

А. П. Савин и Л. М. Финк (СССР)

### РАЗГОВОР У ТРАМВАЈУ

Возио сам се по Лењинграду трамвајем са својим братићем Мишом. Спустивши у касу 6 копејака, оцепио сам две возне карте.

— Не дирај, ова је карта моја — рече Миша.

— Изволи, узми коју хоћеш. Оне су потпуно једнаке, са сваком од њих можеш прећи цео пут.

— Једнаке, али не сасвим. Ова карта је обична, на њој је број 286 357. А ова друга, с бројем 286 358, је „срећна“, збир прве три цифре њеног броја подудара се са збиром последње три.

Ту сам се сетио да сам већ не једном слушао о распрострањеном празноверју: возна карта с једнаким збировима цифара доноси срећу. У овом случају Миша је дошао до карте 286 358, на којој је  $2 + 8 + 6 = 3 + 5 + 8$ .

— Да ли ти често долазе до руке „срећне“ возне карте?

— Баш не, веома ретко. Отприлике једаред месечно. Па, како одлазим у институт и враћам се одатле сваког дана, сем празничних, значи да у просеку једна „срећна“ возна карта долази на 50 обичних.

— Којешта — умеша се на то један од наших сапутника.

— Ушао сам на претходној станици, па се из исте касе појавила исто тако „срећна“ возна карта — 286 349. Ако убрзо неко откине возну карту 286 367, и та ће бити „срећна“. Затим се

појављује 286 376, па онда 286 385. Тако се у свакој десетици возних карата налази по једна „срећна“.

— То није потпуно тачно — рече на то један нови сапутник, откинувши „срећну“ карту 286 367. — Ваш пример ништа не доказује. У следећој десетици јавиће се још једна „срећна“ карта. А затим срећних карата дуго неће бити, све до броја 286 439, тако да ће се сада између две срећне возне карте јавити интервал од 45 карата. Таквих примера се може навести много. Чак и у овој серији карата са почетним бројевима 286, између карата 286 097 и 286 169, дакле међу 71 картом, нема ни једне „срећне“.

— То ја и кажем — прихвати Миша — у просеку по једна „срећна“ карта пада на сваких педесет.

— То је такође брзоплета изјава — приметио сам на то ја. — Да би се правилно одговорило на ово питање, нужно је да се оно проучи. Најпре је потребно да се оно тачно формулише. Рецимо овако: колико има „срећних“ шестоцифрених бројева од 000 000 до 999 999, то јест бројева код којих је збир прве три цифре једнак збиру последње три.

— Па шта — рече на то Миша, после кратког размишљања — ја не могу одмах тачно да одговорим на ово питање, али могу описати начин на који би се оно могло решити, бар у принципу. Испишимо по реду све бројеве од 000 000 до 999 999, и проверимо сваки од њих посебно. Тако можемо одредити број „срећних“ возних карата.

— Да, такав начин решавања је могућ. Назива се метод пребројавања. Њиме се могу решити задаци у којима се испитују својства коначног скупа било каквих бројева или других предмета. Само, метод пребројавања има два недостатка. Пре свега, он је веома напоран. Пресудите сами, у овом случају неопходно је проверити милион бројева. Ако се на проверу сваког од њих утроши само једна секунда, биће потребно 1 000 000 секунди, тј. скоро 278 сати. При осмочасовном свакодневном раду то би захтевало 35 дана.

— Али сада се то може добити помоћу електронске рачунске машине!

— Може, заиста, али треба ли „пуцати из топа на врапце“? Сем тога, метод пребројавања има и један други недостатак, који остаје и при израчунавању помоћу електронске машине. При пребројавању добије се решење само једног конкретног задатка које обично не допушта никаква уопштавања или откривање

било какве законитости. Зато су пробројавачки методи у извесном смислу незанимљиви.

— Дозволите ми опет да се умешам у ваш разговор — рече на то власник „срећне“ карте 286 367. — Заинтересовао ме је ваш задатак и већ сам нашао његово решење, истина — не тачно, но приближно, које ми, математичари, називамо проценом. Да, нисам се представио, зовем се Георгије Владимировић, и доцент сам математике на једној високој техничкој школи. Дакле, млади човече — обрати се Миши — дајте да уведемо нову дефиницију „срећне“ карте, или, још боље, да уведемо нови термин, на пример, „лепа“ карта. Карту ћемо назвати „лепом“ ако збир прве три цифре, при дељењу са 9, даје исти остатак који и збир наредне три цифре.

— Разумем — одговори Миша — но, зашто баш при дељењу са 9?

— Зато што у нашем десетичном систему бројања сваки број, при дељењу са 9, даје исти остатак који и збир његових цифара. То својство пружа нам могућност да лако нађемо број „лепих“ возних карата. У ствари, међу бројевима од 1 до 999, при дељењу са 9, тачно 111 дају остатак 1, исто толико бројева бројева даје остатак 2, итд.

— Колико онда постоји различитих „лепих“ бројева са остатком 1? На првом месту могу се наћи 111 бројева уз које се може поставити редом 111 исто таквих бројева. Тако добијамо  $111 \cdot 111 = 12\,321$  „лепих“ возних карата са остатком 1. Исто толико лепих“ карата одређују остаци 2, 3 и тако даље. А бројевима са остатком 0 или, како смо навикли да кажемо, онима који су дељиви са 9, треба додати још и број 000, тако да њих неће бити 111, него 112, из чега следује да ће „лепих“ бројева са остатком 0 бити  $112 \cdot 112 = 12\,544$ . И тако „лепих“ бројева биће свега  $8 \cdot 12\,321 + 12\,544 = 111\,112$ .

— А шта је са „срећним“ картама? — запитао је на то Миша.

— То је већ сасвим једноставно! Ето, ако су једнаки збирови цифара, једнаки су и остаци које они дају при њиховом дељењу са 9, што значи да је свака „срећна“ карта уједно и „лепа“ карта. Само није свака „лепа“ карта уједно и срећна карта. На пример, карта 100 748 је „лепа“ карта, али није и „срећна“ карта. Зато, ако се број „срећних“ карата означи са  $S$ , може се написати неједнакост

$$S < 111\,112.$$

— Но ово, исто тако, није потпуно решење — рече Миша. — Дознали смо да „срећних“ карата има мање од 111 112, али не знамо за колико. А може ли се показати има ли их више од неког броја? Слушао сам да се то каже „процена долње границе“ траженог броја.

— Може се одредити и долња граница траженог броја „срећних“ возних карата — одговорио је Георгије Владимировић — бојим се само да ће она бити доста груба. Назовимо „прелепим“ картама оне чији се бројеви састоје из две потпуно једнаке половине, као што је, на пример број 287 287. Таквих карата има равно 1 000, наиме то су оне са бројевима 000 000, даље 001 001, 002 002, ... до 999 999. „Прелепих“ возних карата је, очигледно, мање него „лепих“, па се зато може написати

$$1\ 000 < C < 111\ 112.$$

Сада процена горње границе превазилази више него 100 пута процену доње границе, тако да се овакав резултат тешко може сматрати решењем постављеног задатка.

— Молим вас, процена горње границе може се унеколико поправити — рекох ја на то. — искоришћујући правило о дељивости бројева са 11.

— Какво је то правило? — запитао је Миша. — Ми га нисмо прорађивали.

— Оно је веома просто. Саберимо све цифре из непарних класа датог броја, а затим саберимо посебно и све цифре из парних класа тог броја. И, ето, ако је разлика добијених збирова дељива са 11, то је и сам број дељив са 11; и обратно, сваком броју који је дељив св 11 припада наведено својство.

— Па какве везе има ово правило са „срећним“ картама — зачуђено је запитао Миша.

— И те какве. Но кажи прво да ли си чуо о возним картама „срећним на московски начин“?

— А да! Московљани сматрају карте за срећне ако је збир цифара које стоје на парним местима једнак збиру цифара које стоје на непарним местима. Гле, чудака!

— Прво, чудака си ти ако верујеш да „срећне“ возне карте могу донети успех, а друго, лако се утврђује да су бројеви карата које ти називаш „срећним на московски начин“ дељиви са 11. Је ли то тачно?

— Тачно је — одговори Миша.

— А тих карата нема више него што има бројева који су дељиви са 11.

— То јест не више од 90 210 — узвикну Георгије Владимировић.

— А каквих карата има више — запита Миша — „срећних“ или „срећних“ на московски начин“?

— Сасвим је лако установити да једних има колико и других — одговорио сам ја.

— Кажете опет „лако“ — сумњичаво рече Миша — а не знамо колико има ни једних ни других.

— А то и није нужно — примети Георгије Владимировић.

— Размести прве три цифре „срећне“ карте на парна места, а последње три на непарна места њеног броја, па ћеш из „срећне“ карте добити карту која је

„срећна“ на московски начин. И обратно, ако код карте која је „срећна на московски начин“ све цифре које стоје на парним местима скупиш у прву половину

„Срећна“ карта на московски начин 238 568

„Срећна“ карта на лењинградски начин 286 358

броја, а остале поставиш у другу половину, добићеш „срећну“ карту. На тај начин смо утврдили да постоји узајамно једнозначно пресликавање међу првим и другим картама. А одатле следује да једних има колико и других. Је ли тако?

— Врло добро! — узвикну Миша. — Значи, доказали смо да „срећних“ карата има мање него 90 910.

— А какав ће бити збир бројева ако се на „срећној“ карти три последње цифре замене разликама између 9 и тих цифара? — запита Георгије Владимировић.

— Одмах — замислио се Миша — та-а-ко... тридесет девет, двадесет седам... минус... плус... Добија се 27! А ето, опет се добије узајамно једнозначно пресликавање! Георгије Владимировићу, отуд следује да је „срећних“ карата онолико, колико карата има са збиром цифара 27.

— Правилно — одговори овај.

— Али колико има укупно таквих „срећних“ карата? — погледавши на мене, запита Миша.

— Одговор ћу ти рећи одмах: 55 252, тј. у просеку свака 18-а карта је „срећна“. А због чега их је толико, рећи ћу ти кад било, следећи пут. Опрости се са Георгијем Владимировићем и пођимо — треба да изађемо.

(Из часописа „Квант“, 7/1975. Превео П. Д.)