кои слават роденден во ист ден.

Задача 6. Сања во фиоката имал 30 ракавици: 10 бели, 10 црвени и 10 жолти. Колку ракавици треба да извлече без гледање за да биде сигурна дека ќе бидат извлечени:

а) две ракавици со иста боја

б) две жолти ракавици

в) две ракавици со различна боја.

Задача 7. Даден е рамностран триаголник со страна $a=31dm$. Во внатрешноста на триаголникот се распоредени 1989 точки на произволен начин. Докажи дека постои круг, со радиус $6cm$, во чија внатрешност се наоѓаат барем 3 точки.

Задача 8. Во круг со радиус $1m$ на произволен начин се распоредени 51 точка така што кои било 3 од нив не се колинеарни. Докажи дека постојат 3 точки меѓу нив кои формираат триаголник чија плоштина е помала од $12,6dm^2$.