За II издание:
Не се проверени!
стр. 101–108, текстот
и одговорите на задачите
19. I 90

НАУМ ЦЕЛАКОСКИ
ЖИВКО МАДЕВСКИ

МАТЕМАТИКА

СО ЗБИРКА ЗАДАЧИ

(ПРИРОДНО-
МАТЕМАТИЧКА
СТРУКА)

„ПРОСВЕТНО ДЕЛО“
СКОПЈЕ, 1989

Уредник:
Кирил МИЛЧЕВ

Рецензенти:

д-р **Дончо ДИМОВСКИ**, доцент на Природно-математички факултет – Скопје

Гоце ШОПКОСКИ, самостоен педагошки советник во градскиот завод за школство – Штип.

Билјана ВИТАНОВА, професор во училишниот центар „Јане Сандански“ – Струмица.

Со решение на Републичкиот педагошки совет бр. 13-135/1 од 29. 06. 1989 год. се одобрува употребата на овој учебник.

ВОВЕД

Учебников е работен така што со негова помош ќе можеш и самостојно да доаѓаш до знаењета по математика што се предвидени да ги стекнеш во оваа година.

Тука ќе се сретнеш пак со множеството на природните броеви, целите, рационалните и реалните броеви, степените и корените, ќе ги прошириш знаењата за нив и ќе се запознаеш со некои нивни нови својства и примени. Исто така ќе научиш нови поими и факти од математичката логика, која има инаку голема примена во математиката, секојдневниот живот и особено во компјутерските науки.

Материјалот што ќе го изучуваш е разделен во четири теми коишто претставуваат заокружени целини. Секоја тема, пак, е разделена на одреден број лекции кои, исто така, претставуваат заокружени целини. Темите се означени со римските броеви од I до IX а лекциите со бројката на темата и редниот број на лекцијата во темата. Така, II. 6 значи шестата лекција од втората тема.

Секоја од лекциите е разделена на помали делови – единки, што се означени со големи букви а. б. в. г. *И тие од своја страна претставуваат заокружени целини. Во секоја од нив прво се воведува новото или се потсетува за некој поим што е изучуван порано, потоа се дава пример и се поставени задачи за самостојна работа. На крајот од лекцијата се даваат задачи од сите единки, со чие решавање ќе се заокружи предвиденото во лекцијата. Меѓу тие задачи, во повеќе случаи, има и задачи во квадратчиња. На нив обрни посебно внимание. Тие најчесто не се во врска со она што се изучувало во дадената лекција, но се предвидени за потсетување на она што си го изучувал порано, а што ќе се применува во наредната лекција.*

На крајот од секоја тема има задачи за повторување и утврдување на ученото во темата. Доколку некоја од нив не можеш веднаш да ја решиш, утврди од која лекција е и погледај го напишаното во врска со тоа, како и дадените примери.

На одделни места во учебников ќе го сретнеш знакот ◑. *На тоа место се дава одредено упатство. Не брзај со неговото користење; прво добро размисли во врска со бараното. Кај одредени* *содржини или кај некои задачи е ставен знакот * (ѕвездичка). Оваа материја или задача се од посложен карактер. Нив не мора да ги обработуваш доколку сметаш дека се претешки за тебе.*

На крајот од учебников се дадени одговори или упатства скоро на сите поставени прашања или задачи. Пожелно е пред да го погледнеш одговорот или решението, преку самоконтрола, да се увериш во точност на решението. Само на тој начин ќе стекнеш самодоверба во себе за совладување на дадена материја.

Низ учебников има и текстови од историјата на математиката. Преку нив ќе можеш да согледаш дека таа се создавала долго време и од голем број луѓе, а новото секогаш доаѓало како резултат на потребите на човекот.

Авторите

ГЛАВА I

ЕЛЕМЕНТИ ОД МАТЕМАТИЧКАТА ЛОГИКА

Математичката логика е една од поновите гранки на математиката. Таа многу брзо се развива и има големо значење, пред сè, за осовременување на самата математика и општо во науката, особено во компјутерските науки.

I.1. ИСКАЗИ

Честопати во математиката си се среќавал со реченици од видот: „Три плус пет е еднакво со осум“ која со помош на симболи се запишува: „$3 + 5 = 8$“. Со неа е искажано тврдење што е вистинито. И со реченицата: „Реката Вардар минува низ Титов Велес“ е искажано едно тврдење што е исто така вистинито. Но, со реченицата: „Реката Вардар минува низ Штип“ е искажано едно тврдење што не е вистинито.

Декларативните (расказните) реченици, ~~изговорени или запишани,~~ за кои има смисла да се постави прашањето дали е вистинито или е невистинито тоа што е искажано со нив, имаат посебна важност во математиката. Таквите реченици се наречени **искази.** За секој исказ важи само една од можностите: да е *вистинит* или да е *невистинит.*

Така, спомнатите три реченици се искази, а еве уште неколку примери за искази:

а) 6 е парен број.
б) Скопје е главен град на СР Македонија.
в) $5 + 2 > 7$.

Од овие искази вистинити се исказите под а) и б).

Да забележиме дека не секоја декларативна реченица е исказ. *На пример,* не се искази реченициte:

а) Црвената боја е најпривлечна. (За едни е тоа вистинито, а за други не е.)
б) Квадратот се скарал со триаголникот. (Нема смисла.)
в) $2x + 1 = 5$. (За едни вредности на x е вистинито, а за други не е; на пример, за $x = 2$ се добива $2 \cdot 2 + 1 = 5$ што е вистинито, а за $x = 0$ се добива $2 \cdot 0 + 1 = 5$ што е невистинито.)

Исто така не се искази: прашални, заповедни и разни „желбени“ реченица (како: „Имам желба накрсните агли да се еднакви“, „Сакам $2+3$ да е 5“, „Мислам дека $\sqrt{0,9}$ е 0,3“ и сл.).

Да напомниме дека реченицата: „$2x + 1 = 5$ за $x = 3$" ќе ни значи исто што и реченицата „$2 \cdot 3 + 1 = 5$"; според тоа, таа е исказ, во случајов – невистинит.

1. Одреди кои од следниве реченици се исказни:

а) Коцката има 8 темиња. б) Дали $4 > 3$?

в) Мислам дека $4 > 3$. г) $4 > 3$.

д) $2x + 6 = 8$ за $x = 2$. ѓ) $x + 4 = 7$.

2. Утврди кои од следниве искази се вистинити:

а) 7 е непарен број. б) $5152 : 24 = 173$

в) $30 - 10 \cdot 2 = 40$. г) $2x - 3 = 5$ за $x = 4$.

д) Илинденското востание се крена во 1903 година.

б. Исказите најчесто ќе ги означуваме со малите букви од латиницата: $p, q, r, s, t, \ldots$ Нив ги викаме **исказни букви** или **исказни променливи.** Натаму, наместо „p е ознака за исказ" ќе велиме кратко „p е исказ".

Даден исказ p може да биде или вистинит или невистинит. Зборовите „вистинит" (точен) и „невистинит" (неточен) се викаат **вистинитосни вредности** и тие соодветно се означуваат со симболите $\top$ (те) и $\perp$ (не те).

Наместо реченицата: „Исказот p е вистинит" ќе запишуваме

$$\tau\ (p) = \top$$

(се чита: тау од пе е те; знакот τ е буква од грчката азбука што се вика „тау"),

а кога исказот p е невистинит:

$$\tau\ (p) = \perp \text{ (се чита: тау од пе е не те).}$$

На пример, ако со p го означиме исказот: „$5 > 0$", тогаш $\tau\ (p) = \top$. Може да се запише и $\tau\ (5 > 0) = \top$. Ако p е исказот „$3 < 1$", тогаш $\tau\ (p) = \perp$.

3. Нека се дадени исказите:
p: Реката Вардар минува низ Скопје.
q: 10 е парен број.
r: 908 е непарен број.
Одреди на што е еднакво $\tau\ (p)$, $\tau\ (q)$ и $\tau\ (r)$.

4. Одреди на што е еднакво:

а) $\tau\ (2 + 9 = 11)$. б) $\tau\ (3216 : 8 = 42)$. в) $\tau\ (3x + 2 = 5$ за $x = 0)$.

г) τ (Куманово има помалку жители од Скопје).

в. Од два дадени исказа, со помош на сврзниците: „и", „или", „ако ..., тогаш", „ако и само ако" и негацијата „не", можеме да формираме нови декларативни реченици, наречени **сложени реченици.**

Секоја од тие сложени реченици, како што ќе видиме подоцна, може да се смета за исказ. Ваквите искази се викаат сложени искази. Општо, за еден исказ се вели дека е **сложен исказ,** ако во него се јавуваат некои од спомнатите сврзници или негацијата не. Исказ, пак, што не содржи ниту еден од тие сврзници или негацијата не, се вика **прост** или **елементарен исказ.** На пример, исказите:

а) Три е непарен број. б) Три е поголем од два.

се елементарни искази, а исказите:

в) Три е непарен број и три е поголем од два.

г) Ако врне дожд, тогаш улицата е мокра

се сложени искази.

5. Од исказите: „$5 > 3$" и „$5 = 3 + 2$" формирај неколку сложени искази.

Јасно е дека сложениот исказ ќе биде или вистинит или невистинит. Неговата вистинитосна вредност зависи од вистинитосните вредности на исказите од кои е составен и од сврзникот што притоа е употребен.

За сложен исказ составен од два исказа p и q можни се само следниве четири комбинации од нивните вистинитосни вредности:

$$\tau(p) = \top, \quad \tau(q) = \top,$$
$$\tau(p) = \top, \quad \tau(q) = \bot;$$
$$\tau(p) = \bot, \quad \tau(q) = \top \text{ и}$$
$$\tau(p) = \bot, \quad \tau(q) = \bot.$$

Вежби

6. Утврди кои од следниве реченици се искази.

а) 3 е природен број, б) $2x > x$.
в) Колку е $3 + 5$? г) Дали е $3 + 5 = 8$?
д) Жолтата боја е најпријатна. ѓ) $3 + 5 = 8$.
е) Кругот постојано шета во паркот.

7. Утврди кои од следниве искази се вистинити:

а) $10 + 5 \cdot 2 = 30$. б) $10 + 5 \cdot 2 = 20$.
в) $612 : 3 = 24$. г) Живата е метал.
д) Збирот на аглите во триаголникот е 180°.

8. Одреди на што е еднакво:
а) $\tau\,(8 - 4 \cdot 2 = 8)$; б) $\tau(2x > x$ за $x = 0)$.
в) τ (Дијагоналите на ромбот се еднакви меѓу себе).

9. Кои од броевите: 1, 2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 23, 29, 31, 33 се прости?

10. а) Дали бројот 35 е делив со 7?
б) Дали бројот 35 е делив со 6?

в) Што значи бројот a да е делив со бројот b?
г) Дали бројот 7 е делител на 35?
д) Што значи записот $8 \mid 24$?

11. Најди: а) НЗД (8, 12). б) НЗС (8, 12). в) НЗС (8, 12, 20).

12. Од исказите p: „5 е непарен број" и q: „6 е сложен број", направи една:

а) **составна** (т.е. **конјунктивна**) реченица,
б) **разделна** (т.е. **дисјунктивна**) реченица,
в) **одречна** (т.е. **негативна**) реченица.

I.2. КОНЈУНКЦИЈА. ДИСЈУНКЦИЈА. НЕГАЦИЈА

Во оваа лекција ќе се запознаеме со сложени искази што се добиваат со употреба на сврзникот „и", односно „или".

Ако p и q се искази, тогаш можеме да формираме:

а) составна реченица „p и q", што се вика и **конјункција** на p и q
б) разделна реченица „p или q", што се вика и **дисјункција** на p и q.

Конјункцијата „p и q" на два исказа p и q е исказ, вистинит кога обата исказа p, q се вистинити, а невистинит – кога барем едниот од нив е невистинит.

Конјункцијата на исказите p, q ја означуваме со:

$$\boxed{p \land q}$$

Пример 1. *Исказ p: Реката Вардар минува низ Скопје.*
Исказ q: 3 · 4 = 12.

Нивната конјункција, т.е. исказот $p \land q$: „Реката Вардар минува низ Скопје и $3 \cdot 4 = 12$" е вистинит исказ, зашто обата исказа p, q се вистинити.

Пример 2. p: $4 \mid 12$, q: $3 > 5$.
Конјункцијата $p \land q$: $(4 \mid 12) \land (3 > 5)$ е невистинит исказ, зашто не е вистинит исказот q, т.е. $\tau(3 > 5) = \perp$.

1. Одреди ја вистинитосната вредност на следниве сложени искази:
а) Бројот 12 е делив со 3 и 4 е делител на 12.
б) $2^2 = 4$ и $2^3 = 6$.
в) $6 \mid 16$ и НЗС(6, 8) = 24.
г) $3 > 5$ и $3 < 2$.

Зависноста на вистинитосната вредност на конјункцијата $p \wedge q$ од вистинитосните вредности на p и q може да се даде прегледно со следнава таблица. (Ваквите таблици се наречени **вистинитосни таблици**).

p	q	$p \wedge q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Во првиот ред, за пократко, запишуваме:

$$p, q, \qquad p \wedge q$$

наместо:

$$\tau(p), \qquad \tau(q), \qquad \tau(p \wedge q)$$

соодветно.

Истото ќе го користиме и натаму, во другите вистинитосни таблици.

2. Врз основа на таблицата, може да се запише: $\top \wedge \top = \top$. Запиши на што е еднакво: а) $\top \wedge \bot$, б) $\bot \wedge \top$ в) $\bot \wedge \bot$.

* За градење на конјункција од два исказа, покрај сврзникот „и“, во обичниот говор се користат и други сврзници. Така, исказот $2 + 3 = 5$ и $5 > 3$, може да се запише како: „$2 + 3 = 5$, а $5 > 3$“, „$2 + 3 = 5$, но $5 > 3$“, „$2 + 3 = 5$, макар што $5 > 3$“ и сл. Ние ќе го користиме најчесто сврзникот „и“. *

Дисјункцијата „p или q“ на два исказа p, q е исказ, вистинит кога барем едниот од исказите p, q е вистинит, а невистинит кога обата се невистинити.

Дисјункцијата на исказите p и q ја *означуваме со* $p \vee q$

Вистинитосната таблица на дисјункцијата е:

p	q	$p \vee q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$

Пример 3. p: *Охрид е град во СРМ.*
q: *Поемата „Сердарот“ ја напишал Коста Рацин.*

б) или

Дисјункцијата $p \vee q$: „Охрид е град во СРМ и поемата „Сердарот“ ја напишал Коста Рацин“ е вистинит исказ, зашто исказот p е вистинит, т.е. $\tau(p) = \top$.

Пример 4. $(624 : 3 = 28) \vee (2 \cdot 7 = 9)$.

Оваа дисјункција е невистинита, зашто двете нејзини составки се невистинити.

3. Дадени се исказите:
p: 21 е прост број.
q: 21 е непарен број.
r: 21 е делив со 7.

Образувај ги сложените искази: а) $p \vee q$, б) $p \vee r$ и в) $r \vee q$, а потоа одреди ги нивните вистинитосни вредности.

4. Потсети се како се запишува со зборови исказот: „$3 \leq 4$“ и утврди дали е тоа вистинит исказ.

◑ Со зборови тоа да се запишува: „3 е помал од 4 или 3 е еднаков со 4“. (Овој сложен исказ е точен бидејќи едниот од исказите од кои е составен е вистинит.)

5. Запиши го со зборови исказот
а) $7 \leq 8$; б) $9 \leq 9$
и одреди ја неговата вистинитосна вредност.

Забелешка. Исказите „5 е прост број или 5 е непарен број“ и „или 5 е прост број или 5 е непарен број“ се различни и имаат различни вистинитосни вредности. Исказот „или p или q“ се вика уште **исклучна дисјункција;** тој е вистинит само во случајот кога едниот од исказите е вистинит, а другиот е невистинит. Така исказот „или 5 е прост број или 5 е непарен број“ е невистинит исказ додека исказот: „5 е прост број или 5 е непарен број“ е вистинит исказ.

b) Ако p е исказ, тогаш и реченицата: „Не p“ е исказ кој се вика **негација** на исказот p и се означува

$$\neg p \text{ (се чита: „не } p\text{“ или: „не е точно дека } p\text{“);}$$

притоа негацијата $\neg p$ е вистинит исказ тогаш кога исказот p е невистинит, а невистинит – кога исказот p е вистинит.

Еве ја и вистинитосната таблица на негацијата $\neg p$:

p	$\neg p$
$\top$	$\perp$
$\perp$	$\top$

Пример 5. *Да формираме негација од исказите:*

p: 8 е парен број. (Вистинит исказ)
q: Реката Сава минува низ Белград. (Вистинит исказ)
r: $3 = 4$. (Невистинит исказ)
Решение:
$\neg p$: Не е точно дека 8 е парен број. (Невистинит исказ) (Може да се каже и вака: $\neg p$: 8 не е парен број.)
$\neg q$: Реката Сава не минува низ Белград. (Невистинит исказ)
$\neg r$: $3 \neq 4$. (Вистинит исказ)

6. Изврши негација на следниве искази, а потоа одреди ја нивната вистинитосна вредност:

а) 3% од 200 е 6. б) $|-3| = 3$.
в) Коцката има 8 рабови. г) 26 е делив со 4.

Вежби

7. Одреди ја вистинитосната вредност на следниве конјункции:
а) Бројот 5472 е делив со 3 и бројот 5472 е делив со 4.
б) Бројот 3810 е делив со 3 и со 5.
в) Бројот 5967 е делив со 13 и со 9.

8. Одреди ја вистинитосната вредност на следниве искази

а) $\frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{10} \lor \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$ б) $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{11}{12} \lor \frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{3}{7}$

в) $\frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3 \cdot 5}{4 \cdot 8} \lor \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{8} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 5}$ г) $\frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{5} \lor \frac{3}{4} : \frac{5}{8} = \frac{3 \cdot 8}{4 \cdot 5}$

д) $\left(\frac{7}{5} - \frac{3}{7} > 1\right) \lor \left(\frac{5}{4} - \frac{4}{3} > 0\right)$.

9. Дадени се исказите $p: 3 \mid 27$, $q: 3 \mid 35$ и $r: 3 \mid 24$. Образувај ги исказите:
а) $p \lor q$ б) $r \land p$ и в) $q \land p$, а потоа одреди ги нивните вистинитосни вредности.

10. Одреди кои од следниве искази се вистинити:
а) $5 \geq 5$. б) $7 \leq 8$. в) $10 \geq 8$.

11. Запиши такви два исказа што нивната конјункција да е невистинит исказ, а нивната дисјункција вистинит исказ.

12. Направи негација на следниве искази, а потоа определи ја нивната вистинитосна вредност:
а) Живата е метал. б) $3 =, 5$.
в) 8% од 100 е 8. г) $(-3)(-5) = -15$.

13. Установи кои од следниве искази се вистинити:
а) $8 \neq 8$. б) $\neg(7 > 8)$.
в) $\neg(x - 2 = 5$ за $x = 4)$. г) $\neg(2x > x$ за $x = 0)$.

14. Потсети се за децималните броеви и реши ги следниве задачи:

а) 36,25 + 8,3. б) 28,35 − 7,4. в) 3,48 · 10.
г) 234,38 : 100. д) 37,25 · 0,01. ѓ) 384,25 : 0,1

15. Од исказите p: „Коле е братучед на Столе" и q: „Коле и Столе се роднини" направи сложена реченица со помош на сврзникот а) „Ако . . ., тогаш", б) „ако и само ако".

I.3. ИМПЛИКАЦИЈА. ЕКВИВАЛЕНЦИЈА

а. Да разгледаме два примера.

Пример 1. *Во врска со ученикот H, дадени се два исказа:*
p: Ученикот H секогаш е добро подготвен за час.
q: Ученикот H добива пофалба од наставникот.

Од овие два исказа можеме да ја направиме следнава сложена условна реченица:

„Ако ученикот H секогаш е добро подготвен за час, тогаш тој (ученикот H) добива пофалба од наставникот".

Пример 2. *p: Четириаголникот ABCD е правоаголник.*
q: Дијагоналите на четириаголникот ABCD се еднакви.
Двата исказа можеме да ги сврземе вака:
„Ако четириаголникот $ABCD$ е правоаголник, тогаш неговите дијагонали се еднакви".
Сложените реченици од овие два примера имаат форма

„Ако p, тогаш q".

Реченици со таква форма се среќаваат многу често во математиката. Тие се нарекуваат импликации.

Импликација на исказите p и q се вика исказот, означен со симболот $p => q$, којшто е невистинит кога p е вистинит и q е невистинит, а е вистинит во сите други случаи.
Исказот $p => q$ се чита:
„Ако p, тогаш q", „Од p следува q" итн.

Вистинитосната таблица за импликацијата е:

p	q	$p => q$
⊤	⊤	⊤
⊤	⊥	⊥
⊥	⊤	⊤
⊥	⊥	⊤

Во импликацијата $p => q$ исказот p се вика **претпоставка,** а исказот q **заклучок.**

Пример 3. *Да ја одредиме вистинитосната вредност на исказот:*

$$„\text{Ако } \frac{3}{4} = 0{,}75, \text{ тогаш } \frac{3}{4} > 0“.$$

Исказот е вистинит, зашто и претпоставката и заклучокот во импликацијата се вистинити. (Ова одговара на првиот ред од вистинитосната таблица.)

1. Утврди кои од следниве импликации се вистинити:

а) Ако $13{,}55 \cdot 10 = 135{,}5$ тогаш $13{,}55 : 10 = 1{,}355$.
б) Ако $3^2 = (-3)^2$, тогаш $3=-3$.
в) Ако $4 \mid 10$, тогаш $4 \mid 100$.
г) Ако $2 + 3 = 4$, тогаш $4 + 6 = 8$.

2. Дадени се исказите

p: $2 \mid 52$. q: $4 \mid 52$. r: $8 \mid 52$

Запиши ги исказите $p => q$, $q => r$ и $r => q$ и одреди ги нивните вистинитосни вредности.

Забелешка. Импликацијата „Ако p, тогаш q“ во математиката се искажува и на следниве начини:

1) од p следува q,
2) p го повлекува q,
3) p е доволен услов за q,
4) q е потребен услов за p,
5) q, само ако p; и др.

3. Дадени се исказите p и q:

а) p: $24 = 3 \cdot 8$, q: $8 \mid 24$; б) p: $1 > 3$, q: $3 = 0$;
в) p: $5 \mid 7$, q: $5 \mid 35$.

Формирај ги импликациите $p => q$, $q => p$ и спореди ги нивните вистинитосни вредности.

(Импликацијата $q => p$ се вика **обратен исказ** од исказот $p => q$.)

6. Реченици од обликот

„p ако и само ако q“

се среќаваат мошне често во математиката. Тие се нарекуваат еквиваленции.

Еквиваленција на два исказа p, q се вика исказот, означен со симболот $p <=> q$, којшто е вистинит кога исказите p и q имаат иста вистинитосна вредност, а невистинит кога p и q имаат спротивни вистинитосни вредности.
Исказот $p <=> q$ се чита:
„p ако и само ако q“, „p е еквивалентно со q“ итн.

Вистинитосната таблица за еквиваленцијата е:

p	q	$p <=> q$
$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$
$\perp$	$\top$	$\perp$
$\perp$	$\perp$	$\top$

Пример 3. *Исказот: „$2^3 = 8$ ако и само ако $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$“ е вистинит исказ бидејќи $\tau(2^3 = 8) = \top$ и $\tau(2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2) = \top$.*

Пример 4. *Исказот: „$(-3)(-4) = -12$ ако и само ако $3 \cdot 4 = 12$“ е невистинит, бидејќи $\tau((-3)(-4) = -12) = \perp$, а $\tau(3 \cdot 4 = 12) = \top$.*

4. Утврди кои од следниве еквиваленции се вистинити:
а) $5^3 = 5 \cdot 3$ ако и само ако $4^3 = 4 \cdot 3$.
б) $(-2)(-3) = 6$ ако и само ако $(-2)\,3 = -6$.
в) $20 - 21 = -1$ ако и само ако $30 - 31 = 1$.
г) $2^3 \cdot 3^2 = 72$ ако и само ако $2^3 \cdot 3^2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$.

5. Одреди кои од следниве искази се вистинити:
а) $(2 > 3) <=> (3 > 2)$.
б) $(2 > 3) <=> (4 > 6)$.
в) $(2^3 = 3^2) <=> (8 = 9)$.

Забелешка 1. Еквиваленцијата „p ако и само ако q“, во математиката се искажува и на следниве начини:

1) p тогаш и само тогаш кога q,
2) p е еквивалентно со q,
3) p е потребен и доволен услов за q.

b. Да се потсетиме. Кај броевите, со помош на сметковната операција: собирање, одземање, множење или делење, од два дадени броја добиваме нов број. Така, од два дадени броја a и b се добиваат броевите $a + b$, $a - b$, $a \cdot b$ или $a : b$. Притоа: $+$, $-$, $\cdot$ и $:$ се знаци за спомнатите операции. Тие се викаат уште и **бинарни операции,** зашто нивниот број се добива од два дадени броја.

И кај исказите, со помош на: конјункција, дисјункција, импликација или еквиваленција, од два дадени исказа добиваме нов исказ. Затоа и нив ги нарекуваме операции со искази или **логички операции.** Така, ако p и q се дадени искази, тогаш искази се и: $p \wedge q$, $p \vee q$, $p => q$, $p <=> q$. Тука, симболите, $\wedge$, $\vee$, $=>$, $<=>$ се викаат *знаци за логичките операции,* соодветно: конјункција, дисјункција, импликација и еквиваленција. И овие се бинарни операции. (Зошто?)

И негацијата е логичка операција. Но, тука, новиот исказ се добива само од еден даден исказ и затоа негацијата се вика уште и **унарна операција.**

Вежби

6. Одреди ја претпоставката и заклучокот во следниве импликации:

а) Ако 6 | 54, тогаш 3 | 27.
б) Ако бројот n е парен, тогаш бројот $n + 1$ е непарен.

7. Дадени се исказите p: $\frac{1}{2} < 2$ и q : $\frac{4}{3} < 1$.

Запиши ги исказите а) $p => q$ и б) $q => p$ и одреди ја нивната вистинитосна вредност.

8. Утврди кои од следниве искази се вистинити:

а) $(-5)\ 3 = -15$ ако и само ако $5\ (-3) = -15$.
б) $3^2 - 2^3 = 1$ ако и само ако $3 - 2 = 1$.
в) $3^5 \cdot 3^4 = 3^{5+4}$ ако и само ако $2^3 \cdot 2^5 = 2^8$.
г) 375,46 : 10 = 3754,6 ако и само ако 375,46 · 10 = 37,546.
д) 6 | 35 ако и само ако 7 | 35.

9. Одреди на што е еднакво:

а) $\tau\ (3 > 2 <=> 2 > 3)$.
б) $\tau\ (4^2 = 8 <=> 3^2 = 6)$.
в) $\tau\ (24 : 6 = 4 <=> 6 \cdot 4 = 24)$.

10. Утврди кои од следниве искази се вистинити:

а) 0 = 1 и 1 = 2.
б) Ако 0 = 1, тогаш 1 = 2.
в) 0 = 1 или 1 = 2.
г) 0 = 1 ако и само ако 1 = 2.

11. Утврди кои од следниве искази се вистинити:

а) Ако 36 е делив со 8, тогаш 36 е делив со 4.
б) 36 е делив со 8 и 36 е делив со 4.
в) 36 е делив со 8 ако и само ако 36 е делив со 4.
г) 36 е делив со 8 или 36 е делив со 4.
д) 36 не е делив со 8.
ѓ) 36 не е делив со 4.

12. Потсети се што е тоа апсолутна вредност на број и утврди кои од следниве искази се вистинити:

а) $|5| = 5$.
б) $|-5| = 5$.
в) $|-3| \cdot |3| = 9$.
г) $|-3| \cdot |-3| = 9$.
д) $|0| = 0$.
ѓ) $|-1| = -1$.

13. Одреди:

а) Колку е 10% од 100.
б) Колку е 5% од 200.
в) Колку е 7% од 20.
г) Колку е 15% од 400.

I.4. ИСКАЗНИ ФОРМУЛИ

a. Нека ни се дадени, на пример, исказите:

p: Бројот 12 е делив со 3.

q: Бројот 12 е делив со 2.

r: Бројот 12 е делив со 6.

Од нив, како што ни е познато, може да се образуваат сложени искази како:

а) Бројот 12 е делив со 3 или бројот 12 е делив со 2 $(p \vee q)$.

б) Ако бројот 12 е делив со 6, тогаш бројот 12 е делив со 2 $(r \Rightarrow q)$.

в) Бројот 12 е делив со 6 ако и само ако бројот 12 е делив со 3 $(p \Leftrightarrow q)$.

Но, со помош на исказите p, q и r можат да се образуваат и посложени искази од исказите под а), б) и в). На пример:

г) Ако бројот 12 е делив со 6 тогаш бројот 12 е делив со 3 или со 2. Тоа со симболи може да се запише:

$$r \Rightarrow (p \vee q).$$

д) Ако е 12 делив со 3 и 12 е делив со 2, тогаш 12 е делив со 6. Тоа со симболи може да се запише:

$$(p \wedge q) \Rightarrow r.$$

Да ја одредиме вистинитосната вредност на исказот под г). Исказите p, q и r се вистинити. Ако во записот $r \Rightarrow (p \vee q)$ ги замениме нивните вистинитосни вредности, ќе го добиеме записот $\top \Rightarrow (\top \vee \top)$ Со користење на вистинитосните таблици за дисјункција и импликација, непосредно се добива

$$(\top \Rightarrow (\top \vee \top)) = (\top \Rightarrow \top) = \top.$$

Значи, ако $\tau(p) = \top, \tau(q) = \top$ и $\tau(r) = \top$, тогаш $\tau(r \Rightarrow (p \vee q)) = \top$.

1. Одреди ја вистинитосната вредност на исказот под д).

Еве уште неколку вакви изрази:

а) $p \Leftrightarrow p \vee r$. б) $\neg p \Rightarrow q$. в) $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$.
г) $\neg(p \vee q)$.

Сите овие изрази се добиени како резултат на сврзување (на дозволен начин) на исказни букви $(p, q, r, \ldots)$ и знаците $\top$ и $\bot$, со помош на симболите на логичките операции $(\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$ и $\neg)$ и загради. Ваквите изрази се викаат **исказни формули.**

Записите од видот $p \wedge q \Rightarrow$, $p \Leftrightarrow q \wedge$ и сл. не се исказни формули. Зошто?

Лесно се уочува дека исказните формули се добиваат на сличен начин како и алгебарските изрази. Во алгебрата во VII одделение, покрај изразите од видот $a + b$, $5 - 7a$, $a + b : c$, $(8 - a + b) : c$, за алгебарски изрази ги прифативме и броевите 5, 3, a, b и сл.

Исто така, и тука, константите $\top$ и $\bot$ и исказните букви (p, q, r, . . .) ќе ги сметаме за исказни формули.

Според сето досега кажано за исказна формула, можеме да ја дадеме следнава дефиниција:

1°. Константите $\top$ и $\bot$ и исказните букви p, q, r, ... се исказни формули.

2°. Ако A и B се исказни формули, тогаш и симболите $(A) \wedge (B)$, $(A) \vee (B)$, $(A) => (B)$ $(A) <=> (B)$, $\neg(A)$ се исказни формули.

3°. Една последователност од симболи е исказна формула само тогаш кога е добиена врз основа на 1° и конечен број пати применување на 2°.

Лесно се покажува, врз основа на дефиницијата, дека следниве последователности од симболи се исказни формули:

а) $p \vee \top$	б) $(p \vee q) => r$	в) $(\neg p) => q$
г) $(p => q) <=> (p \wedge r)$	д) $(p \wedge q) => (p \vee r)$	

На пример, под б) е исказна формула затоа што може да се земе $p \vee q$ како исказ A, а r како исказ B. Врз основа на 2°, $A => B$ е исказна формула, а според тоа и $(p \vee q) => r$ е исказна формула.

2. Покажи зошто последователноста под г) е исказна формула.

3. Одреди кои од изразите се исказни формули

а) $(\neg p) => q$	б) $p \wedge q =>$	в) $(p \wedge q) => p$
г) $\neg(p \wedge q) <=> (\neg p)$	д) $p <=> q \wedge$	ѓ) $=> p \wedge q$

Забелешка. За симболите $\wedge$, $\vee$, $=>$, $<=>$ и $\neg$ е прифатено логичките операции да се извршуваат по следниов редослед: прво $\neg$ (ако има), потоа $\wedge$, па $\vee$, $=>$ и на крајот $<=>$. Тоа помага да ги пишуваме исказните формули со што помалку загради.

Пример 1. *Исказот: „Ако $3 > 0$, тогаш $3 = 2 + 1$ и $3 \neq 2 + 1$" со исказна формула може да се запише на следниов начин:*

$$p => q \wedge \neg q,$$

каде што $p: 3 > 0$, $q: 3 = 2 + 1$.

Вистинитосната вредност на овој исказ е $\bot$. (Образложи!)

4. Запиши го со помош на исказна формула исказот: Ако 3 не е прост број и 3 не е парен број, тогаш 3 е сложен број.

5. Запиши еден исказ што може да се претстави со исказната формула:

а) $p => (q \wedge r)$.	б) $(p => q) \wedge r$.
в) $(p \wedge q) <=> (q \wedge p)$.	г) $(p \vee (\neg p) <=> p$.

Пример 2. *Дадена е исказнаша формула*

$$p \Rightarrow (\neg q \wedge q) \qquad 1$$

каде шшо p и q се искази, чии висшинишосни вредносши не ги знаеме. Да ја одредиме висшинишоснаша вредносш на оваа исказна формула за сиише можни комбинации на висшинишосниише вредносши од исказниише букви p и q.

Тоа можеме да го направиме прегледно со помош на вистиносната таблица на оваа формула. Еве ја таа таблица, направена постапно.

Табл. 1

p	q	$\neg q$	$\neg q \wedge q$	$p \Rightarrow (\neg q \wedge q)$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$
$\top$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$

Во првиот ред од таблицата, во првите четири колони се запишани исказните формули од кои е составена исказната формула (1), по редоследот по кој се изведуваат операциите.

6. Состави вистинитосна таблица на исказната формула

а) $p \wedge \neg p$; б) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$.

При решавањето на задачата **6**, сигурно ги состави таблиците:

а) $p \wedge \neg p$:

Табл. 2

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$

б) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$:

Табл. 3

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

Од овие таблици и од таблиците во примерот **2** можеш да уочиш дека некои од исказните формули се секогаш вистинити, за сите можни комбинации од вистинитосните вредности на исказните променливи што се содржат во нив, некои се секогаш невистинити, а некои од нив во одредени случаи се вистинити, а во други невистинити.

Исказните формули што се секогаш вистинити, како во зад. 4 б), (Таб. 3), се викаат **тавтологии,** исказните формули што се секогаш невистинити, како во зад. 4 а) (Таб. 2), се викаат **контрадикции,** а исказните формули како во примерот **2** кои се за едни вредности на исказните променливи вистинити, а за други невистинити се викаат **неутрални** исказни формули.

7. Одреди од каков вид е секоја од следниве исказни формули:

а) $p \vee q \Longleftrightarrow q \vee p$. б) $p \Longrightarrow \neg p \vee q$.

Погледај ги вистинитосните вредности на исказните формули $p \Longrightarrow q$ и $\neg p \vee q$ (Таб. 3). Што забележуваш?

Сигурно забележа дека тие имаат еднакви вистинитосни вредности за секоја можна комбинација на вистинитосните вредности на нивните исказни променливи. За такви две исказни формули се вели дека се **еквивалентни исказни формули.**

Погледај го решението на задачата **5.** под а) и утврди дека $p \vee q$ и $q \vee p$ се еквивалентни исказни формули.

Лесно се уочува дека ако две еквивалентни исказни формули се сврзат со знакот за еквиваленција ќе се добие тавтологија, т.е. ако A и B се еквивалентни исказни формули тогаш $A \Longleftrightarrow B$ е тавтологија.

8. Одреди кои од следниве исказни формули се еквивалентни:

а) $\neg(p \vee q)$ и $\neg p \wedge \neg q$. б) $\neg(p \wedge q)$ и $\neg p \wedge \neg q$.

Ако две исказни формули се еквивалентни, тогаш наместо едната од нив, може да се земе другата.

Вежби

9. Запиши го со помош на формула исказот: „Ако $5 > 3$ и $5 > 2$, тогаш $5 = 3 + 2$ или $5 = 2 + 3$.

10. Запиши исказ што може да се претстави со исказна формула:
а) $p \vee q \Longleftrightarrow r \vee \neg r$. б) $p \Longrightarrow \neg p \vee \neg q$.

11. Одреди ја вистинитосната вредност на исказната формула:
$\neg(p \wedge q) \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$ ако $\tau(p) = \top$, а $\tau(q) = \perp$.

12. Состави ги вистинитосните таблици на следниве исказни формули.

а) $p \Longrightarrow \neg p \vee q$ б) $p \vee q \Longleftrightarrow q \vee p$.
в) $p \wedge q \Longrightarrow p$. г) $r \Longrightarrow p \vee \neg q$
д) $p \wedge q \Longleftrightarrow \neg p \vee \neg q$ ѓ) $(p \Longrightarrow q) \Longleftrightarrow (\neg q \Longrightarrow \neg p)$.

13. Одреди кои од следниве исказни формули се тавтологии:

а) $\neg(p \wedge \neg p)$. б) $\neg p \Rightarrow p \vee \neg q$.
в) $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$. г) $(q \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow p$.

14. Одреди кои од следниве исказни формули се еквивалентни:

а) $\neg(p \wedge q)$ и $\neg p \wedge \neg q$. б) $\neg(p \wedge q)$ и $\neg p \vee \neg q$.
в) $p \vee (q \wedge r)$ и $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$. г) $p \Rightarrow q$ и $p \wedge \neg q$.

15. Одреди кои од исказните формули се тавтологии:

а) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \vee p$. б) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$.
в) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \wedge q$. г) $p \Rightarrow q \Leftrightarrow q \Rightarrow p$.

16. Покажи дека се еквивалентни следниве формули:
$p \Leftrightarrow q$ и $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

I.5. ЛОГИЧКИ ЗАКОНИ

Во минатата лекција истакнавме дека една исказна формула може да биде тавтологија, контрадикција или неутрална исказна формула. Од сите овие видови формули, тавтологиите имаат посебно значење. Секоја тавтологија е некој **логички закон** или **закон на мислењето.**

Така, со тавтологијата

1°. $p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$

е искажан комутативниот закон на конјункцијата, а со тавтологијата

2°. $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

е искажан комутативниот закон на дисјункцијата.

Значи, и кај логичките операции конјункција и дисјункција важи комутативниот закон.

Според тоа, следниве парови реченици имаат исто значење.

а) 5 е прост број и $|5| = 5$;
$|5| = 5$ и 5 е прост број.

б) $2^3 = 3^2$ или $8 = 9$;
$8 = 9$ или $2^3 = 3^2$.

Лесно се покажува дека исказната формула

$$p \Rightarrow q \Leftrightarrow q \Rightarrow p$$

не е тавтологија, што значи дека логичката операција импликација не е комутативна.

1. Покажи дека следниве исказни формули се тавтологии, т.е. логички закони (закон за асоцијативност кај конјункцијата и дисјункцијата)

3°. $(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

4°. $(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$.

Еве уште неколку логички закони.

5°. $p \lor \neg p$ – закон за исклучување на третото.

6°. $\neg(p \land \neg p)$ – закон за непротивречност.

7°. $p \land (q \lor r) <=> (p \land q) \lor (p \land r)$ – дистрибутивен закон на конјункцијата спрема дисјункцијата.

8°. $p \lor (q \land r) <=> (p \lor q) \land (p \lor r)$ – дистрибутивен закон на дисјункцијата спрема конјункцијата.

9°. $p => q <=> (\neg p \lor q)$ – закон за замена на импликацијата.

Врз основа на овој закон наместо да кажеме „Ако врне дожд, тогаш дува ветар", ние можеме да речеме: „Не врне дожд или дува ветар".

10°. $\neg(\neg p) <=> p$ – закон за двојна негација.

$$\left.\begin{array}{ll}\mathbf{11°.} & \neg(p \land q) <=> \neg p \lor \neg q \\ \mathbf{12°.} & \neg(p \lor q) <=> \neg p \land \neg q\end{array}\right\}\text{ закони на Де Морган.}$$

2. Изврши негација на следниве искази:
а) 5 е парен број и 5 е прост број.
б) Земјата е планета или Земјата е ѕвезда.

◑ Според логичкиот закон **11°** негација на исказот а) од задачата **2** е: „5 е непарен број или 5 не е прост број".

Според логичкиот закон **12°**, негација на исказот б) од задачата **2** е: „Земјата не е планета и Земјата не е ѕвезда".

3. Изврши негација на следниве искази:
а) 8 е сложен број и 8 е делив со 2.
б) $2 = 3$ или $3 = 2 + 1$.

Пример 1. *Да ја трансформираме формулата:* $\neg(p => q)$

Решение:

$$\neg(p => q) <=> \neg(\neg p \lor q) <=> \neg\neg p \land \neg q <=> p \land \neg q.$$

4. Кои закони се искористени при оваа трансформација?

5. Логичко следство. Да разгледаме неколку импликации.

1) Ако $3 + 4 = 7$, тогаш $3 = 7 - 4$.
2) Ако $8 - 3 = 5$, тогаш $2 > 0$.
3) Ако бројот 516 е делив со 4, тогаш бројот 516 е делив со 2.
4) Ако бројот 470 е делив со 10, тогаш бројот 875 е делив со 5.

Сите овие импликации се вистинити. Но, кај импликациите под 1) и 3) има нешто карактеристично (што го нема кај импликациите под 2) и 4)). Кај нив заклучокот директно следува од претпоставката и тој е вистинит секогаш кога е вистинита претпоставката. Во тој случај се вели дека заклучокот **логички следува од претпоставката.** За секоја ваква импликација уште се вели дека е **логичко следство.**

Секоја теорема може да се запише во вид на импликација $p => q$ при што p е **услов на теоремата, а q заклучок на теоремата.** Кај секоја теорема заклучокот логички следува од условот.

Еве неколку теореми:

а) Ако еден четириаголник $ABCD$ е правоаголник, тогаш неговите дијагонали се еднакви меѓу себе.

б) Ако a е делив со 6, тогаш a е делив со 3.

в) Ако $x = y$, тогаш $x^2 = y^2$.

Секоја теорема е едно логичко следство.

Општо, во импликацијата $p => q$ за исказот q се вели дека **логички следува** (или, само, **следува**) од исказот p ако q е вистинит секогаш кога е вистинит исказот p. Притоа, импликацијата $p => q$ е логичко следство и вистинит исказ.

Еве уште неколку логички следства.

а) Ако $8 - 2 = 6$, тогаш $8 = 6 + 2$.

б) Ако грее сонце, тогаш е ден.

в) Ако $x = 1$, тогаш $x + 5 = 6$.

г) Ако $\triangle ABC$ е правоаголен со прав агол во темето C, тогаш $c^2 = a^2 + b^2$.

Вежби

5. Користејќи го комутативниот закон за конјункцијата односно за дисјункцијата, запиши еквивалентен исказ со следниов:
а) 5 е прост број и 9 е непарен број.
б) $34{,}55 : 10 = 3{,}455$ или $34{,}55 : 10 = 345{,}5$.

6. Запиши го: а) асоцијативниот закон за дисјункцијата;
б) дистрибутивниот закон на конјункцијата спрема дисјункцијата;
в) законот за замена на импликацијата.

7. Со кој еквивалентен исказ може да се замени исказот: „Ако 36 е делив со 6, тогаш 36 е делив со 3"?

8. Изврши негација на следниве искази
а) 9 е сложен број и $9 = 9$.
б) $5 > 3$ или $5 = 3 + 2$.
в) Живата не е метал и живата не е во течна состојба.

9*. Упрости ја формулата $\neg(\neg p \wedge \neg\neg q)$ со користење на законот за двојната негација и еден од законите на Де Морган.

10*. Видовме дека врз основа на законот за замена на импликацијата $p => q$ може да се замени со $\neg p \vee q$. Со што ќе се замени импликацијата $\neg p => q$ врз основа на тој закон и законот на двојната негација?

11 Утврди кои од следниве реченици се искази:
а) $x + 3 = 8$; б) $x + 3 = 8$ за $x = 0$;
в) $3x + 1 > 0$ за $x = 1$; г) Градот x е поголем од Скопје.

12. Оцени дали е вистинито:

а) За секој природен број x, $x > 3$.

б) За некој природен број x, $x > 3$.

в) За секој природен број x, $x + 1 = 3$.

г) Постои природен број x таков што $x + 1 = 3$.

д) Сите градови во СРМ се поголеми од 400 000 жители.

I.6. ПРЕДИКАТИ. КВАНТОРИ

При решавањето на задачата **11** од минатата лекција сигурно утврди дека реченицата:

$$„x + 3 = 8“ \tag{1}$$

не е исказ. Но, од порано пак знаеме дека реченицата

$$„x + 3 = 8 \text{ за } x = 0“ \tag{2}$$

(којашто значи исто што и реченицата „0+3=8“) е исказ (невистинит).

Реченицата (1) е со променлива x. За секој реален број x таа станува исказ. Исто така и реченицата

$$„\text{Градот } x \text{ е поголем од Скопје}“ \tag{3}$$

е реченица со променлива. Ако на местото на x ставиме кој било град таа ќе стане исказ. Ваквите реченици се наречуваат *исказни функции* или *предикати.* Општо:

> **Исказна функција** или **предикат** е реченица со променлива, којашто станува исказ за с е к о ј а вредност на променливата од некое дадено множество D. Притоа, множеството D се вика **дефинициона област** на предикатот, а елементите на тоа множество – **допуштени вредности** на променливата.

Еве неколку примери на предикати:

а) $x - 5 = 0,\ x \in \mathbf{N}$ $\quad (D = \mathbf{N})$.

б) $\dfrac{1}{x} = 2,\ x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$. $\quad (D = \mathbf{R} \setminus \{0\})$.

в) $\dfrac{5}{x-1} > 1,\ x \in \mathbf{R} \setminus \{1\}$ $\quad (D = \mathbf{R} \setminus \{1\})$.

Сите овие предикати се со една променлива. Но, можеме да зборуваме и за *предикати со две, три или повеќе променливи.*

На пример, и следниве реченици се предикати:

1) $x + y = 2,\ x, y \in \mathbf{R}$ (со две променливи).

2) $a^2 + b^2 = c^2,\ a, b, c \in \mathbf{N}$ (со три променливи).

3) $x - y + z = t,\ x, y, z, t \in \mathbf{Q}$ (со четири променливи).

За предикатите со една променлива уште се вели дека се **со должина еден,** за тие со две променливи – **со должина два,** итн.

Предикатите ќе ги означуваме со големите букви од латиницата $P, Q, R, S \ldots$, со означување на променливите во загради; така, со $P(x)$, $Q(x) \ldots$ – предикатите со должина еден, со $P(x, y)$, $Q(a, b) \ldots$ – предикатите со должина два, итн.

На пример, предикатот „$x - y = 5,\ x, y \in \mathbf{Z}$" е со должина два и можеме да запишеме: $P(x, y) : x - y = 5,\ x, y \in \mathbf{Z}$.

Предикатот $P(x, y)$ за $x = 8$ и $y = 3$ (се пишува: $P(8, 3)$) преминува во исказот: $P(8, 3)\ :\ 8 - 3 = 5$ (вистинит исказ).

Да забележиме дека *равенките, неравенките* и *системите равенки, односно неравенки* се најважните примери на предикати со кои ќе се среќаваме натаму.

1. Одреди кои од следниве реченици се предикати во множеството на природните броеви и со која должина:

а) $3x > 9$. б) $2x - y = 1$.
в) $2x - y = z$. г) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.
д) „x е прост број". ѓ) $x - y = 5$ за $x = 3$ и $y = 2$.

2. Во множеството $\mathbf{Z}$ се дадени предикатите:

$P(x)\ :\ x - 4 = 5$, $Q(x, y)\ :\ x - 5 = y$, $R(x, y, z)\ :\ x \cdot y = z$.

Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

$P(5)$, $Q(3, 2)$ и $R(3, 4, 5)$, $R(-3, 2, -5)$.

б) Видовме дека даден предикат со дефинициона област D, за некои вредности на променливата станува вистинит исказ, а за други – невистинит исказ. Секоја вредност на променливата (променливите) за која предикатот станува вистинит исказ се вика **решение на предикатот.** Множеството, пак $M \subseteq D$ од сите такви вредности се вика **множество решенија** на тој предикат.

Примери.

а) *Множеството решенија на предикатот* $x < 5,\ x \in \mathbf{N}$, *е множеството* $M = \{1, 2, 3, 4\}$.

б) *Множеството решенија на предикатот*

$$x + y = 4, \quad x, y \in \mathbf{N}.$$

е множеството $M = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$.

3. Одреди го множеството решенија на следниов предикат:

а) $3 < x \leqslant 6,\ x \in \mathbf{N}$; б) $xy = 6,\ x, y \in \mathbf{N}$;

в) $2x = 3,\ x \in \mathbf{Z}$; г) $2x = 3,\ x \in \mathbf{Q}$.

Нека се дадени предикатите $P(x) : x > 3$ и $Q(x) : 2x + 1 < 2$. Лесно се уочува дека и реченицата

$$(x > 3) \wedge (2x < 2)$$

е предикат, т.е. дека и $P(x) \wedge Q(x)$ е предикат.

Воопшто, ако $P(x)$ и $Q(x)$ се кои било предикати, тогаш предикати се и:

$P(x) \wedge Q(x)$, $P(x) \vee Q(x)$, $P(x) \Rightarrow Q(x)$, $P(x) \Leftrightarrow Q(x)$, $\neg P(x)$, $\neg Q(x)$.

4. Дадени се предикатите $P(x) : x^2 - x = 6$ и $Q(x) : x < 3$. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $P(3) \wedge Q(1)$; б) $P(5) \vee Q(0)$;
в) $P(8) \Rightarrow Q(3)$; г) $\neg P(7)$.

b. Нека ни е даден предикатот: „$x > 5$". Тој станува исказ за одредени вредности на променливата x. На пример, исказ е „$x > 5$ за $x = 6$". Но, овој предикат може да стане исказ и со употребата на зборовите: „секој" и „некој". На пример, искази се:

а) За секој реален број x, $x > 5$.
б) За некој реален број x, $x > 5$.

Исказот под а) е невистинит, бидејќи има реални броеви x за кои не е $x > 5$. На пример, за $x = 1$ се добива $1 > 5$ што не е вистинито. Исказот под б) е вистинит, бидејќи навистина постои реален број x за кој $x > 5$; на пример, за $x = 10$.

Исказот под а) може уште да се запише и на следниве начини:

а') За кој било реален број x, $x > 5$.
а'') За сите реални броеви x, $x > 5$.
а''') За произволен реален број x, $x > 5$.

Исказот под б), пак, може да се запише на следниве начини:

б') Барем за еден реален број x, $x > 5$.
б'') Постои реален број x за кој $x > 5$.

Зборовите „секој" (кој било, сите) и „некој" (барем за еден, постои . . . за кој) се викаат **квантификатори** или **квантори.** Поради нивната честа употреба во математиката за нив се користат посебни симболи.

За зборот „секој", кој уште се вика **универзален квантификатор,** се користи симболот $\forall$ (свртено A – почетната буква од германскиот збор *Alle* што значи сите), а за зборот „некој" симболот $\exists$ (свртено E – почетната буква од *Es gibt* што значи егзистира, постои; затоа се вика **егзистенцијален квантор**).

Така, исказот: „За секој природен број x, $x \geq 1$" со помош на симболи се запишува на следниов начин:

$$(\forall x \in \mathbf{N})\ (x \geq 1).$$

Исказот, пак: „Постои x во $\mathbf{N}$, што е решение на равенката $x+1=5$" со помош на симболи се запишува:

$$(\exists x \in \mathbf{N})\ (x + 1 = 5).$$

5. Запиши ги со помош на симболи следниве искази:

а) За секој природен број x, $x + x = 2x$.
б) За секој природен број x, $x > 0$.
в) Постои цел број x што е решение на равенката $2x - 3 = 6$.
г) За кој било реален број x, $x + 1 = 1 + x$.

6. Запиши ги со помош на зборови следниве искази:

а) $(\forall x \in \mathbf{N})\ (x + 5 = 7)$. б) $(\exists x \in \mathbf{N})\ (2x - 1 > 0)$

Кога сакаме да потенцираме дека постои еден и само еден (или постои точно еден) елемент се користи симболот $\exists!$.

На пример, исказот: „Постои еден и само еден природен број x што е решение на равенката $x - 5 = 3$“ со симболи се запишува $(\exists!\, x \in \mathbf{N})\ (x - 5 = 3)$.

Да напомниме: симболите $\forall$, $\exists$ и $\exists!$ секогаш се употребуваат со променлива.

Нека ни е даден исказот:
а) За секој x од $\mathbf{N}$, $x + x = 2x$.

Негацијата на овој исказ може да се направи на два начина.
а′) Не за секој x од $\mathbf{N}$, $x + x = 2x$ и
а″) Постои x од $\mathbf{N}$ за кој не е точно дека $x + x = 2x$.

Според а″) ако е даден исказот $(\forall\ x \in \mathbf{N})\ (x + x = 2x)$, тогаш неговата негација е: $(\exists\ x \in \mathbf{N})\ \neg(x + x = 2x)$.

Или за кој било предикат P (x):

$$\neg(\forall\ x)\ P(x) <=> (\exists\ x) \neg P(x).$$

Негацијата, пак, на исказот $(\exists x)\ P(x)$ е $(\forall\ x) \neg P(x)$, т.е.

$$\neg(\exists\ x)\ P(x) <=> (\forall\ x)\ \neg P(x).$$

R, ≠

На пример, негацијата на исказот: „За некој x од $\mathbf{R}$, $x + 1 = 3$“ е: „За секој x од $\mathbf{R}$ не е точно дека $x + 1 = 3$“ или „За секој x од R, $x + 1 \neq 3$“.

7. Запиши ја негацијата на следниве искази $(a,\ y \in \mathbf{N})$:

а) $(\forall\ a)\ (a + 2 = 2 + a)$.
б) $(\exists\ y)\ (y + 1 = 0)$.

Вежби

8. Одреди кои од следниве реченици се предикати:

а) x е прарен број, $x \in \mathbf{N}$.
б) $3x - 1 = 9$ за $x = 4$.
в) Елементот x е метал, x е елемент од периодичниот систем.

9. Во множеството на реалните броеви се дадени предикатите:

$P(x) : 8 - x = 5$
$Q(x, y) : 2x - 3y = 4$
$R(a, b, c) : a^2 + b^2 = c^2$

Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $P(3)$; б) $Q\ (3,0)$; в) $\neg P\ (8)$,
г) $R(5,\ 12,\ 13)$; д) $P\ (3) => Q\ (3, 4)$.

10. Одреди го множеството решенија на предикатот:

а) $x - 3 = 1$; б) $x \mid 6$; в) $2 \mid x$, каде што $x \in \{1, 2, 3, 4\}$.

11. Најди барем три решенија на предикатот, дефиниран во множеството на реалните броеви

$P(x, y) : x^2 - x + 2 = y$.

12. Одреди ја вистинитосната вредност на следниве искази ($x, y \in \mathbf{N}$):

а) Постои x таков што $x^2 - x = 0$.
б) За некој x, $x - 1 = 3$.
в) За секој x постои y таков што $x + y = 5$.

13. Во врска со множеството $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$ одреди кои од следниве искази се вистинити:

а) Секој елемент од множеството A е парен број.
б) Постои елемент во множеството A што е непарен број.
в) Кој било елемент од множеството A е делив со 4.
г) Барем еден елемент од множеството A е делив со 9.
д) Некој елемент од множеството A е помал од 8.

14. Запиши ги со помош на симболи следниве искази:

а) За кој било природен број a, $a + 10 = 10 + a$.
б) Постои цел број x што е решение на неравенката $2x + 1 > 0$.

15. Запиши ги со зборови следниве искази:

а) $(\forall a \in \mathbf{N})\ (a^2 + 1 > 0)$.
б) $(\exists x \in \mathbf{N})\ (x - 3 = 5)$.

16. Запиши ја негацијата на следниве искази:

а) Секој природен број x е парен број.
б) Постои природен број x што е парен број.

17. Изврши негација на следниве искази:

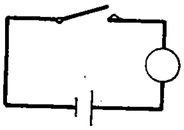
а) $(\forall x \in \mathbf{N})\ (x + 1 > 2)$.
б) $(\exists x \in \mathbf{N})\ (x + 3 = 3 + x)$.

18. Одреди која од следниве еквиваленции е вистинита (x е природен број):

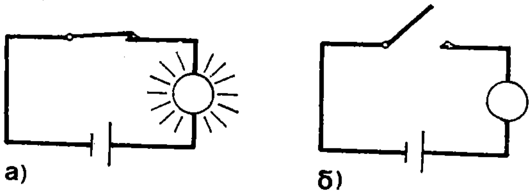
а) $\neg(\forall x)\ (x - 2 = 0) <=> (\exists x)\ \neg(x - 2 = 0)$.
б) $\neg(\forall x)\ (x - 3 = 5) <=> (\exists x)\ (x - 3 \neq 5)$.
в) $\neg(\exists x)\ (x + 1 = 3) <=> (\exists x)\ \neg(x + 1 = 3)$.
г) $\neg(\exists x)\ (x + 1 = 3) <=> (\forall x)\ (x + 1 \neq 3)$.

I.7*. ЕЛЕКТРИЧНИ СКЛОПОВИ СО ПРЕКИНУВАЧИ

На црт. 1 е дадено едно струјно коло со извор на струја, еден прекинувач и една светилка. Светилката ќе свети ако прекинувачот е вклучен (црт. 2а), а нема да свети кога прекинувачот не е вклучен (црт. 2б).



Црт. 1



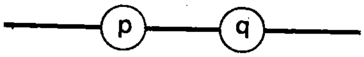
Црт. 2

Цртежот 2 ќе го упростиме со тоа што ќе го испуштиме изворот на струја и светилката, а ќе ги задржиме само прекинувачите (црт. 3а), б). Овие шеми ќе ги наречеме **електрични склопови** или само **склопови.**

Црт. 3

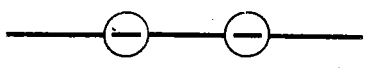
Еден прекинувач може да е вклучен или да не е вклучен. На црт. 3 а) прекинувачот е во хоризонтална положба и низ склопот тече струја, а на црт. 3 б) е во вертикална положба и не тече струја. Ова ни дава идеја една исказна променлива да ја замениме со еден прекинувач. Притоа, ако исказот е вистинит, ќе му придружиме прекинувач во хоризонтална положба (Θ), а ако е невистинит – прекинувач во вертикална положба (Φ).

На црт. 4 е даден еден електричен склоп со два прекинувача што се поставени во серија и се означени со исказните букви p и q.



Црт. 4

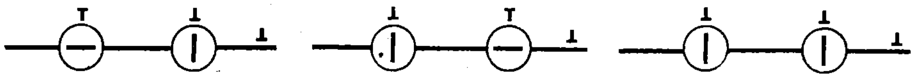
Во кои случаи низ склопот ќе тече струја? Сигурно – само во случајот како на црт. 5, т.е. кога $\tau(p) = \top$ и $\tau(q) = \top$.



Црт. 5

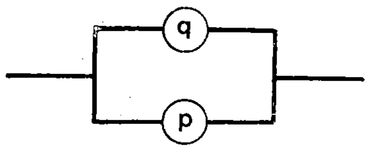
Ако случајот кога тече струја во склопот го прифатиме како вистинитосна вредност $\top$, тогаш лесно се уочува дека ваквиот распоред на прекинувачите во склопот (во серија) може да се прифати како илустрација за конјункцијата на исказите p и q.

На црт. 6 се претставени другите случаи на вистинитосните вредности p и q и вистинитосната вредност на склопот во целост.



Црт. 6

1. На црт. 7 е даден еден електричен склоп со два прекинувача сврзани паралелно.



Црт.7

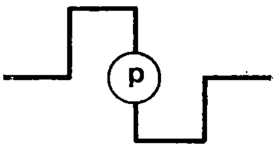
а) Одреди во кои случаи низ склопот ќе тече струја.

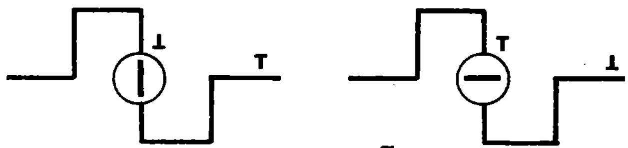
б) Одреди на која логичка операција ѝ одговара овој склоп.

Сигурно утврди дека склопот од црт. 7 ѝ одговара на дисјункцијата на исказите p и q.

2. Претстави ги како на црт. 6 разните случаи на вистинитосните вредности на исказите p и q.

Да го разгледаме склопот на црт. 8. Низ склопот ќе тече струја кога $\tau(p) = \perp$ (црт. 9а), а нема да тече кога $\tau(p) = \top$ (црт. 9б).

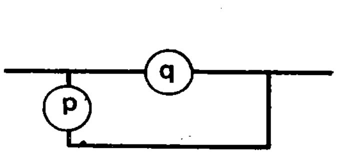




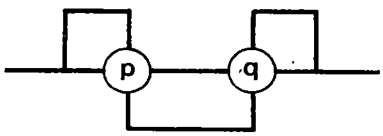
а) б)

Црт. 8 Црт. 9

3. На црт. 10 е даден еден електричен склоп со два прекинувача. Покажи со цртежи дека тој одговара на импликацијата $p \Rightarrow q$.



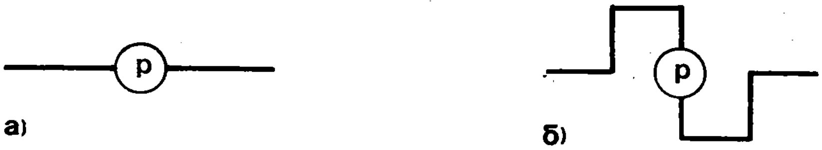
Црт. 10



Црт. 11

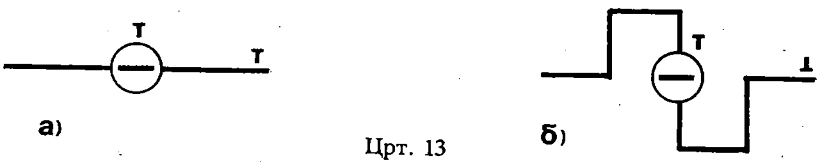
4. На еквиваленцијата $p<=>q$ одговара склоп како на црт. 11. Претстави ги со склопови разните случаи на вистинитосни вредности на p и q.

5. Со давање вредности на p, покажи дека со црт. 12 б) е претставена негацијата на исказот p (т.е. $\neg p$).



Црт. 12

На црт. 13 е прикажан случајот кога $\tau(p) = \top$. Во склопот под а) тече струја, а во склопот под б) не тече струја.

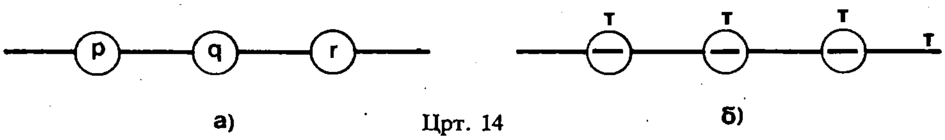


Црт. 13

Исказните формули можат да се претставуваат со помош на електрични склопови. На тој начин, во одделни случаи може многу полесно да се утврди за кои вредности на променливите исказната формула е вистинит исказ.

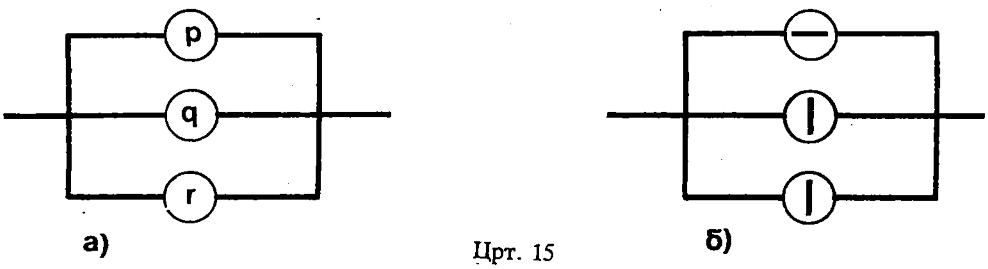
Еве неколку примери.

1) На црт. 14 а) е илустрирана со склоп исказната формула $p \wedge q \wedge r$. Лесно се воочува дека овој исказ ќе биде вистинит кога сите три искази истовремено се вистинити (црт. 14 б).



Црт. 14

2) На црт. 15 а) е илустрирана со склоп исказната формула $p \vee q \vee r$. Лесно се воочува дека овој исказ е вистинит кога барем еден од овие три искази е вистинит (црт. 15 б).

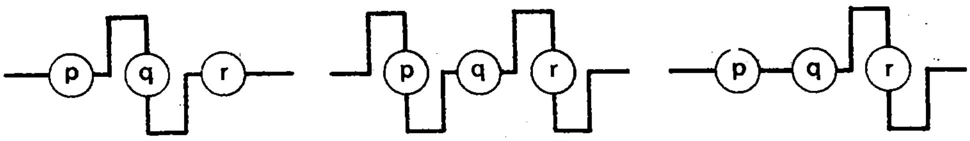


Црт. 15

6. Илустрирај ги со склоп следниве исказни формули:

а) $p \land (r \lor s)$ б) $(p \lor r) \land s$

7. На црт.16 а) со електричен склоп е илустрирана исказната формула $p \land \neg q \land r$. Одреди која исказна формула е претставена со електричните склопови на црт.16 б) и в).

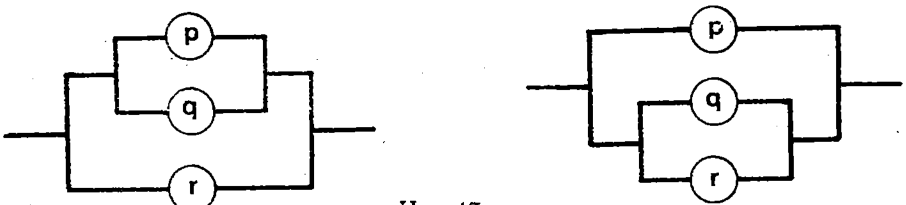


а) б) в)

Црт. 16

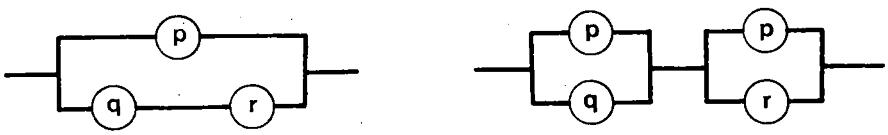
Со електрични склопови можат да се илустрираат и еквивалентни исказни формули:

На пример, со електричните склопови на црт. 17 се илустрирани еквивалентните формули $(p \lor q) \lor r$ и $p \lor (q \lor r)$. За вакквите склопови се вели дека се **еквивалентни.**



Црт. 17

8. Одреди кои исказни формули се илустрирани со помош на електричните склопови на црт.18. Дали се тие еквивалентни?

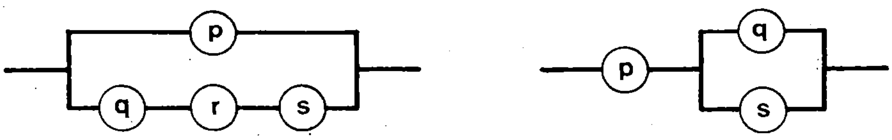


а) б)

Црт. 18

Вежби

9. Одреди кои исказни формули се илустрирани со електричните склопови на црт. 19.



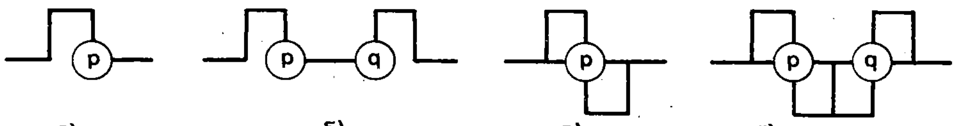
а) б)

Црт. 19

10. **Илустрирај ги со електрични склопови исказните формули:**

а) $p \Rightarrow q \wedge r$ б) $p \wedge (q \vee \neg r)$.

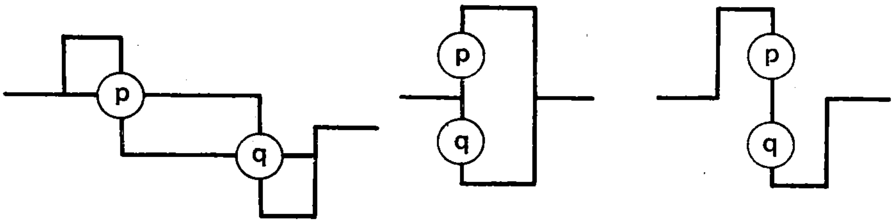
11. **Одреди за кои вистинитосни вредности на исказните букви склопот ќе има вистинитосна вредност $\top$, односно кога низ него ќе тече струја**



а) б) в) г)

Црт. 20

12. **Одреди за кои вредности на исказните променливи p и q се вистинити следниве склопови.**



Црт. 21

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ – I

1. Одреди кои од следниве реченици се искази:

а) $2x + 1 = 3$. б) $8 - 4 \cdot 2 = 0$.
в) Мислам дека $8 > 6$. г) $2x > 3$ за $x = 0$.

2. Одреди на што е еднакво:

а) $\tau\,(8 - 3 \cdot 2 = 15)$. б) $\tau\,(2x > x$ за $x = 1)$.
в) $\tau\,(\frac{1}{2} > 1)$. г) $\tau\,(3^2 = 2^3)$.

3. Одреди кои од следниве искази се вистинити:

а) Бројот 625 е делив со 5 и бројот 625 е делив со 2.
б) 3 е прост број и 3 е непарен број.
в) $64 \in \mathbf{N}$ и 64 е делив со 5.
г) Живата е метал и живата е во цврста состојба.

4. Дадени се исказите p: „Прилеп е поголем од Кавадарци“ и q: „Кавадарци е поголем од Скопје“. Запиши ги исказите а) $p \wedge q$ и б) $p \vee q$ а потоа одреди ги нивните вистинитосни вредности.

5. Одреди кои од следниве искази се вистинити:

а) Ако $5 + 3 = 8$, тогаш $8 > 5$.
б) Ако $5 + 3 = 8$, тогаш $8 < 3$.
в) Ако $3 + 4 = 5$, тогаш $5 > 4$.
г) Ако $3 + 4 = 5$, тогаш $6 < 4$.

6. Одреди кои од следниве искази се вистинити:

а) $3 < 8$ и $3 \mid 8$.
б) $3 < 8$ или $3 \mid 8$.
в) Ако $3 < 8$, тогаш $3 \mid 8$.

7. Одреди кои од следниве искази се вистинити:

а) $3 > -3$ ако и само ако $-3 < 3$.
б) $2^3 = 6$ ако и само ако $2^3 = 2 \cdot 3$.
в) $(-3) \cdot 4 = -12$ ако и само ако $(-3)(-4) = 12$.
г) Штип е поголем од Скопје ако и само ако Штип е најголем град во СРМ.

8. Одреди кои од следниве искази се вистинити:

а) $2^2 = 4$ и $3^2 = 6$.
б) $2^2 = 4$ или $3^2 = 6$.
в) Ако $2^2 = 4$, тогаш $3^2 = 6$.
г) $2^2 = 4$ ако и само ако $3^2 = 6$.

9. Одреди кои од следниве искази се вистинити:

а) 7 не е парен број.
б) Не е вистина дека 5 е прост број.
в) $3 + 4$ не е еднаков на 8.

10. Состави вистинитосна таблица за исказната формула $\neg(p \wedge q) \Rightarrow \neg p$.

11. Кои исказни формули се викаат тавтологии?

12* Упрости го, врз основа на законот на двојната негација, исказот: „Не е вистина дека 8 не е парен број".

13. За кои од логичките операции: конјункција, дисјункција, импликација и еквиваленција важи комутативниот закон?

14* Изврши негација на исказите:

а) $(\forall x \in Z)\ (3x^2 + 1 \neq 0)$. б) $(\exists x \in \mathbf{R})\ (x^2 + 1 < 0)$.

15. Илустрирај ја а) дисјункцијата, б) импликацијата, в) формулата $p \vee (q \wedge r)$ со електричен склоп.

ГЛАВА II

ТЕОРЕМА. МЕТОДИ НА ДОКАЖУВАЊЕ

Многупати досега си се сретнувал со докажување теореми, особено во геометријата. Притоа заклучоците биле изведувани според правила што биле прифатени интуитивно. Сега, врз основа на изучените елементи од математичката логика, таквите правила на заклучување можеме да ги користиме експлицитно (т.е. јавно) формулирани.

Овде ќе ги разгледаме и основните методи за докажување теореми. Нивната примена ќе ја илустрираме преку докажување на некои едноставни, познати теореми од геометрија.

II.1. МАТЕМАТИЧКИ ПОИМИ И ТВРДЕЊА

Првични и изведени поими. Математиката изучува разни математички објекти: *множество, број, точка, триаголник, паралелограм,* како и: *паралелност на прави, складност на триаголници, еднаквост на множества* и многу други поими.

Значењето на одреден математички поим обично се објаснува со некоја реченица, со помош на други поими чиишто значења веќе се познати. Да се потсетиме на тоа со пример.

Пример 1. *Дијаметар на кружница е тетива што минува низ центарот на кружницата.*

Со оваа реченица се прави „договор“ кое да биде значењето, т.е. каква да биде содржината на зборот дијаметар; со неа се дава одговор на прашањето: „Што е дијаметар?“ Притоа, поимот дијаметар се објаснува со помош на поимот тетива којшто го сметаме за познат.

Реченицата со која се осмислува еден поим и се согледува неговата содржина преку други, веќе познати поими, се вика **дефиниција** на тој поим.

Така, реченицата од примерот **1**, е дефиниција на поимот дијаметар. Притоа, поимот тетива е **дефинирачки поим** за поимот дијаметар (т.е. ,,дијаметар“ е **дефиниран поим** со помош на поимот тетива).

Реченицата, пак: „*Тетива на кружница е отсечка чии крајни точки лежат на кружницата*“ претставува дефиниција на поимот тетива при што дефинирачки е поимот отсечка.

1. Искажи ја дефиницијата на поимот:

а) паралелограм; б) четириаголник;
в) отсечка; г) геометриска фигура.

Потоа, за секој од нив одреди го дефиниракиот поим.

Можеме да забележиме дека во дефиницијата на поимот дијаметар е употребен поимот тетива; за дефинирање на поимот тетива, пак, употребен е поимот отсечка, а за отсечка – поимот геометриска фигура.

Тоа употребување на „познат поим“ не може да оди во недоглед, треба на некое место да престане. Затоа, некои поими мора да се земаат како **почетни.** Нив ги викаме **првични** или **основни поими.** За нив не се дава дефиниција, а тие се користат за дефинирање на други поими. мора

Во геометријата (што ја изучуваме), за првични се земаат поимите: *точка, права, рамнина* и *растојание*. Има и други првични поими што се користат во математиката општо: *множество, број* и др.

Поимите што се дефинираат се викаат **изведени поими**. Такви се, на пример: кружница, дијаметар, паралелограм и др.

2. Наведи два изведени поими и искажи ги нивните дефиниции.

Б. **Првични и изведени тврдења.** Во математиката на секој чекор среќаваме реченици со кои се искажува некакво својство или врска на математички поими. За таквите реченици, искажани со зборови или со симболи, се вели дека се **математички тврдења.** Еве неколку такви тврдења.

Пример 2.

а) Низ две точки минува точно една права.
б) Ако еден четириаголник е тетивен, тогаш неговите спротивни агли се суплементни.
в) Во рамнокрак триаголник аглите спроти краците се еднакви меѓу себе.
г) Ако еден број е делив со 5, тогаш неговата последна цифра мора да е 5.

Тврдењата а), б) и в), како што ти е добро познато од порано, се вистинити, т.е. точни (а само г) е неточно).

Вистинитите тврдења се посебно важни во математиката. Затоа, за секое математичко тврдење се поставува задачата да се установи неговата вистинитост. Кога вистинитоста на едно тврдење се установи, обично се вели дека **тоа тврдење е докажано.**

Вистинитоста на едно математичко тврдење се смета дека е установена, ако тоа тврдење е добиено како логичка последица од други математички тврдења чија точност претходно е установена.

Од друга страна, пак, секое од овие тврдења треба да е логичка последица од други точни тврдења. Но, тоа не може да оди во недоглед.

Поради тоа, се доаѓа до слична ситуација како кај математичките поими: некои математички тврдења мора да се прифатат за точни без доказ, т.е. без да се бара тие да се логички последици од други тврдења. Тие служат како појдовни тврдења со чија помош се изградува некоја математичка теорија.

Математичките тврдења што се прифаќаат за точни без доказ се викаат **првични тврдења** или **аксиоми.** Математичко тврдење, пак, што претставува логичка последица од други точни тврдења (т.е. чија точност се докажува), се вика **изведено тврдење** или **теорема.**

На пример, тврдењето под а) во примерот **2** е аксиома, а тврдењето под б) е теорема. Што е тврдењето под в)?

3. Како гласи аксиомата за паралелни прави?

4. Запиши две теореми во врска со паралелограм.

b. **Вежби**

5. Кои поими се викаат првични, а кои изведени? Наведи по два примера.

6. Запиши ја дефиницијата на поимот:
а) симетрала на отсечка, б) тежишна линија.
Потоа, одреди го дефинирачкиот поим.

7. Што е а) тежиште, б) ортоцентар на триаголник?

8. Кои математички тврдења се викаат првични (или аксиоми), а кои изведени (или теореми)? Наведи по еден пример.

9. Запиши една логичка последица од тврдењето:
„На една права лежат безброј многу точки, а има точки што не лежат на правата".

10. Дали е теорема следново тврдење:
а) Во секој правоаголник дијагоналите се заемно нормални.
б) Во секој паралелограм аглите што лежат на иста страна се суплементни.

11. Запиши две теореми (што си ги изучувал порано).

II.2. ТЕОРЕМА. ВИДОВИ ТЕОРЕМИ

a. **Условна и категорична форма.** Во задачата **11** од минатата лекција секако запиша некоја теорема. Меѓу многуте теореми што ги знаеш, сигурно ти е позната и следнава:

Пример 1. *Ако четириаголникот е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални.*

Во оваа теорема се разгледува, прво, математичкиот објект четириаголник при условот: „тој четириаголник да е ромб", а потоа за таквиот четириаголник се тврди дека: „има заемно нормални дијагонали“.

Општо, во секоја теорема мора да е јасно искажано:

– под кои услови се разгледува некој математички објект (или објекти); тие услови се викаат **претпоставки** на теоремата;

– што се тврди за тој објект, т.е. кое негово својство се согледува; тоа е **заклучок на теоремата.**

Така, во примерот **1**, условот „четириаголникот е ромб“ е претпоставка, а делот „неговите дијагонали се заемно нормални“ е заклучок на теоремата.

1. Која е претпоставката, а кој заклучокот на теоремата под б) во примерот **2** од минатата лекција? А на теоремата под в) во истиот пример?

Теоремите се искажуваат најчесто во форма на импликација:

$$p \Rightarrow q,$$

т.е. со условна реченица *„Ако . . ., тогаш . . .“*; во тој случај се вели дека теоремата е искажана во **условна форма.** Тогаш лесно се уочува дека p е претпоставката, а q е заклучокот на теоремата.

Пример 2. Во теоремата:

„Ако трапезот е рамнокрак, тогаш неговите дијагонали се еднакви“

– претпоставката е p: трапезот е рамнокрак,
– заклучокот е q: неговите дијагонали се еднакви.

2. Искажи една теорема во условна форма и одреди ги претпоставката и заклучокот на таа теорема.

Уочувањето на претпоставките и заклучокот може да биде потешко кога теоремата е искажана поинаку, а не со условна реченица.

Пример 3. Во теоремата:

„Дијагоналите на паралелограмот заемно се преполовуваат“,

– претпоставката е: „разгледуваниот објект е паралелограм“;
– заклучокот е: „неговите дијагонали заемно се преполовуваат“.

3. Која е претпоставката, а кој заклучокот на теоремата:

„Збирот на внатрешните агли на триаголникот е 180°“?

Во случаите кога теоремата е искажана со „категорична“ реченица, т.е. „безусловно“, се вели дека таа теорема е претставена во **категорична форма.** Во таква форма е искажана теоремата од примерот **3** и теоремата од задачата **3.**

Една иста теорема може да се претстави било во условна, било во категорична форма.

На пример, условната форма на теоремата од задачата **3** е:

„Ако еден многуаголник е триаголник, тогаш збирот на неговите внатрешни агли е 180°.“

Категоричната форма, пак, на теоремата од примерот **2** е:

„Во рамнокрак трапез дијагоналите се еднакви“ (или: „Дијагоналите на рамнокрак трапез се еднакви“).

4. Искажи ја Питагоровата теорема:

а) во категорична форма, б) во условна форма.

6. **Директна и обратна теорема.** При разгледувањето на една теорема, честопати е од интерес да се даде одговор и на прашањето: *„Дали важи обратното?“*

Имено, нека е дадена теорема со претпоставка p и заклучок q, искажана (на пример) во условна форма:

$$p => q.$$

Ако претпоставката и заклучокот си ги разменат улогите, се добива импликацијата:

$$q => p;$$

за неа се вели дека е **обратно тврдење** на дадената теорема $p => q$.

Пример 4. За теоремата:

„Ако триаголникот е рамнокрак, тогаш тој има два еднакви агли“,

обратното тврдење е:

„Ако триаголникот има два еднакви агли, тогаш тој е рамнокрак.“

Во овој пример, и обратното тврдење е точно, т.е. и тоа е теорема. Обратното тврдење на дадена теорема не мора да е точно.

Пример 5. *За теоремата од примерот 1, обратното тврдење е:*

„Ако дијагоналите во четириаголникот се заемно нормални, тогаш тој четириаголник е ромб“.

Во овој пример, обратното тврдење не е точно (зашто, на пример, и делтоидот го има тоа својство, а не е ромб).

Ако обратното тврдење на една теорема е точно (како во примерот **4**), тогаш за него се вели дека е **обратна теорема** на дадената. За да се разграничат овие две теореми, дадената обично се вика **директна теорема.**

5. Формулирај го обратното тврдење на теоремата:

а) *Ако еден четириаголник е тетивен, тогаш неговите спротивни агли се суплементни.*

б) *Ако цифрата на единиците на еден број е 5, тогаш тој број е делив со 5.*

Дали добиеното тврдење е теорема?

Директната теорема и нејзината обратна може да се запишат заедно, на посебен начин. Така, директната и обратната теорема од примерот **4** може да се запишат:

а) „Ако триаголникот е рамнокрак, тогаш тој има два еднакви агли, и обратно", $((p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow p))$, или, во вид на еквиваленција:

б) „Триаголникот е рамнокрак **ако и само ако** има два еднакви агли" $(p \Leftrightarrow q)$.

6. Запиши ја во вид на еквиваленција директната и обратната теорема за тетивен четириаголник (зад. **5** а)).

Потребен и доволен услов. Порано спомнавме дека заклучокот q на дадена теорема $p \Rightarrow q$ логички следува од претпоставката p, т.е. теоремата $p \Rightarrow q$ е логичко следство.

Претпоставката p се вика, уште, **доволен услов** за заклучокот q, а заклучокот q се вика **потребен услов** за претпоставката p.

Според тоа, теоремата $p \Rightarrow q$, наместо „Ако p, тогаш q", може да се искаже и вака:

1°. *„Доволен услов за q* е *p"* или:
„p е доволен услов за q";

2°. *„Потребен услов за p* е *q"* или:
„q е потребен услов за p".

Пример 6. Теоремата од примерот **1**, во таа смисла, може да се искаже и вака:

а) *„Доволен услов за дијагоналите на еден четириаголник да се заемно нормални и четириаголникот да биде ромб".*

б) *„Потребен услов за еден четириаголник да биде ромб е неговите дијагонали да се заемно нормални".*

Да забележиме дека доволниот услов во една теорема не мора да е потребен, т.е. не мора да е неопходен (така, четириаголникот не мора да е ромб за да има заемно нормални дијагонали), а потребниот услов не мора да е доволен (зашто има четириаголници со заемно нормални дијагонали, а сепак не се ромбови).

7. Теоремата: *„Накрсните агли се еднакви"* искажи ја со термините доволен услов и потребен услов.

◑ Искажи ја, прво, во условна форма.

Во случај кога важи и обратната теорема $q \Rightarrow p$, улогите на p и q се разменети, па q е доволен услов за p, а p е потребен услов за q. Поради тоа, ако имаме теорема во форма на еквиваленција $p \Leftrightarrow q$, тогаш p е **потребен и доволен услов** за q, а q е потребен и доволен услов за p. Затоа, таквата теорема можеме да ја искажеме на следниов начин:

3° Потребен и доволен услов за p е q.

Така теоремата од примерот **4** може да се формулира и на следниов начин:

Пример 6. *„Потребен и доволен услов за еден триаголник да биде рамнокрак е тој да има два еднакви агли.*

8. Со помош на терминот „потребен и доволен услов" искажи ја теоремата за дијагоналите на рамнокрак трапез (пример **2**). Дали може со овој термин да се искаже теоремата за дијагоналите на ромбот (пример **1**)?

Забелешка. Ако со една теорема се дава потребен услов за некој поим, тогаш таа се вика **теорема-својство** (за соодветниот поим), а ако со неа се искажува доволен услов за некој поим, тогаш таа се вика **теорема-признак** (за тој поим); теорема, пак, со која се искажува потребен и доволен услов се вика **теорема-карактеристично својство** (на соодветниот поим).

Пример 7. *Теоремата а) од примерот 5 е теорема-признак (за нормалност на дијагоналите на четириаголник), а б) е теорема-својство (за поимот ромб); теоремата од примерот 6 е теорема-карактеристично својство (за рамнокрак триаголник).*

Вежби

9. Одреди ги претпоставките и заклучокот на теоремата:

а) Ако еден број е делив со два и со три, тогаш тој е делив и со шест.
б) Агли со заемно паралелни краци се еднакви или суплементни.

10. Во каква форма е искажана теоремата од зад. 9 а), односно б)? Искажи ја таа теорема во другата форма.

11. Избери една теорема и искажи ја и во условна и во категорична форма.

За теоремите од задачите **12 – 15** одговори на следниве прашања, односно исполни ги следниве барања:

а) Во која форма е искажана теоремата? Искажи ја во другата форма.
б) Формулирај го обратното тврдење; дали и тоа е теорема?
в) Формулирај ја со помош на терминот „доволен услов".
г) Формулирај ја со помош на терминот „потребен услов".
д) Дали доволниот услов е потребен? Дали потребниот услов е доволен?
ѓ) Ако е можно, формулирај ја со помош на терминот „ако и само ако", а потоа со терминот „потребен и доволен услов"

12. Ако два агла се напоредни, тогаш тие се суплементни.

13. Наизменичните агли при трансверзалата на две паралелни прави се еднакви.

14. Во рамнокрак триаголник, висината и тежишната линија повлечени од врвот се совпаѓаат.

15. Ако еден број е делив со 6, тогаш тој број е делив со 3.

II.3. ПРАВИЛА ЗА ИЗВЕДУВАЊЕ ЗАКЛУЧОЦИ – 1

Секој од нас од искуство прифаќа дека исказот: „Ако врне дожд, тогаш улицата е мокра“ е вистинит исказ. Исто така, од вистинитите искази: „Ако врне дожд, тогаш улицата е мокра“ и „Врне дожд“, лесно се прифаќа дека следува заклучокот: „Улицата е мокра“.

Горното, во шема, се запишува вака:

1) Ако врне дожд, тогаш улицата е мокра и
2) Врне дожд

Заклучок: Улицата е мокра.

Ако со p го означиме исказот: „Врне дожд“, а со q исказот: „Улицата е мокра“, тогаш горното можеме да го запишеме со симболи на следниов начин:

$$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q \tag{1}$$

За да утврдиме дека од $p \Rightarrow q$ и p следува заклучокот q, доволно е да утврдиме дека исказната формула (1) е тавтологија.

Тоа го утврдуваме со следнава вистинитосна таблица

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$(p \Rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$

Значи, исказната формула (1) е тавтологија, а со тоа и логички закон.

Исказната формула (1) уште се запишува во вид на шема на следниов начин:

$$\boxed{\dfrac{p \Rightarrow q,\ p}{q}}$$

Запирката во броителот го заменува сврзникот „и“, а дробната црта зборот „заклучок“ или „следува“.

Тоа е едно правило за изведување заклучоци; се вика **модус поненс** *(modus ponens)* или **правило за одделување.**

Исказите $p \Rightarrow q$ и p се викаат **претпоставки,** а исказот q – **заклучок.**

Еве уште еден пример за примена на ова правило за изведување заклучоци.

1. Ако 3 654 е делив со 9, тогаш 3 654 е делив со 3.
2. 3 654 е делив со 9.

Заклучок: 3 654 е делив со 3.

Нека повторно го имаме исказот: „Ако врне дожд, тогаш улицата е мокра“, но и исказот: „Улицата е мокра“. Дали може од овие два исказа да се изведе заклучок дека врне дожд, т.е. дали од $p \Rightarrow q$ и q следува p?

Очигледно е дека не може бидејќи улицата може да биде мокра, а да не врне дожд (наводенета со прскалка).

Според тоа, шемата

$$\frac{p \Rightarrow q,\ q}{p}$$

не е правило за изведување заклучоци. Тоа може да се потврди со тоа што исказната формула $(p \Rightarrow q) \wedge q \Rightarrow p$ не е тавтологија. Провери!

1. Одреди кои од следниве два изведени заклучоци е правилен:

а) 1. Ако $x = 1$, тогаш $x^2 = 1$
   2. $x = 1$

Заклучок: $x^2 = 1$

б) 1. Ако $x = 1$, тогаш $x^2 = 1$
   2. $x^2 = 1$

Заклучок: $x = 1$

б Да видиме, сега, дали е правилно изведен следниов заклучок.

1. Ако врне дожд, тогаш улицата е мокра
2. Улицата не е мокра

Заклучок: Не врне дожд.

Лесно се уочува дека заклучокот е правилно изведен.

Да видиме, општо, дали од точноста на исказите $p \Rightarrow q$ и $\neg q$ следува дека е точен заклучокот $\neg p$, т.е. дали е тавтологија исказната формула

$$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p. \qquad (2)$$

Да ја составиме нејзината вистинитосна таблица

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q$	$(p \Rightarrow q) \wedge \neg q \Rightarrow \neg p$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$
$\perp$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$

Значи, исказната формула (2) е тавтологија, а според тоа, и правило за изведување заклучоци.

Ова правило се вика **модус толенс** *(modus tolens)* и со шема се претставува на следниов начин:

$$\frac{p \Rightarrow q, \neg q}{\neg p}$$

Еве еден пример за изведување заклучок врз основа на ова правило.

1. Ако четириаголникот $ABCD$ е правоаголник, тогаш $\overline{AC} = \overline{BD}$
2. $\overline{AC} \neq \overline{BD}$

Заклучок: Четириаголникот $ABCD$ не е правоаголник.

2. Одреди кои од следниве заклучоци се правилно изведени:

а) 1. Ако $\triangle ABC$ е рамнокрак, тогаш тој има два еднакви агли.
2. $\triangle ABC$ нема два агла еднакви.

Заклучок: $\triangle ABC$ не е рамнокрак.

б) 1. Ако $x = 2$, тогаш $x^2 = 4$.
2. $x^2 \neq 4$.

Заклучок: $x \neq 2$.

3. Утврди дали е правилно изведен заклучокот во следниов случај:

1. Ако врне дожд, тогаш улицата е мокра.
2. Не врне дожд.

Заклучок: Улицата не е мокра.

Сигурно утврди дека заклучокот не е правилно изведен, бидејќи може да биде улицата мокра и без да врне дожд. Општо, шемата:

$$\frac{p \Rightarrow q, \neg p}{\neg q}$$

не е правило за изведување заклучоци, зашто исказната формула

$$(p \Rightarrow q) \wedge \neg p \Rightarrow \neg q$$

не е тавтологија. Провери!

Вежби

Утврди кои од следниве заклучоци (зад.4–11) се правилно изведени и врз основа на кое правило.

4. 1. Ако бројот a завршува со нула, тогаш a е делив со 5.
2. Бројот a завршува со нула.

Заклучок: Бројот a е делив со 5.

5. 1. Ако бројот a завршува со нула, тогаш a е делив со 5.
2. Бројот a е делив со 5.

Заклучок: Бројот a завршува со нула.

6. 1. Ако бројот a завршува со нула, тогаш a е делив со 5.
2. Бројот a не е делив со 5.

Заклучок: Бројот a не завршува со нула.

7. 1. Ако бројот a завршува со нула, тогаш a е делив со 5.
2. Бројот a не завршува со нула.

Заклучок: Бројот a не е делив со 5.

8. 1. Ако четириаголникот $ABCD$ е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални.
2. Четириаголникот $ABCD$ е ромб.

Заклучок: Дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ се заемно нормални.

9. 1. Ако четириаголникот $ABCD$ е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални.
2. Четириаголникот $ABCD$ не е ромб.

Заклучок: Дијагоналите на четириаголникот $ABCD$ не се заемно нормални.

10. 1. Ако четириаголникот $ABCD$ е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални.
2. Дијагоналите на четираголникот $ABCD$ не се заемно нормални.

Заклучок: Четириаголникот $ABCD$ не е ромб.

11. 1. Ако четириаголникот $ABCD$ е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални.
2. Дијагоналите во четириаголникот $ABCD$ се заемно нормални.

Заклучок: Четириаголникот $ABCD$ е ромб.

$\boxed{12.}$ Одреди кои од следниве исказни формули се тавтологии.

а. $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$
б. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$
в. $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

а. При решавањето на задачата **12** од минатата лекција сигурно утврди дека исказната формула

$$(p \Rightarrow q) \land (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r) \tag{1}$$

е тавтологија. И таа е едно правило за изведување заклучоци, кое се вика **хипотетичен силогизам.** Исказната формула може да се запише со помош на шемава

$$\boxed{\frac{p \Rightarrow q,\ q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}} \tag{2}$$

Еве еден пример за примената на ова правило.

1. Ако збирот на цифрите на бројот 8 766 е делив со 9, тогаш бројот 8 766 е делив со 9.
2. Ако бројот 8 766 е делив со 9, тогаш бројот 8 766 е делив со 3.

Заклучок: Ако збирот на цифрите на бројот 8 766 е делив со 9, тогаш бројот 8 766 е делив со 3.

Ова правило може да се обопшти и за повеќе искази:

$$\frac{p \Rightarrow p_1,\ p_1 \Rightarrow p_2, \ldots,\ p_n \Rightarrow q}{p \Rightarrow q} \tag{3}$$

Ова правило има особено значење при докажување на теореми. Така, често ние не можеме директно да докажеме дека е вистинита импликацијата $p \Rightarrow q$, но можеме, на пример, да утврдиме дека се точни импликациите $p \Rightarrow p_1, p_1 \Rightarrow p_2$ и $p_2 \Rightarrow q$, врз основа на (3) ја утврдуваме вистинитоста на $p \Rightarrow q$.

Да забележиме дека ако, во формулата (1) знакот $\Rightarrow$ се замени со $\Leftrightarrow$, се добива тавтологија; таа е, исто така, правило за изведување заклучоци.

б. При решавањето на задачата **12** од минатата лекција сигурно утврди дека и исказната формула

$$(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p) \tag{4}$$

е тавтологија. И тоа е едно правило за изведување заклучоци, кое се вика **правило на контрапозиција.** Со шема се претставува на следниов начин:

$$\boxed{\frac{p \Rightarrow q}{\neg q \Rightarrow \neg p}} \tag{5}$$

Примери: а) Ако врне дожд, тогаш улицата е мокра.

Заклучок: Ако улицата не е мокра, тогаш не врне дожд.

б) Ако четириаголникот $ABCD$ е правоаголник, тогаш $AB = CD$.

Заклучок: Ако $AB \neq CD$, тогаш четириаголникот $ABCD$ не е правоаголник.

При решавањето на задачата **12** сигурно утврди дека исказната формула $(p \Rightarrow q) \Rightarrow (\neg p \Rightarrow \neg q)$ не е тавтологија. Според тоа, шемата

$$\frac{p \Rightarrow q}{\neg p \Rightarrow \neg q}$$

не е правило за изведување заклучоци.

1. Одреди кои од следниве заклучоци се правилно изведени:

а) Ако бројот a завршува со нула, тогаш a е делив со 5.

Заклучок: Ако бројот a не завршува со нула, тогаш a не е делив со 5.

а) Ако бројот a завршува со нула, тогаш a е делив со 5.

Заклучок: Ако бројот a не е делив со 5, тогаш a не завршува на нула.

Правилата за изведување заклучоци: *модус поненс, модус толенс, хипотетичен силогизам* и *правилото на контрапозиција* имаат голема примена при секојдневното комуницирање меѓу луѓето. За човек којшто умее да ги применува правилата за заклучување, обично се вели дека логично расудува.

Овие правила имаат голема примена и во математиката, особено при докажувањето на теореми. Со нивната непосредна примена повеќе ќе се сретнеш понатаму.

Вежби

Одреди кои од следниве заклучоци се правилно изведени и врз основа на кое правило.

2. 1. Ако бројот a е парен, тогаш a е делив со 2.
2. Бројот a е парен.

Заклучок: Бројот a е делив со 2.

3. 1. Ако бројот a е парен, тогаш бројот a е делив со 2.
2. Бројот a не е делив со 2.

Заклучок: Бројот a не е парен број.

4. 1. Ако $x = 5$, тогаш $x^2 = 25$.
2. $x \neq 5$.

Заклучок: $x^2 \neq 25$.

5. 1. Ако $x = 7$, тогаш $x^2 = 49$.
2. $x^2 \neq 49$.

Заклучок: $x \neq 7$.

6. 1. Ако бројот a е делив со 8, тогаш a е делив со 4.
2. Ако бројот a е делив со 4, тогаш a е делив со 2.

Заклучок: Ако бројот a е делив со 8, тогаш a е делив со 2.

7. Ако четириаголникот $ABCD$ е делтоид, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални

Заклучок: Ако во четириаголникот $ABCD$ дијагоналите не се заемно нормални, тогаш тој не е делтоид.

8. Ако четириаголникот $ABCD$ е делтоид, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални

Заклучок: Ако четириаголникот $ABCD$ не е делтоид, тогаш неговите дијагонали не се заемно нормални.

9. Докажи ја теоремата:
а) „Накрсните агли се еднакви".
б) „Дијагоналите на правоаголникот се еднакви меѓу себе".

II.5.* ДИРЕКТНИ МЕТОДИ НА ДОКАЖУВАЊЕ

a. **Метод со напредување (или синтетичен метод).** Да се докаже една теорема значи да се установи точноста на нејзиниот заклучок со помош на логички расудувања, при што се користат: претпоставките на теоремата, дефиниции, други тврдења чија точност претходно е установена и правилата за изведување заклучоци. (Притоа, посебно е важно претпоставката да биде вистинит исказ.)

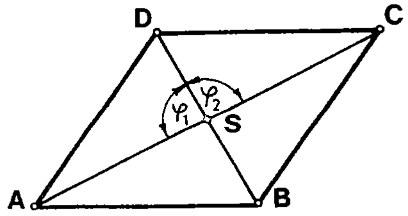
Со докази на теореми си се среќавал и досега. За да се потсетиме на тоа, ќе го проследиме доказот на една едноставна теорема што ти е позната од порано.

Пример 1. *Ако четириаголникот ABCD е ромб, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални.*

Значи,

Дадено е (p): *„Четириаголникот ABCD е ромб"* (црт. 1)

Треба да се докаже (q): *„Дијагоналите на ABCD се заемно нормални"*.



Црт. 1

Ќе тргнеме од претпоставката p. Користејќи го и црт. 1, можеме да расудуваме на следниов начин:

I.1. „Ако еден четириаголник е ромб, тогаш тој е паралелограм" (според дефиницијата на ромб).

2. „Четириаголникот $ABCD$ е ромб" (p)

Заклучок: „Четириаголникот $ABCD$ е паралелограм" (r_1).

II.1. „Ако еден четириаголник е паралелограм, тогаш неговите дијагонали заемно се преполовуваат“ (тоа е порано докажана теорема).

2. „Четириаголникот $ABCD$ е паралелограм“ (според r_1).

Заклучок: Дијагоналите на ромбот $ABCD$ заемно се преполовуваат (со точката S)“, т.е. „$\overline{AS} = \overline{CS}$ и $\overline{BS} = \overline{DS}$“. (r'_2)

III.1. „Ако соодветните страни на два триаголника се еднакви, тогаш тие се складни“ (тоа е признакот ССС).

2. „Соодветните страни на $\triangle ASD$ и $\triangle CSD$ се еднакви“ (според r'_2 и SD – заедничка) (r_2)

Заклучок: „$\triangle ASD = \triangle CSD$” (r_3)

IV.1. „Ако два триаголника се складни, тогаш соодветните агли им се еднакви“ (според дефиницијата за складност).

2. „$\triangle ASD \cong \triangle CSD$“ (според r_3).

Заклучок: „Соодветните агли им се еднакви” (па, специјално, $\varphi_1 = \varphi_2$). (r_4)

V.1. „Ако два напоредни агли се еднакви, тогаш тие се прави агли“ (тоа е порано докажана теорема).

2. „Напоредните агли φ_1 и φ_2 се еднакви“ (според r_4 и црт. 1).

Заклучок: „ φ_1 и φ_2 се прави агли“ (r_5)

Тоа значи дека: $AS \perp SD$, т.е. дијагоналите AC и BD се заемно нормални (а тоа е заклучокот q).

Од расудувањата I – V (во кои го користевме правилото модус поненс), се добива следнава низа импликации:

$$p => r_1, \quad r_1 => r_2, \quad r_2 => r_3, \quad r_3 => r_4$$
$$r_4 => r_5, \quad r_5 => q \qquad (1)$$

(сите тие се точни). Врз основа на правилото што го нарековме хипотетичен силогизам (во претходната лекција), можеме да заклучиме дека е точна и импликацијата

$$p => q.$$

Од точноста на $p => q$ и p, според правилото модус поненс, заклучуваме дека е точен и заклучокот q.

Со тоа, теоремата е докажана.

При докажувањето на оваа теорема тргнавме од претпоставката p: „Четириаголникот $ABCD$ е ромб“ и, непосредно, по неколку чекори, со помош на низата (1), „стигнавме“ до заклучокот q.

За доказ добиен на овој начин („од претпоставката кон заклучокот“) се вели дека е **доказ со напредување** или **синтетичен метод** на докажување.

1. Докажи ја теоремата:

„Ако висината и тежишната линија, повлечени од едно теме на триаголникот се совпаѓаат, тогаш триаголникот е рамнокрак“.

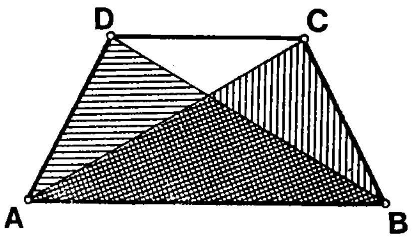
Забелешка. Во практика, доказот на една теорема се запишува пократко, зашто одделни чекори „се подразбираат”.

б **Метод со враќање (или аналитичен метод).** Теоремите може да се докажуваат и на друг начин – со тргнување од заклучокот. Тоа ќе го илустрираме со еден пример.

Пример 2. *„Ако еден трапез е рамнокрак, тогаш дијагоналите на тој трапез се еднакви“.*

Дадено е *(p)*: *„Трапезот ABCD е рамнокрак“* (црт. 2).
Треба да се докаже *(q)* : *„Дијагоналите AC и BD се еднакви:*

$$\overline{AC} = \overline{BD}”.$$



Црт. 2

Ќе тргнеме, сега, од заклучокот q, а ќе се однесуваме како теоремата да е докажана (значи, како да е установена вистинитоста на заклучокот q) и ќе ги испитуваме (т.е ќе вршиме „анализа“) на оние точни тврдења, што претставуваат доволни услови за q. Од нив го избираме „најсоодветното“ и за него ја повторуваме горната постапка. Постапката ја продолжуваме сè додека не „стигнеме“ до претпоставката p.

Значи, нека е точен заклучокот, т.е.

$$q : \overline{AC} = \overline{BD}.$$

Бараме доволен услов s_1, за q; еден таков услов е

$$s_1 : \triangle ABC \cong \triangle BAD$$

(AC и BD ќе бидат еднакви како соодветни страни при таа складност).
За да биде исполнето s_1, доволно е да биде исполнето

$$s_2 : \overline{AD} = \overline{BC},$$

а за s_2 доволно е p: трапезот да е рамнокрак.

Така, ја добивме низата импликации:

$$s_1 => q,\ s_2 => s_1,\ p => s_2,$$

или, „преуредена“:

$$p => s_2,\ s_2 => s_1,\ s_1 => q. \qquad (2)$$

Врз основа на правилата хипотетичен силогизам и модус понenс, *можеме да сметаме дека* теоремата е докажана.

Од овој пример заклучуваме дека некои теореми можеме да ги докажеме со непосредно користење на претпоставките, но сега тргнувајќи од заклучокот. Затоа ваквиот доказ се вика **доказ со враќање** (од заклучокот кон претпоставката) или **аналитичен метод** на докажување.

2. Со помош на аналитичкиот метод, докажи ја теоремата од примерот 1.

Еден *доказ со напредување* (од претпоставката кон заклучокот) може шематски да се претстави вака:

$$p \Rightarrow r_1,\ r_1 \Rightarrow r_2,\ \ldots,\ r_n \Rightarrow q,$$

а *доказ со враќање* (од заклучокот кон претпоставката):

$$q \Leftarrow s_1,\ s_1 \Leftarrow s_2,\ \ldots,\ s_n \Leftarrow p,$$

при што p е условот, а q е заклучокот на теоремата.

И едниот и другиот метод се одликуваат со тоа што се спроведуваат со директно користење на претпоставките, па поради тоа тие се викаат **директни методи** на докажување.

b. Вежби

3. Што значи тоа „да се докаже една теорема“?
4. За кој доказ се вели дека е:
   а) со напредување?
   б) со враќање?
   в) директен?
5. Докажи ја со синтетичниот метод теоремата:
   „Збирот на внатрешните агли во триаголникот е 180°“.
6. Докажи ја со аналитичниот метод теоремата:
   „Во паралелограм дијагоналите заемно се преполовуваат“.

II.6. ИНДИРЕКТНИ МЕТОДИ НА ДОКАЖУВАЊЕ

a. Еден друг, многу често применуван и плоден начин на докажување теореми е т.н. **метод на индиректно докажување.** Тој се состои во следново: наместо да се докажува дадената теорема, $p \Rightarrow q$, се установува вистинитоста на некоја друга импликација, еквивалентна со дадената; на тој начин се заклучува за точноста на импликацијата $p \Rightarrow q$ на посреден, индиректен начин, т.е. дадената теорема се докажува „индиректно”. Затоа тие се наречени **индиректни докази,** т.е. начинот на докажување – **индиректен метод.**

Индиректните докази логички се базираат на следниве правила на заклучување, т.е. на тавтологии од следниов вид:

(А) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ (контрапозиција)

(Б) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q \Rightarrow \neg p)$ (контрадикција)

(В) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \neg q \Rightarrow r \wedge \neg r)$ (контрадикција)

Суштината на индиректниот доказ на теореми $p \Rightarrow q$ при кој се користи правилото на контрапозиција (A) се состои во следново:

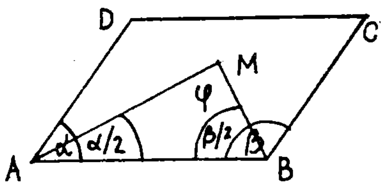
Тргнуваме од негацијата $\neg q$ на заклучокот q; ако успееме да „стигнеме" до $\neg p$, т.е. ако докажеме дека е точно тврдењето $\neg q \Rightarrow \neg p$, тогаш сметаме дека сме ја докажале теоремата $p \Rightarrow q$, зашто тврдењата $p \Rightarrow q$ и $\neg q \Rightarrow \neg p$ се еквивалентни.

Секој доказ од овој вид се вика **доказ од спротивното.**

За илустрација, ќе разгледаме еден пример.

Пример 1. Да ја докажеме теоремата:

„Ако четириаголникот е паралелограм, тогаш симетралите на прилегнатите агли на иста страна од тој четириаголник се сечат под прав агол".



Црт. 1

За докажувањето на теоремата ќе се потпомагаме со црт. 1, на кој е претставен паралелограм $ABCD$ и симетралите AM и BM на аглите α и β соодветно.

Дадено е (p): *Четириаголникот $ABCD$ е паралелограм.*

Треба да се докаже (q): *Симетралите AM и BM на аглите α и β се сечат под прав агол, т.е. $\measuredangle M = \varphi = 90°$.*

Да претпоставиме дека е точно:

$$(\neg q)\colon \varphi \neq 90°.$$

Знаеме дека збирот на аглите во кој било триаголник е 180° (порано докажана теорема); затоа,

$$\frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} + \gamma = 180°,$$

па поради $\neg q$, точно е:

$$(t_1)\colon \frac{\alpha}{2} + \frac{\beta}{2} \neq 90°.$$

Од (t_1) следува дека е точно

$$(t_2)\colon \alpha + \beta \neq 180°.$$

Аглите α и β се спротивни агли на трансверзалата AB од правите AD и BC, па поради (t_2), добиваме дека е точно

(t_3): $AD \nparallel BC$,

а од (t_3) и дефиницијата на паралелограм следува дека е точно

$(\neg p)$: *Четириаголникот $ABCD$ не е паралелограм.*

Според правилото за транзитивност на импликацијата (т.е. хипотетичниот силогизам) заклучуваме дека е точна импликацијата

$$\neg q \Rightarrow \neg p,$$

а според правилото на контрапозиција – дека е точна $p \Rightarrow q$.

Со тоа теоремата е докажана.

1. Со помош на доказ од спротивното, докажи ја теоремата: *„Дијагоналите во делтоидот се заемно нормални"*.

Друг вид индиректни докази се т.н. **докази со доведување до противречност** (или доведување до апсурд). Нивните логички основи лежат во тавтологиите *(Б)* и *(В)*, коишто во себе содржат некој дел што претставува контрадикција (на пример, во *(В)* го имаме делот $r \wedge \neg r$ – тој е идентички невистинита формула, т.е. противречност), па оттаму и името на овие докази.

Суштината на доказите со доведување до противречност е во следново:

Ако од негацијата на заклучокот (т.е. од $\neg q$) и од условот (т.е. од p) на теоремата следува

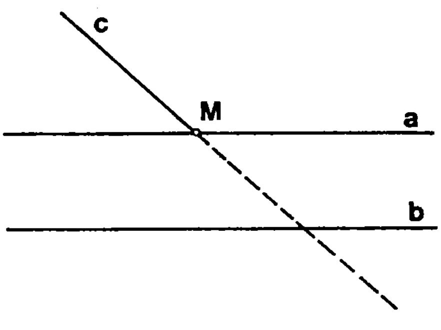
а) $\neg p$ (т.е. негацијата на условот p) или

б) некој невистинит исказ (исказ што противречи на некоја аксиома или теорема),

тогаш со тоа е докажана теоремата, зашто во обата случаја се доаѓа до заклучокот дека: „не е вистина дека q не е точно", од што следува дека исказот q е точен.

Пример 2. Да ја докажеме теоремата:

„Ако правите a, b, c, лежат во иста рамнина при што $a \parallel b$ и c ја сече a, тогаш c ја сече и правата b".



Црт. 2

Значи, дадено е:

„$a \parallel b$ и $c \nparallel a$" (исказ p);

треба да се докаже:

„$c \nparallel b$" (исказ q).

Нека M е пресечната точка на c и a (црт. 2). Да претпоставиме дека е точна негацијата на исказот q, т.е. $\neg q$: „$c \parallel b$". Од p и $\neg q$ следува дека е точен исказот r: „Низ точката M што не лежи на дадена права b минуваат две прави a и c, паралелни на b".

Од друга страна, ние знаеме дека е точен исказот: „Низ дадена точка (M) што не лежи на дадена права (b) минува една и само една права, паралелна на дадената“ (тоа е познатата аксиома за паралелни прави) што е негација на исказот r.

Значи, од точноста на исказот $p \wedge \neg q$ ја добиваме точноста на исказот $r \wedge \neg r$. Според тавтологијата (B), точен е заклучокот q на дадената теорема.

2. Со доведување до противречност, докажи ја теоремата: „Ако a, b, c се три прави од една рамнина Π, при што $a \parallel b$ и $b \parallel c$, тогаш и $a \parallel c$”.

Вежби

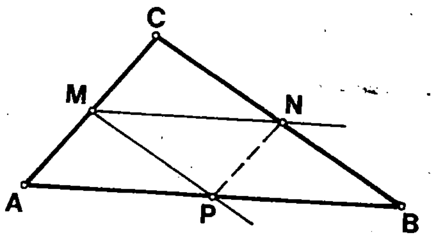
3. Кои докази се индиректни?

4. Која е суштината на:

а) доказот од спротивното?

б) доказот со доведување до противречност?

5. Со индиректен метод, докажи ја теоремата: „Секоја точка од симетралата на една отсечка е еднакво оддалечена од крајните точки на отсечката“.



Црт. 3

6. Во $\triangle ABC$ на црт. 3 точката M е средина на страната AC и $MN \parallel AB$, $MP \parallel BC$. Докажи дека **N** е средина на BC (т.е. $\overline{BN} = \overline{NC}$ и дека P е средина на AB (т.е. $\overline{AP} = \overline{PB}$).

7. а) Што е средна линија на триаголник?

б) Докажи дека средната линија MN на триаголникот ABC (црт. 3) е паралелна со страната AB и е еднаква со половината од таа страна, т.е.

$$MN \parallel AB, \ \overline{MN} = \frac{1}{2}\overline{AB}.$$

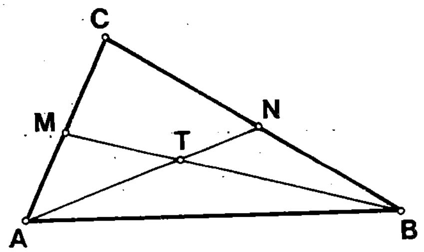
◑ Искористи ја задачата **6.**

II.7. ЗАДАЧИ ЗА ДОКАЖУВАЊЕ ТЕОРЕМИ

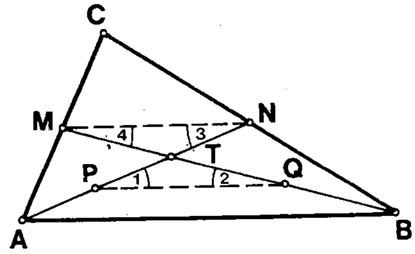
Задача 1. *На црт. 1, отсечките AN и BM се тежишни линии на $\triangle ABC$ (т.е. $\overline{AM} = \overline{MC}$ и $\overline{BN} = \overline{NC}$), а точката T е нивниот пресек.*

Да се докаже дека

$$\overline{AT} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AN}.$$



Црт. 1



Црт. 2

Решение. Да ја означиме со P средината на отсечката AT, а со Q – средината на BT (црт. 2) и да ги уочиме $\triangle MNT$ и $\triangle QPT$.

Отсечката MN е средна линија на $\triangle ABC$, а PQ е средна линија на $\triangle ABT$, па

$$MN \parallel AB \text{ и } \overline{MN} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}, \text{ а } PQ \parallel AB \text{ и } \overline{PQ} = \frac{1}{2}\cdot\overline{AB}.$$

Значи, $MN \parallel PQ$ и $\overline{MN} = \overline{PQ}$. Потоа:

$$\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3 \text{ односно } \sphericalangle 2 = \sphericalangle 4.$$

како наизменични агли на трансверзалата AN односно BM од паралелните прави MN и PQ. Од тоа следува дека:

$$\triangle MNT \cong \triangle QPT$$

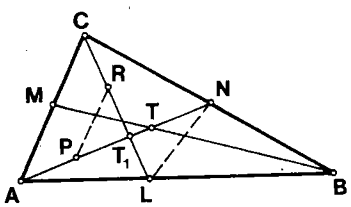
(според признакот ACA).

Од складноста на $\triangle MNT$ и $\triangle QPT$ следува дека $\overline{PT} = \overline{TN}$ а бидејќи $\overline{AP} = \overline{PT}$ (по услов), следува дека:

$$\overline{AP} = \overline{PT} = \overline{TN}, \text{ односно } \overline{AT} = \frac{2}{3}\cdot\overline{AN}.$$

Задача 2. Да се докаже дека *тежишните линии на триаголникот се сечат во една точка* (наречена **тежиште** на триаголникот).

Решение. Нека тежишните линии AN и BM од $\triangle ABC$ се сечат во точката T, а да претпоставиме, пак, дека тежишните линии AN и CL се сечат во точката T_1 (црт. 3).



Црт. 3

Да ги уочиме, сега, $\triangle PRT_1$ и $\triangle LNT_1$, каде што P е средина на отсечката AT_1, а R е средина на CT_1. Како во задачата **1**, лесно ќе заклучиме дека:

- $\triangle PRT_1 \cong \triangle LNT_1$,

од каде што ќе добиеме:

$$\overline{AT_1} = \frac{2}{3}\cdot\overline{AN}$$

Ако го споредиме овој резултат со резултатот $\overline{AT} = \frac{2}{3} \cdot \overline{AN}$ (од задачата 1), ќе добиеме дека $\overline{AT} = \overline{AT_1}$. Но, бидејќи T и T_1 се точки од тежишната линија AN, следува дека равенството $\overline{AT} = \overline{AT_1}$ е можно само ако $T \equiv T_1$.

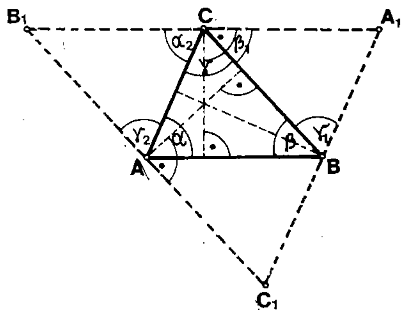
Со тоа докажавме дека тежишните линии во (кој било) триаголник се сечат во една точка, што е оддалечена од секое теме за две третинки од должината на соодветната тежишна линија.

1. Докажи дека *симетралите на страните кај кој било триаголник се сечат во една точка* (таа е **центар на опишаната кружница** околу триаголникот).

Искористи го својството на симетрала на отсечка.

Задача 3. Да се докаже дека *правите што се определени со висините на триаголникот се сечат во една иста точка,* наречена **ортоцентар.**

Решение. Низ темињата A, B и C на $\triangle ABC$ се повлечени прави, што се паралелни на спротивните страни; тие го образуваат помошниот $\triangle A_1B_1C_1$ (црт. 4).



Црт. 4

Да го разгледаме $\triangle A_1BC$ и $\triangle ABC$. Ако правата BC ја земеме како трансверзала на паралелните прави AB и A_1B_1, тогаш $\beta_1 = \beta$ како наизменични агли; исто така, ако истата права BC ја земеме како трансверзала на паралелените прави AC и A_1C_1, тогаш $\gamma_1 = \gamma$ како наизменични агли. Поради тоа што $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$ и поради тоа што отсечката BC им е заедничка страна, според признакот ACA, триаголниците ABC и A_1BC се складни, од каде што следува дека $\overline{AB} = \overline{CA_1}$.

Аналогно се докажува и складноста на триаголниците ABC и AB_1C, од каде што добиваме дека $\overline{AB} = \overline{CB_1}$.

Од $AB \parallel A_1B_1$ и $AB = \overline{CA_1}$, $\overline{AB} = \overline{CB_1}$ (т.е. отсечката $\overline{AB}$ е половина од отсечката A_1B_1), заклучуваме дека AB е средна линија на $\triangle A_1B_1C_1$. Значи, A, B и C се средини на страните B_1C_1, C_1A_1 и A_1B_1 на $\triangle A_1B_1C_1$.

Сега, лесно се заклучува дека правите што се определени со висините на $\triangle ABC$, во исто време се и симетрали на страните на $\triangle A_1B_1C_1$. Бидејќи, пак, овие последниве се сечат во една иста точка, следува дека и правите определени со висините на триаголникот се сечат во една иста точка.

2. Докажи дека *симетралите на аглите во триаголникот се сечат во една иста точка* (таа е **центар на впишаната кружница** на триаголникот).

Искористи го својството на симетрала на агол.

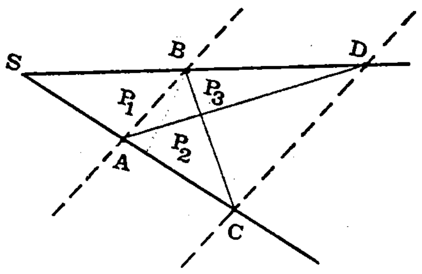
Тежиштето, ортоцентарот, центарот на опишаната и центарот на впишаната кружница се викаат (четири) **значајни точки** на триаголникот.

3. Докажи дека плоштините P_1 и P_2 на два триаголника што имаат еднакви висини стојат во ист размер како и соодветните страни a_1 и a_2, т.е.

$$P_1 : P_2 = a_1 : a_2.$$

Задача 4. *На црт. 5, крациите на $\sphericalangle CSD$ се пресечени со паралелните прави AB и CD. Да се докаже дека:*

$$\overline{SA} : \overline{SC} = \overline{SB} : \overline{SD}.$$



Црт. 5

Решение: Од црт. 5 можеме да извлечеме некои заклучоци:

1° Триаголниците ABC и ADB имаат заедничка страна, а висините спуштени на таа страна им се еднакви (бидејќи $AB \parallel CD$), па според тоа ќе имаат и еднакви плоштини, т.е. $P_2 = P_3$.

2° Триаголниците SAB и ACB имаат иста висина (растојанието од B до правата што минува низ S, A и C), и нивните плоштини и соодветните страни ќе ја образуваат следнава пропорција:

$$P_1 : P_2 = \overline{SA} : \overline{AC}. \tag{1}$$

3° Триаголниците SAB и ADB имаат иста висина (растојанието од A до правата што минува низ S, B и D), па

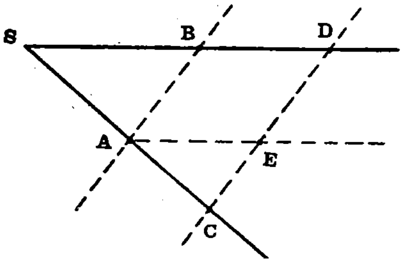
$$P_1 : P_3 = \overline{SB} : \overline{BD}. \tag{2}$$

Бидејќи $P_2 = P_3$, од (1) и (2), веднаш следува:

$$\overline{SA} : \overline{AC} = \overline{SB} : \overline{BD}, \tag{3}$$

т.е. отсечките $\overline{SA}$, $\overline{AC}$, $\overline{SB}$ и $\overline{BD}$ се пропорционални.

Од (3) може да се добие следнава изведена пропорција:



Црт. 6

$$\overline{SA} : (\overline{SA} + \overline{AC}) = \overline{SB} : (\overline{SB} + \overline{BD}),$$

односно:

$$\overline{SA} : \overline{SC} = \overline{SB} : \overline{SD}. \tag{4}$$

4. Во врска со црт. 5 (и условите на задачата 4), докажи дека:

$$\overline{AB} : \overline{CD} = \overline{SA} : \overline{SC}$$

◑ Повлечи права AE, паралелна со SD (црт. 6).

Задача 5. *Докажи дека, ако две различни прави отсекуваат на краците на еден агол пропорционални отсечки, тогаш тие прави се паралелни меѓу себе.*

На црт. 7 краците на $\measuredangle S$ се пресечени со правите AB и CD и притоа $\overline{SC} : \overline{SA} = \overline{SD} : \overline{SB}$.

Низ точката C се повлекува права што е паралелна со правата AB и што го сече другиот крак во точката D', т.е. $AB \parallel CD'$.

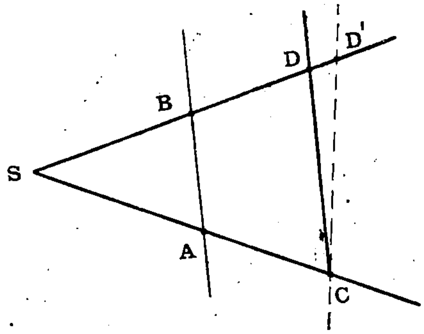
Тогаш, според претходната задача, имаме:

$$\overline{SC} : \overline{SA} = \overline{SD'} : \overline{SB},$$

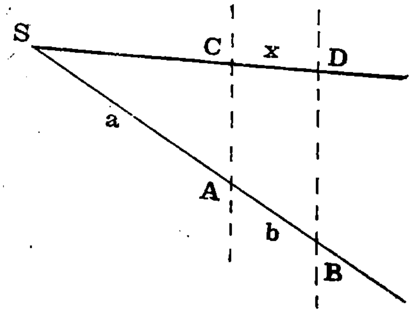
од каде што согласно со претпоставката, следува:

$$\overline{SD'} : \overline{SB} = \overline{SD} : \overline{SB},$$

односно $\overline{SD'} = \overline{SD}$ и $D' \equiv D$; значи $AB \parallel CD$. ;LD



Црт. 7



Црт. 8

Тврдењата содржани во задачите 4 и 5 се познати како **Талесови теореми** за пропорционални отсечки.

5. Нека a, b, c се дадени отсечки. Конструирај отсечка x, таква што $a : b = c : x$. L (црт. 8)

6. Конструирај отсечка $x = a\,b$, каде што a и b се дадени отсечки.

◑ $e : a = b : x, \quad e = 1.$

Вежби

7. Кои од значајните точки на триаголникот можат да лежат надвор од триаголникот?
8. Симетралата на аголот при основата на рамнокрак триаголник е еднаква со основата. Одреди ги аглите на триаголникот.
9. Докажи дека тежишната линија на правоаголен триаголник, повлечена од правиот агол е еднаква на половината од неа.
10. Докажи дека висината на рамнокракиот правоаголен триаголник спуштена од темето на правиот агол е двапати помала од неа.
11. Конструирај ја отсечката:

    а) $x = \dfrac{a^2}{b}$; б) $x = \dfrac{a\,b\,c}{d\,f}$

12. Докажи дека во паралелограм спротивните агли, пар по пар, се еднакви.
13. Докажи дека: ако во еден паралелограм два соседни агли се еднакви, тогаш сите негови агли се прави.
14. Докажи дека, ако во еден паралелограм две соседни страни се еднакви, тогаш сите негови страни се еднакви.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ – II

1. Искажи ја дефиницијата на поимот:
а) симетрала на агол; б) висина на триаголник.
Одреди го дефинирачкиот поим.

2. Искажи една логичка последица на тврдењето: „Секој паралелограм, со една своја дијагонала е поделен на два складни триаголника".

3. Теоремата: „Во квадарот дијагоналите се сечат во една точка и се преполовуваат" искажи ја во условна форма. Одреди ја претпоставката и заклучокот на теоремата.

4. Дадена е теоремата: „Ако еден четириаголник е правоаголник, тогаш неговите дијагонали се еднакви".
а) Искажи ја во категорична форма.
б) Формулирај ја теоремава во термините на „доволен услов", „потребен услов".
в) Формулирај го обратниот исказ; дали тој е теорема?
г) Дали потребниот услов е доволен? Дали доволниот услов е потребен?

5. Дадена е теоремата: „Дијагоналите на паралелограмот заемно се преполовуваат".
а) Која е претпоставката, а кој заклучокот на теоремата?
б) Искажи ја во условна форма и спореди го одговорот од а).
в) Формулирај го обратниот исказ и согледај дека тој е теорема.
г) Формулирај ги директната и обратната теорема заедно, со помош на „ако и само ако".
д) Формулирај ги директната и обратната теорема заедно, со помош на „потребен и доволен услов".

6. Истите барања од задача 5 за Питагоровата теорема: „Квадратот на хипотенузата кај правоаголен триаголник е еднаков со збирот од квадратите на катетите".

7. * Една иста теорема може да биде теорема-својство за еден поим, а теорема-признак за друг поим.
Каква е теоремата од задачата 4 за поимот: а) правоаголник, б) еднаквост на дијагонали на четириаголникот?

8. * Наведи пример на теореми: а) – својства; б) – признаци; г) – карактеристични својства.
Утврди кои од следниве заклучоци е правилно изведен и врз основа на кое правило (9 – 17).

9. 1. Ако четириаголникот $ABCD$ е правоаголник, тогаш неговите дијагонали се еднакви меѓу себе.
2. Четириаголникот $ABCD$ не е правоаголник.
Заклучок: Дијагоналите во четириаголникот $ABCD$ не се еднакви меѓу себе.

10. 1. Ако страната на еден квадрат е 8 cm, тогаш неговата плоштина е 64 cm^2.
2. Плоштината на квадратот не е 64 cm^2
Заклучок: Страната на квадратот не е 8 cm.

11. 1. Ако еден многуаголник е петаголник, тогаш тој има 5 дијагонали.
2. Многуаголникот е петаголник.
Заклучок: Многуаголникот има 5 дијагонали.

12. 1. Ако бројот a завршува со 5, тогаш a е делив со 5.
2. Бројот a е делив со 5.
Заклучок: Бројот a завршува со 5.

13. 1. Ако бројот a завршува со 5, тогаш тој е делив со 5.
2. Бројот a не е делив со 5.
Заклучок: Бројот a не завршува со 5.

14. 1. Ако во $\triangle ABC$ $\gamma = 90°$, тогаш $c^2 = a^2 + b^2$.
2. $c^2 \neq a^2 + b^2$.
Заклучок: Во $\triangle ABC$ $\gamma \neq 90°$.

15. 1. Ако во $\triangle ABC$ $\gamma \neq 90°$, тогаш $c^2 = a^2 + b^2$. T γ
2. Во $\triangle ABC$ $\gamma \neq 90°$
Заклучок: $c^2 \neq a^2 + b^2$.

16. Ако четириаголникот $ABCD$ е квадрат, тогаш неговите дијагонали се заемно нормални.
Заклучок: Ако во четириаголникот $ABCD$ дијагоналите не се нормални меѓу себе, тогаш тој не е квадрат.

17. 1. Ако $27 \mid a$, тогаш $9 \mid a$.
2. Ако $9 \mid a$, тогаш $3 \mid a$.
Заклучок: Ако $27 \mid a$, тогаш $3 \mid a$.

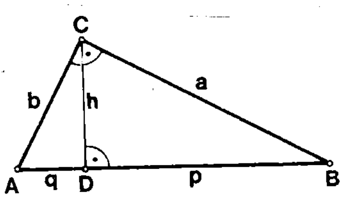
18. Со помош на директен метод, докажи ја теоремата: „Во паралелограм спротивните страни, пар по пар се еднакви“.

19. Докажи ја теоремата:
а) „Во паралелограм дијагоналите заемно се преполовуваат“.
б) „Средната линија кај трапезот е паралелна со основите и еднаква со нивниот полузбир“.
Каков метод на докажување употреби?

20. Со помош на индиректен метод, докажи ја теоремата:
„Ако трапезот е рамнокрак, тогаш аглите при основата се еднакви меѓу себе“.

21. Во кој триаголник сите значајни точки се совпаѓаат?

22. За $\triangle ABC$ се знае дека $\alpha = 70°$ и $\beta = 50°$. Најди ги аглите меѓу:
а) симетралите на аглите на $\triangle ABC$.
б) висините на тој триаголник.



Црт. 1

23. Докажи дека тежишната линија на правоаголен триаголник, повлечена од темето на правиот агол, го дели тој триаголник на два рамнокраки триаголници.

24. На црт. 1, $\triangle ABC$ е правоаголен, а CD е негова висина. Докажи дека:

$$a^2 = cp,\ b^2 = cq,\ h^2 = pq$$

(Евклидови теореми).

ГЛАВА III

ПРИРОДНИ И ЦЕЛИ БРОЕВИ

Во првата глава, меѓу другото, се потсети на некои својства во врска со природните, целите и поопшто, за рационалните броеви. Овде ќе направиме краток преглед на она што си го изучувал порано за овие броеви, а ќе извршиме и одредени проширувања и дополнувања, коишто се многу важни за натамошното изучување на математиката и нејзината примена во практиката.

III.1. ПРИРОДНИ БРОЕВИ. СОБИРАЊЕ И МНОЖЕЊЕ

Природните броеви настанале од потребите на човекот за броење. Со природен број се искажува резултатот од броењето на елементите на дадено непразно конечно множество.

Природните броеви се: 1, 2, 3, 4, ... Множеството на природните броеви го означуваме со **N**; значи,

$$\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

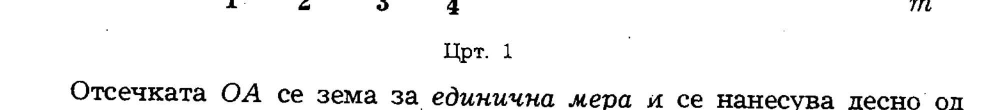
Секој природен број има следбеник. Така, следбеник на бројот 1 е бројот 2, следбеник на 2 е бројот 3 итн. Со тоа, природните броеви се подредуваат по големина:

$$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots$$

Бројот 1 е најмалиот природен број, а најголем природен број не постои (бидејќи: колку и голем природен број да се замисли, неговиот следбеник ќе биде поголем од него).

1. Дали секој природен број е следбеник на некој природен број?

Природните броеви се претставуваат геометриски на следниов начин. Се избира права p и на неа две точки: O (почетна точка) и A, како на црт. 1.



Црт. 1

Отсечката OA се зема за *единична мера* и се нанесува десно од точката A; така се добиваат точките B, C, D, ... итн. Точката A се зема за слика на бројот 1, точката B – на бројот 2, точката C – на 3 итн. Продолжувајќи така, можеме да замислиме дека кој било природен број m ќе има за своја слика определена точка M на правата p. Запишуваме:

$$A(1),\ B(2),\ C(3),\ D(4),\ \ldots,\ M(m),$$

и велиме дека M е **слика** на природниот број m, а бројот m – **координата** на точката M. •

На црт. 1 правата p е насочена од точката O кон точката A; бидејќи на неа се претставени броеви, таа се вика **бројна оска или координатна права.**

Точката O (црт. 2) се зема за *слика* на бројот 0 (нула). Бројот 0 не го сметаме за природен број.

црт. 2

Множеството чии елементи се сите природни броеви и бројот нула, го означуваме со $\mathbf{N}_0$; значи, $\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.

Кога се работи за геометриско претставување на природните броеви, често се вели, на пример, „точката 3", „точката 12", „точката m" итн. наместо „бројот 3", „бројот 12", „бројот m" итн. соодветно.

Во таа смисла, бројот m е **помал** од бројот n ако и само ако точката m е **лево** од точката n (црт. 2); се означува: $m < n$. За бројот n, пак, којшто е десно од m, се вели дека е **поголем** од m; се означува $n > m$.

На бројната оска бројот нула се наоѓа лево од секој природен број и затоа се зема бројот нула да е помал од кој било природен број, т.е. $0 < 1$, $0 < 2$ итн.

2. Одреди на што е еднакво:

а) $\tau(0 < 4)$; б) $\tau(12 > 18)$; в) $\tau(1 < 0 \ \lor\ 2 > 0)$.

Во првата глава се потсетивме и на релацијата $\leq$; така, $m \leq n$ означува: $m < n \lor m = n$.

3. Што означува $n \geq m$?

4. Кои од следниве искази се вистинити:

а) $5 \leq 8$; б) $3 \geq 3$; в) $\neg(10 < 7)$; г) $\neg(15 \geq 20)$?

б Да се потсетиме на собирањето и множењето на природни броеви.

Добро ти е познато дека збирот на кои било два природни броја е природен број и дека *за кои било a, b, $c \in \mathbf{N}$ точни се следниве две равенства:*

(I) $a + b = b + a$ (комутативен закон за собирањето),
(II) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (асоцијативен закон).

Првото равенство означува дека збирот не се менува ако собироците си ги разменат местата. На пример:

$$5+8 = 13 \quad \text{и} \quad 8+5 = 13, \qquad \text{т.е.} \quad 5+8 = 8+5.$$

Второто равенство означува дека резултатот е ист, независно од тоа на кој од двата начина ќе се групираат собироците. Поради тоа, збирот од три собироци a, b, c можеме да го запишеме без загради: $a + b + c$, т.е.

$$a+b+c = (a+b)+c = a+(b+c).$$

На пример:

$$3+5+6 = (3+5)+6 = 8+6 = 14,$$
$$3+5+6 = 3+(5+6) = 3+11 = 14.$$

Асоцијативниот закон овозможува и пресметување збир од повеќе собироци, со групирање. На пример:

$$2+6+8+4+1 = (2+6)+((8+4)+1) = 8+(12+1) = 21,$$
$$2+6+8+4+1 = 2+(6+8)+(4+1) = 2+14+5 = 21.$$

Ако a е даден природен број, тогаш и збирот $a+a+\ldots+a$ (b собироци, $b \geqslant 2$) претставува некој природен број; тој број се вика **производ** на броевите a и b и се означува со $a \cdot b$ или со ab (т.е. без точка, кога за броевите што се множат е употребена буквена ознака). Значи, по дефиниција,

$$ab = \underbrace{a+a+\ldots+a,}_{b \text{ собироци}} \qquad b > 2. \tag{1}$$

Во равенството (1) можеме да допуштиме и $b = 1$; притоа се зема дека:

$$\boxed{\text{(III)}\ (\forall a \in \mathbf{N})\ (a \cdot 1 = a = 1 \cdot a)}$$

т.е. единицата не влијае на производот, па затоа се вели дека е **неутрален елемент** за множењето.

Во врска со множењето, за кои било a, b, $c \in \mathbf{N}$, точни се следниве равенства:

(IV) $ab = ba$ (*комутативен закон за множењето*),
(V) $(ab)c = a(bc)$ (*асоцијативен закон*).

На пример: а) $12 \cdot 4 = 48$ и $4 \cdot 12 = 48$, т.е. $12 \cdot 4 = 4 \cdot 12$;
б) $(4 \cdot 5) \cdot 3 = 20 \cdot 3 = 60$, $4 \cdot (5 \cdot 3) = 4 \cdot 15 = 60$, т.е. $(4 \cdot 5) \cdot 3 = 4 \cdot (5 \cdot 3)$.

Поради својството (IV), производот на три множители a, b, c можеме да го пишуваме без загради, како abc, т.е.

$$abc = (ab)c = a(bc).$$

5. Искажи го со зборови:
а) комутативниот закон за множењето,
б) асоцијативниот закон за множењето.

Асоцијативниот закон за множењето можеме да го прошириме за произволен број множители.

6. Пресметај го производот
а) $4 \cdot 125 \cdot 8$ на неколку начини,
б) $50 \cdot 15 \cdot 4 \cdot 6$ на наједноставен начин.

Собирањето и множењето ги сврзува следново својство:

(VI) За кои било a, b, $c \in \mathbf{N}$, точни се равенствата
$c(a + b) = ca + cb, \qquad (a + b)c = ac + bc$

(2)

наречени **лев** односно **десен дистрибутивен закон на множењето** спрема собирањето. Поради комутативниот закон за множењето, ќе велиме само „дистрибутивен закон“ на множењето спрема собирањето.

7. Искажи го со зборови десниот дистрибутивен закон на множењето спрема собирањето.

Дистрибутивниот закон лесно се проширува и за повеќе од два члена во збирот. На пример:

$$(a + b + c)\,d = ad + bd + cd.$$

8. Врз основа на дистрибутивниот закон, докажи дека:

$$(a + b) \cdot (c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Замени го $a + b$ или $b + d$ со една буква, на пример $a + b = s$.

Собирањето и множењето на природни броеви, како што знаеш од порано, се прошируваат на множеството $\mathbf{N}_0$ на тој начин што да важат сите својства (I) – (VI) за елементите од $\mathbf{N}_0$ и, уште, следниве две: *за секој* $a \in \mathbf{N}_0$,

$$\boxed{\text{(VII) } a + 0 = 0 + a = 0,}$$

т.е. нулата како собирок не влијае на збирот и затоа се вели дека нулата е **неутрален елемент** за собирањето и

$$\boxed{\text{(VIII) } a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0.}$$

Вежби

10. Запиши ги со зборови следниве искази:
а) $15 < 18$, б) $30 > 50$, в) $20 \leq 25$, г) $10 \neq 10$.

11. Запиши го табеларно множеството:
а) $A = \{x \mid x \in \mathbf{N} \land x < 7\}$, б) $B = \{x \mid x \in \mathbf{N} \land 8 < x \leq 12\}$.

12. Направи негација на секој од исказите во задачата **10** и запиши го со симболи. Која од тие негации е точен исказ?

13. Одреди кои од следниве искази се вистинити:
а) $(\forall n \in \mathbf{N})\ (n \geq 1)$, б) $(\exists n \in \mathbf{N})\ (n < 10)$,
в) $(\forall m \in \mathbf{N})\ (\exists n \in \mathbf{N})\ (m < n)$, г) $(\exists n \in \mathbf{N})\ (n < 0)$.

14. Запиши го со симболи исказот:
а) Секој природен број е поголем од нулата.
б) Постои природен број поголем од 1 000 000.
в) Постои природен број помал од 1.

15. Применувајќи ги комутативноста и асоцијативноста на собирањето, пресметај:
а) $43 + 32 + 17 + 48$, б) $47 + 41 + 35 + 59 + 13$.

16. Назначениот збир од еднакви собироци претстави го како производ од два броја и пресметај го
а) $52 + 52 + 52 + 52$, б) $138 + 138 + 138 + 138 + 138$.

17. Пресметај:
а) $3 + 4 \cdot 5 + 2$, б) $(3 + 7) \cdot 8 + 6$, в) $(6 + 3) \cdot (3 + 2)$,
г) $4 + (3 \cdot 7 + 2) \cdot 5 + 1$, д) $(3 + 5 + 7) \cdot 4 \cdot (6 + 1 \cdot 2) \cdot 5$.

18. Со примена на дистрибутивниот закон, пресметај:
а) $a(b+c) + (a + b)c$, б) $(ab+c)\,d + c$,
в) $(a + b)\,(a + c)$, г) $(a + c)\,(a + b + c)$.

19. Извлечи заеднички множител:
а) $5 \cdot a + 5 \cdot b = 10$, б) $ac + bc + am + bm$.

20. Пресметај на два начина: 1) со множење, 2) со извлекување заеднички множител:
а) $7 \cdot 6 + 6 \cdot 6 + 7 \cdot 9 + 4 \cdot 7$, б) $7 \cdot 6 + 6 \cdot 4 + 5 \cdot 6$.

21 Одреди кои од следниве искази се вистинити:
а) $7 - 3 \in \mathbf{N}$, б) $3 - 7 \in \mathbf{N}$, в) $606 \in \mathbf{N}_0$,
г) $3 : 6 \in \mathbf{N}$, д) $12 : 4 \in \mathbf{N}$, ѓ) $0 : 2 \in \mathbf{N}_0$.

22 Најди го остатокот при делењето со 4 на следниве природни броеви: 10, 15, 17, 24, 200, 3281.

23 Одреди кои од следниве равенки немаат решение во множеството $\mathbf{N}_0$.
а) $3 + 2x = x + 1$, б) $2(1 + 3x) = 2 + 3x$. в) $x : 3 = 7 - x$.

24 Дадено е множеството $M = \{1, 2, 3\}$. Запиши ги сите подмножества на множеството M. (Внимавај, има осум подмножества). Ако A и B се подмножества од M, утврди дали се подмножества од M: а) $A \cup B$, b) $A \cap B$.

III.2. ОДЗЕМАЊЕ И ДЕЛЕЊЕ НА ПРИРОДНИ БРОЕВИ

а. **Одземање.** Задачата: „даден е збирот на два природни броја и едниот собирок, а се бара другиот собирок", е обратна задача од собирањето, која се вика одземање на природните броеви.

Поодредено, нека a и b се дадени природни броеви. **Да се одземе** бројот b од бројот a значи да се најде природен број c, таков што равенството $c + b = a$ да стане точен исказ. Притоа, бараниот број се запишува како $a - b$, т.е. $a - b = c$ и се вика **разлика** на броевите a и b.

Но, за дадени a, $b \in \mathbf{N}$, разликата $a - b$ не е секогаш определена. *На пример*, за $a = 5$ и $b = 7$ не постои природен број c, таков што $c + 7 = 5$ да биде точен исказ. Во тој случај се вели дека разликата $5 - 7$ не е природен број, т.е. не постои (во $\mathbf{N}$).

1. Запиши неколку разлики што постојат и неколку – што не постојат (во $\mathbf{N}$).
2. Запиши го условот за a, $b \in \mathbf{N}$ при кој разликата $a - b \in \mathbf{N}$.
3. Во множеството $D = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ е определена исказната функција $P(x) : x - 6 \in \mathbf{N}$. Запиши го множеството на нејзините решенија.

Кога a, b, $a - b \in \mathbf{N}$, тогаш за секој $c \in \mathbf{N}$ се точни равенствата

$$\boxed{(a - b)c = ac - bc, \qquad c(a - b) = ca - cb,} \tag{1}$$

т.е. множењето е дистрибутивно и спрема одземањето.

Одземањето во $\mathbf{N}_0$ се дефинира на ист начин како во $\mathbf{N}$.
Така, на пример, равенството $c + 13 = 13$ станува точен исказ за $c = 0$, па имаме: $13 - 13 = 0$.

И тука, кога a, b, $a - b \in \mathbf{N}_0$, важат равенствата (1) за секој $c \in \mathbf{N}_0$.

4. При кој услов за a, $b \in \mathbf{N}_0$ важи: $a - b \in \mathbf{N}_0$?

б. **Делење.** Делењето на природни броеви има ист однос кон множењето како одземањето кон собирањето. Имено, со делењето се решава следнава задача, обратна на множењето: познат е производот на два множитела и едниот од нив, а се бара другиот множител.

Поодредено, нека a и b се дадени природни броеви. **Да се подели** бројот a со бројот b значи да се најде таков природен број c, за кој равенството $b \cdot c = a$ станува точен исказ. Притоа, бараниот број c се запишува како $a : b$, т.е. $a : b = c$ и се вика **количник** на броевите a и b.

Но, за дадени a, $b \in \mathbf{N}$, количникот $a : b$ не е секогаш определен. На пример, за $a = 5$ и $b = 7$, не постои природен број c, таков што $7 \cdot c = 5$ да биде точен исказ. Во тој случај се вели дека количникот $5 : 7$, не е природен број, т.е. не постои (во $\mathbf{N}$).

5. Запиши неколку количници што постојат и неколку – што не постојат.

Во случаите кога количниците $a : c$, $b : c$, $(a + b) : c$ и $(a - b) : c$ постојат, точни се равенствата

$$\boxed{(a + b) : c = a : c + b : c, \qquad (a - b) : c = a : c - b : c.} \tag{2}$$

Првото од овие равенства се вика **десен дистрибутивен закон на делењето спрема собирањето.** Како се вика второто?

б **Делење со остаток.** При делењето на природни броеви, знаеш дека количникот $a : b$ во некои случаи не е природен број, како на пример $17 : 5$, $30 : 8$. Но, исто така знаеш дека и во такви случаи се врши делење што се вика делење со остаток.

На пример, ако го поделиме бројот 17 со бројот 5, ќе добиеме количник 3 и остаток 2; наместо $17 : 5 = 3$ (со остаток 2) се запишува

$$17 = 3 \cdot 5 + 2.$$

Општо, за кои било дадени природни броеви a и b, постојат еднозначно определени броеви k, $r \in \mathbf{N}_0$, така што

$$\boxed{a = kb + r, \qquad 0 \leqslant r < b.} \tag{3}$$

Ова се вика **основно правило за делење со остаток,** при што k се вика **количник, а** r – **остаток** од делењето на a со b.

На пример, при делењето на броевите 13, 20, 24, 2 со бројот 3, врз основа на (3), се добива:

$$13 = 4 \cdot 3 + 1, \quad 20 = 6 \cdot 3 + 2, \quad 24 = 8 \cdot 3 + 0, \quad 2 = 0 \cdot 3 + 2.$$

Ако еден природен број a се подели со еден природен број b и притоа се добие остаток $r = 0$, тогаш, според (3)

$$a = k \cdot b \text{ за некој } k \in \mathbf{N}.$$

Во тој случај се вели дека a е делив со b или дека a е содржател на b.

На пример, броевите 20 и 52 се содржатели на 4, зашто: $20 = 5 \cdot 4$ и $52 = 13 \cdot 4$. Содржатели на бројот 4 се и: 4, 8, 12 итн. Множеството од сите содржатели на бројот 4 е:

$$\{4, 8, 12, 16, \ldots\} = \{4k \mid k \in \mathbf{N}\}.$$

6. Запиши го множеството содржатели на бројот 5.

Наместо „a е содржател на b" се вели уште „b е **делител** на a" за кое веќе знаеш дека се означува со $b \mid a$. Значи,

$$\boxed{b \mid a <=> a = kb \text{ за некој } k \in \mathbf{N}.}$$

Така, $5 \mid 10$ зашто $10 = 2 \cdot 5$, а $12 \mid 96$ зашто $96 = 8 \cdot 12$.

7. Одреди го множеството решенија во $\mathbf{N}$ на предикатот $P(x) : x \mid 14$.

Секој природен број n што е делив со бројот 2, т е. $n = 2k$ за некој $k \in \mathbf{N}$, се вика **парен број**. Ако, пак, n не е делив со 2, тогаш тој се вика **непарен број** што се запишува $n = 2k + 1$, $k \in \mathbf{N}_0$.

Вежби

8. Во множеството $D = \{12, 14, 16, 18, 20\}$ се определени исказните функции: а) $x - 16 \in \mathbf{N}$; б) $x - 14 = 10$; в) $x - y = 6$. Најди го множеството решенија на секоја од нив.
9. Пресметај ја со извлекување множител пред загради вредноста на изразот: $13 \cdot 24 + 7 \cdot 13 - 29 \cdot 13$.
10. Запиши го множеството остатоци од делењето на природните броеви со 6.
11. Запиши го множеството содржатели на бројот 6.
12. Одреди го множеството од сите заеднички содржатели на броевите 4 и 6. Кој е најмалиот заеднички содржател на 4 и 6, т.е. НЗС (4, 6) = ?
13. Одреди го множеството решенија на предикатот $P(x) : x \mid 18$, $x \in \mathbf{N}$
14. Нацртај го графот на релацијата „... е делител на ..." во множеството $M = \{4, 6, 8, 10, 12, 16\}$ и утврди дали таа релација е рефлексивна и транзитивна.
15. Одреди кои од следниве равенки немаат решение во множеството $\mathbf{N}_0$: а) $3 + 2x = x + 1$. б) $2(1 + 3x) = 2 + 3x$. в) $x : 3 = 7 - x$.
16. Дадено е множеството $M = \{1, 2, 3\}$. Запиши ги сите подмножества на множеството M. (Внимавај, има осум подмножества.) Ако A и B се подмножества од M, утврди дали се подмножества од M: а) $A \cup B$. б) $A \cap B$.
17. Најди го најголемиот заеднички делител (НЗД) на броевите: а) 4 и 6. б) 12 и 36. в) 15 и 24.

III.3. ОПЕРАЦИИ, ГРУПОИДИ

а. При собирањето на природни броеви рековме дека збирот на кои било два природни броја е природен број. Значи, собирањето можеме да го сметаме за правило, според кое на секој подреден пар природни броеви му е придружен точно по еден природен број. Веќе знаеш дека истото важи и за множењето.

Во алгебрата се мошне важни правилата според кои на секој подреден пар елементи од едно множество му се придружува точно по еден елемент од истото множество. Секое такво правило се вика **операција** во тоа множество.

Според тоа, собирањето и множењето на природни броеви се операции во множеството $\mathbf{N}$. Веднаш можеме да истакнеме дека одземањето и делењето на природни броеви, во оваа смисла, не се операции во **N**. (Зошто?)

За разликата $a - b$ на два природни броја рековме дека во некои случаи е природен број, а во некои – не е. Затоа се вели уште дека одземањето е **делумна операција** во **N**. Во таа смисла, за собирањето може да се каже дека е **потполна** операција во **N**.

1. Дали делењето на природни броеви е потполна или делумна операција во **N**?

Пример 1. *Да испитаме дали собирањето на природни броеви е операција во множеството на парните броеви,* $P = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$.

Решение. Лесно се уочува дека збирот на кои било два парни броја е парен број; на пример, $2 + 4 = 6$, $4 + 8 = 12$ итн. Општо,

ако $a,\ b \in P$, тогаш постојат $m,\ n \in \mathbf{N}$, такви што

$$a = 2m,\ b = 2n;$$

$$a + b = 2m + 2n = 2(m + n).$$

Бидејќи $2(m + n)$ е парен број, следува дека $a + b \in P$, што требаше и да покажеме.

За собирањето рековме дека е операција во множеството **N**. Уште се вели дека множеството **N** е **затворено** во однос на операцијата собирање. И множеството P од примерот **1** е затворено во однос на операцијата собирање на природни броеви.

2. Испитај дали множеството $P = \{2, 4, 6, 8, \ldots\}$ е затворено во однос на множењето на природни броеви.

3. Дали множеството $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$ е затворено во однос на операцијата собирање на природни броеви?

Општо, за поимот операција можеме да ја дадеме следнава дефиниција:

> Нека G е дадено непразно множество. **Операција** во множеството G е секое правило или закон $*$ според кој на с е к о ј подреден пар елементи $x,\ y \in G$ му се придружува точно по еден елемент z од G. Се запишува:
>
> $$x * y = z.$$

Можеме да речеме уште дека **операција** во едно множество G е секое пресликување од $G \times G$ во G.

За означување операции се користат разни знаци, како на пример: $*$, $\circ$, $+$, $\cdot$, $\triangle$ и др.

Пример 2. *Да провериме дали во множеството* $A = \{1, 2, 3, 4\}$ *е операција следново правило* $\circ$:

$$x \circ y = \min \{x, y,\},$$

т.е. $x \circ y$ е помалиот од броевите x, y кога $x \neq y$, а $x \circ y$ е кој било од двата броја кога $x = y$.

Така, $1 \circ 2 = \min \{1, 2\} =$; $3 \circ 2 = 2$; $3 \circ 3 = \min \{3, 3\} = 3$; итн.

4. Најди: $2 \circ 1$, $2 \circ 3$, $4 \circ 2$, $4 \circ 4$.

Ако проверката ја извршиме до крај, ќе видиме дека на секој елемент $(x, y) \in A \times A$ со правилото $\circ$ му е придружен точно по еден елемент $z \in A$. Значи, даденото правило е операција во множеството A, т.е. A е затворено во однос на правилото $\circ$.

Резултатите на операцијата $\circ$ можеме да ги прикажеме со следнава табела:

$\circ$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	2	3	3
4	1	2	3	4

Притоа, за $x \circ y$ треба: x да се земе од првата колона (пред вертикалната црта), а y – од првата редица (над хоризонталната црта).

Оваа табела се вика **келиева шема** на операцијата $\circ$.

5. Провери дали е операција во $A = \{1, 2, 3, 4\}$ правилото $x * y = \max\{x, y\}$, (т.е. $x * y$ е поголемиот од броевите x, y кога $x \neq y$, а $x * y$ е кој било од двата кога $x = y$). Направи келиева шема.

b. Секое непразно множество G, заедно со некоја негова операција $*$, се вика **групоид**. Обично се запишува како подреден пар, $(G, *)$.

Така, на пример, $(\mathbf{N}, +)$ и $(\mathbf{N}, \cdot)$ се групоиди. Групоид е и парот $(A, \circ)$, каде што A и $\circ$ се од примерот **2**, а не е групоид парот $(\mathbf{N}, -)$ (т.е. $\mathbf{N}$ со одземањето).

6. Дали парот $(\mathbf{N}, :)$ е групоид?

Еве уште еден пример на групоид.

Пример 3. *Нека* $M_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *е множеството остатоци при делењето на природните броеви со бројот* 5 *и нека е дадено правилото* $\oplus$:

$$a \oplus b = c$$

при што a, $b \in M_5$, а c е остатокот при делењето на збирот $a + b$ со 5. Така,

$$2 \oplus 3 = 0, \text{ зашто } 2 + 3 = 5 = 1 \cdot 5 + 0;$$

$$3 \oplus 4 = 2, \text{ зашто } 3 + 4 = 7 = 1 \cdot 5 + 2;$$

$$2 \oplus 2 = 4, \text{ зашто } 2 + 2 = 4 = 0 \cdot 5 + 4; \text{ итн.}$$

Спроведувајќи ја постапката до крај, лесно ќе се увериме дека $a \oplus b \in M_5$ за секои a, $b \in M_5$. Според тоа, $(M_5, \oplus)$ е групоид.

Операцијата $\oplus$ се вика **собирање по модул** 5; понекогаш се запишува како $\oplus_5$. Келиевата шема на групоидот $(M_5, \oplus)$ е претставена со шемата 2.

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

Шема 2

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

Шема 3

7. Нека $M_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ и нека $\oplus$ е собирање по модул 4. Покажи дека $(M_4, \oplus)$ е групоид и претстави го со келиева шема.

8. Нека $M_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и нека $\odot$ е правилото: $a \odot b = c$ ако и само ако c е остатокот од делењето на производот $a \cdot b$ со 5.

а) Увери се дека $\odot$ е операција на M_5.

б) Покажи дека групоидот $(M_5, \odot)$ е претставен со шемата 3.

Операцијата $\odot$ се вика **множење по модул** 5, а се означува и со $\odot_5$.

Забелешка. Изучувањето на множества со некои нивни операции е главен предмет на современата алгебра. Секое непразно множество, заедно со некои негови операции, една или повеќе, се вика **алгебарска структура.**

Така, секој групоид $(G, *)$ е алгебарска структура со една операција. Множеството **N**, пак, заедно со операциите собирање и множење, т.е. тројката $(\mathbf{N}, +, \cdot)$, е алгебарска структура со две операции.

Вежби

9. Провери дали даденото множество е затворено во однос на собирањето (+) на природни броеви:

$A = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$. $B = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$.

$C = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x > 10\}$. $D = \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x \text{ е прост број}\}$.

10. Провери дали е групоид во однос на множењето (·) множеството:

$A = \{0, 1\}$. $B = \{0, 1, 2\}$.
$C = \{3k \mid k \in \mathbf{N} \wedge k < 10\}$. $D = \{3k \mid k \in \mathbf{N}\}$.

11. Нека $M_3 = \{0, 1, 2\}$, а $\oplus$ и $\odot$ се соодветно: собирање и множење по модул 3. Увери се дека $(M_3, \oplus)$ и $(M_3, \odot)$ се групоиди и состави ги нивните шеми.

12. Нека $G = \{1, 2, 3, 4\}$ и $*$ е правилото: $a * b$ = НЗД (a, b). Состави ја келиевата шема на $(G, *)$.

13. Покажи дека $(\mathbf{N}, \circ)$, каде што $a \circ b$ = НЗС (a, b), е групоид. Дали е групоид и $(G, \circ)$, каде што $G = \{1, 2, 3, 4\}$?

14. Нека $M = \{1, 2, 3\}$ и $P_M = \{X \mid X \subseteq M\}$. Покажи дека се групоиди:

а) $(P_M, \cup)$. б) $(P_M, \cap)$. в) $(P_M, \setminus)$.

15 а) Како се вика бројот -5 за бројот 5?
б) Колку е: $|3|$; $|-4|$?

III.4. ЦЕЛИ БРОЕВИ

а. Во III.3 спомнавме дека разликата од два природни броја не мора да е природен број. *На пример,* разликите: $1-2$, $1-3$, $4-7$, $9-9$ не се природни броеви. Со цел разликата на кои било два природни броја да биде број, множеството **N** се проширува (како што ти е познато од VI одделение) со нови елементи:

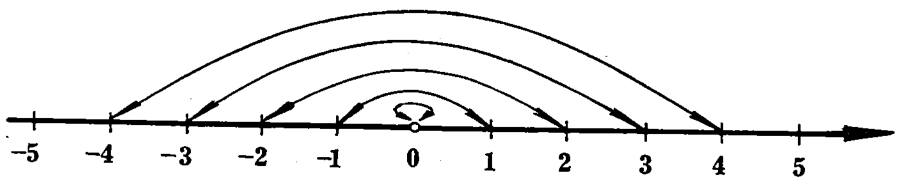
0 (како разлика на кои било два еднакви природни броеви, како на пример: 2–2, 9–9 и др.);

–1 (како разлика: 0–1, 1–2 и сл.);

–2 (како разлика: 0–2, 1–3 и сл.);

–3 (како разлика: 0–3, 4–7 и сл.); итн.

Елементите $-1, -2, -3, \ldots$ ги викаме **негативни цели броеви.** Овие броеви можеме да ги претставиме геометриски, на бројната оска, како симетрични слики на природните броеви во однос на точката 0, како што е прикажано на црт. 1: -1 е симетричната слика на бројот 1, –2 е симетричната слика на бројот 2 итн.



Црт. 1

Множеството од сите природни броеви, нулата и негативните цели броеви го викаме **множество на целите броеви** и го означуваме со $\mathbf{Z}$; значи

$$\mathbf{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Природните броеви 1, 2, 3, ... ги означуваме и со +1, +2, +3, ... и ги викаме **позитивни цели броеви.** Нулата не е ни позитивен ни негативен број.

1. Која е симетричната слика на бројот

а) 2, б) 4, в) − 2, г) 0,

во однос на точката 0 на црт. 1?

Симетричната слика на целиот број a се вика **спротивен број** на a. Така, спротивниот број на 2 е −2, на 4 е −4, на −3 е 3 итн. Општо, спротивниот број на бројот a се означува со $-a$.

Познато ти е од порано дека **апсолутна вредност** на цел број a, што се означува со $|a|$, е самиот број ако тој е позитивен или нула, а е спротивниот број ако дадениот број е негативен, т.е.

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ ако } a \geq 0, \\ -a, \text{ ако } a < 0. \end{cases}$$

На пример, $|8| = 8$ зашто 8 е позитивен, а $|-4| = 4$ зашто −4 е негативен.

2. Најди $|a|$ за $a = 5; 7; -5; -12$.

б III.1 Операциите собирање и множење на природни броеви се прошируваат во множеството $\mathbf{Z}$ така што и во него да важат својствата (I) – (VIII) од II.1 а и:

(IX) *За секој цел број a да се точни равенствата*

$$\boxed{a + (-a) = (-a) + a = 0.}$$

Својството (I) сега можеме да го запишеме вака:

(I) *за кои било* $a, b \in \mathbf{Z}$. *точно е равенството*

$$\boxed{a + b = b + a.}$$

3. Запиши ги и другите законитости (II) – (VIII) за $\mathbf{Z}$.

Основните правила за сметање со целите броеви ти се добро познати од порано. Овде ќе се потсетиме на нив; притоа, во тие правила, m и n ќе ни означуваат природни броеви или нула.

Собирање

1° $-(-m) = m, \; -(+m) = -m.$
2° $(+m) + (+n) = +(m+n).$
3° $(-m) + (-n) = -(m+n).$
4° $(+m) + (-n) = +(m-n)$ за $m \geqslant n.$
5° $(+m) + (-n) = -(n-m)$ за $m < n.$

На пример: $-(-7) = 7$; $-(+8) = -8$; $(-8) + (-5) = -(8+5) = -13$;
$(+4) + (-7) = -(7-4) = -3.$

4. Пресметај:

а) $(+8)+(+12)$, б) $(+18) + (-15)$, в) $(-13) + (-16)$,
г) $(-25)+(+14)$, д) $(+17) + 0$, ѓ) $0 + (-1)$.

Множење

6° $(+m) \cdot (+n) = +(m \cdot n).$
7° $(-m) \cdot (-n) = +(m \cdot n).$
8° $(+m) \cdot (-n) = -(m \cdot n).$

На пример: $(-5) \cdot (-8) = +(5 \cdot 8) = +40 = 40$;
$(+3) \cdot (-9) = -(3 \cdot 9) = -27.$

5. Пресметај:

а) $(+5) \cdot (+9)$, б) $(-3) \cdot (-5)$, в) $(+4) \cdot (-6)$,
г) $(-2) \cdot (+8)$, д) $(+3) \cdot 0$, ѓ) $0 \cdot (-3)$.

Одземањето на цели броеви се дефинира со помош на собирањето: за кои било $a,b \in \mathbf{Z}$ ставаме

$$\boxed{a-b = a + (-b)}$$

т.е. на намаленикот a му се додава спротивниот број од намалителот b. Поради тоа се вели дека одземањето во $\mathbf{Z}$ е **инверзна** (или **обратна**) операција на собирањето.

Пример 1. а) $9 - 7 = 9 + (-7) = +(9 - 7) = 2$ (*се корисшти йравилошо* 4°).

б) $3-8 = 3+(-8) = -(8-3) = -5$ (*се корисшти* 5°).

6. Пресметај:

а) $12-16$, б) $8-(-5)$, в) $-4-(-5)$.

Пример 2. *Да йресмешаме:*

а) $(-5)-(-9)+(-7)-(+2) = -5+9-7-2 = -(5+7+2)+9 =$
$= -14+9 = -(14-9) = -5.$

б) $(-2)+(7-3\cdot5)-(-6)\cdot(-2) = (-2)+(7-15)-(6\cdot2) =$
$= -2+(-8)-12 = -2-8-12 = -(2+8+12) = -22.$

7. Пресметај:

а) $((-3)+7)\cdot((-2)+(-4))$.
б) $(10-4\cdot3)\cdot(13-(7-2)\cdot4+8\cdot(-3))$.
в) $(-3)\cdot(+7)+((-4)\cdot(-5)+(8-6))\cdot(3-5)$.

8. Видовме дека парот $(\mathbf{N},+)$ е групоид, а парот $(\mathbf{N},-)$ не е групоид. Провери дали се групоиди а) $(\mathbf{Z},+)$, б) $(\mathbf{Z},\cdot)$ и в) $(\mathbf{Z},-)$.

Вежби

9. Запиши го спротивниот број на: 1, 7, -5.

10. Најди $|a|$ за $a = 8$; 15; 0; -8; -20.

11. Пресметај:
а) $-(+9)$. б) $-(-9)$. в) $(-9)+(+4)$.
г) $(-9)+(-4)$. д) $(-6)+((-4)+(-7+3))$.

12. Пресметај: а) $14-17$; б) $10-(-4)$; в) $-13-(-20)$.

13. Пресметај:
а) $3\cdot(-5)-6\cdot(-4)$. б) $7-((-4)(-3)-(+3)(+6))$.
в) $(-6)-((8-2\cdot5)-(-3)(-2))+7-3\cdot2$.

14. За кој број k изразот $2k+1$ е еднаков со -7?

15. Реши ги следниве задачи со помош на равенки и на бројната оска: кој број треба да му се додаде на бројот:
а) 4, за да се добие -3;
б) -5, за да се добие 6;
в) -5, за да се добие -6?

16. Да се најде множеството решенија на исказната функција $A(x, y) : x\cdot y = 3$ определена во $\mathbf{Z}$.

17. Колку решенија има исказната функција $B(x, y) : x + y = 3$, разгледувана: а) во множеството $\mathbf{N}$, б) во множеството $\mathbf{Z}$?

18. Докажи дека: а) $|-a| = |a|$; б) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; в) $|a - b| = |b - a|$.

$\boxed{19}$ Согледај дека за групоидот $(\mathbf{Z}, +)$ се точни равенствата:

а) $x + y = y + x$, б) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

за кои било $x, y, z \in \mathbf{Z}$. Дали тие се точни за групоидот $(\mathbf{Z}, -)$?

III.5. ПОИМ ЗА ГРУПА

а. Една од основните задачи што се проучува во врска со една алгебарска структура, е прашањето: какви својства има таа структура.

На пример, групоидот $(\mathbf{Z}, +)$ ги има следниве својства: (1) $x + y = y + x$;(2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;(3) $x + 0 = 0 + x = x$, за кои било $x, y, z \in \mathbf{Z}$. Поради тоа, за групоидот $(\mathbf{Z}, +)$ велиме дека: 1) е комутативен, 2) е асоцијативен, 3) има неутрален елемент.

Општо, за еден групоид $(G, *)$ се вели дека:

1° е **комутативен**, ако операцијата $*$ е комутативна, т.е. $x * y = y * x$ за кои било $x, y \in G$;

2° е **асоцијативен** (или: е **полугрупа**), ако операцијата $*$ е асоцијативна, т.е.

$$(x * y) * z = x * (y * z) \text{ за кои било } x, y, z \in G;$$

3° има **неутрален елемент**, ако постои елемент $e \in G$ таков што

$$x * e = e * x = x \text{ за секој } x \in G.$$

1. Утврди кои од својствата 1° – 3° ги има групоидот:
а) $(\mathbf{N}, +)$. б) $(\mathbf{Z}, \cdot)$. в) $(\mathbf{Z}, -)$

2. Нека $A = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$, т.е. $A = \{2k \mid k \in \mathbf{Z}\}$. Покажи дека групоидот $(A, +)$ е комутативен, асоцијативен и има неутрален елемент.

Пример 1. *Паро̄т* $(\mathbf{Z}, *)$, *каде ш̄то* $*$ *е ӣравилото:*

$$a * b = a + b + 1,$$

е груӣоид. (Зош̄то?). Да исӣиш̄аме кои од својсш̄ваш̄а 1° – 3° ги има ш̄ој груӣоид.

Решение. Нека a, b, c се кои било цели броеви. Имаме:

$$a * b = a + b + 1 = b + a + 1 = b * a;$$
$$(a * b) * c = (a + b + 1) * c = (a + b + 1) + c + 1 =$$
$$= a + (b + 1 + c) + 1 = a * (b + c + 1) =$$
$$= a * (b * c)$$

што значи дека групоидот $(\mathbf{Z}, *)$ е комутативен и асоцијативен. (Притоа ги користиме комутативноста и асоцијативноста на собирањето на цели броеви).

Сега, да видиме дали $(\mathbf{Z}, *)$ има неутрален елемент.

Ако групоидот $(\mathbf{Z}, *)$ има неутрален елемент, ќе го означиме со e, тогаш тој треба да го исполнува условот:

$$a * e = a, \text{ т.е. } a + e + 1 = a \qquad (1)$$

(се разбира и: $e * a = a$) за секој $a \in \mathbf{Z}$. Се гледа дека равенството (1), доколку $e = -1$, е точно за секој $a \in \mathbf{Z}$. Тоа значи дека $e = -1$ е неутрален елемент на групоидот $(\mathbf{Z}, *)$.

3. Утврди дека структурата $(\mathbf{Z}, \circ)$, каде што $x \circ y = x + y - 2$ е групоид, а потоа испитај кои од својствата $1° - 3°$ ги има.

Ако еден групоид $(G, *)$ е конечен, што значи ако множеството G е конечно, тогаш својството на комутативност и постоењето на неутрален елемент може да се утврди од келиевата шема на тој групоид. Да го согледаме тоа на следниов пример.

Пример 2. *Групоидот* $(S, *)$, $S = \{0, 1, 2, 3\}$, $x * y = |x - y|$ *е претставен со шемата* 1, *а групоидот* $(D, \circ)$, $D = \{1, 3, 6, 9\}$, $x \circ y = НЗД(x, y)$ *е претставен со шемата* 2.

$*$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	1	2
2	2	1	0	1
3	3	2	1	0

Шема 1

$\circ$	1	3	6	9
1	1	1	1	1
3	1	1	3	3
6	1	3	6	3
9	1	3	3	9

Шема 2

а) На шемата 1, со испрекината линија е означена дијагоналата на таа шема. Согледај какви се меѓу себе елементите што се симетрични во однос на таа дијагонала.

Сигурно утврди дека тие се еднакви меѓу себе. Провери дали е тоа случај и со втората шема.

Доколку во келиевата шема на еден групоид елементите што се симетрични во однос на дијагоналата се еднакви, тој групоид е комутативен. Утврди зошто е тоа така (заокружените елементи во шемата се добиени како: $3 * 2 = 1$ и $2 * 3 = 1$).

Значи, групоидите $(S, *)$ и $(D, \circ)$ се комутативни.

б) Доколку во келиевата шема на еден групоид има една редица истоветна со редицата над хоризонталната црта и една колона истоветна со колоната што е лево од вертикалната црта, тогаш групоидот има неутрален елемент и тоа е елементот на кој му припаѓа таа редица, односно колона.

Одреди дали има неутрален елемент секој од групоидите $(S, *)$ и $(D, \circ)$ и ако има, кој е тој.

Секако утврди дека групоидот $(S, *)$ има неутрален елемент и тоа е нулата, додека $(D, \circ)$ нема неутрален елемент.

4. Испитај дали е комутативен и дали има неутрален елемент групоидот $(M, \odot)$, каде што $M_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и $\odot$ е множење по модул 5.

Забелешка. Испитувањето на асоцијативноста обично е покомпликувано, затоа што има многу тројки за испитување. Но, ако најдеме барем една тројка вредности за променливите x, y, z за која равенството 2° не е исполнето, тогаш групоидот не е асоцијативен. Така, групоидот $(S, *)$ од примерот **2** не е асоцијативен, бидејќи, на пример,

$$(1 * 2) * 3 \neq 1 * (2 * 3). \text{ Провери!}$$

б. За групоидите што имаат неутрален елемент може да се воведе поимот за инверзен елемент.

4° Нека $(G, *)$ е групоид со неутрален елемент e. За еден елемент $x \in G$ се вели дека е **инверзибилен,** ако постои $x' \in G$, таков што $x * x' = x' * x = e$.
Во тој случај се вели дека x' е **инверзен елемент** на x.

Пример 3. *Во групоидот* $(\mathbf{Z}, +)$ *неутрален елемент е* 0. Да испитаме дали елементот 3 *има инверзен во* $(\mathbf{Z}, +)$.

Решение. Според 4°, треба да најдеме елемент $x' \in \mathbf{Z}$, таков што $3 + x' = 0$ (и $x' + 3 = 0$). Оваа равенка по x' има решение во $\mathbf{Z}$: $x' = -3$. Тоа значи дека бројот 3 има инверзен елемент во $(\mathbf{Z}, +)$ и тоа е бројот -3. Бројот -3 се вика и **спротивен** за бројот 3.

5. Покажи дека во групоидот $(\mathbf{Z},+)$ секој елемент е инверзибилен. ` бројот 1. Дали бројот 3 има инверзен елемент во групоидот $(\mathbf{Z}, \cdot)$?

6. Групоидот $(\mathbf{Z}, \cdot)$ има неутрален елемент – тоа е бројот 1. Дали бројот 3 има инверзен елемент во групоидот $(\mathbf{Z}, \cdot)$?

в. Асоцијативните групоиди со неутрален елемент, во кои секој елемент има инверзен елемент,имаат посебно значење и се викаат **групи.** Таков е, на пример, групоидот $(\mathbf{Z}, +)$. Поодредено, за поимот група можеме да ја дадеме следнава дефиниција:

Еден групоид $(G, *)$ се вика **група**, ако ги исполнува условите:
(G_1) $(G, *)$ е асоцијативен групоид (т.е. е полугрупа).
(G_2) $(G, *)$ има неутрален елемент.
(G_3) Секој елемент во $(G, *)$ има инверзен елемент.

Ако е исполнет уште и условот:

(G_4) Групоидот $(G, *)$ е комутативен,
тогаш за групата $(G, *)$ се вели дека е **комутативна група** или **абелова група.**

Веќе знаеме дека групоидот $(\mathbf{Z}, +)$ ги исполнува условите (G_1) – (G_4); според тоа, тој е комутативна група. Групоидот $(\mathbf{N}, +)$, пак, не е група зашто нема неутрален елемент, т.е. не го исполнува условот (G_2), па според тоа ни условот (G_3).

7. Групоидот $(\mathbf{Z}, \cdot)$ не е група, а и групоидот $(S, *)$ од примерот 2 не е група. Зошто?

Пример 4. *Да испитаме дали е комутативна група групоидот* $(\mathbf{Z}, *)$, $a * b = a + b + 1$.

Решение. Во примерот **1** утврдивме дека овој групоид е комутативен, асоцијативен и има неутрален елемент, $e = -1$, т.е. ги исполнува условите (G_1), (G_2) и (G_4). Останува да го провериме условот (G_3): дали за кој било $a \in \mathbf{Z}$ постои $a' \in \mathbf{Z}$, таков што $a * a' = -1$ (и $a' * a = -1$), т.е.

$$a + a' + 1 = -1 \text{ (и } a' + a + 1 = -1).$$

Оваа равенка по a' има решение во $\mathbf{Z}$: $a' = -2 - a$, што значи дека бројот $-2 - a$ е инверзен елемент на бројот a во $(\mathbf{Z}, *)$. Според тоа, $(\mathbf{Z}, *)$ е комутативна група.

8. Покажи дека групоидот $(A, +)$ од задачата **2** е комутативна група.

Да напомнеме. Условите (G_1) – (G_3) се викаат **аксиоми за група.** Тие се основни тврдења за секоја група, но не се единствени – има и други тврдења што се добиваат од овие аксиоми и се точни во секоја група. Тоа се тврдења што се докажуваат; таквите точни тврдења се викаат **теореми за групите.**

Така, на пример, теореми за групите се:

Т.1. Секоја група има точно еден неутрален елемент.

Т.2. Секој елемент од дадена група има точно еден инверзен елемент.

Т.3. Во секоја група $(G, *)$, за кои било дадени елементи $a, b \in G$, равенката $x * a = b$ (по x) односно $a * y = b$ (по y) има решение во G. Тоа решение е дадено со формулата $x = b * a'$, односно $y = a' * b$ и е единствено.

Овие теореми се докажуваат само со помош на аксиомите $(G_1) - (G_3)$.

Од историјата на математиката

Поимот група е еден од најважните во алгебрата, а теоријата на групите е една од најмоќните идеи во модерната математика. Со помош на групите е објаснета структурата на бројните системи (т.е. на множествата броеви со нивните операции), откриена е изненадувачка сличност меѓу основните структури во алгебрата и геометријата, а објаснети се и некои физички појави, како што е однесувањето на електроните во атомот.

Е. Галоа
(1811 – 1832)

Поимот група, во неговата математичка смисла, за првпат бил употребен од 21-годишниот француски математичар Еварист Галоа (1811 – 1832), во неговиот грозничаво нашкрабан „тестамент“, ноќта пред неговата смрт (на двобој). Делото на Галоа има огромно значење во врска со проблемот за решливост на т.н. алгебарски равенки, но е уште поважно поради неговата општа идеја.

Вежби

9. Кои од својствата $1° - 3°$ ги има групоидот:
а) $\mathbf{N}, *)$, $a * b = 2ab$; б) $(\mathbf{N}, \circ)$, $x \circ y = x + 5y$.

10. Нека $S = \{2, 4, 8, 16\}$, а $x * y =$ НЗС (x, y) и $x \circ y =$ НЗД (x, y). Покажи дека $(S, *)$ и $(S, \circ)$ се групоиди и испитај по нивните шеми кои од својствата $1° - 3°$ има секој од нив.

11. Испитај дали е група во однос на собирањето на цели броеви:
а) $A = \{3k \mid k \in \mathbf{Z}\}$. б) $B = \{-6, -3, 0, 3, 6\}$.

12. Покажи дека е комутативна група групоидот $(M_5, \oplus)$, каде што $M_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, а $\oplus$ е собирање по модул 5. (За асоцијативноста провери само неколку случаи).

13. Согледај дека $(M_5, \odot)$, каде што $M_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ и $\odot$ е множење по модул 5, е комутативна полугрупа со единица. (За асоцијативноста направи само неколку проверки.)

14. Испитај дали е група во однос на множењето на цели броеви следново множество: а) $G = \{-1, 1\}$; б) $H = \{-1, 0, 1\}$.

15. Испитај дали е комутативна група $(\mathbf{Z}, *)$, $a * b = a + b - 1$.

16*. Во групата $\mathbf{Z}, *)$ од задачата 15:

а) пресметај: $2 * 1$, $0 * 1$, $0 * 0$.
б) најди го инверзниот елемент на: 1, 0, 4.
в) реши ги равенките: $3 * x = 4$, $2 * x = 1$.

III.6. ПРСТЕНОТ НА ЦЕЛИТЕ БРОЕВИ

Во III.2 ги наведовме својствата на собирањето и множењето на природни броеви. Сите тие својства важат за собирањето и множењето во $\mathbf{Z}$. Но, тука важат и другите својства што се во врска со бројот 0 и со спротивните броеви на дадени броеви. Да ги запишеме сите тие својства на едно место:

$A_1 : a + b = b + a$	(комутативност на собирањето).
$A_2 : (a + b) + c = a + (b + c)$	(асоцијативност на собирањето).
$A_3 : a + 0 = a$	(0 е неутрален елемент за собирањето).
$A_4 : a + (-a) = 0$	($-a$ е спротивен елемент на a).
$A_5 : a \cdot b = b \cdot a$	(комутативност на множењето).
$A_6 : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$	(асоцијативност на множењето).
$A_7 : (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$	(дистрибутивност на множењето спрема собирањето).
$A_8 : a \cdot 1 = a$	(1 е неутрален елемент за множењето).

(Овие равенства се точни за кои било a, b, c од $\mathbf{Z}$.)

Така, множеството $\mathbf{Z}$ заедно со операциите собирање и множење може да се разгледува како алгебарска структура со две операции, $(\mathbf{Z}, +, \cdot)$, во која важат својствата $A_1 - A_8$.

Има и други алгебарски структури што ги исполнуваат условите $A_1 - A_8$.

Пример 1. *Да го разгледаме множеството од парните цели броеви,* $P = \{\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, \ldots\}$. Знаеме дека збирот на два парни цели броја е парен број и за него важат својствата $A_1 - A_4$. Исто така, производот на два парни броја е парен број, при што важат својствата $A_5 - A_7$. Во множеството P нема неутрален елемент за множењето. Значи, за структурата $(P, +, \cdot)$ важат својствата $A_1 - A_7$.

1. Покажи дека и множеството $S = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$ ги исполнува условите $A_1 - A_7$ во однос на собирањето и множењето на цели броеви.

2. Кои од условите $A_1 - A_7$ не ги исполнува структурата $(\mathbf{N}, +, \cdot)$?

Секоја структура $(P, + \cdot)$ со две операции $+$ („собирање") и $\cdot$ („множење") што ги исполнува условите $A_1 - A_7$ се вика **прстен,** а самите услови се викаат аксиоми за прстен. Ако е исполнета и аксиомата A_8, $(P, +, \cdot)$ се вика **прстен со единица.**

Според тоа, $(\mathbf{Z}, + \cdot)$ е прстен со единица. Структурата $(P, +, \cdot)$ од примерот **2**, пак, е прстен без единица.

3. Покажи дека $(M_3, \oplus_3, \odot_3)$ е прстен со единица. (За дистрибутивноста направи проверка за неколку случаи.)

Во врска со групоидите $(P, +)$ и $(P, \cdot)$ разгледај ги аксиомите (по групи): $A_1 - A_4$, $A_5 - A_6$ и A_7. Што согледуваш?

Сигурно согледа дека: групоидот $(P, +)$, поради аксиомите $A_1 - A_4$ е комутативна група, групоидот $(P, \cdot)$, поради $A_5 - A_6$ е комутативна полугрупа, а A_7 означува дека множењето е дистрибутивно спрема собирањето. Според тоа, можеме да кажеме и дека:

Едно множество P е **прстен** во однос на две (негови) операции, $+$ и $\cdot$, ако се исполнети следниве услови: (Π_1) групоидот $(P, +)$ е комутативна група, (Π_2) групоидот $(P, \cdot)$ е комутативна полугрупа, (Π_3) множењето $(\cdot)$ е дистрибутивно спрема собирањето $(+)$.

4. Покажи дека тројката $(M_5, \oplus, \odot)$, каде што $M_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, а $\oplus$ и $\odot$ се собирање и множење по модул 5, е прстен со единица. (За дистрибутивноста направи проверка само на некои случаи.)

Забелешка. Во прстенот на целите броеви, точни се следниве тврдења:

Т.1. (Закон за кратење собирок)

$(\forall a, b, c \in \mathbf{Z})\ (a + c = b + c \Rightarrow a = b)$.

Т.2. (Решливост на равенки). Секоја равенка

$$x + a = b$$

(по x) има единствено решение во $\mathbf{Z}$; тоа е:

$$x = b + (-a) = b - a.$$

Т.3. (Правила за знаци). За кои било $a, b \in \mathbf{Z}$, точни се равенствата:

а) $-(-a) = a$. б) $-(a+b) = (-a) + (-b)$.
в) $a \cdot 0 = 0$. г) $(-a) \cdot b = -(a \cdot b) = a \cdot (-b)$.
д) $(-a) \cdot (-b) = a \cdot b$.

Сите овие тврдења се точни во кој било прстен $(P, +, \cdot)$. Тие се докажуваат со користење на аксиомите $A_1 - A_8$ и со порано докажани теореми.

б. Природните броеви, како што знаеш, се подредени вака:

$$1 < 2 < 3 < 4 < \ldots$$

Ако од природен број n одземеме единица, ќе добиеме **помал** број, $n - 1 < n$. Така, $3 - 1 = 2 < 3$, $2 - 1 = 1 < 2$. Ако продолжиме така, со одземање на единица, ќе добиеме: $0 < 1$, $-1 < 0$, $-2 < -1$ итн. Затоа, целите броеви можеме да ги подредиме на следниов начин:

$$\ldots -3 < -2 < -1 < 0 < 1 < 2 < \ldots \qquad (1)$$

Записот $a < b$ $(a, b \in \mathbf{Z})$ се чита исто како кај природните броеви: a е **помал од** b или b **е поголем од** a $(b > a)$.

5. Подреди ги по големина броевите: 2, 5, –6, 0, –3.

6. Во множеството $A = \{3, -4, 2, -5\}$ е зададена релацијата „... е помал од ...". Нацртај го нејзиниот граф и провери дали е транзитивна.

7. Нека a и b се дадени цели броеви. Кои можности за нивното споредување постојат?

8. Провери дали: $2 < 3 => 2 + c < 3 + c$ за $c \in \{1, 5, 0, -4\}$.

9. Провери со неколку примери дали

$$a < b => a \cdot 5 < b \cdot 5 \ (a, b \in \mathbf{Z}).$$

Со овие примери сигурно се потсети за некои својства на релацијата: „<" во целите броеви што сега ќе ги искажеме општо.

> За кои било a, b $c \in \mathbf{Z}$, важат следниве својства (закони):
>
> S_1: или $a = b$, или $a < b$, или $a > b$ (трихотомија).
>
> S_2: $(a < b) \land (b < c) => a < c$ (транзитивност).
>
> S_3: $a < b => a + c < b + c$ (монотоност спрема собирањето).
>
> S_4: $(a < b) \land (c > 0) => ac < bc$ (монотоност спрема множењето).

Ако $a > 0$, тогаш бројот a е **позитивен**, а ако $a < 0$, тогаш тој е **негативен.** Секој позитивен број е поголем од секој негативен, а нулата е граница меѓу позитивните и негативните броеви.

Знаците $\geq$ и $\leq$ се употребуваат и кај целите броеви. Записот $a \leq b$ означува „a е помал или еднаков на b". Аналогно за $a \geq b$. Ако $a \geq 0$, тогаш велиме дека бројот a е **ненегативен.**

10. Одреди ја вистинитосната вредност на исказите:

а) $-5 < 0$, б) $-5 < 0 \Rightarrow -(-5) > 0$,

в) $(4 < 5) \wedge (-3 < 0) \Rightarrow 4 \cdot (-3) > 5 \cdot (-3)$.

Воопшто, точни се следниве тврдења:

1°. *Ако c е негативен број, тогаш $-c$ е позитивен, т.е.*

$$\boxed{c < 0 \Rightarrow -c > 0.}$$

2° *Ако едно неравенство се помножи со негативен број, тогаш знакот на неравенството станува спротивен,* т.е.

$$\boxed{(a < b) \wedge (c < 0) \Rightarrow (a \cdot c > b \cdot c).}$$

Овие тврдења се користат при решавањето неравенки.

Пример 2. *Да ги решиме неравенките:*

а) $x - 5 < 4$, б) $2 - x > 3$.

Решение. а) $x - 5 + 5 < 4 + 5$ (на двете страни додаваме 5)
$x < 9$.

б) $2 - x > 3$; додаваме (-2) од двете страни:
$2 - x + (-2) > 3 + (-2)$; $2 + (-2) = 0$, $3 + (-2) = 1$, па
$-x > 1$; според Т. 1
$x < -1$.

11. Реши ги неравенките:

а) $x + 5 > 1$, б) $3 - x < 2$.

Вежби

12. Покажи дека е прстен множеството $P = \{5k \mid k \in \mathbf{Z}\}$ во однос на собирањето и множењето на цели броеви.

13. Состави таблица за собирање $\oplus$ и таблица за множење $\odot$ по модул 4 во $M_4 = \{0, 1, 2, 3\}$. Покажи на некои примери дека важи асоцијативноста на собирањето и множењето, како и дистрибутивноста на $\odot$ спрема $\oplus$. Што можеш да заклучиш за тројката $(M_4, \oplus, \odot)$?

14. Сведи го изразот колку што е можно:

а) $(x - y)\ z + (z - x) \cdot y$. б) $(a + 2b)c + (c - a)b - (c - b)a$.

15. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $2x + 5y - 9$ за $x = -4,\ y = 3$.
б) $(2x - y) \cdot (x - y) - 3y$ за $x = 2,\ y = -3$.

16*. Докажи со сите неопходни чекори дека: $a + x = 0 \ \Rightarrow x = -a$.

17. Подреди ги по големина броевите: 5, −3, 2, −1, 0, −5.

18. Направи негација од исказите: а) $5 < 1$, б) $3 \geqslant 2$.

19. За кои вредности на a и b од $\mathbf{Z}$ е точно неравенството $a \cdot b > 0$?

20. Реши ги неравенките:

а) $3 + x > -3$; б) $1 - x < 6$.

21. Докажи ја теоремата: $a < b \Rightarrow a - b < 0$.

III.7. ДЕЛИВОСТ НА ПРИРОДНИТЕ БРОЕВИ

а. **Релацијата за деливост.** Во лекцијата III.2 се потсетивме на поимот за деливост на природните броеви, при што рековме дека: природниот број b **е делив со** природниот број a, ако постои природен број k, таков што:

$$b = k \cdot a. \tag{1}$$

Во тој случај велиме и дека a **е делител на** b и запишуваме:

$$a \mid b. \tag{2}$$

Термините: a **е множител во** b и b **е содржател на** a, исто така, се употребуваат наместо „b е делив со a".

Пример 1. а) $5 \mid 10$, *зашто* $10 = 2 \cdot 5$.

б) $3 \mid 7$ (читај: 3 **не е делител на** 7), зашто не постои природен број k, таков што $7 = 3 \cdot k$.

1. Одреди кои од следниве искази се вистинити:

а) $13 \mid 52$; б) $48 \mid 12$; в) $9 \nmid 79$; г) $17 \nmid 17$.

Делители на бројот 6 се: 1, 2, 3, 6 и други делители нема. Содржатели, пак, на 6 се: 6, 12, 18, 24 и уште многу други. Секој природен број има конечен број делители, а безброј многу содржатели. Притоа, ако бројот е различен од 1, тогаш тој има барем два делитела: 1 и самиот тој број.

2. Најди ги сите делители на бројот:
а) 7; б) 15; в) 24.

Потоа, наведи неколку негови содржатели.

Со условот (1), т.е. со (2), дефинирана е релација „е делител на" во множеството **N** на природните броеви, наречена и **релација за деливост** во **N**.

Пример 2. *Да провериме дали релацијата „е делив со" има некое од својствата:*

а) рефлексивност: $a \mid a$ за секој $a \in \mathbf{N}$;
б) симетричност: $a \mid b \Rightarrow b \mid a$;
в) антисиметричност: $(a \mid b) \wedge (b \mid a) \Rightarrow a = b$;
г) транзитивност: $(a \mid b) \wedge (b \mid c) \Rightarrow (a \mid c)$.

Решение. Лесно се увидува дека одговорот е потврден за а), в) и г), а одречен за б).

а) $a = 1 \cdot a$, па $a \mid a$, за секој $a \in \mathbf{N}$, т.е. релацијата | е рефлексивна.

б) Релацијата | не е симетрична; на пример: $4 \mid 12$, но $12 \nmid 4$.

в) Од $a \mid b$ и $b \mid a$ следува дека $b = ma$ и $a = nb$ за некои n, m $\mathbf{N}$, па $b = mnb$, од каде што $1 = mn$; последново равенство е исполнето само за $m = n = 1$, па $a = b$. Значи, релацијата | е антисиметрична.

г) Релацијата | е и транзитивна.

Навистина, од претпоставките $a \mid b$ и $b \mid c$ следува дека постојат природни броеви m и n, такви што $b = ma$ и $c = nb$. Поради тоа,

$$c = nb = n(ma) = (nm)\,a, \text{ т.е. } a \mid c.$$

Од примерот **2** заклучуваме дека релацијата „е делител на" во **N** е: рефлексивна, антисиметрична и транзитивна. Според тоа, *таа е релација за подредување на множеството* **N.**

Да се потсетиме уште на неколку својства на деливоста во множеството **N**.

Т.1.	Ако a е делител на броевите b и c, тогаш тој е делител и на нивниот збир, т.е. $(a \mid b) \wedge (a \mid c) \Longrightarrow a \mid (b + c)$.

Доказ. Од претпоставките $a \mid b$ и $a \mid c$ следува дека:

$$b = ma \text{ и } c = na, \text{ за некои } m, n,$$

па

$$b + c = ma + na = (m + n)\,a,$$

што значи дека $a \mid b + c$.

Оваа теорема може да се примени во случаи како следниов:
$8 \mid 7\,200$ и $8 \mid 48$, па $8 \mid 7\,248$.

3. Со помош на **Т.1,** покажи дека $7 \mid 3\,542$.

4. Докажи дека:

$$(a \mid b) \wedge a \mid c) \wedge (b > c) \Rightarrow a \mid (b - c).$$

Т.2.	Ако a е делител на збирот $b + c$ и на едниот собирок (b), тогаш a е делител и на другиот собирок (c), т.е. $$a \mid (b + c) \wedge (a \mid b) \Rightarrow a \mid c.$$

Доказ. $b + c = ma \wedge b = na \Rightarrow na + c = ma \Rightarrow$

$$\Rightarrow c = ma - na \Rightarrow c = (m - n)a;$$

значи, a е делител и на c.

б. **Разложување на прости множители.** Рековме дека секој природен број, поголем од 1, има барем два делитела. *На пример,* бројот 5 има точно два делитела: 1 и 5, а бројот 9 има три делители: 1, 3 и 9. Бројот 24, пак, има осум делители: 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 и 24.

Секој природен број p што има точно два делитела (1 и p) се вика **прост број.** Природните броеви, пак, што имаат повеќе од два делитела се викаат **сложени броеви.**

Така, броевите 2, 3, 5, 7 се прости, а 4, 6, 8, 9 се сложени. Бројот 1, пак, не е ни прост ни сложен.

5. Запиши ги првите десет:

а) прости броеви, б) сложени броеви.

Простите броеви се многу важни во аритметиката.

Така, *секој природен број* $a > 1$ *има барем еден делител што е прост број.* Уште повеќе, нивната важност може да се согледа од следново тврдење наречено **основна теорема на аритметиката:**

> Секој природен број $a > 1$ е или прост број или може да се претстави како производ од прости броеви; тоа претставување е еднозначно, ако не се земе предвид распоредот на множителите.

Со симболи, тоа може да се запише вака:

$$\boxed{a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \cdots p_k^{\alpha_k}}$$

каде што $p_1, p_2, \ldots, p_k$ меѓусебно се различни прости броеви, а $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ *се природни броеви.*

На пример, $70 = 2 \cdot 35 = 2 \cdot 5 \cdot 7$. Во овој случај велиме дека бројот 70 **е разложен на прости множители.**

Пример 3. *Да го разложиме бројот 90 на прости множители.*

Имаме:

$$90 = 9 \cdot 10 = 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = 3^2 \cdot 2 \cdot 5;$$
$$90 = 5 \cdot 18 = 5 \cdot 2 \cdot 9 = 5 \cdot 2 \cdot 3^2;$$
$$90 = 2 \cdot 45 = 2 \cdot 3 \cdot 15 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$$

Во последното разложување на бројот 90 тргнуваме од најмалиот прост делител (2), за 45 – пак од најмалиот (3) итн. Тоа разложување се запишува обично во вертикална таблица, на следниов начин:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad 90 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5.$$

6. Разложи го на прости множители бројот 3 850, со помош на вертикална таблица.

Забелешка 1. На ист начин како во **N** се дефинира релација за деливост и во множеството **Z** на целите броеви. Имено, за еден цел број $a \neq 0$ се вели дека **е делител на** целиот број b, ако постои цел број k, таков што $b = ka$; се означува, исто така, со $a \mid b$.

На пример: а) $8 \mid (-24)$, зашто $-24 = (-3) \cdot 8$;

б) $-15 \mid (-90)$, зашто $-90 = 6 \cdot (-15)$;

в) $5 \mid 0$, зашто $0 = 0 \cdot 5$.

7. Кои од својствата а) – г) од примерот 2 ги има деливоста во **Z**?

◑ Внимавај за в) ! *На пример,* $5 \mid (-5)$ и $-5 \mid 5$, но $5 \neq -5$.

Забелешка 2. Множеството од прости броеви е бесконечно.

Имено, да претпоставиме дека има само конечен број прости броеви и нека тие сите се: $p_1, p_2, \ldots, p_k$; да го формираме бројот a што е збир од бројот 1 и производ на тие прости броеви, т.е.

$$a = 1 + p_1 p_2 \ldots p_k.$$

Забележуваме дека a не е делив ни со p_1, ни со p_2, ..., ни со p_k (според Т.2). Според тоа, кој било прост делител p на a е прост број што е различен од $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Бидејќи a е или прост број или има прост делител p , следува дека постои прост број различен од $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

b ▫ Вежби

8. Во множеството 1) $A = \{4, 6, 12, 24\}$, 2) $B = \{-4, 4, 6, -6, 12\}$ дадена е релацијата „е делител на“. Нацртај го графот на таа релација и утврди дали е таа: а) рефлексивна, б) симетрична, в) антисиметрична, г) транзитивна.

9. Нека a, b, m, n се природни броеви. Докажи дека:
а) $m \mid a \wedge n \mid b \Rightarrow mn \mid ab$;
б) $m \mid a \vee m \mid b \Rightarrow m \mid ab$;
в) $m \mid a \wedge m \mid b \Rightarrow m \mid ax + by$ за кои било $x, y \in \mathbf{Z}$.

10. Докажи дека за кој било $n \in \mathbf{N}$:
а) $2 \mid n(n+1)$; б) $6 \mid 2^{n+2n+1}$; в) $8 \mid (2k+1)^2 - 1$.

11. Докажи дека е делива со 8:
а) разликата од квадратите на два последователни непарни броеви;
б) производот од два последователни парни броеви.

12. Разложи го на прости множители, со помош на вертикална таблица, бројот:
а) 198; б) 819; в) 9 180.

13*. Со кој број треба да се помножи бројот
а) 150; б) 12 600; в) 6 552,
за да се добие полн квадрат?

14*. Дали релацијата | („е делител на c“) е:
а) еквивалентност, б) подредување
во множеството $\mathbf{Z}$ на целите броеви? Зошто?

15 Бројот 458 може да се претстави со помош на степените од 10 вака: $458 = 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8$. Претстави ги на тој начин броевите:

а) 3 572; б) 702 034; в) $\overline{a_4a_3a_2a_1a_0}$ (петцифрен број

при што a_0 е цифрата на единиците, a_1 е цифрата на десетките итн.).

ИСТОРИСКА БЕЛЕШКА ЗА ПРОСТИТЕ БРОЕВИ

Простите броеви биле предмет на проучување уште во стариот век. Така, на пример, тврдењето дека множеството прости броеви е бесконечно, е докажано во Евклидовите „Елементи“ – најзначајното дело по математика од тоа време.

Постојат голем број едноставни тврдења во врска со прости броеви, што никој досега не успеал ни да ги докаже, ни да ги побие. Еве неколку примери.

1. Паровите прости броеви што се разликуваат за 2, се викаат **близнаци.** Такви се: 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13, 17 и 19, 29 и 31, 41 и 43 и др. Сѐ уште не се знае дали множеството близнаци е бесконечно или е конечно.

2. Математичарот Христијан Голдбах во 1742 година му го поставил на Л. Ојлер следново прашање: „Дали секој парен број поголем од 2 може да се изрази како збир од два прости броја?" (На пример: $4 = 2 + 2$; $6 = 3 + 3$; $8 = 3 + 5$; $10 = 3 + 7 = 5 + 5$; $12 = 5 + 7$.) Одговорот на ова прашање сѐ уште не е познат.

3. Францускиот математичар Пјер Ферма (1601 – 1665), во 1637 година, запишал на маргините од една своја книга: „. . . не е можно: кубот на еден (природен) број да се претстави како збир од кубовите на два броја, четвртиот степен од еден број како збир од четвртите степени на два броја и, општо, кој било степен поголем од два како збир од два такви степени. За тоа открив навистина прекрасен доказ, но маргинава е многу мала за да го собере".

Пјер Ферма (1601 – 1665)

Ова тврдење е познато како **последна** (или **голема**) **теорема на Ферма.** Поконцизно, таа тврди дека:

„Ако $n>2$, тогаш не постојат ненулти цели броеви x, y, z такви што:

$$x^n + y^n = z^n.$$

И покрај многу напори во текот на повеќе од 300 години, никој уште не успеал да го докаже (или да го побие) ова тврдење. Сепак, оваа теорема е мошне значајна, зашто обидите таа да се докаже, доведе до откривање нови важни методи и резултати во теоријата на броевите.

Во врска со простите броеви, позната е и следнава теорема, наречена **мала теорема на Ферма:** „*Ако p е прост број и a е заемно прост со p, тогаш остатокот од делењето на* a^{p-1} *со p е* 1"; со симболи:

$$(p \text{ е прост}) \wedge (a, p) = 1 \Rightarrow p \mid a^{p-1} - 1.$$

III.8. ПРИЗНАЦИ ЗА ДЕЛИВОСТ. НЗС

a. **Признаци за деливост.** Ќе се потсетиме, прво, како се проверува дали даден број е делив со 2, 3, 4, 5, 9, 10.

За тоа ќе ни помогне претставувањето на броевите со помош на степените од 10, како во задачата **15** од минатата лекција. *На пример,* бројот 2 745 можеме да го претставиме вака:

$$2\,745 = 2 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5.$$

На тој начин може да се претстави кој било природен број $a = \overline{a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1 a_0}$ ($n \neq 0$):

$$a = a_n \cdot 10^n + a_{n-1} 10^{n-1} + \dots + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0, \quad (1)$$

каде што a_0 се единиците, a_1 – десетките, a_2 – стотките итн.

Секој собирок од десната страна на (1), почнувајќи од десетките налево (т.е. $a_1 \cdot 10$, $a_2 \cdot 10^2$ итн.), е делив со: 2, 5 и 10. Поради тоа, а врз основа на Т.2 од III.7, имаме:

1°. $2 \mid a \iff a_0$ *е парен.*
2°. $5 \mid a \iff a_0$ *е* 0 *или* 5.
3°. $10 \mid a \iff a_0$ *е* 0.

1. Искажи ги со зборови тврдењата 1°, 2° и 3° што се запишани со симболи.

2. Дадени се броевите: 18, 425, 630, 803, 3 740. Кои од нив се деливи со а) 2, б) 5, в) 10?

Тврдењата 1° – 3° се наречени **признаци** (или критериуми) **за деливост** со 2, 5, 10 соодветно.

Бројот a од (1) можеме да го запишеме и вака:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3 + \dots + 10^n a_n = \\ &= a_0 + (a_1 + 9a_1) + (a_2 + 99a_2) + \dots + (a_n + (10^n - 1)a_n) = \\ &= (a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_n) + 9 \cdot (a_1 + 11a_2 + 111a_3 + \dots) \end{aligned}$$

Вториот собирок од последниот збир е делив со 3 и со 9. Ако и првиот собирок е делив со 3, односно со 9, тогаш и бројот a е делив со

3, односно со 9 (Зошто?). Како што гледаме, првиот собирок е збирот на цифрите од бројот a, па според тоа:

$$4^\circ.\ 3 \mid \overline{a_n \ldots a_1 a_0} \iff 3 \mid (a_n + \ldots + a_1 + a_0).$$
$$5^\circ.\ 9 \mid \overline{a_n \ldots a_1 a_0} \iff 9 \mid (a_n + \ldots + a_1 + a_0).$$

Искажи ги со зборови овие признаци за деливост со 3 и 9.

3. Дадени се броевите: 597, 4 109, 89 235, 403 101. Провери кои од нив се деливи со 3, а кои со 9.

4. Дадени се броевите: 536, 7 328 и 2 814. Тие можат да се претставаат вака:

$$536 = 5 \cdot 100 + 36, \qquad 7\,328 = 73 \cdot 100 + 28,$$

$$2\,814 = 28 \cdot 100 + 14.$$

Со помош на Т.1 од III.7 утврди кои од дадените броеви се деливи со 4.

5. Докажи дека: бројот $a = \overline{a_n \ldots a_2 a_1 a_0}$ е делив со 4 ако и само ако е делив со 4 бројот формиран од последните две цифри на a , т.е.

$$6^\circ.\ 4 \mid \overline{a_n \ldots a_2 a_1 a_0} \iff 4 \mid \overline{a_1 a_0}.$$
(*Признак за деливост со* 4).

◑ $a = \overline{a_n \ldots a_2} \cdot 100 + \overline{a_1 a_0}$

6. **Најмал заеднички содржател.** Потребата од најмал заеднички содржател (НЗС) на два или повеќе броеви се јавува на повеќе места, а особено при собирање дропки. Да се потсетиме на наоѓањето НЗС.

Пример 1.

Содржатели на 8 се: 8, 16, **24**, 32, 40, **48**, 56, 64, **72**, . . .
Содржатели на 12 се: 12, **24**, 36, **48**, 60, **72**, 84, . . .
Заеднички содржатели на 8 и 12 се: 24, 48, 72, . . .

Најмалиот заеднички содржател на обата броја е 24; запишуваме кратко:

НЗС(8, 12) = 24.

Најмал заеднички содржател (НЗС) на два или повеќе броеви се вика најмалиот број што е содржател на секој од дадените броеви.

За мали броеви, НЗС можеме лесно да пресметаме напамет.

На пример:

а) НЗС$(4, 6) = 12$, б) НЗС$(4, 6, 9) = 36$.

Ако броевите се поголеми, обично ги разложуваме на прости множители.

Пример 2. НЗС $(180, 126) = ?$

$180 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5;$

$126 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 7 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7;$ НЗС$(180, 126) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 1\,260.$

Значи, НЗС на два броја е еднаков со производот од степените на сите нивни прости множители, при што за показател на секој од простите множители се зема поголемиот од двата.

Постапката за наоѓање НЗС на повеќе броеви е аналогна.

Пример 3. НЗС $(120, 90, 96) = ?$

$120 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5,$

$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5,$

$96 = 2 \cdot 3;$ НЗС $(120, 90, 96) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 = 1\,440.$

Разложувањето на броевите обично се врши истовремено за сите нив, во вертикална таблица.

Така, за броевите од примерот 2 односно за 3, имаме:

а)

$$\begin{array}{r|l} 180,\ 126 & 2 \\ 90,\ 63 & 2 \\ 45,\ 63 & 3 \\ 15,\ 21 & 3 \\ 5,\ 7 & 5 \\ 1,\ 7 & 7 \\ 1,\ 1 & \end{array}$$

б)

$$\begin{array}{r|l} 120,\ 90,\ 96 & 2 \\ 60,\ 45,\ 48 & 2 \\ 30,\ 45,\ 24 & 2 \\ 15,\ 45,\ 12 & 2 \\ 15,\ 45,\ 6 & 2 \\ 15,\ 45,\ 3 & 3 \\ 5,\ 15,\ 1 & 3 \\ 5,\ 5,\ 1 & 5 \\ 1,\ 1,\ 1 & \end{array}$$

НЗС $(180, 126) = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$ НЗС $(120, 90, 96) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5.$

6. Најди: а) НЗС$(72, 96)$, б) НЗС$(90, 45, 126)$.

Вежби

7. Кои од наведените броеви се деливи

а) со 2 : 46, 225, 113, 1 130; б) со 5 : 95, 115, 151, 1 510;

в) со 3 : 174, 378, 8 301, 4 185; г) со 10 : 485, 3 700, 901.

8. Искажи го признакот за деливост со 9 и провери кои од дадените броеви не се деливи со 9:
423, 679, 92 518, 7 200.

9. Искажи го признакот за деливост со 4 и провери кои од дадените броеви е делив со 4: 728, 84 342, 13 132.

10. Докажи дека:

$6 \mid a <=> (2 \mid a) \wedge (3 \mid a)$.

Користејќи го тоа, провери кои од следниве броеви се деливи со 6: 432, 315, 8 346, 3 206.

11*. Изведи признак за деливост со 8.

◑ $a = \overline{a_n \ldots a_1 a_0} = \overline{a_n \ldots a_3} \cdot 1000 + \overline{a_2 a_1 a_0}$.

12. Запиши неколку содржатели на:
а) 16, б) 18; в) 16 и 18 (заеднички); кој е НЗС на 16 и 18?

13. Пресметај го напамет НЗС на броевите:

а) 6, 9;	б) 30, 45;	в) 4, 6, 10;
г) 15, 20, 30;	д) 7, 12;	ѓ) 4, 5, 7.

14. Најди НЗС на:
а) 144, 240; б) 40, 60, 95; в) 120, 70, 180.

III.9. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ

Сите делители на бројот 12 се: 1, 2, 3, 4, 6 и 12, а на бројот 18 се: 1, 2, 3, 6, 9 и 18. Заеднички делители им се 1, 2, 3 и 6, а **најголемиот** меѓу нив е 6. Значи, тој е најголемиот заеднички делител на броевите 12 и 18; тоа го означуваме вака:

$$НЗД(12, 18) = 6.$$

Најголем заеднички делител на два природни броја a и b се вика најголемиот природен број што е делител на обата броја a и b; тој се означува кратко: НЗД (a, b).

Пример 1.

а) НЗД(14, 21) = 7; б) НЗД(9, 16) = 1.

Ако НЗД од два броја е 1, тогаш за тие броеви се вели дека се **заемно прости.** На пример, броевите 8 и 35 се заемно прости, зашто НЗД (8, 35) = 1.

1. Запиши ги сите делители на 30 и на 42. Потоа, најди го нивниот НЗД.

2. Нека НЗД$(a, b) = d$. Докажи дека:

а) $(\exists a_1, b_1 \in \mathbf{N})\ (a = da_1, b = db_1)$;
б) $cd \Rightarrow (c \mid a) \wedge (c \mid b)$;
в) $d = a \iff a \mid b$.

Овие својства на НЗД се користат често при решавање задачи за деливост. Да забележиме дека броевите a_1 и b_1 во задачата а) се заемно прости, т.е. НЗД $(a_1, b_1) = 1$ (Зошто?).

За мали броеви, НЗД можеме лесно да го пресметаме напамет. На пример,

НЗД$(6, 9) = 3$,   НЗД$(8, 10) = 2$.

Ако броевите се поголеми, тогаш нив обично ги разложуваме на прости множители.

Пример 2. НЗД$(126, 180) = ?$

$126 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$,
$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$;   НЗД$(126, 180) = 2 \cdot 3^2 = 18$.

Значи, НЗД *од два броја е еднаков со производот од степените на заедничките прости множители, при што за показател на секој прост множител го земаме помалиот од двата показатела.*

3. НЗД $(150, 360) = ?$

Постапката за наоѓање НЗД од повеќе броеви е аналогна.

Пример 3. НЗД $(120, 180, 96) = ?$

$120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$,
$180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5$,
$96 = 2^5 \cdot 3$;   НЗД $(120, 180, 96) = 2^2 \cdot 3 = 12$.

Одредувањето на НЗД од два или повеќе броеви може да се направи и со помош на вертикална таблица на следниов начин:

120, 180, 96	2
60, 90, 48	2
30, 45, 24	3
10, 15, 12	

НЗД$(10, 15, 12) = 1$

1°. Дадените броеви ги делиме со нивниот најмал заеднички делител, различен од 1; во примеров, тоа е бројот 2.

2°. Добиените количници (во примеров: 60, 90 и 48) ги делиме со нивниот најмал заеднички делител, различен од 1; во примеров тоа е пак бројот 2.

3°. Оваа постапка се продолжува сè додека не добиеме количници што се заемно прости броеви; во примеров, тоа се броевите 10, 15, 12.

4°. НЗД од дадените броеви ќе биде производот од броевите што се десно од вертикалната црта.

Значи, НЗД (120, 180, 96) = $2 \cdot 2 \cdot 3 = 12$.

4. НЗД (90, 135, 315) = ?

б. Наоѓањето на НЗД од два броја може да биде прилично напорна задача во случаи кога тие броеви се големи, како на пример:

$$\text{НЗД}\ (48\,552,\ 63\,294) = ?$$

Меѓутоа, постои постапка, според која НЗД од два броја може да се најде со помалку труд. Таа постапка потекнува од старогрчкиот математичар Евклид и затоа по него се вика **Евклидов алгоритам.**

Евклидовиот алгоритам е заснован на основното правило за делење (формулата (7) во III.2), поточно на следново тврдење:

Т.1.	Нека a, b се природни броеви и r е остатокот од делењето на a со b. Тогаш: $$\text{НЗД}\ (a, b) = \text{НЗД}\ (b, r). \qquad (1)$$

Доказ. Да го означиме НЗД (a, b) со d и да го поделиме a со b:

$$a = bq + r, \qquad 0 \leqslant r < b. \qquad (2)$$

Бидејќи $d \mid a$ и $d \mid bq$, од (2) е јасно дека $d \mid r$ (Зошто?). Значи d е заеднички делител на b и r. Очигледно, d е НЗД на b и r (зашто ако тие би имале заеднички делител што е поголем од d, тогаш тој, поради (2), би бил делител и на a (Зошто?), а тоа противречи на претпоставката дека d е НЗД на a и b).

Пример 4. а) НЗД (48, 40) = НЗД (40, 8) (зашто $48 = 40 \cdot 1 + 8$),

б) НЗД (190, 45) = НЗД (45, 10) (зашто $190 = 45 \cdot 4 + 10$),

в) НЗД (50, 75) = НЗД (75, 50) (зашто $50 = 0 \cdot 75 + 50$).

Остатокот r при делењето на a со b е помал од b, па броевите b и r во формулата (2) се помали од a и b. Со тоа задачата ја сведуваме на пресметување НЗД на два помали броеви.

Таа постапка ја продолжуваме сè додека не дојдеме до броеви такви што помалиот да е делител на поголемиот. Тогаш тој помал број е НЗД на дадените броеви a и b; секако дека може да се случи тој да биде 1, а тоа значи дека броевите a и b се заемно прости.

Пример 5. НЗД (165, 45) = ?

Решение. При делењето на 165 со 45, се добива остаток 30, т.е.

$$165 = 45 \cdot 3 + 30;$$

притоа:

$$\begin{aligned} 45 &= 30 \cdot 1 + 15, \\ 30 &= 15 \cdot 2. \end{aligned}$$

Значи, 15 е делител на 30, т.е. 15 | 30, па тој е бараниот НЗД, т.е.

НЗД (165, 45) = 15.

5. Најди НЗД (963, 657).

Ќе разгледаме уште еден пример.

Пример 6. НЗД (444, 318) = ?

$$\begin{aligned} 444 &= 318 \cdot 1 + 126 \\ 318 &= 126 \cdot 2 + \ \ 66 \\ 126 &= \ \ 66 \cdot 1 + \ \ 60 \\ 66 &= \ \ 60 \cdot 1 + \ \ \ \ 6 \\ \hline 60 &= \ \ \ \ 6 \cdot 10; \end{aligned}$$

НЗД (444, 318) = 6.

Ако тргнеме од четвртото равенство: $66 = 60 \cdot 1 + 6$ и ако ја продолжиме низата равенства „нагоре“, ќе добиеме:

$$\begin{aligned} 6 &= 66 - 60 \cdot 1 = 66 - (126 - 66 \cdot 1) = -126 + 2 \cdot 66 = \\ &= -126 + 2 \cdot (318 - 126 \cdot 2) = 2 \cdot 318 - 5 \cdot 126 = \\ &= 2 \cdot 318 - 5 \cdot (444 - 318) = -5 \cdot 444 + 7 \cdot 318; \end{aligned}$$

значи,

$$6 = -5 \cdot 444 + 7 \cdot 318,$$

т.е. најголемиот заеднички делител на броевите 444 и 318 е претставен како збир од нивни содржатели (се вели уште: како нивна **линеарна комбинација** со коефициенти -5 и 7).

Врз основа на Евклидовата постапка, можеме да заклучиме дека тоа важи општо:

Т.2.	Ако d = НЗД (a, b), тогаш постојат цели броеви x_0, y_0, такви што: $$d = x_0 a + y_0 b. \qquad (3)$$

Специјално, ако броевите a и b се заемно прости, т.е. НЗД $(a, b) = 1$, тогаш постојат $x_0, y_0 \in \mathbf{Z}$, такви што:

$$x_0 a + y_0 b = 1. \qquad (4)$$

6. Најди го НЗД (840, 329), а потоа претстави го во обликот (3).

Вежби

7. Најди го напамет НЗД од следниов пар броеви:
а) 8, 6; б) 20, 30; в) 12, 35; г) 15, 45;
д) 18, 24; ѓ) 48, 64; е) 36, 39; ж) 39, 49.

8. Пресметај го НЗС и НЗД на дадените броеви со разложување на прости множители:
а) 72, 96; б) 36, 48, 60; в) 120, 150, 270.

9. Најди го НЗД со помош на вертикална таблица за броевите:
а) 135, 180; б) 120, 150, 270; в) 63, 135, 315.

10. Со помош на Евклидовиот алгоритам, најди го НЗД на броевите:
а) 21, 35; б) 126, 216, в) 1 001, 7 655;
г) 48 552 63 294; д) 72 135, 45 360.

11*. Запиши го
а) НЗД (21, 35) во обликот $21 \cdot x_0 + 35 \cdot y_0$,
б) НЗД (1 001, 7 655) во обликот $1\,001x_0 + 7\,655y_0$.

12. Броевите x_0, y_0 во (3) и (4) не се еднозначно определени; на пример:
НЗД (12, 8) = 4; $4 = 3 \cdot 12 - 4 \cdot 8 = 5 \cdot 12 - 7 \cdot 8$.
Најди три различни парови цели броеви x_0, y_0, такви што:
а) НЗД (6, 4) = $6x_0 + 4y_0$; б) НЗД (8, 7) = $8x_0 + 7y_0$.

13. Докажи ја точноста на обратната импликација од б) во задачата 2, т.е. ако d = НЗД (a, b), тогаш:

$$(c \mid a) \wedge (c \mid b) \Rightarrow c \mid d\,.$$

Искажи го со зборови ова тврдење.

14*. Дали $21n + 4$ и $14n + 3$ имаат заеднички делител различен од 1, ако n е природен број,

◑ Употреби го Евклидовиот алгоритам.

15*. Докажи дека се заемно прости броевите $9n + 31$ и $2n + 7$ за секој $n \in \mathbf{N}$.

$\boxed{16.}$ Кои од броевите: 13, 21, 29, 42, 51, 64 имаат исти остатоци при делењето со 3?

III.10. КОНГРУЕНЦИИ

а. Основното правило за делење на природни броеви што го разгледавме во III.2 важи и за делењето на цели броеви.

Имено, ако a е цел број и m е природен број, тогаш постојат еднозначно определени цели броеви q и r, такви што:

$$a = mq + r, \qquad 0 \leqslant r < m; \tag{1}$$

и тука q се вика **количник**, а r – **остаток** од делењето на a со m.

Поради тоа, секој цел број a може да се претстави само на еден од следниве начини:

$$a = m \cdot q, \qquad a = mq + 1, \qquad a = mq + 2, \ldots, \qquad a = mq + (m - 1), \tag{2}$$

т.е. остатокот од делењето на a со m може да биде само еден од броевите:

$$0, 1, 2, \ldots, (m - 1). \tag{3}$$

1. Нека $m = 4$. Кои се остатоците од делењето со 4, на броевите: а) 21, 49, −3, −31; б) 8, 20, −36; в) 3, 31, −21, −49.

◑ Внимавај: остатокот r, според (1), мора да е ненегативен број.

Во задачата **1**, сите броеви под а), при делењето со 4, даваат остаток 1, а сите броеви под в) даваат остаток 3. Можеме да сметаме дека: оние цели броеви што при делењето со 4 даваат ист остаток, „се сврзани” меѓусебно, т.е. дека „се во релација”.

Ова согледување што е во врска со својството (2), т.е. (3), ја наметнува следнава

Дефиниција. Нека a, b се цели броеви и m е природен број. За a и b се вели дека се **конгруентни по модул** m, ако a и b при делењето со m имаат исти остатоци, т.е.

$$a = mq_1 + r \text{ и } b = mq_2 + r. \tag{4}$$

Симболично, тоа се означува вака:

$$a \equiv b \ (mod\ m) \tag{5}$$

и се чита: a **е конгруентно** со b **по модул** m.

Пример 1.

а) $21 \equiv 49\ (mod\ 4)$ зашто $21 = 4 \cdot 5 + 1$ и $49 = 4 \cdot 12 + 1$
б) $29 \equiv -3\ (mod\ 4)$, зашто $29 = 4 \cdot 7 + 1$ и $-3 = 4 \cdot (-1) + 1$.
в) $37 \equiv 9\ (mod\ 7)$, зашто $37 = 7 \cdot 5 + 2$ и $9 = 7 \cdot 1 + 2$.
г) $37 \not\equiv 9\ (mod\ 6)$, зашто $37 = 6 \cdot 6 + 1$, а $9 = 6 \cdot 1 + 3$

(т.е. остатоците не им се еднакви).

Симболот $37 \equiv 9\ (mod\ 6)$ го читаме: 37 **не е конгруентно со** 9 **по модул** 6.

2. Дадени се броевите: 39, 54, 67, −23, −30. Кои од нив, два по два се конгруентни меѓу себе по модул: а) 7, б) 6?

◑ Прво, најди ги остатоците при делењето со 7, односно со 6.

Со дефиницијата (4) е определена релација во множеството **Z** на целите броеви што се вика **конгруенција по модул** m. Таа ги има следниве својства:

а) рефлексивност: $a \equiv a \ (mod\ m)$, за секој $m \in \mathbf{Z}$;

б) симетричност: $a \equiv b \ (mod\ m) \ => \ b \equiv a \ (mod\ m)$;

в) транзитивност: $a \equiv b \ (mod\ m) \ \wedge \ b \equiv c \ (mod\ m) \ =>$
$a \equiv c \ (mod\ m)$.

Според тоа:

Т.1.	Конгруенција по модул m е релација за еквивалентност во множеството **Z** на целите броеви.

3. Образложи ги својствата а) – в).

◑ Искористи ја дефиницијата за конгруенција.

Релацијата конгруенција по модул m ни дава една врска меѓу даден број a и неговиот остаток r при делењето со m.

На пример, остатокот од делењето на 45 со 7 е 3, а и остатокот од делењето на 3 со 7 е, исто така, 3, па:

$$45 \equiv 3 \ (mod\ 7).$$

Очигледно е дека важи и општо:

Т.2.	Ако $a = mq + r, \ 0 \leqslant r < m$, тогаш $a \equiv r \ (mod\ m)$.

4. Нека бројот a е делив со m. Докажи дека:

$$a \equiv 0 \ (mod\ m).$$

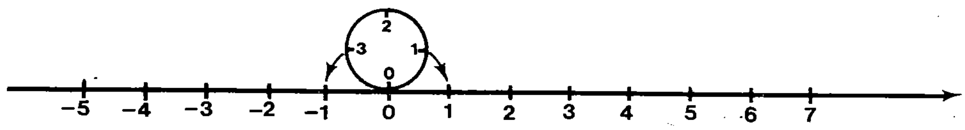
6. Со релацијата конгруенција по модул m, множеството цели броеви се разбива на m класи еквивалентни елементи; тие се викаат и **класи остатоци по модул** m.

Така, на пример, класите остатоци по модул 4, се:

I класа:	. . . −8	−4	0	4	8	12	16 . . .
II класа:	. . . −7	−3	1	5	9	13	17 . . .
III класа:	. . . −6	−2	2	6	10	14	18 . . .
IV класа:	. . . −5	−1	3	7	11	15	19 . . .

Во првата класа влегуваат оние цели броеви за кои остатокот при делењето со 4 е 0; во втората – броевите за кои остатокот е 1, во третата – оние за кои остатокот е 2, а во четвртата – оние за кои остатокот е 3.

Добивањето на класите остатоци по модул 4 можеме да го претставиме нагледно, како на црт. 1.



Црт. 1

Имено, ако кружницата (што е поделена со точки 0, 1, 2, 3 на четири еднакви делови) се тркала по бројната оска (чија единична мера е еднаква на $\frac{1}{4}$ од должината на кружницата), тогаш:

– точката 0 од кружницата ќе ги „допре“ сите точки што ги претставуваат броевите од првата класа,

– точката 1 – сите точки – од втората класа итн.

5. Запиши ги класите остатоци
а) по модул 3; б) по модул 6.

Да разгледаме неколку броеви од иста класа остатоци по модул 4, на пример 17, 5, – 7 (од II класа горе); тоа значи дека:

$17 \equiv 5 \ (mod\ 4)$, $17 \equiv -7 \ (mod\ 4)$, $-7 \equiv 5 \ (mod\ 4)$.

Лесно се забележува дека:

$$17 = 5 + 4 \cdot 3,\ 17 = -7 + 4 \cdot 6,\quad -7 \equiv 5 + 4 \cdot (-3).$$

Тоа важи и општо:

Т.3.	$a \equiv b \ (mod\ m) \Rightarrow (\exists c \in \mathbf{Z})\ a = b + mc.$

Ќе докажеме, уште, дека:

Т.4.	Два броја a и b се конгруентни по модул m ако и само ако m е делител на нивната разлика, т.е. $a \equiv b \ (mod\ m) \Leftrightarrow m \mid a - b.$

Доказ: Нека $a \equiv b \ (mod\ m)$. Тогаш важи (4), т.е. $a = q_1m + r$ и $b = q_2 m + r$, па $a - b = m \cdot (q_1 - q_2)$. Значи, $m \mid a - b$.

Обратно, нека $m \mid a - b$. Тогаш $a - b = km$ за некој $k \in \mathbf{Z}$, т.е. $a = b + km$. Ако, сега b има остаток r, т.е. $b = qm + r$, тогаш:

$$a = b + km = qm + r + km = (q + k)m + r.$$

Значи, и a и b имаат ист остаток r при делењето со m, па $a \equiv b \ (mod\ m)$. □.

6. Користејќи го тврдењето Т.4, провери кои од дадените броеви, два по два, се конгруентни по модул 7 : 39, 25, 22, – 3.

7. Провери дали е точно:

$52\,418 \equiv 52\,386 \ (mod\ 16)$.

b. Вежби

8. Кои од дадените броеви имаат исти остатоци при делењето со 6:

$$46,\ 25,\ -17,\ 67,\ -8?$$

9. Утврди кои од следниве искази се точни:
а) $15 \equiv 3 \ (mod\ 6)$; б) $14 \equiv -2 \ (mod\ 6)$;
в) $50 \equiv 18 \ (mod\ 17)$; г) $67 \equiv -11 \ (mod\ 13)$;
д) $27 \equiv 11 \ (mod\ 2)$; ѓ) $325 \equiv 100 \ (mod\ 9)$.

10. Од $32 \equiv 5 \ (mod\ 9)$ и $5 \equiv -13 \ (mod\ 9)$ што можеш да заклучиш за 32 и – 13?

11. Дадено е : $a \equiv b \ (mod\ m)$ и $c \equiv b \ (mod\ m)$. Дали можеме да заклучиме дека $a \equiv c \ (mod\ m)$, Зошто?

12. Запиши ги класите остатоци по модул: а) 5; б) 2; в) 1.

13. Докажи ја точноста на следново тврдење:

$a \equiv b \ (mod\ m) \Rightarrow a - b \equiv 0 \ (mod\ m)$.

14. Исказот $26 \equiv 8 \ (mod\ 6)$ е вистинит. Провери кои од следниве искази се вистинити:

а) $26 + 2 \equiv 8 + 2 \ (mod\ 6)$; б) $26 - 2 \equiv 8 - 2 \ (mod\ 6)$;
в) $26 \cdot 2 \equiv 8 \cdot 2 \ (mod\ 6)$; г) $26 : 2 \equiv 8 : 2 \ (mod\ 6)$.

15. Исказите $15 \equiv 7 \ (mod\ 4)$, $2 \equiv 6 \ (mod\ 4)$ се вистинити. Провери ја вистинитоста на следниве искази:
а) $15 + 2 \equiv 7 + 6 \ (mod\ 4)$; б) $15 \cdot 2 \equiv 7 \cdot 6 \ (mod\ 4)$;
в) $15 - 2 \equiv 7 - 6 \ (mod\ 4)$; в) $15x + 2y \equiv 7x + 6y \ (mod\ 4)$ за кои било $x, y \in \mathbf{Z}$.

III.11. СВОЈСТВА НА КОНГРУЕНЦИИ И ПРИМЕНА

a. При решавањето на задачите 14 и 15 од минатата лекција, сигурно насети дека конгруенциите по даден модул имаат некои својства, аналогни на својствата на равенство: конгруенцијата не ја менува својата вистинитост ако двете нејзини страни се наголемат, намалат или ако се помножат со еден ист број.

Уште повеќе, две конгруенции по ист даден модул може да се „собираат", „одземаат", „множат", „степенуваат", во што ќе се увериме подолу, со наредните теореми.

T.1. Нека $a \equiv b \ (mod\ m)$ и $c \equiv d \ (mod\ m)$. Тогаш:

а) $a + c \equiv b + d \ (mod\ m)$;
б) $a - c \equiv b - d \ (mod\ m)$;
в) $a \cdot c \equiv b \cdot d \ (mod\ m)$.

Доказ. Од $a \equiv b \ (mod\ m)$ и $c \equiv d \ (mod\ m)$, според Т.4 од минатата лекција, следува дека $m \mid a - b$ и $m \mid c - d$, т.е.

$$a - b = mq_1 \text{ и } c - d = mq_2. \tag{1}$$

Поради тоа:

а) $(a - b) + (c - d) = mq_1 + mq_2 = m(q_1 + q_2)$,
$(a + c) - (b + d) = m \cdot (q_1 + q_2)$,

т.е. $m \mid (a + c) - (b + d)$, а тоа, според Т.4 значи дека:

$$a + c \equiv b + d \ (mod\ m).$$

в) Од (1) : $a = b + mq_1$ и $c = d + mq_2$, па

$$ac = bd + mbq_2 + mdq_1 + m^2q_1q_2,$$
$$ac - bd = m \cdot (bq_2 + dq_1 + mq_1q_2),$$

т.е. $m \mid ac - bd$, што значи дека $ac \equiv bd \ (mod\ m)$.

1. Искажи ги со зборови својствата а) – в) и докажи го тврдењето б).

2. Нека $a \equiv b \ (mod\ m)$. Докажи дека:

а) $a^2 \equiv b^2 \ (mod\ m)$; б) $a^3 \equiv b^3 \ (mod\ m)$.

◑ Примени ја Т.1 в), земајќи $c = a$, $d = b$.

Важи и поопшто:

T.2. Ако $a \equiv b \ (mod\ m)$, тогаш за кој било $n \in \mathbf{N}$,

$$a^n \equiv b^n \ (mod\ m).$$

Така, на пример, $10 \equiv 1 \ (mod\ 9)$, па $10^6 \equiv 1^6 \ (mod\ 9)$,
т.е. $1\,000\,000 \equiv 1 \ (mod\ 9)$.

Пример 1. *Да го најдеме остатокот од делењето на бројот* 4^{56} со 9.

Решение. Ќе го побараме оној степен од 4 што е конгруентен со 1 по модул 9. За таа цел ќе ја искористиме задачата 2, т.е. Т.2 а ќе тргнеме од очигледната конгруенција

$4 \equiv 4 \ (mod\ 9)$;

$4^2 \equiv 7 \ (mod\ 9)$, зашто $4^2 = 16 = 9 \cdot 1 + 7$;

$4^3 \equiv 1 \ (mod\ 9)$, зашто $4^3 = 64 = 9 \cdot 7 + 1$.

Бидејќи $56 = 18 \cdot 3 + 2$, последната конгруенција ќе ја степенуваме со 18 и ќе добиеме

$$4^{54} \equiv 1 \ (mod\ 9).$$

Ако, сега, ги помножиме меѓусебно:

$$4^{54} \equiv 1 \ (mod\ 9) \text{ и } 4^2 \equiv 7 \ (mod\ 9),$$

ќе добиеме:

$$4^{54} \cdot 4^2 \equiv 1 \cdot 7 \ (mod\ 9), \text{ т.е. } 4^{56} \equiv 7 \ (mod\ 9).$$

Значи, остатокот од делењето на бројот 4^{56} со 9 е 7.

3. Најди го остатокот од делењето на бројот 7^{65} со 16.

Забелешка. Својствата во Т.1 се точни и кога бројот на собироците, односно множителите, е поголем од два.

6. Конгруенциите може да се искористат и за добивање разни критериуми за деливост. Притоа се користи следново својство:

Т.3. Ако $a \equiv b \ (mod\ m)$, тогаш за кои било $c_0, c_1, \ldots, c_n \in \mathbf{Z}$ важи:
$$c_0 + c_1a + c_2a^2 + \ldots + c_na^n \equiv c_0 + c_1b + c_2b^2 + \ldots + c_nb^n \ (mod\ m).$$

Навистина, од

$$\begin{aligned} 1 &\equiv 1 \ (mod\ m), \\ a &\equiv b \ (mod\ m), \\ a^2 &\equiv b^2 \ (mod\ m), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a^n &\equiv b^n \ (mod\ m). \end{aligned}$$

множејќи ги, по ред, со: c_0, c_1, c_2/ · · · / c_n и собирајќи ги (а тоа може да се направи според Т.1), ќе добиеме дека:

$$c_0 + c_1a + c_2a^2 + \ldots + c_n a^n \equiv c_0 + c_1b + c_2b^2 + \ldots + c_n b^n \ (mod\ m).$$

Пример 2. *Да најдеме критериум за деливост со 9.*

Решение. Порано спомнавме дека секој природен број $a = \overline{a_n \ldots a_2a_1a_0}$ во декаден систем се запишува во обликот:

$$a = a_0 + a_1 10 + a_2 \cdot 10^2 + \cdots + a_n 10^n,$$

па затоа е згодно да ги одредиме остатоците на степените од 10 со бројот 9. Затоа:

$$\begin{aligned} 1 &\equiv 1 \ (mod\ 9) \\ 10 &\equiv 1 \ (mod\ 9) \\ 10^2 &\equiv 1 \ (mod\ 9) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 10^n &\equiv 1 \ (mod\ 9), \text{ за секој } n \in \mathbf{N}. \end{aligned}$$

Ако овие конгруенции ги помножиме, по ред: првата – со цифрата на единиците a_0, втората – со цифрата на десетките $a_1, \ldots$, последната – со a_n, и ги собереме, ќе добиеме:

$$a = a_0 + a_1 \cdot 10 + a_2 10^2 + \ldots + a_n 10^n \equiv a_0 + a_1 + \ldots + a_n \pmod 9$$

Оттука се гледа дека бројот a и збирот од неговите цифри имаат ист остаток при делењето со 9, па ако $9 \mid (a_0 + a_1 + \ldots + a_n)$, тогаш и $9 \mid a$.

4. Провери дали е делив со 9 бројот:

а) 45 328 671; б) 57 402 628.

Во одречен случај најди го остатокот.

Пример 3. Да провериме дали, за секој $n \in \mathbf{N}$, изразот:

$42^{n+3} + 29^{n+1} + 9^{2n+1}$ е делив со 13.

Решение. Гледаме дека $42 \equiv 3 \pmod{13}$ и $29 \equiv 3 \pmod{13}$, а $9 \equiv -4 \pmod{13}$. Ќе се обидеме да најдеме некој степен од 9 што е, исто така, конгруентен со 3 по модул 13 (па сите три конгруенции ќе имаат „тројка" на десната страна); тоа е $9^2 \equiv 3 \pmod{13}$.

Сега, врз основа на Т.2, ќе имаме:

$$42^{n+3} \equiv 3^{n+3} \pmod{13}$$
$$29^{n+1} \equiv 3^{n+1} \pmod{13},$$
$$(9^2)^n \cdot 9 \equiv 3^n \cdot 9 \pmod{13}$$

$3^{n+1} \cdot 9 + 3^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 3$

имајќи предвид дека

па, ако ги собереме, ќе добиеме:

$$42^{n+3} + 29^{n+1} + 9^{2n+1} \equiv 13 \cdot 3^{n+1} \pmod{13}.$$

Бидејќи $13 \cdot 3^{n+1} \equiv 0 \pmod{13}$, следува дека и

$$42^{n+3} + 29^{n+1} + 9^{2n+1} \equiv 0 \pmod{13},$$

т.е. дадениот израз е делив со 13.

Пример 4. Да докажеме дека:

$$57 \mid 7^{n+2} + 8^{2n+1} / n \in \mathbf{N}.$$

Решение: Ќе постапиме како во претходниот пример:

$$7 \equiv 7 \pmod{57},$$
$$8^2 \equiv 7 \pmod{57}.$$

Оттука се добива

$$7^{n+2} \equiv 7^{n+2} \pmod{57},$$
$$(8^2)^n \cdot 8 \equiv 7^n \cdot 8 \pmod{57},$$

па, со собирање:

$$7^{n+2} + 8^{2n+1} \equiv 7^n (7^2 + 8) \pmod{57},$$

т.е.

$$7^{n+2} + 8^{2n+1} \equiv 0 \pmod{57}.$$

Значи, дадениот израз е делив со 57 за секој$n \in \mathbf{N}$.

Пример 5. *Да докажеме дека, за секој* $n \in \mathbf{N}$.

$$6 \mid n(n^2 + 11) = n^{15} + 11n^{13}.$$

$\perp n^{13}$

Решение. Знаеме дека при делењето на кој било број n со 6 се добива остаток 0, 1, 2, 3, 4 или 5, т.е.

$n = 6q$, $n = 6q + 1$, $n = 6q + 2$, $n = 6q + 3$, $n = 6q + 4$, $n = 6q + 5$.

1) Ако $n = 6q$, тогаш тврдењето во задачата е точно (Зошто?);

2) ако $n = 6q + 1$, тогаш:

$$n \equiv 1 \ (mod\ 6),$$

од каде што:

$$n^{15} \equiv 1 \ (mod\ 6),\ 11n^{13} \equiv 11 \ (mod\ 6),$$

па $n^{15} + 11n^{13} \equiv 12 (mod\ 6)$; значи, тврдењето е точно и во овој случај;

3) ако $n = 6q + 2$, тогаш:

$n \equiv 2\ (mod\ 6)$, $n^{15} \equiv 2^{15}\ (mod\ 6)$, $11n^{13} \equiv 11 \cdot 2^{13}\ (mod\ 6)$, па $n^{15} + 11n^{13} \equiv 2^{12} \cdot 30\ (mod\ 6)$; значи тврдењето е точно

На ист начин се проверува дека тврдењето е точно и во случаите кога n е од обликот $6q + 3$, $6q + 4$, $6q + 5$.

5. Докажи дека тврдењето од примерот 5 е точно кога n е од обликот $6q + 5$.

Вежби

6. Исказот $24 \equiv 3\ (mod\ 7)$ е точен. Образложи ја точноста на исказите:
а) $-24 \equiv -3\ (mod\ 7)$; б) $(\forall c \in \mathbf{Z})\ (c \cdot 24 \equiv c \cdot 3\ (mod\ 7)$; в) $(\forall c_1, c_2 \in \mathbf{Z})$ $(c_1 24 + c_2 24^2 \equiv c_1 \cdot 3 + c_2 \cdot 3^2\ (mod\ 7))$.

7. Со помош на конгруенции, изведи критериум за деливост со 3.

8. Изведи критериум за деливост со 11. Со помош на тој критериум, провери дали е делив со 11 бројот:
а) 12 359 632; б) 31 458 625.

9. Најди го остатокот од делењето на бројот:
а) 6^{1990} со 7; б) 8^{42} со 5.

10. Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$:
а) $7 \mid 37^{n+2} + 51^{n+1} + 30^n$;
б) $11 \mid 47^{n+3} + 5^{2n+1} + 69^n$.

11. Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$:
а) $31 \mid 5^{n+2} + 6^{2n+1}$; б) $9 \mid 64^n + 5^{3n}$.

12. Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$:
$4 \mid n^7 - n^5$; б) $6 \mid n^5 + 5n^3$.

13. Докажи дека, за секој $n \in \mathbf{N}$, остатокот од делењето на $4^n + 15n$ со 9 е 1.

◑ $4^3 \equiv 1 (mod\ 9)$, а потоа испитај за $n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$.

14. Најди го остатокот од делењето на дадените броеви:
а) 3^{555} со 10; б) $222^{555} + 555^{222}$ со 7;
в)* 14^{256} со 17.

15.* Нека a, b, c се цели броеви и m е природен број. Докажи дека: „Ако НЗД $(c, m) = 1$ и $ca \equiv cb\ (mod\ m)$, тогаш $a \equiv b\ (mod\ m)$“, (т.е. важи законот на кратење кај конгруенции). Покажи дека тоа не е точно ако НЗД $(c, m) > 1$.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ – III

1. Запиши го множеството содржатели на бројот 5 описно и таблично.

2. Одреди го множеството од сите заеднички содржатели на броевите 6 и 8.

3. Најди го множеството решенија на исказната функција Р (x, y): $x - y = 2$, определена на множеството $D = \{1, 3, 5, 7\}$.

4. Дадено е множеството $A = \{1\} \cup \{x \mid x \in \mathbf{N} \wedge x > 5\}$. Дали A е групоид во однос на: а) множењето, б) собирањето на природни броеви?

5. Дадено е множеството $M = \{6, 8, 12, 24\}$ и правилата $*$ и $\circ$, определени за M со: $x * y$ = НЗД(x, y), $(x_0 y$ = НЗС $x, y)$. Испитај дали е групоид парот $(M,*)$, односно $(M, \circ$. Во потврден случај, состави ја келиевата шема.

6. Запиши го со симболи исказот: „За секој цел број a постои цел број b, којшто му е спротивен на бројот a.“

7. Најди го множеството решенија на предикатот $A\ (x, y)$: $x \cdot y = 5$ определен во $\mathbf{Z}$.

8. Дадено е множеството $S = \{7k \mid k \in \mathbf{Z})$. Испитај ги својствата на групоидите $(S, +)$ и $(S, \cdot)$, и утврди дали некој од нив е група.

9. Како може од шемата на еден конечен групоид да се утврди дали има неутрален елемент?

10. Испитај дали е прстен множеството $P = \{2k \mid k \in \mathbf{N}\}$ во однос на операциите собирање и множење на цели броеви.

11. Во множеството $M = \{10, 20, -30, -5, -2\}$ е зададена релацијата „$<$“. Нацртај го нејзиниот граф и утврди дали е: а) рефлексивна, б) транзитивна, в) симетрична.

12. Одреди го множеството решенија на исказната функција $P(x, y)$: $x \cdot y = 0$, определена во $\mathbf{Z}$.

13. Реши ја неравенката $7 - x < -2$.

14. Испитај дали назначеното правило $*$ е операција во даденото множество.
1) $A = \{5^n \mid n \in \mathbf{N}\}$, а) $x * y = x + y$; б) $x * y = x \cdot y$.
2) $B = \{1, 2, 3, 4\}$, а) $x * y$ = НЗД(x,y); б) $x * y$ = НЗС(x,y)
3) $C = \{4, 6, 8, 9, 10, 12, \ldots\}$ – множеството од сите сложени броеви,
а) $x * y = x \cdot y$; б) $x * y = x + y$.

15. Во задачите а) – е) увери се дека даденото множество е групоид во однос на назначеното правило $*$ и испитај кои од својствата: комутативност, асоцијативност, неутрален елемент ги поседува тој групоид:

а) $\mathbf{N}$, $x * y = 1 + x + y$.
б) $\mathbf{N}$, $x * y = 1 + x \cdot y$.
в) $\mathbf{N}$, $x * y = 1 + \boxed{xy}$.
г) $\mathbf{Z}$, $x * y = x + y + xy$.
д) $P = \{2k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $x * y = \frac{x \cdot y}{2}$
ѓ) $\mathbf{Z}$, $x * y = |x - y|$.
е) $\mathbf{N}$, $x * y = max\ \{x, y\}$.

x^y

16. Во задачите а) – д) состави ја келиевата шема на групоидот $(G*)$, а потоа според шемата, одреди дали е комутативен и дали има неутрален елемент.

а) $G = \{2, 4, 6, 8\}$, $x*y = x$.
б) $G = \{2, 4, 6, 8\}$, $x*y = y$.
в) $G = \{2, 4, 6, 8\}$, $x*y = 6$.
г) $G = \{2, 4, 6, 8\}$, $x*y =$ НЗД (x, y).
д) $G = \{2, 4, 6, 8\}$, $x*y = max\{x, y\}$.

17. Испитај дали е група групоидот $(G, *)$.

а) $G = \{2k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $x*y = x + y + 2$.
б) $G = \mathbf{Z}$, $x*y = x + y + xy$ (в. зад. 16 г)).
в) $G = \{3k \mid k \in \mathbf{Z}\}$, $x*y = \frac{x \cdot y}{2}$
г) $G = \mathbf{Z}$, $x*y = |x - y|$ (в. зад. 16 г)).

б 15
б 15

18.* Покажи дека множеството $G = \{1, 5, 7, 11\}$ (броеви, заемно прости со 12) е група во однос на множењето по модул 12. (За асоцијативноста – провери неколку случаи.)

19. Реши ја по x равенката $a*x = b$, каде што:

а) $*$ е собирање во $\mathbf{Z}$ и: $a = 5$, $b = 3$.
б) $*$ е операцијата НЗС во $\mathbf{N}$ и: $a = 6$, $b = 24$.
в) $*$ е операцијата НЗС во $\mathbf{N}$ и: $a = 6$, $b = 10$.
г) $*$ е определена во $\mathbf{N}$ со: $x*y = max\ \{x, y\}$ и: $a = 5$, $b = 4$.
д) $*$ е операцијата $\ominus_6$ во M_6 и: $a = 3$, $b = 0$.

20. Провери дали е прстен во однос на собирањето и множењето на цели броеви множеството:

а) $P = \{4k \mid k \in \mathbf{Z}\}$; б) $P = \{7k \mid k \in \mathbf{Z}\}$; в) $P = \{3k \mid k \in \mathbf{N_0}\}$.

21. Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$:
а) $2 \mid n^2 - n$; б) $6 \mid n^3 - n$; в) $30 \mid n^5 - n$.

22. Докажи дека:
а) ако n е непарен, тогаш $8 \mid n^2 - 1$.
б) ако m и n се непарни, тогаш $m^2 + n^2$ е парен, но не е делив со 4.

23. Докажи дека:
(p и q се прости) $\wedge$ $(p \mid q) \Rightarrow p = q$.

24. Со што се издвојува бројот 1 од другите природни броеви?
Наброј ги сите такви негови особености што ги знаеш.

25. Докажи дека, за секој $n \in \mathbf{N}$, изразот во следниве задачи е сложен број:
а) $(n + 1)^2 - (n - 1)^2$.
б) $(n + 1)^3 + n^3 + (n - 1)^3$.
в) $(n + 1)(n - 2) + (n + 2)(n + 3)$.

26. Најди го најмалиот четирицифрен број којшто поделен со 3, 4, 5, 6 и 7 дава остаток 2.

27. Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$ изразот:

а) $\frac{10^n + 2}{3}$, б) $\frac{10^n + 8}{9}$,

е природен број.
◑ а) $10^n + 2 = 10\ldots02$, $1 + 2 = 3$ е делив со 3.

28. Пресметај го НЗД (216, 288, 372)
а) со разложување на прости множители,
б) со Евклидовиот алгоритам.
Најди го, прво $d =$ НЗД (216, 288), а потоа НЗД $(d, 372)$.

29.* Докажи дека, за кој било $n \in \mathbf{N}$, изразите:

$$\frac{n-6}{15} \quad \text{и} \quad \frac{n-5}{24}$$

не се истовремено цели броеви.

◑ $n - 6 = 15 \cdot a$, $n - 5 = 24 \cdot b$; $3 \cdot (8b - 5a) = 1$.

30. Најди број кој при делењето со 3 дава остаток 1, а при делењето со 37 дава остаток 33.

31. Запиши го НЗД (14, 35) во обликот $14x_0 + 35y_0$; најди два такви различни парови x_0, y_0.

32.* За НЗД и НЗС од два броја a, b важи равенството

$$\boxed{\text{НЗД } (a, b) \cdot \text{НЗС } (a, b) = a \cdot b.}$$

Користејќи го тоа (или поинаку), реши го во $\mathbf{N}$ следниов систем равенки:

а) НЗД $(a, b) = 13$
   НЗС $(a, b) = 1\,989$;

б) $ab = 20$.
   НЗС $(a, b) = 10$.

33. Најди ги x и y, ако се знае дека:

а) $11 \mid \overline{123x456}$; б) $45 \mid \overline{257x14y}$.

34.* Најди критериум за деливост со бројот 7. Потоа, провери дали се деливи со 7 броевите:

а) 367 892; б) 4 283 914.

35. Докажи дека за секој $n \in \mathbf{N}$:

а) $6 \mid n^3 + 17n$; б) $14 \mid 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$;

в) $6 \mid n(2n + 1)(7n + 1)$; г)* $(n + 5) \mid (n^2 + 3n - 10)$

36. Најди го остатокот од делењето на:

а) 11^{10} со 100; б) $7^{100} + 11^{100} + 17$ со 13;

в) $8^{n+2} + 9^{2n+1}$ со 73.

ГЛАВА IV

РЕАЛНИ БРОЕВИ. ПРИБЛИЖНИ ВРЕДНОСТИ

Со воведувањето на целите броеви ние го проширивме поимот за број, а со тоа ги зголемивме можностите за решавање на некои проблеми што не можеа да се решат во множеството на природните броеви. Но, и ова проширување не е доволно за решавање на одделни проблеми од науката, техниката и секојдневниот живот, особено тие што се сврзани со мерењето на величини. Затоа ќе извршиме нови проширувања на поимот број. Така ќе дојдеме до множеството на рационалните броеви, а потоа и до множеството на реалните броеви.

IV.1. МНОЖЕСТВОТО НА РАЦИОНАЛНИТЕ БРОЕВИ

а. **Дропки.** Видовме дека делењето во множеството $\mathbf{Z}$ не е секогаш возможно, т.е. количникот $a:b$ на два цели броја a, b $(b \neq 0)$ само во некои случаи е цел број. Со други зборови, равенката (по x)

$$b \cdot x = a \tag{1}$$

има решение во $\mathbf{Z}$ само за некои вредности на a и b.

На пример, равенката $2 \cdot x = 10$ има решение за $x = 5$, додека равенката $4 \cdot x = 3$ нема решение во $\mathbf{Z}$.

За да може равенката (1) да има решение за кои било $a, b \in \mathbf{Z}$, се воведува нов вид броеви, наречени дропки. Имено, секој количник $a : b$, $b \neq 0$, се смета за број, којшто се вика **дропка** и се означува со $\frac{a}{b}$; значи:

$$\boxed{\frac{a}{b} = a : b \qquad (a,\ b \in \mathbf{Z},\ b \neq 0)} \tag{2}$$

Така, дропки се: $\frac{3}{4}, \frac{10}{2}, \frac{-8}{13}, \frac{15}{-6}, \frac{4}{1}$, а $\frac{2}{0}, \frac{-3}{0}, \frac{0}{0}$ не се дропки.

Во дропката $\frac{a}{b}$, како што знаеш, бројот a се вика **броител**, бројот b **именител** на дропката, а цртата што ги раздвојува a и b се вика **дробна црта.**

Множеството од сите дропки се вика множество на рационалните броеви и се означува со $\mathbf{Q}$. Значи:

$$\boxed{\mathbf{Q} = \{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbf{Z}, \quad b \neq 0\}.}$$

Секој елемент на $\mathbf{Q}$ т.е секоја дропка, се вика **рационален број.**

Притоа, рационалните броеви со именител 1, како на пример $\frac{2}{1}$, $\frac{9}{1}$, $\frac{-4}{1}$, природно е да ги сметаме за цели броеви (зашто, на пример, $\frac{2}{1} = 2 : 1 = 2$, $\frac{-4}{1} = -4 : 1 = -4$ итн.). Затоа се зема

$$\boxed{(\forall a \in \mathbf{Z}) \quad \frac{a}{1} = a.}$$

Според тоа, секој цел број е и рационален број, т.е. $\mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q}$.

Но, цели броеви се, *на пример*, и дропките: $\frac{6}{3}, \frac{12}{4}, \frac{-30}{5}$ (зашто $\frac{6}{3} = 6 : 3 = 2$ итн.). Очигледно е дека секој цел број може да се претстави во вид на дропка на различни начини. На пример, бројот 2 можеме да го претставиме со:

$$\frac{2}{1}, \frac{6}{3}, \frac{-8}{-4} \text{ итн.}$$

Општо, допката $\frac{a}{b}$ е цел број кога a е делив со b.

1. Претстави ги во вид на дропка следниве броеви:

а) 3; б) – 4; в) 100; г) – 1.

2. Одреди кои од следниве искази се вистинити:

а) $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$; б) $\frac{1}{2} \in \mathbf{Z}$; в) $\frac{-3}{4} \in \mathbf{Q}$; г) $10 \notin \mathbf{Q}$.

б. **Еднаквост на дропки.** При делењето на цели броеви често се случува од различни парови да добиеме ист количник, како на пример:

$$6 : 3 = 2, \qquad 10 : 5 = 2, \qquad 14 : 7 = 2.$$

Овие количници можеме да ги запишеме како дропки и, бидејќи се еднакви меѓу себе, можеме нив да ги изедначиме:

$$\frac{6}{3} = \frac{10}{5}, \qquad \frac{6}{3} = \frac{14}{7}, \qquad \frac{10}{5} = \frac{14}{7}.$$

За секое од тие равенства забележуваме дека: $6 \cdot 5 = 3 \cdot 10$, $6 \cdot 7 = 3 \cdot 14$, $10 \cdot 7 = 5 \cdot 14$, т.е. производот на броителот од едната и именителот од другата дропка е еднаков со производот од именителот на првата и броителот од втората дропка.

Таа идеја се користи за дефинирање еднаквост на рационални броеви.

Рационалните броеви $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ се **еднакви** ако и само ако $ad = bc$. Со симболи:

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc.} \qquad (3)$$

Така, на пример, дропките $\frac{3}{6}$ и $\frac{4}{8}$ се еднакви, зашто $3 \cdot 8 = 24 = 6 \cdot 4$.

3. Испитај дали се еднакви дропките:

а) $\frac{2}{4}$ и $\frac{3}{6}$, б) $\frac{-9}{21}$ и $\frac{6}{-14}$, в) $\frac{4}{6}$ и $\frac{15}{20}$.

4. Искажи ја со зборови формулата (3).

5. Испитај ја вистинитоста на следниве искази:

а) $\frac{3}{4} = \frac{-6}{-8}$, б) $\frac{12}{-8} = \frac{18}{-12}$, в) $\frac{126}{12} = \frac{188}{18}$.

b. **Проширување и скратување на дропки.** Кај дропките се мошне важни и поимите проширување и скратување на дропки.

Да се прошири една дропка $\frac{a}{b}$ значи да се помножи и броителот и именителот со еден ист број k, различен од нула; добиената дропка $\frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ е еднаква со дадената, зашто $a \cdot (bk) = b \cdot (ak)$.

Значи, за секој $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$, важи равенството

$$\boxed{\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k}} \qquad (4)$$

Ова својство се вика **проширување на дропки**; за дропката $\frac{a \cdot k}{b \cdot k}$ се вели дека е добиена од проширувањето на дропката $\frac{a}{b}$ со бројот k.

Пример 1. а) *Да ја прошириме дропката* $\frac{5}{8}$ *со* 9.

Имаме: $\frac{5}{8} = \frac{5 \cdot 9}{8 \cdot 9} = \frac{45}{72}$

б) Дропката $\frac{15}{10}$ е проширување на дропката $\frac{3}{2}$, зашто:

$$\frac{3}{2} = \frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5} = \frac{15}{10}$$

6. Дропката $\frac{a}{b}$ прошири ја со -4, ако:

а) $a = 5$, $b = 3$, б) $a = 4$, $b = -11$, в) $a = -5$, $b = -3$.

Равенството (4), запишано во обратна насока, ќе биде

$$\boxed{\frac{a \cdot k}{b \cdot k} = \frac{a}{b}} \qquad (a, b, k \in \mathbf{Z},\ b \neq 0,\ k \neq 0) \qquad (5)$$

Со ова равенство е искажано едно друго својство на дропките: една дропка не се менува ако броителот и именителот се поделат со еден ист број што е делител и на броителот и на именителот. Тоа својство се вика **скратување на дропки.**

Пример 2. *Да ја скратиме дропката* $\frac{18}{24}$.

Решение. Дропката можеме да ја скратиме со 2; тогаш

$$\frac{18}{24} = \frac{18:2}{24:2} = \frac{9}{12}.$$

Но, можеме да ја скратиме и со 3; така,

$$\frac{18}{24} = \frac{18:3}{24:3} = \frac{6}{8}.$$

Под скратување на (ненулта) дропка обично се мисли делење на броителот и именителот со нивниот најголем заеднички делител (НЗД). Во тој случај броителот и именителот на добиената дропка се заемно прости броеви и таа се вика **нескратлива дропка.**

Во горниот пример НЗД $(18, 24) = 6$ $(18 = 2 \cdot 3^2 = 3 \cdot 6$, $24 = 2^3 \cdot 3 = 4 \cdot 6)$. По делењето со 6, добиваме

$$\frac{18}{24} = \frac{18:6}{24:6} = \frac{3}{4};$$

добиената дропка $\frac{3}{4}$ е нескратлива (додека за $\frac{18}{24}$ се вели дека е **скратлива дропка**).

7. Утврди кои од следниве дропки се нескратливи:

а) $\frac{7}{6}$, б) $\frac{15}{-8}$, в) $\frac{18}{21}$.

8. Скрати ги дропките:

а) $\frac{12}{42}$, б) $\frac{-9}{39}$, в) $\frac{35}{-7}$, г) $\frac{-162}{-189}$.

Проширувањето на дропки ни овозможува две или повеќе дропки со различни именители да ги сведеме на дропки со еднакви именители.

Пример 3. *Да ги сведеме на ист именител дропките:*

$$\frac{3}{4}, \frac{5}{6} \text{ и } \frac{7}{3}$$

Решение. НЗС $(4, 6, 3) = 12$, па дропките ќе ги прошириме така што именителите да им бидат 12.

$$\frac{3}{4} = \frac{9}{12}, \quad \frac{5}{6} = \frac{10}{12} \text{ и } \frac{7}{3} = \frac{28}{12}$$

9. Сведи ги на еднаков именител дропките:

$$\frac{5}{9},\ \frac{4}{3},\ \frac{7}{12},\ \frac{1}{2}.$$

Да забележиме дека **можеме да ја избегнеме употребата на негативни именители.** Во дропка со негативен именител можеме броителот и именителот да ги помножиме со (–1).

На пример, $\frac{15}{-8} = \frac{15 \cdot (-1)}{-8 \cdot (-1)} = \frac{-15}{8};\ \frac{-4}{-6} = \frac{-4 \cdot (-1)}{-6 \cdot (-1)} = \frac{4}{6}$ итн.

Вежби

10. Утврди дали се еднакви следниве дропки:

а) $\frac{15}{16}, \frac{12}{13}$; б) $\frac{10}{18}, \frac{25}{27}$; в) $\frac{-12}{-18}, \frac{22}{33}$.

11. За кои вредности на a дадениот израз не е дропка:

а) $\frac{a}{a+3}$ б) $\frac{4}{a(a-1)}$; в) $\frac{a+2}{a^2-4}$?

12. Дропката $\frac{a}{b}$ прошири ја со 7, ако:

а) $a = 4, b = -5$; б) $a = -2, b = 11$.

13. Скрати ги дропките:

а) $\frac{12}{18}$; б) $\frac{15}{40}$; в) $\frac{108}{126}$; г) $\frac{-77}{143}$.

14. Скрати ги дропките:

а) $\frac{6 \cdot 20 \cdot 21}{25 \cdot 14 \cdot 9}$; б) $\frac{24 \cdot 150 \cdot 60}{80 \cdot 27 \cdot 125}$.

15. Сведи ги на ист именител дропките:

а) $\frac{3}{8}, \frac{5}{6}$; б) $\frac{5}{12}, \frac{11}{15}, \frac{7}{6}$.

IV.2. ОПЕРАЦИИ СО ДРОПКИ

а. **Собирање и одземање дропки. Збир на две дропки со исти именители, на пример $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{b}$, е дропка чиј броител е збирот од броителите, а именител е именителот на тие дропки, т.е.**

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}} \qquad (1)$$

Пример 1.

а) $\frac{2}{7}+\frac{3}{7}=\frac{2+3}{7}=\frac{5}{7}$; б) $\frac{13}{8}+\frac{-4}{8}=\frac{13+(-4)}{8}=\frac{9}{8}$

Ако, пак, дропките што треба да ги собереме имаат различни именители, тогаш прво ќе ги прошириме до заеднички именител, а потоа ќе ги собереме како погоре. Притоа, обично, го бараме најмалиот заеднички содржател (НЗС) на именителите, којшто го викаме најмал заеднички именител.

Пример 2. $\frac{7}{8}+\frac{5}{6}=\frac{7\cdot 3}{24}+\frac{5\cdot 4}{24}=\frac{21}{24}+\frac{20}{24}=\frac{41}{24}.$

Пример 3. $\frac{5}{12}+\frac{-8}{15}=\frac{5\cdot 5}{60}+\frac{-8\cdot 4}{60}=\frac{25}{60}+\frac{-32}{60}=\frac{-7}{60}.$

Општо, собирањето на дропките можеме да го вршиме по следнава формула:

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}} \qquad (2)$$

Понекогаш дропките ги пишуваме како мешани дропки и обратно.

Пример 4. $\frac{16}{3}=\frac{15}{3}+\frac{1}{3}=5+\frac{1}{3}=5\frac{1}{3}$ (без знакот +).

Пример 5. $3\frac{4}{7}=3+\frac{4}{7}=\frac{21}{7}+\frac{4}{7}=\frac{25}{7}$

Како што спомнавме, кој било цел број a го сметаме за дропка – дропката $\frac{a}{1}$. Според тоа, бројот 0 е дропката $\frac{0}{1}$, којашто е еднаква со $\frac{0}{b}$ за секој цел број $b \neq 0$. Тој број е неутрален елемент за собирањето на дропки. За секоја дропка $\frac{a}{b}$ важи

$$\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}+\frac{0}{b}=\frac{a+0}{b}=\frac{a}{b}$$

Очигледно, **спротивна дропка** на дропката $\frac{a}{b}$ е $\frac{-a}{b}$:

$$\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}=\frac{a+(-a)}{b}=\frac{0}{b}=0.$$

Затоа, по примерот на целите броеви, наместо $\frac{-a}{b}$ обично пишуваме $-\frac{a}{b}$, т.е.

$$\boxed{-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}}$$

Аксиомите $(A_1)-(A_4)$ коишто важат за собирање цели броеви (III.6), важат и за собирање дропки – со малку труд, во тоа можеме лесно да се увериме. Според тоа, важи теоремата:

Т.1. Множеството **Q** на рационалните броеви е група во однос на операцијата собирање на дропки.

Поради тоа, **одземањето** може да го дефинираме како обратна операција на собирањето: првата дропка (намаленикот) ќе ја собереме со спротивната на втората дропка (намалителот), т.е.

$$\boxed{\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a}{b}+\frac{-c}{d};} \qquad (3)$$

последниот збир, пак, знаеме како да го пресметаме.

Пример 6. $\frac{5}{4}-\frac{2}{3}=\frac{5}{4}+\frac{-2}{3}=\frac{15}{12}+\frac{-8}{12}=\frac{7}{12}.$

Се разбира, при практичните пресметувања, го избираме покусиот пат: веднаш наоѓаме заеднички именител и вршиме одземање на броителите. Така, за горниот пример постапуваме вака:

$$\frac{5}{4}-\frac{2}{3}=\frac{15}{12}-\frac{8}{12}=\frac{7}{12}.$$

1. Пресметај:

а) $\frac{8}{5}+\frac{3}{2}-\frac{4}{3}$; б) $2\frac{1}{3}+3\frac{5}{6}-2\frac{1}{2}-5$.

6. **Множење дропки. Производ** на две дропки $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ е дропка чиј броител е производ на броителите a и c, именител е производот на именителите b и d, т.е.

$$\boxed{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}} \qquad (4)$$

Пример 7. $\frac{4}{5} \cdot \frac{25}{12} = \frac{4 \cdot 25}{5 \cdot 12} = \frac{100}{60}$

Притоа, резултатот обично го скратуваме (ако е скратлива дропка) пред да го извршиме множењето.

Пример 8. $\frac{4}{5} \cdot \frac{25}{12} = \frac{4 \cdot 25}{5 \cdot 12} = \frac{2^2 \cdot 5^2}{5 \cdot 2^2 \cdot 3} = \frac{5}{3}$.

Ако една дропка ја помножиме со бројот 1, тогаш резултатот ќе биде дадената дропка:

$$\frac{a}{b} \cdot 1 = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}.$$

Значи, **бројот 1 е неутрален елемент за множењето на дропки.**

За операцијата множење на дропки, определена со формулата (4), важат истите својства (A_5) – (A_8) како за множењето на целите броеви. Проверката може да се изврши без тешкотии. На пример:

$$(A_7) : \frac{a}{b} \cdot \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \cdot \frac{cf + de}{df} = \frac{a \cdot (cf + de)}{bdf} = \frac{acf + ade}{bdf} =$$

$$= \frac{acf}{bdf} + \frac{ade}{bdf} = \frac{ac}{bd} + \frac{ae}{bf} = \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \cdot \frac{e}{f},$$

т.е. важи дистрибутивниот закон на множењето спрема собирањето на дропки.

Од тоа и врз основа на теоремата Т.1 заклучуваме дека важи следнава теорема:

Т.2. Структурата $(\mathbf{Q}, + , \cdot)$ е комутативен прстен со единица.

Да разгледаме уште неколку примери.

Примери. 9. $\frac{6}{5} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{15}{14} = \frac{6 \cdot 4 \cdot 15}{5 \cdot 9 \cdot 14} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5}{5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 7} = \frac{4}{7}$

10. $\left(\frac{5}{3} - \frac{7}{6}\right) \cdot \frac{3}{2} = \left(\frac{10}{6} - \frac{7}{6}\right) \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{4}$

b. **Делење на дропки.** Да се подели една дропка $\frac{a}{b}$ со друга дропка $\frac{c}{d}$ ($\frac{c}{d} \neq 0$) значи да најдеме трета дропка $\frac{x}{y}$, таква што производот со втората, да ја даде првата дропка. Значи:

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{x}{y} \iff \frac{x}{y} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a}{b}} \qquad (5)$$

Не е тешко да се увериме дека за $\frac{x}{y}$ можеме да ја земеме дропката $\frac{ad}{bc}$, т.е.

$$\frac{x}{y} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

Навистина,

$$\frac{x}{y} \cdot \frac{a}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d \cdot c}{b \cdot c \cdot d} = \frac{a}{b}.$$

Треба само да објасниме дека $\frac{x}{y}$ навистина е дропка, а за тоа е доволно да увидиме дека бројот $y = b \cdot c$ е различен од нула. Но, $\frac{a}{b}$ е дропка, па $b \neq 0$, а $\frac{c}{d}$ по претпоставка не е нула, па $c \neq 0$. Значи, $b \cdot c \neq 0$.

Значи, равенката во (5) станува вистинит исказ за $\frac{x}{y} = \frac{ad}{bc}$. Може да се докаже дека не постои друга дропка, различна од $\frac{ad}{bc}$, што го има тоа својство.

И така, две дропки можеме да поделиме, секогаш кога делителот е различен од нула, по следново правило:

$$\boxed{\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}} \quad \left(\frac{c}{d} \neq 0\right) \tag{6}$$

Пример 11. а) $\frac{5}{4} : \frac{25}{6} = \frac{5 \cdot 6}{4 \cdot 25} = \frac{5 \cdot 2 \cdot 3}{2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5} = \frac{3}{10}$

б) $4 : \frac{-2}{3} = \frac{4}{1} : \frac{-2}{3} = \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot (-2)} = \frac{12}{-2} = -6.$

2. Пресметај: а) $1 : \frac{1}{2}$; б) $1 : \frac{3}{5}$; в) $1 : \frac{a}{b}$ $\left(\frac{a}{b} \neq 0\right)$

Во претходната задача за в) сигурно доби:

$$1 : \frac{a}{b} = \frac{1}{1} : \frac{a}{b} = \frac{1 \cdot b}{1 \cdot a} = \frac{b}{a}.$$

Тоа значи дека за која било дропка $\frac{a}{b}$ $(\frac{a}{b} \neq 0)$ важи:

$$\boxed{\frac{b}{a} \cdot \frac{a}{b} = 1} \tag{7}$$

Дропката $\frac{b}{a}$ се вика **реципрочна вредност** на дропката $\frac{a}{b}$.

3. Најди ја реципрочната вредност на бројот

а) $\frac{2}{3}$, б) $\frac{-4}{5}$, в) 2. г) -1.

Правилото (6) можеме да го запишеме и вака:

$$\boxed{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c},}$$

а тоа значи дека *делењето се извршува така што деленикот ќе се помножи со реципрочната вредност од делителот.*

Да разгледаме уште неколку примери за делење дропки.

Примери:

12. $\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{2}\right):\left(1-\frac{5}{6}\right)=\left(\frac{4}{6}-\frac{9}{6}\right):\left(\frac{6}{6}-\frac{5}{6}\right)=\frac{-3}{6}:\frac{1}{6}=\frac{-3}{6}:\frac{6}{1}=-3;$

13. $\left(\frac{b}{a}-\frac{a}{b}\right):\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)=\frac{b^2-a^2}{ab}:\frac{b-a}{ab}=\frac{(b-a)(b+a)}{ab}\cdot\frac{ab}{b-a}=b+a$

Притоа претпоставуваме дека сите именители се различни од нула, т.е. сите дропки имаат смисла.

Се разгледуваат и дропки чиј броител и именител се дропки; тие се викаат **двојни дропки.** На пример,

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$$

е двојна дропка. Тоа, всушност е само друга ознака за делење на дропка со дропка. Така, имаме:

$$\boxed{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}}$$

Значи, *двојната дропка ја претвораме во обична дропка, чиј броител е производот од „надворешните“членови, а именителот е производот од „внатрешните“ членови на двојната дропка.*

Вежби

Пресметај ги изразите во задачите 4 – 10.

4. а) $\frac{3}{5}+\frac{4}{5}$, б) $\frac{5}{13}-\frac{2}{13}$, в) $\frac{1}{4}-\frac{1}{8}$.

5. а) $\frac{2}{7}+\frac{4}{3}$, б) $\frac{4}{6}-\frac{4}{7}$, в) $2\frac{3}{8}-1\frac{5}{6}$.

6. а) $\frac{3}{4}+\frac{5}{3}-\frac{7}{6}$, б) $\frac{9}{4}-\frac{17}{6}+\frac{13}{9}-2$.

7. а) $\frac{1}{3}-\frac{a}{6}$, б) $\frac{a}{6}+\frac{2}{3}-\frac{b}{3}$, в) $\frac{4}{3}-\frac{9}{10}+\frac{1}{5}$.

8. а) $\frac{8}{15}\cdot\frac{5}{4}$, б) $\frac{10}{-4}\ \frac{12}{-15}$, в) $\left(\frac{2}{6}-\frac{3}{4}+1\right)\cdot\frac{6}{7}$.

9. а) $\frac{4}{9}:\frac{8}{27}$, б) $\frac{-4}{5}:\frac{-6}{15}$, в) $\left(1-\frac{3}{5}\right):\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{5}\right)$.

10. а) $\dfrac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}}$, б) $\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{5}{6}}{1+\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}}$, в) $\dfrac{\left(\frac{3}{2}-\frac{2}{3}\right):2}{\frac{3}{4}-\frac{4}{3}}$.

11. Реши ја равенката (по x):

а) $5x-3=7$; б) $1+3x=\frac{5}{4}$, в) $\frac{3}{4}-\frac{2}{3}x=\frac{1}{2}$.

12.* Докажи дека за кои било рационални броеви p и q:

а) $p+q\in\mathbf{Q}$; б) $p-q\in\mathbf{Q}$; в) $p\cdot q\in\mathbf{Q}$.

Упатство. Стави $p=\frac{a}{b}$ и $q=\frac{c}{d}$ каде што a, b, c, d се цели броеви (b, $d\neq 0$) и искористи ги формулите (2) – (4).

13.* Докажи дека за кои било рационални броеви A, B постои рационален број x, таков што:

$$A+x=B,$$

т.е. дека равенката $A+x=B$ е решлива во множеството $\mathbf{Q}$ за секој пар $A, B\in\mathbf{Q}$.

14.* Докажи дека равенката $A\cdot x=B$ е решлива во множеството $\mathbf{Q}$ за кои било $A, B\in\mathbf{Q}$ и $A\neq 0$.

IV.3. ПОЛЕТО НА РАЦИОНАЛНИТЕ БРОЕВИ

а. **Поим за поле.** За означување на рационални броеви, досега употребувавме по две букви, како $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ итн. Меѓутоа, понекогаш е згодно да се користи и само една буква: p, q, r, a, x итн.

Така, за да го искажеме комутативниот закон на собирањето на рационални броеви, можеме да запишеме:

$$(\forall p, q\in\mathbf{Q})\quad p+q=q+p$$

или, за дистрибутивниот закон на множењето спрема собирањето:

$$(\forall p, q, r\in\mathbf{Q})\quad p\cdot(q+r)=pq+pr.$$

Во претходната лекција утврдивме дека собирањето и множењето на рационални броеви ги имаат исто така својствата A_1-A_8 од II.7, т.е. структурата $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ е комутативен прстен со единица. Уште повеќе, со равенството (7) од III.2 утврдивме дека:

A_9: Секој рационален број, различен од нула, има инверзен елемент во однос на множењето, т.е.

$$(\forall r \in \mathbf{Q},\ r \neq 0)\ (\exists r' \in \mathbf{Q}) \qquad r \cdot r' = r'r = 1.$$

Очигледно, во множеството $\mathbf{Q}$ важи и следново својство:

A_{10}: Неутралниот елемент за множењето (единицата) е различен од неутралниот елемент за собирањето (нулата).

Секое множество P, со две операции $+$ и $\cdot$, т.е. алгебарската структура $(P\ ,\ +,\ \cdot)$, за која се исполнети условите A_1 – A_{10}, се вика **поле**, а самите услови се викаат **аксиоми за поле.**

Така, множеството $\mathbf{Q}$ е поле во однос на операциите собирање и множење на рационални броеви.

За еден групоид $(P,\ +)$, својствата A_1 – A_4 означуваат дека тој е комутативна група. За групоидот $(P^*,\ \cdot)$, каде што $P^* = P \setminus \{0\}$, условите A_5, A_6, A_8 и A_9 означуваат дека тој е комутативна група. Условот A_7, пак, означува дека множењето е дистрибутивно спрема собирањето.

Според тоа, дефиницијата за поле можеме да ја искажеме и покусо, на следниов начин:

Едно множество P е поле во однос на две операции $+$ („собирање") и $\cdot$ („множење") ако се исполнети следниве услови:

(Π_1) групоидот $(P,\ +\ )$ е комутативна група,

(Π_2) групоидот $(P^*,\cdot)$ е комутативна група, при што P^* е множеството P без неутралниот елемент 0 за собирањето,

(Π_3) важи дистрибутивниот закон на множењето спрема собирањето.

Очигледно, секое поле е комутативен прстен со единица, но тоа е побогата структура отколку прстен, поради аксиомата A_9 (т.е. секој ненулти елемент има инверзен во однос на множењето).

Пример 1. *Да го разгледаме множеството*

$$M_5 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$

и операциите собирање $\oplus$ и множење $\odot$ по модул 5.

Келиевите шеми на групоидите $(M_5,\ \oplus)$ и $(M_5,\ \odot)$ се:

$\oplus$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\odot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

r	1	2	3	4
r'	1	3	2	4

Порано утврдивме дека:

1) групоидот $(M_5, \oplus)$ е комутативна група,
2) множеството $M_5^* = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ е комутативна група во однос на операцијата $\odot$ (секој $r \in M_5^*$ има инверзен $r' \in M_5^*$),
3) операцијата $\odot$ е дистрибутивна спрема $\oplus$ (на пример:
$2\odot(3\oplus 3) = 2\odot 1 = 2;\ 2\odot 3\oplus 2\odot 3 = 1\oplus 1 = 2$; итн.)

Значи, условите (Π_1), (Π_2^*) , (Π_3) се исполнети, па структурата $(M_5, \oplus, \odot)$ е поле.

1. Покажи дека множеството $M_3 = \{0,\ 1,\ 2\}$ е поле во однос на собирањето $\oplus$ и множењето $\odot$ по модул 3.

6. **Подредување во множеството Q.** При работата со дропките, како што спомнавме во IV.1, можеме да се ограничиме само на дропки со позитивни именители. *На пример,* наместо дропката $\frac{3}{-4}$, можеме да ја разгледуваме дропката $\frac{-3}{4}$, имено, $\frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$ зашто $3 \cdot 4 = 12 = (-4) \cdot (-3)$. Исто така $\frac{-5}{-7} = \frac{5}{7}$ итн.

Општо, секој рационален број $r = \frac{a}{b}$ $(a,\ b \in \mathbf{Z},\ b \neq 0)$ можеме да го запишеме во обликот

$$\boxed{r = \frac{m}{n}} \tag{1}$$

каде што n е природен број, а m е цел број. Според тоа:

$$\boxed{\mathbf{Q} = \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}\right\}.}$$

Таквиот запис на рационалните броеви е згоден за нивното споредување, т.е. за воведување релација за подредување во множеството $\mathbf{Q}$.

За рационалниот број $r = \frac{m}{n}$ $(m \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N})$ велиме дека е:

– **позитивен,** ако $m > 0$; пишуваме: $r > 0$;
– **негативен,** ако $m < 0$; пишуваме: $r < 0$.

На пример, бројот $\frac{2}{3}$ е позитивен $(\frac{2}{3} > 0)$, зашто $2 > 0$, а бројот $\frac{-3}{4}$ е негативен $(\frac{-3}{4} < 0)$, зашто $-3 < 0$. И дропката $\frac{3}{-4}$ е негативна, зашто $\frac{3}{-4} = \frac{-3}{4}$, а $\frac{-3}{4}$ е негативна.

Ќе велиме дека рационалниот број p е **поголем** од рационалниот број q и ќе пишуваме $p > q$, ако $p - q > 0$, а p е **помал** од q и ќе пишуваме $p < q$, ако $p - q < 0$. Со симболи:

$$\boxed{\begin{array}{l} p > q <=> p - q > 0, \\ p < q <=> p - q < 0. \end{array}} \qquad \begin{array}{r} (2) \\ (3) \end{array}$$

Пример 1 . *Да проверимe кој број е поголем:* $\frac{3}{4}$ *или* $\frac{5}{6}$ *?*

Имаме: $\frac{3}{4} - \frac{5}{6} = \frac{9-10}{12} = \frac{-1}{12} < 0,$

а тоа, според (3), значи дека $\frac{3}{4} < \frac{5}{6}$, т.е. $\frac{5}{6}$ е поголем од $\frac{3}{4}$.

2. Утврди кој од дадените рационални броеви е поголем:

а) $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{7}$; б) $\frac{-5}{6}$ и $\frac{-8}{9}$; в) $\frac{21}{-10}$ и $\frac{32}{-15}$.

Пример 2. *Да ги подредиме по големина броевите:*

$$\frac{4}{5}, \frac{-2}{3}, \frac{8}{10}, \frac{-16}{15}, 1.$$

За таа цел, сите овие броеви ќе ги сведеме на заеднички именител 30:

$$\frac{24}{30}, \frac{-20}{30}, \frac{24}{30}, \frac{-32}{30}, \frac{30}{30}$$

Сега, овие лесно ќе ги подредиме:

$$\frac{-32}{30} < \frac{-20}{30} < \frac{24}{30} = \frac{24}{30} < \frac{30}{30}.$$

Значи, дадените броеви треба да ги подредиме вака:

$$-\frac{16}{15} < \frac{-2}{3} < \frac{8}{10} = \frac{4}{5} < 1$$

3. Подреди ги по големина броевите:

а) $\frac{1}{6}, \frac{-2}{3}, \frac{-3}{4}, 2, \frac{11}{6}$; б) $-\frac{3}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{-2}, 0, \frac{3}{-8}$.

Од дефиницијата на позитивен односно негативен рационален број следува дека за секој $r \in \mathbf{Q}$ важи:

$$\text{или } r > 0 \text{ или } r = 0 \text{ или } r < 0.$$

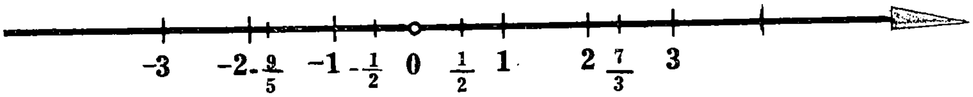
Со тоа множество $\mathbf{Q}$ се разбива на три дела: множество позитивни рационални броеви, $\mathbf{Q}^+$, множество негативни рационални броеви, $\mathbf{Q}^-$ и нулата, т.е.

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^+ \cup \{0\} \cup \mathbf{Q}^-.$$

4. Утврди кој од следниве искази е вистинит:

а) $\mathbf{Q}^+ \subseteq \mathbf{Q}$; б) $\mathbf{Q} \cap \mathbf{Q}^- = \{0\}$; в) $\mathbf{Q}^+ \cap \mathbf{Q}^- = \varnothing$; г) $\mathbf{Q}^- \subset \mathbf{Q}^+ \cup \{0\}$.

Рационалните броеви, како и целите броеви, можеме да ги претставуваме геометриски, на бројна оска. На црт. 1 се претставени и запишани неколку рационални броеви: $-\frac{9}{5}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, \frac{7}{3}$.



Црт. 1

5. Претстави ги на бројна оска броевите: $2, \frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{5}{3}$.

Очигледно, секој позитивен рационален број е поголем од секој негативен. Лесно се покажува дека подредувањето во **Q** ги има истите својства $(S_1) - (S_4)$ како подредувањето на целите броеви во (III.6).

Имено, за кои било $p,q,r \in \mathbf{Q}$ важи:

(S_1) или $p > q$ или $p = q$ или $p < q$ (трихотомија)

(S_2) $p < q \wedge q < r \Rightarrow p < r$ (транзитивност)

(S_3) $p < q \Rightarrow p+r < q + r$ (монотоност спрема собирањето).

(S_4) $(\forall s \in \mathbf{Q}^+)$ $[p < q \Rightarrow ps < qs]$ (монотоност спрема множењето).

Да го докажеме, на пример, својството (S_2)

По претпоставка, $p < q$ и $q < r$, а тоа според (3) значи дека $p - q < 0$ и $q - r < 0$. Бидејќи $p - r = p - r + q - q = (p - q) + (q - r) < 0$, т.е. $p - r < 0$, од (3) следува дека $p < r$.

Аналогно се докажува точноста и на другите три својства.

Поле, во кое елементите се подредени така што да важат условите (т.е. аксиомите) $(S_1) - (S_4)$ се вика **подредено поле.**

Така, полето $(\mathbf{Q}, +, \cdot)$ на рационалните броеви е подредено поле.

6. Аритметичка средина на два броја p и q е бројот $s = \dfrac{p+q}{2}$.

Утврди дека аритметичката средина на броевите $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{4}$ е рационален број s што се наоѓа меѓу нив, т.е. $\frac{1}{2} < s < \frac{3}{4}$

Општо, ако p и q се рационални броеви и $p < q$, тогаш нивната аритметичка средина е рационален број што се наоѓа меѓу нив, т.е.

$$\boxed{p < \frac{p+q}{2} < q.}$$

Тоа значи дека меѓу кои било два рационални броја има рационален број. Тоа својство се вика **густо подредување на рационалните броеви. Се вели уште дека множеството Q е густо подредено.**

b. Вежби

7. Дали структурата $(M_4; \oplus, \odot)$, каде што $M_4 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ а $\oplus$ и $\odot$ се собирање и множење по модул 4, е поле?

8. Подреди ги по големина броевите: $\frac{4}{3}; \frac{3}{4} - \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{6}$

9. Најди ја аритметичката средина на броевите: $\frac{3}{2}$ и $\frac{8}{5}$.

10*. Увери се дека **Z** не е густо множество. (Избери два цели броја a и b, такви што $\frac{a+b}{2}$ да не е цел број.)

11*. Докажи го својството а) (S_3), б) (S_4) за подредувањето во **Q** Упатство:
а) $(p + r) - (q + r) = p - q$; б) $ps - qs = (p - q) \cdot s$.

12. Докажи дека:

а) $p, q \in \mathbf{Q}^+ \Rightarrow p \cdot q \in \mathbf{Q}$;
б) $(\mathbf{Q}^+, \cdot)$ е комутативна група.

IV.4. ДЕЦИМАЛНИ БРОЕВИ

a. **Децимални дропки.** Дропките со именител 10, 100, 1000, ... се викаат **децимални** или **десетични дропки.** Такви се, на пример дропките:

$$\frac{1}{10}, \frac{253}{10}, \frac{9}{100}, \frac{7302}{1000}, \frac{15}{1000} \text{ и др.}$$

Како што ти е познато од порано, тие се запишуваат без именител, вака:

$\frac{1}{10}$ како 0,1 (0 цели и една десетинка)

$\frac{253}{10}$ како 25,3 (25 цели и три десетинки)

$\frac{9}{100}$ како 0,09 (0 цели и девет стотинки)

$\frac{7302}{1000}$ како 7,302 (7 цели и 302 илјадинки).

Децималните дропки запишани без именител се викаат **децимални броеви.**

Секој децимален број е составен од два дела, што се одделени со запирка: **цел дел** – пред запирката и **дробен дел** – по запирката. Дробниот дел се вика уште **децимален дел**, неговите цифри – **децимали**, а запирката – **децимална** запирка.

Дропки чии именители се броеви коишто се производи од степени на бројот 2 и бројот 5 лесно се прошируваат до децимални дропки. На пример:

$$\frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0,8; \qquad \frac{7}{2} = \frac{35}{10} = 3,5; \qquad \frac{32}{25} = \frac{128}{100} = 1,28;$$

$$\frac{9}{40} = \frac{9 \cdot 25}{40 \cdot 25} = \frac{225}{1000} = 0,225.$$

1. Запиши ги како децимални броеви:

а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{9}{8}$; в) $\frac{1}{200}$; г) $\frac{93}{80}$.

Обратно, секој децимален број може да се запише како обична дропка. На пример,

$$0,15 = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}; \qquad 5,625 = \frac{5625}{1000} = \frac{45}{8}.$$

2. Запиши ги како обични дропки:

а) 0,4; б) 3,24; в) 32,125.

3. Следниве броеви запиши ги така што да имаат по ист број децимали:

0,5; 1,2765; 2,0; 4,531000; 15; 0,00270.

Потсети се дека: 1) децималниот број не се менува, ако од десната страна му се допишат колку било нули; 2) секој природен број може да се запише како децимален, кога ќе се одидели со запирка и ќе му се допишат колку било нули како децимали; 3) децимален број кој десно од запирката има нули не се менува ако тие се изостават.

б. **Операции со децимални броеви.** Преку неколку примери ќе се потсетиме на операциите со децимални броеви.

Нека се дадени броевите:

$$a = 16,345 \quad \text{и} \quad b = 3,26.$$

Пример 1 (*Собирање*)

$$\begin{array}{r} 16{,}345 \\ +\;\; 3{,}26 \\ \hline 19{,}605 \end{array}$$

Пример 2 (*Одземање*)

$$\begin{array}{r} 16{,}345 \\ -\;\; 3{,}26 \\ \hline 13{,}085 \end{array}$$

Пример 3 (*Множење*)

$$16{,}345 \cdot 3{,}26 = \frac{16345}{1000} \cdot \frac{326}{100} = \frac{16345 \cdot 326}{10^5} = \frac{5328470}{10^5} = 53{,}2847$$

Значи, децимални броеви се множат така што се помножуваат множителите земени без децимални запирки, а потоа, во резултатот се издвојуваат толку децимали колку што е збирот на децималите во двата броја.

Пример 4.

$$\begin{array}{r} 5{,}12 \cdot 6{,}3 \\ \hline 1536 \\ 3072 \\ \hline 32{,}256 \end{array}$$

Пример 5. *Да го извршиме делењето 16,345 : 3,26*

Решение. Пред да го започнеме делењето, ќе ги помножиме деленикот и делителот со некој степен на бројот 10, таков што делителот да стане цел број. Во дадениот пример треба да помножиме со 100. Така, имаме:

$$\begin{array}{l} 1634{,}5 : 326 = 5{,}0138 \\ \underline{1630} \\ \quad \underline{\;\;45} \\ \quad\; 450 \\ \quad\; \underline{326} \\ \quad\; 1240 \\ \quad\;\; \underline{978} \\ \quad\;\; 2620 \\ \quad\;\; \underline{2608} \\ \qquad\;\;\; 12 \end{array}$$

Делењето ќе го прекинеме тогаш кога ќе сметаме дека резултатот е доволно точен за нашите потреби.

4. Пресметај:

$$4{,}25 \cdot 8{,}6 - 21{,}57 + 53{,}2 : 12{,}45.$$

b. Вежби

5. Запиши ги како децимални броеви:

$$\frac{4}{7}, \quad \frac{15}{8}, \quad \frac{9}{5}, \quad \frac{13}{25}.$$

6. Запиши ги како нескратливи (обични) дропки:

0,12; 0,06; 7,125; 4,1325.

7. Пресметај:

а) $3{,}25 \cdot 4{,}8 \cdot \frac{5}{6}$; б) $4{,}8 : 1{,}54$.

Во задачите 8 – 10, пресметај ги изразите:

8. $8{,}35 \cdot 5{,}4 + 17{,}3 : 4{,}12 - 23{,}8$.

9. $\frac{0{,}8}{4{,}5} \cdot 1{,}8 - (3{,}6 \cdot 0{,}07) : 0{,}18$.

10. $(72{,}8 - 57{,}42) : 1{,}685$.

$\boxed{11}$ Следниве дропки претвори ги во децимални броеви (во кои група цифри ќе се повторува)

а) $\frac{7}{3}$; б) $\frac{5}{12}$; в) $\frac{38}{11}$.

IV.5. ПЕРИОДИЧНИ ДЕЦИМАЛНИ БРОЕВИ

a. **Периодични децимални броеви.** Со помош на постапката за делење, секоја дропка преминува во конечен или бесконечен децимален број. На пример,

$$\frac{5}{8} = 0{,}625; \qquad -\frac{7}{4} = -1{,}75; \qquad \frac{8}{3} = 2{,}666\ldots$$

Секој конечен децимален број, со додавање нули од десната страна, исто така може да се претвори во бесконечен децимален број. Така

$$0{,}625 = 0{,}625000\ldots; \qquad -1{,}75 = -1{,}75000\ldots$$

И секој цел број, со запишување децимална запирка по него и додавање нули, може да се претстави како бесконечен децимален број.

На пример,

$5 = 5{,}000\ldots,$ $\quad 0 = 0{,}000\ldots;$ $\quad -72 = 72{,}000\ldots$

Според тоа, секој рационален број можеме да го претставиме во вид на бесконечен децимален број.

1. Претстави ги како бесконечни децимални броеви следниве рационални броеви:

а) $\frac{40}{16}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $-\frac{17}{8}$; г) $\frac{27}{9}$.

Пример 1. *Да ги претвориме во децимални броеви следниве дропки:*

а) $\frac{35}{6}$; б) $\frac{42}{33}$; в $\frac{466}{74}$

Решение. а) $\frac{35}{6} = 5{,}833\ldots$; б) $\frac{42}{33} = 1{,}272727\ldots$;

в) $\frac{466}{74} = 6{,}297297\ldots$

Од примеров гледаме дека има децимални броеви при кои група цифри, од некое место, почнува да се повторува. Таквите броеви се викаат **периодични децимални броеви.** Така,

$$5{,}833\ldots; \qquad 1{,}272727\ldots; \qquad 6{,}297297\ldots.$$

се периодични децимални броеви; тие се запишуваат покусо на следниов начин:

$$5{,}8(3); \qquad 1{,}(27); \qquad 6{,}(297)$$

или: $5{,}8\overline{3}$; $1{,}\overline{27}$; $6{,}\overline{297}$. Ние ќе ги запишуваме на првиот начин.

За периодични децимални броеви ги сметаме и броевите како: 0,2300...; 5,000...; и нив ги запишуваме кратко: 0,23(0); 5,(0).

Бројот запишан во загради се вика **период;** 2,(6) се чита: „два цели и шест во периодот“; 3,4(27) се чита: „три цели, четири десетинки и дваесет и седум во периодот“.

2. Претвори ја во децимален број дропката $\frac{233}{37}$.

Сигурно задачава ја решаваше на следниов начин:

$$\frac{233}{37} = \begin{array}{l} 233 : 37 = 6{,}2972\ldots \\ \underline{222} \\ \;\;110 \\ \;\;\underline{\;\;74} \\ \;\;\;360 \\ \;\;\;\underline{333} \\ \;\;\;\;\;270 \\ \;\;\;\;\;\underline{259} \\ \;\;\;\;\;\;\;110 \\ \;\;\;\;\;\;\;\underline{\;\;74} \\ \;\;\;\;\;\;\;\;\;36 \end{array}$$

Остатоци при ова делење се: 11, 36, 27, 11, 36. Лесно се уочува дека бројот 297 во децималниот дел ќе се повторува, бидејќи се повтори остатокот 11.

Се докажува дека важи теоремата.

Т.1. Секој рационален број може да се претстави како периодичен децимален број.

Доказ*. Нека ни е даден кој било рационален број $\frac{m}{n}$, каде што n е природен број. При делењето на m со n, според правилото за делење со остаток (II.2), возможни се само овие остатоци:

$$0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

По најмногу n чекори во постапката на делењето, некој од овие остатоци мора да се повтори, а тоа значи дека во количникот ќе настане повторување на исти цифри по редот како што се добивале.

Со тоа, теоремата е докажана.

Во горниот пример, можни остатоци се: 0, 1, 2, ..., 36. Можевме да очекуваме повторување најмногу по 36 чекори, но тука повторувањето се јави по четвртиот чекор.

Важи и обратната теорема:

Т.2. Секој периодичен децимален број претставува некоја дропка, т.е. рационален број.

Како се претвора периодичен децимален број во дропка, ќе видиме од наредните примери.

Пример 2. *Да го претвориме бројот 0,(3) како дропка.*

Бараната дропка ќе ја означиме со x. Постапката е следнава

$$\begin{aligned} x &= 0,(3) = 0{,}333\ldots \\ 10x &= 3,(3) = 3{,}333\ldots \end{aligned}$$

$$10x - x = 3;\ 9x = 3;\ x = \frac{1}{3}.$$

Пример 3. $1,(24) = ?$

$$\begin{aligned} x &= 1,(24) = 1{,}242424\ldots \\ 100x &= 124,(24) = 124{,}2424\ldots \end{aligned}$$

$$100x - x = 123,\ x = \frac{123}{99} = \frac{41}{33} = 1\frac{8}{33}.$$

Пример 4. $0,1(45) = x;$

$$\begin{array}{rcl} 1\,000x = 145,(45) & = & 145,4545\ldots \\ 10x = 1,(45) & = & 1,4545\ldots \\ \hline 990x = 144, \; x = \dfrac{144}{990} = \dfrac{8}{55}. & & \end{array}$$

3. Следниве периодични броеви претвори ги во дропки:

а) 2,(7); б) 6,(45); в) 0,4(72); г) 0,(571428)

б. **Споредување на децимални броеви.** Децималните броеви, како рационални броеви, може да се споредуваат.

Прво да се потсетиме како се споредуваат конечни децимални броеви.

1°. *Ако целите делови на два децимални броја се различни, тогаш поголем е оној што има поголем цел дел.* Така,

$$16,735 < 32,11 \text{ затоа што } 16 < 32.$$

2°. *Ако целите делови на два позитивни децимални броеви им се еднакви, тогаш ги споредуваме нивните дробни делови;* на пример:

$$5,62038 < 5,62041$$

затоа што целите броеви и првите три децимали им се еднакви, а четвртата децимала на бројот од левата страна на неравенството е помала: $3 < 4$.

3°. *Ако целите делови на два негативни децимални броеви им се еднакви, тогаш поголем е оној што има помала апсолутна вредност.* На пример,

$$-3,27412 > -3,27458,$$

бидејќи $|-3,27412| < |-3,27458|$.

4. Спореди ги по големина броевите:

а) 7,988 и 11,23; б) 4,3207 и 4,3158;

в) −9,738 и −3,912; г) −4,3207 и −4,3158.

На ист начин се споредуваат и **бесконечните** децимални броеви.

5. Спореди ги по големина:

а) 8,23051 . . . и 8,23042; б) 5,(3) и 5,(6).

б. Вежби

6. Претстави ги како бесконечни децимални броеви следниве дропки:

а) $\frac{13}{6}$; б) $\frac{17}{4}$; в) $\frac{6}{13}$.

7. Претстави ја како бесконечен десетичен број дропката $\frac{89}{12}$ и објасни зошто тој е периодичен.

Во задачите 8 – 12 запиши ги како обични дропки дадените периодични децимални броеви.

8. а) 0,(4); б) 2,(6); в) 0,(9); г) 3,(9).
9. а) 1,(63); б) 3,(25); в) 4,(023).
10. а) 2,3(2); б) 4,2(9); в) 3,24(9).
11. а) 4,5(18); б) 0,82(35).
12. а) 0,1(234); б) 3,(285714).

13. Спореди ги броевите:

а) 5,420158 и 5,420231; б) −3,57162 и −3,57152;

в) −0,826 и 0,625; г) 0,2333 . . . и 0,233.

$\boxed{14.}$ Најди ја страната на квадрат чија плоштина е: а) 16; б) 6,25.

$\boxed{15.}$ Пресметај: а) $\sqrt{276}$; б) $\sqrt{2}$ со три децимали.

$\boxed{16.}$ Докажи дека е тавтологија следнава исказна формула (види и II.6):

$$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \land \neg q \Rightarrow r \land \neg r).$$

IV.6. РЕАЛНИ БРОЕВИ

а. **Воведување на реалните броеви.** Производот на кои било два рационални броја, како што знаеш, е рационален број. Специјално, квадратот на кој било рационален број $\frac{m}{n}$, т.е. производот $\frac{m}{n} \cdot \frac{m}{n}$ што се запишува како $\left(\frac{m}{n}\right)^2$, е рационален број. Притоа, очигледно, тој број е позитивен. На пример,

$$\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{9};$$

$\frac{4}{9}$ е позитивен рационален број и квадрат на $\frac{2}{3}$.

Да си го поставиме сега обратното прашање: дали секој позитивен рационален број е квадрат на некој рационален број? Со други зборови, дали за кој било позитивен рационален број a постои рационален број x што го задоволува равенството.

$$x^2 = a? \tag{1}$$

Познато ти е од порано, а можеше да увидиш и при решавањето на задачата **14** од минатата лекција, дека за некои вредности на a постои рационален број за кој равенството (1) станува точен исказ.

Така, на пример, ако $a = 6, 25$, равенството (1) е точно за рационалниот број $x = 2, 5$.

Но, исто така, знаеш дека за a може да се избере таков позитивен рационален број што да не постои рационален број x за кој би било точно равенството (1).

Во тоа можеме да се увериме, на пример, од следнава теорема:

Т.1. Не постои рационален број чиј квадрат е еднаков со 2.

Доказ. Да претпоставиме дека постои рационален број $\frac{m}{n}$ чиј квадрат е бројот 2, т.е. $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$. Претпоставуваме уште дека дропката $\frac{m}{n}$ е нескратлива, бидејќи, во спротивно, можеме да ја скратиме и да добиеме нескратлива дропка.

Така, значи, тргнуваме од претпоставката:

$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ и дропката $\frac{m}{n}$ е нескратлива. (2)

Од $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2}$ и $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$, следува дека $\frac{m^2}{n^2} = 2$, т.е.

$$m^2 = 2n^2. \tag{3}$$

Тоа значи дека бројот m^2 е парен, а од тоа следува дека и бројот m е парен. (Докажи го тоа!) Според тоа, $m = 2k$ за некој цел број k. Заменувајќи го $m = 2k$ во (3), добиваме $4k^2 = 2n^2$ од каде што:

$$n^2 = 2k^2.$$

Тоа значи дека n^2 е парен, па и n е парен, т.е. $n = 2s$ за некој цел број s.

Така, тргнувајќи од (2), заклучуваме дека m и n се парни броеви, а тоа противречи на претпоставката дека дропката $\frac{m}{n}$ е нескратлива. Според правилото на контрадикција заклучуваме дека нема рационален број чиј квадрат би бил бројот 2. (Види зад. 16 од минатата лекција; овде е $p: \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$; $q: \left(\frac{m}{n}\right)^2 \neq 2$; $r: \frac{m}{n}$ е нескратлива дропка.)

Значи, равенката:

$$x^2 = 2$$

нема решение во множеството на рационалните броеви, а истото може да се заклучи и за многу други равенки од видот $x^2 = a$, каде што a е даден позитивен рационален број.

Тоа покажува дека множеството на рационалните броеви не ни е доволно за да решаваме задачи, на пример, од видот: „Да се најде страната на квадрат чија плоштина е 2“.

Од тие причини сакаме да го прошириме множеството **Q** со нов вид броеви, така што поширокото множество да го содржи и „бројот“ чиј квадрат е 2; тој „број“, како што знаеш од порано, се означува со симболот $\sqrt{2}$ и претставува ирационален број, т.е. $\sqrt{2} \notin \mathbf{Q}$.

6. **Множество на реалните броеви.** Во минатата лекција видовме дека секој рационален број може да се запише како децимален број; на пример:

$$\frac{5}{7} = 1{,}4; \qquad \frac{1}{6} = 0{,}1(6) = 0{,}1666\ldots$$

Да се обидеме на тој начин да го запишеме „бројот“ $\sqrt{2}$ Со проби (или со алгоритмот за коренување) лесно добиваме:

$$\begin{array}{ll}
1^2 & < 2 < 2^2 \\
1{,}4^2 & < 2 < 1{,}5^2 \\
1{,}41^2 & < 2 < 1{,}42^2 \\
1{,}414^2 & < 2 < 1{,}415^2 \\
1{,}4142^2 & < 2 < 1{,}4143^2 \\
\ldots\ldots & \ \ \cdot \quad \ldots\ldots
\end{array}$$

Со тоа добивме дека $\sqrt{2}$ „приближно“ е 1,4142.

Продолжувајќи така, би добиле бесконечен децимален број, којшто не е периодичен (навистина, кога би бил периодичен, тогаш тој би претставувал рационален број, а $\sqrt{2}$ не е рационален.)

Секако, постојат и други непериодични бесконечни децимални броеви. Таков е, на пример:

$$0{,}121221222122221\ldots$$

(по првата единица – една двојка, по втората единица – две двојки итн.).

1. Запиши на сличен начин уште два непериодични бесконечни децимални броеви.

Ќе прифатиме дека: *секој непериодичен бесконечен децимален број претставува некој нов вид број, којшто ќе го наречеме* **ирационален број.**

Така, бројот 0,1212212221 ..., запишан погоре, како и $\sqrt{2}$, се ирационални броеви. Ирационални броеви се и: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{15}$, π и др.

2. Запиши два ирационални броја.

Множеството на ирационалните броеви го означуваме со **J**.

Ирационалните броеви, заедно со рационалните, го формираат **множеството на реалните броеви**, што се означува со **R**. Значи,

$$\mathbf{R} = \mathbf{Q} \cup \mathbf{J} \qquad (4)$$

3. Утврди кои од следниве искази се точни:

а) $\mathbf{Q} \subset \mathbf{J}$; б) $\mathbf{Q} \cap \mathbf{J} = \emptyset$; в) $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q} = \mathbf{J}$; г) $\mathbf{R} \cap \mathbf{J} = \mathbf{J}$.

Секој реален број a, како што рековме, може да се претстави со бесконечен децимален број,

$$a = a_0\, a_1\, a_2\, a_3 \cdot \cdot \cdot,$$

периодичен – ако a е рационален, или непериодичен – ако a е ирационален.

Според тоа, *реалните броеви можеме да ги споредуваме со помош на правилото за споредување бесконечни децимални броеви,* наведено во IV.5. Со тоа е дефинирана **релација за подредување** во $\mathbf{R}$ за која се користи истиот симбол $<$ како за подредувањето во $\mathbf{Q}$.

Пример 1. *1,37468 < 1,3752, зашто целите делови и првите две децимали им се исти, но третата децимала на првиот број е помала од третата децимала од вториот (4 < 5).*

Пример 2. *Да ги споредиме реалните броеви*

$$\frac{306}{125} \text{ и } \sqrt{6}.$$

Прво ќе го претвориме секој од дадените броеви во бесконечен децимален број. Имаме:

$$\frac{306}{125} = 306 : 125 = 2{,}448(0),$$

а за $\sqrt{6}$, со помош на постапката за пресметување квадратен корен од број, добиваме

$$\sqrt{6} = 2{,}449\ldots$$

Постапувајќи како во примерот 1, заклучуваме дека $\frac{306}{125} < \sqrt{6}$.

4. Спореди ги броевите $\frac{36}{25}$ и $\sqrt{2}$.

Забелешка. Поимот апсолутна вредност на реален број се воведува на ист начин како за целите броеви, т.е. за кој било $a \in \mathbf{R}$:

$$|\,a\,| = \begin{cases} a, & \text{за } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{за } a < 0 \end{cases}$$

За кои било $a, b \in \mathbf{R}$, точни се следниве тврдења:

1°. $|-a| = |a|$; 2°. $|a + b| \leqslant |a| + |b|$;

3°. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$; 4°. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$.

Да забележиме дека множеството од сите позитивни бесконечни децимални броеви често се означува со $\mathbf{R}^+$, а од негативните – со $\mathbf{R}^-$.

Според тоа, $\mathbf{R} = \mathbf{R}^+ \cup \{0\} \cup \mathbf{R}^-$.

б. Вежби

5. Наведи неколку вредности на променливата a за кои $\sqrt{a}$ е:
а) ирационален, б) рационален број.

6. Посочи кои од дадените броеви се рационални:
$5;\ -\frac{3}{7};\ 1{,}2323\ldots;\ \sqrt{5};\ \sqrt{9};\ 0{,}525525552\ldots;\ \sqrt{49}.$

7. Запиши два ирационални броја во вид на бесконечен децимален број.

8*. Докажи дека $\sqrt{3}$ не е рационален број.

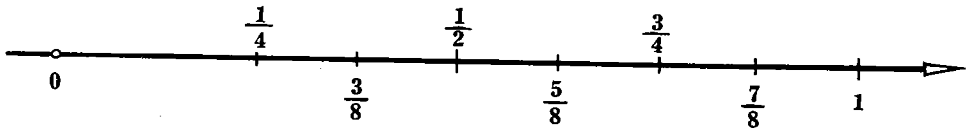
9. Спореди ги броевите
а) 1,41422513 и 1,4142487; б) $\frac{447}{250}$ и $\sqrt{5}$.

$\boxed{10.}$ Најди ја хипотенузата на правоаголен триаголник со катети:
а) $a = 5,\ b = 12$; б) $a = 1{,}5,\ b = 2$.

IV.7. ГЕОМЕТРИСКО ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ. ИНТЕРВАЛИ

а. **Претставување на реалните броеви на бројна оска.** Веќе знаеме да ги претставуваме целите броеви на бројна оска. И рационалните броеви ги претставуваме на бројната оска без тешкотии, зашто знаеме да поделиме дадена отсечка на n еднакви делови, за кој било даден природен број n.

На црт. 1 се претставени неколку рационални броеви на избраната бројна оска.



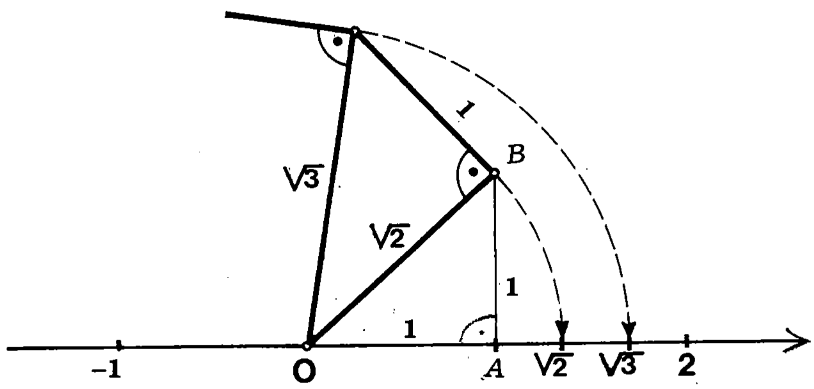
Црт. 1

1. Претстави ги на бројна оска и броевите:

а) $\frac{3}{16}$, $\frac{15}{16}$; б) $\frac{3}{32}$, $\frac{29}{32}$.

Во претходните лекции видовме дека множеството од рационалните броеви е густо подредено, т.е. меѓу кои било два рационални броја постои рационален број. Поради тоа, можеме да си го поставиме прашањето: дали на бројната оска има место и за ирационалните броеви? Специјално, дали има место за ирационалниот број $\sqrt{2}$?

Одговорот на ова прашање е потврден. Имено, во врска со поимот за растојание, *во геометријата се прифаќа дека должината на која било отсечка, при избрана единица, се изразува со ненегативен реален број и, обратно, за кој било ненегативен реален број постои отсечка чија должина е дадениот број.*



Црт. 2

Така, за ирационалниот број $\sqrt{2}$ има таква отсечка: хипотенузата c на правоаголен триаголник со катети $a = 1$ и $b = 1$, според Питагоровата теорема, изнесува $c = \sqrt{2}$.

На бројната оска на црт. 2 е претставен бројот $\sqrt{2}$ геометриски: хипотенузата OB на правоаголниот триаголник OAB (со катети $\overline{OA} = 1$ и $\overline{OB} = 1$), т.е. растојанието $\overline{OB} = \sqrt{2}$, пренесено е со шестар на бројната оска. Поради тоа, оваа постапка ја викаме „конструкција на бројот $\sqrt{2}$".

На црт. 2 е претставен и бројот $\sqrt{3}$.

2. Објасни ја конструкцијата на $\sqrt{3}$.

Секако согледа дека и за конструкцијата на $\sqrt{3}$ е искористена Питагоровата теорема:

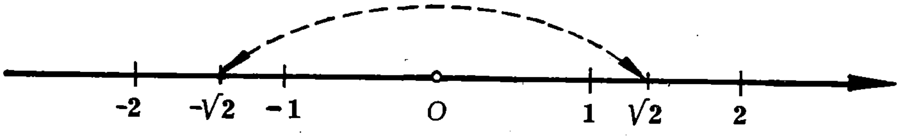
$$c^2 = a^2 + b^2, \text{ т.е. } c = \sqrt{a^2+b^2},$$

каде што a и b се катетите, а c е хипотенузата на правоаголен триаголник. Со користење на оваа теорема може да се конструираат уште многу други ирационални броеви, како: $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$ и др.

На пример, за $\sqrt{10}$ имаме $\sqrt{10} = \sqrt{1^2+3^2}$, што значи дека $\sqrt{10}$ е хипотенузата на правоаголен триаголник со катети 1 и 3.

3. Конструирај го бројот $\sqrt{5}$.

Бројот $-\sqrt{2}$ на бројната оска (црт. 3) е претставен како симетрична слика на бројот $\sqrt{2}$ во однос на почетокот O.



Црт. 3

4. Конструирај го бројот $-\sqrt{5}$.

Во врска со поставеното прашање, сега можеме да одговориме дека на бројната оска има место за секој реален број и „за ништо друго“. Со други зборови:

Секоја точка од бројната оска е слика точно на еден реален број, а секој реален број има своја слика на бројната оска.

Да истакнеме дека е важно, а и мошне згодно, многу тврдења за реалните броеви да се помнат со помош на сликата на бројната оска. На пример, ако a и b се дадени реални броеви, тогаш

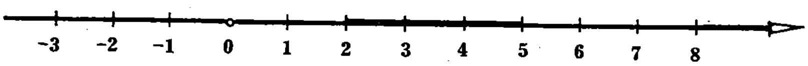
а) $a < b$, значи: сликата на бројот a е лево од сликата на бројот b;

б) $1 < a \land a < 5$ што се запишува и покусо: $1 < a < 5$ означува: сликата на бројот a е меѓу сликите на броевите 1 и 5.

5. Одреди што означува геометриски:

а) $1 < \sqrt{2}$; б) $-\sqrt{5} < -2$; в) $1 < x < 3$, $x \in \mathbf{R}$.

6. **Интервали.** Нека ни се дадени два реални броја, на пример 2 и 5 (црт. 4). Множеството од сите реални броеви што се наоѓаат меѓу дадените броеви го викаме **интервал**, а дадените броеви – **краеви** на тој интервал. Сликата на интервалот на бројната оска е отсечка (црт. 4).



Црт. 4

Ако краевите му припаѓаат на интервалот, тогаш велиме дека тој е **затворен интервал.** На пример, множеството од сите реални броеви меѓу броевите 2 и 5, заедно со 2 и 5, е затворен интервал, што го означуваме со

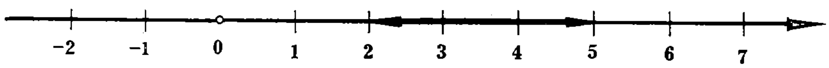
$$\{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leqslant \mid x \leqslant 6\} \text{ или, кратко, } [2,5].$$

6. Претстави го на бројна оска интервалот $[-1, 3]$.

Ако краевите не му припаѓаат на интервалот, тогаш тој се вика **отворен интервал.** *На пример,* множеството од сите реални броеви меѓу 2 и 5, без 2 и 5, е отворен интервал што го означуваме со

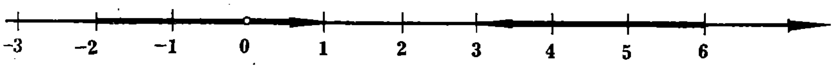
$$\{x \in \mathbf{R} \mid 2 < x < 5\} \text{ или, кратко, } (2,5).$$

Сликата на овој интервал е „отворената“ отсечка на црт. 5; стрелките означуваат дека краевите не му припаѓаат на разгледуваното множество.



Црт. 5

На црт. 6 се претставени и интервалите:
а) $[-2,1) = \{x \in \mathbf{R} \mid -2 \leq x < 1\}$, б) $(3,6] = \{x \in \mathbf{R} \mid 3 < x \leqslant 6\}$.



Црт. 6

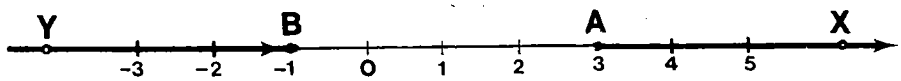
Се употребуваат и следниве ознаки:

$[a, +\infty)$ наместо $\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq a\}$, $(-\infty, a)$ наместо $\{x \in \mathbf{R} \mid x < a\}$,

каде што a е даден реален број. Симболот $+\infty$ (се чита: „плус бесконечност“) означува дека интервалот $[a, +\infty)$ е „бесконечен оддесно“. а симболот $-\infty$ – дека интервалот $(-\infty, a)$ е „бесконечен одлево“.

Во таа смисла, множеството $\mathbf{R}$ може да се запише како интервалот $(-\infty, +\infty)$, бесконечен од двата краја.

Така, интервалот $[3, +\infty)$ е претставен геометриски на црт. 7 како полуправа – полуправата AX, а интервалот $(-\infty, -1)$ – полуправата BY, без почетната точка B.



Црт. 7

7. Претстави ги интервалите, секој на посебна бројна оска:

а) $(-2, 3)$; б) $[1, 5)$; в) $(-3, 0]$; г) $[1, +\infty)$.

б. Вежби

8. Претстави ги на бројна оска броевите:

а) $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{9}{8}$; б) 1; 1,4; 1,41; 1,414; $\sqrt{2}$.

9. Покажи на бројната оска дека дропките:

$\frac{3}{4}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{12}{16}$ претставуваат ист број.

10. Конструирај ги броевите: $\sqrt{10}$, $\sqrt{17}$.

11. Претстави ги на бројна оска интервалите:

а) $[-4, -2]$; б) $(-1, 1)$; в) $[2, 5)$. г) $(-\infty, 2)$.

12. Запиши ги пократко интервалите:

а) $\{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leqslant x < 4\}$; б) $\{x \in \mathbf{R} \mid -3 < x \leqslant 2\}$; в) $\{x \in \mathbf{R} \mid 2 \leqslant x < +\infty\}$.

13. Претстави го на бројна оска пресекот на интервалите:

а) $[-3, 4]$ и $[1, 5]$; б) $(-1, 4)$ и $(2, 6]$. в) $(-\infty, 4]$ и $(1, +\infty)$.

14. Запиши ја унијата на интервалите:

а) $[-3, 4)$ и $(1, 5]$; б) $(-2, 2)$ и $[-1, 3]$.

$\boxed{15}$ Со постапката за наоѓање квадратен корен од позитивен рационален број, пресметај ги $\sqrt{2}$ и $\sqrt{3}$ до третата децимала, а потоа најди го збирот на така најдените броеви.

IV.8. СОБИРАЊЕ И МНОЖЕЊЕ НА РЕАЛНИ БРОЕВИ

а. Со реалните броеви сакаме да сметаме: да ги собираме, да ги множиме ... – како што правиме со рационалните броеви. Но, тоа не е можно со истите постапки.

Затоа е неопходен друг приод. Таков начин овозможуваат т.н. „приближувања со недостиг односно со вишок кон реален број“. Прво, ќе ги појасниме овие поими со еден пример.

Пример 1. *Нека е даден позитивен реален број, на пример*

$$a = 5{,}2836\ldots$$

Ако од овој број ги исфрлиме сите децимали по првата, ќе го добиеме бројот 5,2 и притоа $5{,}2 \leqslant a$. Ако на последното децимално место од добиениот број му додадеме единица, т.е. $5{,}2 + 0{,}1$, ќе го добиеме бројот 5,3 за кој важи $a < 5{,}3$.

Оваа постапка, применета прво по целиот дел, а потоа по првата децимала, по втората, по третата ..., ја дава следнава таблица:

0.	5	$\leq a <$	$5 + 1$	$= 6$
1.	5,2	$\leq a <$	$5{,}2+0{,}1$	$= 5{,}3$
2.	5,28	$\leq a <$	$5{,}28+0{,}01$	$= 5{,}29$
3.	5,283	$\leq a <$	$5{,}283+001$	$= 5{,}284$

.
.
.

За дадениот број $a = 5{,}2836\ldots$, броевите од левата страна на таблицата не се поголеми од a и се викаат **децимални приближувања со недостиг**, а броевите од десната страна на таблицата се поголеми од a и се викаат **децимални приближувања со вишок** кон реалниот број a (или, кусо, **приближувања** кон a).

За приближувањето (со недостиг односно со вишок) што ја содржи само првата децимала ќе велиме дека е **прво приближување**, за она што ги содржи само првите две – **второ приближување** итн.

1. Запиши ги првите четири приближувања со недостиг и со вишок кон реалниот број:

   а) $a = 2{,}(3)$; б) $b = \sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$.

Забелешка. Приближувањата со недостиг односно со вишок „отстапуваат" (се разликуваат) од дадениот број; така, за бројот $a = 5{,}2836\ldots$ од примерот 1 имаме:

$$(1)\quad \begin{aligned} a - 5{,}2 &< 0{,}1 \\ a - 5{,}28 &< 0{,}01 \\ a - 5{,}283 &< 0{,}001 \end{aligned} \qquad \text{односно} \qquad (2)\quad \begin{aligned} 5{,}3 - a &< 0{,}1 \\ 5{,}29 - a &< 0{,}01 \\ 5{,}284 - a &< 0{,}001 \end{aligned}$$

Користејќи ги приближувањата со недостиг и вишок, ќе покажеме со еден пример како може да се собираат реални броеви. Притоа, бројот што ќе се добие не ја искажува **точната** вредност на збирот, туку некоја негова **приближна** вредност (којашто отстапува од точната во смисла на (1) и (2)).

Пример 2. *Да пресметаме $a + b$, каде што:*

$$a = \frac{7}{3} \quad b = \sqrt{2}.$$

Ќе запишеме, прво, по неколку приближувања за секој од дадените броеви (имајќи предвид дека: $\frac{7}{3} = 2,(3)\ldots$, $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$):

$$\begin{aligned} 2{,}3 &\le a < 2{,}4 \\ 2{,}33 &\le a < 2{,}34 \\ 2{,}333 &\le a < 2{,}334 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} 1{,}4 &\le b < 1{,}5 \\ 1{,}41 &\le b < 1{,}42 \\ 1{,}414 &\le b < 1{,}415. \end{aligned}$$

Од тоа, за збирот $a + b$ добиваме:

$$\begin{aligned} 2{,}3 + 1{,}4 &\le a + b < 2{,}4 + 1{,}5 \\ 2{,}33 + 1{,}41 &\le a + b < 2{,}34 + 1{,}42 \\ 2{,}333 + 1{,}414 &\le a + b < 2{,}334 + 1{,}415. \end{aligned}$$

Ако последните (третите) приближувања на a и b ги означиме со:

$\underline{a}_3 = 2{,}333$ и $\underline{b}_3 = 1{,}414$ (со недостиг)
$\overline{a}_3 = 2{,}334$ и $\overline{b}_3 = 1{,}415$ (со вишок),
тогаш за збирот $a + b$ ќе имаме:

$$\underline{a}_3 + \underline{b}_3 \leq a + b < \overline{a}_3 + \overline{b}_3$$

т.е.

$$3,747 \leq \frac{7}{3} + \sqrt{2} < 3,749.$$

Според тоа, збирот $\frac{7}{3} + \sqrt{2}$ можеме да го запишеме како децимален број со *2 точни децимали*, т.е.

$$\frac{7}{3} + \sqrt{2} = 3,74\ldots \text{ (со точност до } 0,01)$$

2. Најди приближна вредност на збирот од броевите

$$a = 3,2715\ldots, \qquad b = 1,8304\ldots.$$

Со каква точност го пресмета тој збир?

3. Пресметај го збирот $\sqrt{3} + \sqrt{7}$, земајќи $\sqrt{3} = 1,7320\ldots$, $\sqrt{7} = 2,6457\ldots$. Со каква точност го пресмета?

b. И за множењето на реални броеви може да се искористат приближувањата со недостиг и со вишок. Ќе покажеме со еден пример како се пресметува приближно производот на два ненегативни реални броеви.

Пример 3. *Да го пресметаме производот на броевите* $a = 2,236\ldots$ *и* $b = 1,414\ldots$

Имаме: $\underline{a}_3 = 2,236$, $\underline{b}_3 = 1,414$; $\overline{a}_3 = 2,237$, $\overline{b}_3 = 1,415$, па:
$\underline{a}_3 \cdot \underline{b}_3 = 3,161704 \leq a \cdot b < 3,165355 = \overline{a}_3 \cdot \overline{b}_3$.

Така, за производот добиваме $a \cdot b = 3,16\ldots$ (две точни децимали). Повеќе ништо не можеме да кажеме без да ги знаеме натамошните децимали на множителите a и b.

4. Пресметај го (приближно) производот на броевите

$$a = 1,41\ldots \quad \text{и} \quad b = 1,73\ldots.$$

Со каква точност го пресмета?

Одземање на реални броеви се дефинира како обратна операција од собирањето, а **делење** (се разбира, без делење со нула) – како обратна операција од множењето.

Може да се докаже (со малку пообемна работа) дека за собирањето и множењето на реални броеви важат сите аксиоми (A_1) – (A_{10}) на поле. Според тоа:

Т.1. Множеството $\mathbf{R}$ на реалните броеви е поле во однос на операциите собирање (+) и множење (·) на реални броеви. Накусо, структурата $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ е поле.

Исто така, за подредувањето (<) во $\mathbf{R}$ важат аксиомите $(S_1) - (S_4)$ на подредено поле. Според тоа:

Т.2. Полето $(\mathbf{R}, +, \cdot)$ на реални броеви е подредено поле.

Вежби

5. Најди ги четирите први децимални приближувања со недостиг и со вишок и првите три точни децимали на бројот:

а) $\frac{10}{21}$; б) $\frac{11}{13}$; в) $\sqrt{5}$; г) $-\sqrt{5}$;

6. Дадени се: $a = 0{,}4571231\ldots$, $b = 1{,}3286452\ldots$. Најди ги првите пет (точни) децимали на збирот $a + b$.

7. Најди ги првите четири точни цифри на збирот:

а) $\frac{2}{3} + \sqrt{2}$; б) $\sqrt{2} + \sqrt{5}$.

8. Најди ги првите две децимали од производот:

а) $\frac{4}{3} \cdot \sqrt{2}$; б) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$.

IV.9. ПРИБЛИЖУВАЊА И ГРЕШКИ

а. Во проблемите од техниката и секојдневниот живот обично се бара да се пресмета нумеричката вредност на одредена величина според дадена формула, а користејќи некои податоци. Во школските задачи, скоро редовно се претпоставува дека податоците претставуваат **точни вредности** на соодветните величини.

Меѓутоа, во практиката, работата стои поинаку. Најголемиот број од податоците што се користат за пресметување на бараната величина, се добиваат со **мерење** на соодветните величини (должина, време, маса, притисок, напон и др.), а секое мерење дава само **приближна вредност** на мерената величина; таа, секако, отстапува од „вистинската“.

* Големината на отстапувањето на добиениот резултат од точната вредност на мерената величина зависи од повеќе фактори: од прецизноста на мерната направа, од внимателноста и умешноста на лицето што мери, понекогаш од температурата и влажноста на воздухот итн. Тоа отстапување некогаш ќе биде поголемо, а некогаш помало; но, во секој случај тоа постои и за него мора да се води сметка.

На пример, ако мерењето на **дебелината** на една метална плочка се врши со: обично метро, нониус, микрометар, ќе се добијат различни броеви – на пример

13 mm;   12,6 mm;   12,63 mm соодветно.

Исто така, ако **времето** се мери со обичен часовник, се добиваат броеви со точност до една секунда, а со штоперица се мерат и десетти делови од секундата. Во многу спортски дисциплини, пак, за првото место одлучуваат и стоти делови од секундата што се мерат со електронски направи.*

Во општ случај, очигледно, не можеме да ја знаеме точната вредност на мерената величина. Резултатот на мерењата на една величина, строго земено, не е еден одреден број, туку множество броеви што се наоѓаат во некој **интервал;** точната вредност на мерената величина ќе биде во тој интервал.

Пример 1. *Нека со мерење на некоја должина d е добиена вредноста* 5,73 m, *а притоа сме сигурни дека при мерењето не е погрешено за повеќе од* 1 cm. *Во тој случај точната вредност на таа должина е меѓу* 5,72 m и 5,74 m, *т.е. во интервалот*

$$[5{,}72\ m;\ 5{,}74\ m].$$

Секој број од тој интервал, како на пример: 5,72m, 5,738m е *приближна вредност* на мерената должина d.

Општо, ако a е точната вредност на некоја величина за која се знае дека лежи меѓу броевите α и β,

$$\alpha \leqslant a \leqslant \beta,$$

т.е. му припаѓа на интервалот $[\alpha;\ \beta]$, тогаш кој било број A од тој интервал се вика **приближна вредност** на споменатата величина или **приближување** кон бројот a; се запишува:

$$\boxed{a \approx A.}$$

1. Запиши неколку приближувања кон бројот $\sqrt{2}$, земајќи дека

$$\sqrt{2} \in [1,4;\ 1,5].$$

Забелешка. Приближувањата со недостиг и со вишок од III.3 се специјални приближувања кон даден реален број (границите на интервалот).

б Едно приближување има практично значење само ако можеме да одредиме „за колку се разликува“, т.е. „за колку отстапува“ од точниот број. За мерило на тоа отстапување служи т.н. *апсолутна* грешка.

Нека A е приближување кон бројот a. Апсолутната вредност на разликата меѓу бројот a и неговото приближување A, т.е. бројот

$$|a - A|,$$

го викаме **апсолутна грешка** на приближувањето A.

На пример, за приближувањата 0,3 и 0,33 кон бројот $\frac{1}{3}$ апсолутната грешка е:

$$\left|\frac{1}{3} - 0{,}3\right| = |0{,}33\ldots - 0{,}3| = 0{,}03\ldots < 0{,}04 \text{ и}$$

$$\left|\frac{1}{3} - 0{,}33\right| < 0{,}004$$

соодветно. Значи, заменувајќи го бројот $\frac{1}{3}$ со приближувањето 0,3, т.е. ставајќи $\frac{1}{3} \approx 0{,}3$ правиме грешка, за која знаеме дека не е поголема од 0,04.

Апсолутната грешка, обично, не ја знаеме и затоа се задоволуваме со некоја нејзина оценка. На пример, за кое било приближување кон $\sqrt{2}$ од интервалот [1,4; 1,5], отстапувањето не е поголемо од должината на тој интервал, т.е. од 0,1. Така, бројот 0,1 е една оценка за апсолутната грешка на кое било приближување кон $\sqrt{2}$ од тој интервал.

Во општ случај, ако знаеме дека апсолутната грешка не е поголема од некој број Δ, т.е.

$$\boxed{|a - A| \leqslant \Delta,} \tag{1}$$

тогаш бројот Δ го викаме **оценка** за апсолутната грешка (по потреба, наместо Δ, пишуваме Δ_A).

Горното неравенство може да се запише и во обликот

$$\boxed{A - \Delta \leqslant a \leqslant A + \Delta;} \tag{2}$$

во техниката обично тоа се запишува:

$$\boxed{a = A \pm \Delta.} \tag{3}$$

(Последниов запис означува исто што и (2): дека a се наоѓа меѓу броевите $A-\Delta$ и $A+\Delta$, а не дека a има само две можни вредности, имено $A-\Delta$ и $A+\Delta$.) Со исто значење како (3), т.е. (1), се употребува и ознаката

$$a = A \ (\Delta). \tag{4}$$

За пример, да ја измериме должината d на клупата (со обично метро). Да речеме, сме добиле резултат 1,23 m. Ние знаеме дека должината не можеме да ја измериме баш точно, а здравиот разум ни вели дека грешката при мерењето не е поголема од 1 cm. Затоа, за должината d на клупата можеме да запишеме

$$|d - 1{,}23| < 0{,}01, \text{ т.е. } d = (1{,}23 \pm 0{,}01)\ m, \text{ или } d = 1{,}23(0{,}01)\ m.$$

b **Апсолутната грешка обично не е најдобар показател за приближувањето. На пример, нека при мерењето на должина од 1 dm сме направиле апсолутна грешка од 1 cm, а истата грешка сме ја направиле и при мерењето на должина од 1 m. Секако, мерењето на должината од 1 dm било „полошо“ во некоја смисла.**

Затоа, за подобар показател на приближувањето се зема друг број, означен со δ (или δ_A), наречен **релативна грешка:**

$$\boxed{\delta = \frac{|a - A|}{|a|}}$$

Во претходниот пример, релативната грешка при мерењето на должината од 1 dm е

$$\delta_1 = \frac{1\ cm}{1\ dm} = 0{,}1$$

а при мерењето на должината од 1 m

$$\delta_2 = \frac{1\ cm}{1\ m} = 0{,}01.$$

Релативната грешка честопати се искажува во проценти; во тој случај, таа се вика **процентна грешка;** таа се добива кога релативната грешка δ се помножи со 100, т.е.

$$\delta_{пр} = (\delta \cdot 100)\ \%.$$

Бидејќи 0,1 претставува 10% од 1 dm, а 0,01 е 1% од 1 m, следува дека процентната грешка при мерењето на 1 dm е $(\delta_1)_{пр} = 10\%$, а при мерењето на 1 m е $(\delta_2)_{пр} = 1\%$.

Да разгледаме уште два примера.

Пример 2. *Во едно буре е турена течност*

$$V = (104 \pm 5)\ l.$$

Колкава е релативната грешка?

Релативната грешка би ја добиле кога апсолутната грешка би ја поделиле со вистинското количество течност; но тоа не ни е познато, а знаеме дека е меѓу 99 l и 109 l. Бидејќи нема смисла да зборуваме за некоја точна релативна грешка, земаме:

$$\delta = \frac{5}{104} = 0{,}048\ldots < 0{,}05, \quad \text{т.е.} \quad \delta_{пр} = 5\%.$$

2. Оцени ја релативната грешка на количеството маса $m = (23 \pm 2)\ gr$.

Пример 3. *Протокот ф на вода во една водоводна цевка, измерен со релативна грешка 5% изнесува 40 l/s. Во кои граници се менува протокот?*

Од формулата $\delta = |a-A| : |a|$ добиваме дека апсолутната грешка е:

$$|a - A| = |a| \cdot \delta = 40 \cdot 0{,}05 = 2, \quad \text{т.е.} \quad 2\ l/s.$$

Според тоа, протокот е во границите

$$38\ l/s \leqslant ф \leqslant 42\ l/s.$$

3. Измерена е брзината v на едно возило, $v \approx 80\ km/h$ со релативна грешка 5%. Колкава е апсолутната грешка? Во кои граници е брзината?

Вежби

4. (Усно) Што е: а) апсолутна, б) релативна, в) процентна грешка?

5. Должината на една улица е $d = (347 \pm 3)\ m$. Запиши три приближувања кон d и оцени ја апсолутната грешка за секое од нив.

6. Оцени ја релативната грешка за податоците:
   а) должина $a = (56 \pm 0{,}5)\ cm$; б) волумен $V = (72 \pm 1)\ cm^3$;
   в) брзина $v = (95 \pm 5)\ km/h$; г) напон $U = (4{,}5 \pm 0{,}2)\ V$,
   и искажи ја во проценти.

7. Напонот U на електричната мрежа е 220 V со релативна грешка 6%. Во кои граници е напонот?

$\boxed{8}$ Претстави го на три начини како производ од некој број a_0 и некоја декадна единица (10^p) бројот 2500.

◑ $2500 = 2{,}5 \cdot 10^3 = 25000 \cdot 10^{-1} = 250000 \cdot 10^{-2}$ итн.*)

$\boxed{9}$ Даден е бројот $A = 4732,\ 56819$. Запиши ја единицата од разредот на цифрите 4; 7; 5; 1.

◑ За 4 е 10^3; за 2 е 10^0; за 6 е 10^{-2}; итн.

IV.10. ЗАПИШУВАЊЕ И ЗАОКРУЖУВАЊЕ НА ПРИБЛИЖУВАЊА

а. Приближните вредности е згодно да се запишуваат во вид на конечен децимален број, па обично и така се запишуваат. На пример, $\sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$ се запишува приближно $\sqrt{2} \approx 1{,}41$, $\sqrt{2} \approx 1{,}414$ итн. или: $\pi = 3{,}14159\ldots$ се запишува $\pi \approx 3{,}14$ итн.

---

*) 10^{-1} е ознака за дропката $\frac{1}{10}$, т.е. за 0,1; $10^{-2} = \frac{1}{10^2} = 0{,}01$; општо, за кој било $n \in \mathbf{N}$, $10^{-n} = \frac{1}{10^n} = \underbrace{0{,}0\ldots01}_{n}$, а $10^0 = 1$.

Од децималниот запис на бројот може да се одредат единиците од разредите на неговите цифри. Така, на пример, бројот $A = 6983{,}475$ може да се претстави на следниов начин:

$A = 6 \cdot 10^3 + 9 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 4 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} + 5 \cdot 10^{-3}$, од каде што се гледа дека: единицата од разредот на цифрата 6 е 10^3, на цифрата 9 е 10^2, на цифрата 8 е 10^1, на 3 е 10^0, на 4 е 10^{-1}, на 7 е 10^{-2} и на 5 е 10^{-3}.

За едно приближување A кон некој број a важно е да се знае „колку добри цифри" има во неговото децимално претставување. За таа цел се воведува поимот „точна цифра".

Нека

$$A = a_n \ldots a_p \ldots = 10^n a_n + \ldots + 10^p a_p + \ldots$$

е приближување кон некој број a и нека a_p е цифра од десетичниот запис на A. За a_p велиме дека е **точна цифра** на A, ако апсолутната грешка на A не е поголема од половина единица од разредот на кој му припаѓа a_p, т.е.

$$|a - A| \leqslant \frac{1}{2} \cdot 10^p$$

каде што p е разредот на a_p.

Пример 1. *Ако $a = 5{,}37$ $(0{,}05)$, тогаш цифрата 3 е точна, зашто*

$$|a - 5{,}37| \leqslant 0{,}05 = \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1}.$$

т.е. $|a - 5{,}37|$ не е поголема од половината единица од разредот на десеттите делови. И цифрата 5 е точна (зошто?), додека цифрата 7 не е точна, зашто

$$|a - 5{,}37| \leqslant 0{,}05 \nleqslant \frac{1}{2} \cdot 10^{-2} = \frac{1}{2} \cdot 0{,}01.$$

1. Одреди кои цифри се точни во следново приближување:

   а) 6,2538 (0,05), б) 3,20 (0,005).

За натаму ќе го применуваме следниов договор:

> При запишувањето на едно приближување да се пишуваат **само** неговите точни цифри (без наведување на апсолутната грешка).

Така, според овој договор, од записот

$$A = 27{,}6; \qquad B = 1{,}4142; \qquad C = 3{,}00$$

заклучуваме дека апсолутната грешка (соодветно) е:

$$\Delta_A = 0{,}05; \qquad \Delta_B = 0{,}00005; \qquad \Delta_C = 0{,}005.$$

Да забележиме дека нулите на крајот од приближувањето C = 3,00 не се излишни. Имено, ако би ставиле C = 3, тогаш би имале $\Delta_C = 0{,}5$, т.е. постои разлика во информацијата за апсолутната грешка.

Општо, нулите на крајот од едно приближување, за кои се знае дека се точни цифри, треба да се запишуваат.

2. Оцени ја апсолутната грешка на секое од следниве приближувања: а) 32,1; б) 45; в) 45,00, според горниот договор.

б. Со задачата 8 од Ш.4 се потсети дека еден број a може да се претстави како производ од некој број a_0 и некоја декадна единица.

На пример, бројот 62000 можеме да го запишеме и вака:

$$62 \cdot 10^3; \quad 0{,}62 \cdot 10^5; \quad 620 \cdot 10^2; \text{ итн.}$$

а бројот 2,48 вака:

$$248 \cdot 10^{-2}; \quad 2480 \cdot 10^{-3}; \quad 0{,}0248 \cdot 10^2; \text{ итн.}$$

Општо, кој било број A може да се претстави во обликот

$$\boxed{A = a_0 \cdot 10^p.} \tag{1}$$

3. Претстави го на три начина во обликот (1) бројот

а) 630; б) 0,34.

Овој начин на претставување е особено практичен за изразито големи и за изразито мали броеви (на пример, средното растојание од Земјата до Сонцето е $150 \cdot 10^6\, km$, наместо: $150\,000\,000\, km$; масата на молекулот на водородот е $33 \cdot 10^{-25}\, g$, наместо:

$$0{,}000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,0033\, g; \text{ и др.)}$$

При запишувањето на едно приближување A, претставено во обликот $a_0 \cdot 10^p$ се применува истиот договор Д.1: сите цифри на a_0 да се точни.

Така, на пример, средното растојание d меѓу Земјата и Месечината е $3{,}8 \cdot 10^5\, km$, што означува дека цифрите 3 и 8 се точни (а другите четири места од бројот не се сигурни).

Записот, пак, $d = 380\,000\ km$ дава информација дека тоа растојание е познато со точност до $1\ km$, т.е. апсолутната грешка на тоа приближување не е поголема од $\frac{1}{2} \cdot 1\, km = 500\ m$.

Во општ случај, ако единицата од разредот на последната цифра на a_0 е 10^m (јасно, m е цел број), тогаш за апсолутната грешка на приближувањето $A = a_0 \cdot 10^p$ ќе имаме:

$$\boxed{\Delta_A = \frac{1}{2} \cdot 10^{m+p}} \qquad (2)$$

Пример 2. *За приближувањата* $A = 324 \cdot 10^3$, $B = 0{,}235 \cdot 10^4$, $C = 52{,}6 \cdot 10^{-3}$ имаме:

$$\Delta_A = \frac{1}{2} \cdot 10^{0+3} = \frac{1}{2} \cdot 10^3 = 500; \; a = 324000 \pm 500;$$

$$\Delta_B = \frac{1}{2} \cdot 10^{-3+4} = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5; \; b = 2350 \pm 5;$$

$$\Delta_C = \frac{1}{2} \cdot 10^{-1-3} = \frac{1}{2} \cdot 10^{-4} = 0{,}00005; \; c = 0{,}0526 \pm 0{,}00005.$$

4. Оцени ја апсолутната грешка на приближувањето:

а) $150 \cdot 10^6$; б) $15{,}0 \cdot 10^7$; в) $1{,}50 \cdot 10^8$.

Забелешка. Бројот на точните цифри на едно приближување е во тесна врска со релативната грешка на приближувањето:

Ако приближувањето има n точни цифри, тогаш неговата релативна грешка е приближно еднаква со 10^{-n}.

б. Ќе го разгледаме накусо и прашањето за заокружување на приближни вредности (со кое ти си се среќавал и порано).

Во практиката, при работа со броеви што имаат голем број точни цифри, често се јавува потреба од упростување на пресметувањата. Упростување може да се постигне со отфрлање на дел од точните цифри на броевите, т.е. со т.н. **заокружување** на броевите.

Заокружувањето се врши, како што ти е познато од порано, според следново правило (**правило на заокружување**):

> Ако првата отфрлена цифра е 0, 1, 2, 3 или 4, тогаш другите цифри од бројот што го заокружуваме ги оставаме неизменети.
> Ако, пак, првата отфрлена цифра е 5, 6, 7, 8 или 9, тогаш последната задржана цифра од бројот ја зголемуваме за 1.

Пример 4. *Бројот* $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$ *да го заокружиме на а) две, б) четири, в) шест децимални места.*

Имаме:

а) $\sqrt{3} \approx 1,73$; б) $\sqrt{3} \approx 1,7321$; в) $\sqrt{3} \approx 1,732051$.

Забелешка. Апсолутната грешка на приближувањето 1,7321 е

$$|\sqrt{3} - 1,7321| = 0,0000492\ldots,$$

а ако би зеле $\sqrt{3} \approx 1,7320$, грешката би била $0,0000508\ldots$ значи, приближувањето 1,7321 е подобро од 1,7320. Тоа го оправдува вклучувањето на цифрата 5 во горното правило со втората група цифри: 6, 7, 8 и 9.

5. Бројот $\pi = 3,14159265\ldots$ заокружи го на:

а) две, б) три, в) шест децимални места.

Да претпоставиме дека е добиено приближување

$$A = 5,471863$$

(кон некоја величина a), при што знаеме дека апсолутната грешка на A е помала од 0,004. Тоа кажува дека третата децимала веќе не е сигурно точна и грешката суштински не би се изменила, ако бројот A го заокружиме на три децимали:

$$A = 5,472.$$

Потполно несигурните децимали на приближувањето (овде: 8, 6, 3) нема смисла да се запишуваат.

Вежби

6. Одреди кои цифри се точни во следново приближување:

а) 32,479 (0,5); б) 0,53 (0,05); в) 12 756,8 (50).

7. Оцени ја апсолутната грешка на следново приближување:

а) 1,41; б) $149,5 \cdot 10^6$; в) 0,0000179; г) $1,79 \cdot 10^{-5}$.

(ако сите запишани цифри се точни).

8. Заокружи го на 1) две, 2) три, 3) пет децимали бројот

а) $2,236068\ldots (=\sqrt{5})$; б) $5,7445626\ldots (=\sqrt{33})$.

9. Заокружи ги дадените броеви на три значајни цифри:

а) 1,732; 3,4251; 0,05700;

б) 12783; 149 500 000; 1 391 100.

10. Пресметај

а) $\sqrt{3} + \frac{2}{9}$; б) $\sqrt{425} - \sqrt{325}$.

IV.11. СМЕТАЊЕ СО ПРИБЛИЖУВАЊА

Во задачата 10 а) од минатата лекција, собироците $\sqrt{3}$ и $\frac{2}{9}$ веројатно ги замени со некои нивни приближни вредности. Резултатот што го доби, секако, не е точната вредност на збирот $\sqrt{3} + \frac{2}{9}$, туку некое негово приближување.

Да ја решиме, овде, истата задача.

Пример 1. *Да го пресметаме збирот* $\sqrt{3} + \frac{2}{9}$.

$$\sqrt{3} + \frac{2}{9} \approx 1{,}73 + 0{,}2222 = 1{,}9522.$$

Бидејќи бројот $\sqrt{3}$ го запишавме само со две децимали, првиот собирок 1,73 има многу поголема апсолутна грешка отколку вториот собирок. Затоа, последните две децимали во добиениот резултат сигурно се погрешни. Поради тоа, пресметувањето ќе го извршиме со две децимали, вака:

$$\sqrt{3} + \frac{2}{9} \approx 1{,}73 + 0{,}22 = 1{,}95.$$

И воопшто, разумно е да се бара *двата члена во збирот (или разликата) да имаат ист број точни децимали.*

1. Пресметај: $\sqrt{2} + \frac{1}{3}$, со две децимали.

Пример 2. *Да ја пресметаме, користејќи три децимали, разликата:* $\sqrt{345} - \sqrt{344}$.

$$\sqrt{345} - \sqrt{344} = 18{,}574 - 18{,}547 = 0{,}027.$$

2. Пресметај: $\sqrt{60} - \sqrt{57}$, со две децимали.

Да забележиме дека е точно следново тврдење:

При собирање (одземање) на две приближувања A и B, апсолутната грешка на збирот (разликата) е еднаква со збирот од апсолутните грешки на тие приближувања, т.е.

$$\boxed{\begin{aligned} \Delta_{A+B} &= \Delta_A+\Delta_B \\ \Delta_{A-B} &= \Delta_A+\Delta_B \end{aligned}}$$

Така, за апсолутните грешки:

а) во примерот 1, имаме:

$|\sqrt{3} - 1{,}73| < 0{,}005$, $|\frac{2}{9} - 0{,}22| < 0{,}005$, па значи:

$|\sqrt{3} + \frac{2}{9} - 1{,}95| < 0{,}01$, т.е. $\sqrt{3} + \frac{2}{9} \in [1{,}94;\ 1{,}96]$;

б) во примерот 2, имаме:

$|\sqrt{345} - 18{,}574| < 0{,}0005$, $|\sqrt{344} - 18{,}574| < 0{,}0005$, па

$|\sqrt{345} - \sqrt{344}| < 0{,}001$, т.е. $\sqrt{345} - \sqrt{344} \in [0{,}026;\ 0{,}028]$.

Значајни или **важечки цифри** на едно приближување се викаат сите негови точни цифри, освен нулите што стојат пред првата ненулта цифра.

Пример 3. *Ако во записот на бројот*

$$A = 0{,}0\mathbf{34060}$$

сите цифри се точни, тогаш значајни за A се цифрите 3, 4, 0, 6 и 0 (потцртаните).

Ако, пак, $B = 42000$ со $\Delta_B = 50$, тогаш значајни за B се 4, 2 и 0, а последните две нули не се значајни (зашто не се точни цифри).

3. Одреди по колку значајни цифри имаат следниве броеви (знаејќи дека сите нивни цифри се точни):

   а) 1,73; 17,3; 0,00173;

   б) 4520; 4,520; 452,0; 0,0452.

За множење приближувања важи следново правило:

> *Производот има приближно толку значајни места колку што има множителот со најмал број значајни места.*

Исто правило важи и за количникот при делење.

Пример 4. *Да ја пресметаме плоштината P на подот на една (правоаголна) училница, чии димензии, добиени со мерење, се 5,17 m и 3,52 m, при што сите цифри се точни. Имаме:*

$$5{,}17 \cdot 3{,}52 = 18{,}1984\ m^2.$$

Секако, нема смисла да ги земаме сите децимали во добиениот резултат, зашто двата множитела имаат само по три значајни цифри. Затоа, според горното правило, земаме $P = 18{,}2\ m^2$.

4. Во едно струјно коло, јачината е I = 1, 8A, а отпорноста е $R = 2{,}6\ \Omega$. Пресметај го напонот U на струјата.

◑ Употреби го Омовиот закон: $U = IR$.

Пример 5. *Да го пресметаме волуменот на правилна четириаголна призма со основен раб* $5{,}08\ cm$ *и висина* $9{,}32\ cm$, *при што трите запишани цифри се точни.* Имаме:

$$V = a^2H = (5{,}08 \cdot 5{,}08) \cdot 9{,}32;$$

за производот во заградите добиваме:

$$5{,}08 \cdot 5{,}08 = 25{,}8065.$$

Според горното правило, само првите три места се сигурни, па би требало да земеме 26,8; но бидејќи треба да извршиме уште едно множење, ќе земеме (заради корекција!) едно место повеќе, т.е. 25,81, па:

$$V = 25{,}81 \cdot 9{,}32 = 240{,}5492.$$

Пак според правилото, ќе земеме три места, па со заокружување добиваме

$$V = 241\ cm^3.$$

5. Пресметај го волуменот на квадар со димензии $5{,}16\ cm$; $3{,}24\ cm$ и $2{,}72\ cm$.

Пример 6. *Да ја пресметаме должината на правоаголник чија ширина е* $3{,}46\ m$, *а плоштината му е* $17\ m$. Имаме:

$$a = \frac{P}{b} = \frac{17}{3{,}46} = 4{,}913.$$

Бидејќи P има само две значајни места, ќе земеме толку и за a, т.е. $a = 4{,}9m$.

6. Пресметај ја средната брзина на автомобил што изминал пат $24{,}7\ km$ за 25 минути.

Вежби

7. Пресметај $4,(26) + \sqrt{5}$ на три места (т.е. на три значајни цифри).

◑ Сметај со четири значајни цифри, а резултатот заокружи го на три.

8. Пресметај на три места:

а) $5{,}2(27) + 34{,}6 - 0{,}85$; б) $\sqrt{3} - \sqrt{2}$; в) $3\pi\sqrt{2} : 8$;
г) $(\sqrt{5} + \sqrt{7}) : \sqrt{3}$; д) $17 \cdot \sqrt{5} + 24 \cdot \pi$.

Во задачите 8 – 11 сите запишани цифри се точни.

9. Пресметај ги периметарот и плоштината на правоаголник со основа $a = 18{,}4\ cm$ и висина $b = 7{,}6\ cm$.

10. Пресметај ја плоштината на круг со радиус $r = 7{,}326\ cm$. Земи $\pi = 3{,}1416$.

11. Пресметај ја јачината I на струјата во струјно коло со напон $U = 12{,}4\ V$ и отпорност $4{,}7\ \Omega$.

12. Пресметај го волуменот на цилиндар со радиус $r = 4{,}7\ cm$ и висина $H = 7{,}8\ cm$.

ЗАБЕЛЕШКА ЗА РЕАЛНИТЕ БРОЕВИ

Кога не би биле измислени реалните броеви, математиката по содржина би била мошне осиромашена: не би постоел точен корен од бројот 2, не би можела да се изрази должината на дијагоналата при квадратот со помош на неговата страна кога таа би била избрана за мерна единица и многу друго. За практиката, пак, тоа не би значело голема загуба, зашто за неа се доволни само рационалните броеви. Практично, дури, не се неопходни сите рационални броеви – може да се помине само со **конечните** децимални броеви (како што и работат современите електронски сметачки машини).

Причината за тоа е **густината** на рационалните броеви: меѓу кои било два рационални броја постои рационален број. Така, кога секоја рационална точка (т.е. рационален број) од бројната оска би претставувала запалена ламбичка, тогаш не би останало темно место, целата бројна оска би била осветлена.

А сепак, меѓу рационалните точки има „скриено" уште многу други точки – ирационални точки. Нив ги има, во некоја смисла, дури и повеќе отколку рационалните.

Г. Кантор (1845 – 1918)

Имено, рационалните броеви можат да се наредат во една низа или, инаку речено, можат да се „нумерираат" со природни броеви, поради што можеме да речеме дека рационални броеви има точно толку колку што има природни броеви.

Тоа, пак, не е можно да се направи за реалните броеви. Овој факт прв го утврдил, во 1874 година, германскиот математичар Георг Кантор (1845 – 1918), којшто се смета за основач на теоријата на множествата.

Во врска со овие и други прашања за реалните броеви можеш да најдеш повеќе во други книги од стручната и научно-популарната литература.

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ – IV

1. Подреди ги по големина дропките:
   $\frac{3}{4}, \frac{-1}{3}\ \frac{4}{3}, \frac{3}{-1}, \frac{7}{8}$
2. Испитај дали е поле структурата $(M_4, \oplus_4, \odot_4)$.
3. Искажи го својството на монотоност на подредувањето на рационалните броеви во однос на собирањето.

4. Пресметај го изразот: $3{,}02 - 1{,}02 \cdot 4{,}3 + 4{,}8 : 1{,}6$.

5. Претвори ја во децимален број дропката $\frac{135}{11}$.

6. Претвори го во обична дропка периодичниот децимален број 2,3 (5).

7. Како се споредуваат позитивни децимални броеви чии цели делови им се еднакви?

8. Зошто при делење на цели броеви секогаш се добива периодичен десетичен број?

9. Запиши еден непериодичен бесконечен децимален број?

10. Кои броеви се викаат ирационални броеви?

11. Спореди ги реалните броеви:

а) – 23,0010 и – 23,0001; б) $\frac{7}{5}$ и $\sqrt{2}$.

12. Конструирај го бројот $\sqrt{6}$.

13. Запиши ја унијата на интервалите (– 1,6) и [– 2,3], а потоа претстави ја на бројна оска.

14. Најди ги десетичните приближувања со точност до 0,01 по недостиг и по вишок за бројот 1,4552.

15. Пресметај го а) збирот $\frac{5}{6} + \sqrt{2}$ со точност 0,001; б) производот $2,(6) \cdot \sqrt{3}$ со точност 0,01.

16. Заокружи го бројот 325,74451 на:

а) десетки; б) единици; в) една децимала;
г) две децимали; д) три децимали.

17. Даден е реалниот број $\sqrt{3} = 1{,}73205\ldots$. Оцени ја апсолутната грешка на приближувањето кон $\sqrt{3}$:

а) 1,73; б) 1,732.

18. Да се извршат означените операции со приближните вредности:

а) $5{,}387 + 42{,}7 + 3{,}4578$; б) $2{,}438 + 13{,}1$;
в) $32{,}74 - 14{,}7 + 23$; г) $52{,}730 - 16{,}345$.

На колку децимали треба да се заокружи резултатот?

19. Пресметај:

а) $(36{,}735 - 21{,}3) \cdot 14{,}32$; б) $(83 + 47{,}3) : 0{,}4$.

20. Пресметај ги периметарот L и плоштината P на правоаголник со страни $a = (2{,}4 \pm 0{,}5)m$ и $b = (1{,}8 \pm 0{,}5)\ m$.

21. Плоштината на еден правоаголник е приближно 437,56 m^2 и едната страна приближно е 18,0 m. Колку е другата страна?

22. Најди оценка на релативната грешка при записот на дропката 13/3 во вид на децимален број со три цифри по запирката.

23. Измерена е Масата на Сонцето, $(2{,}0 \pm 0{,}1) \cdot 10^{33}\ g$ и Масата на детска топка, $(2{,}5 \pm 0{,}1) \cdot 10^{2}\ g$. Кое мерење е поточно?

24. Пресметај ја приближната вредност на бројот $3{,}72^3$.

25.* Пресметај ја приближната вредност на изразот $x = ab/c^2$, каде што

$a = 0{,}52 \pm 0{,}01$; $b = 2560 \pm 10$; $c = 304{,}2 \pm 0{,}01$.

ГЛАВА V

АЛГЕБАРСКИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

За степени, мономи, полиноми, бројни изрази, алгебарски изрази си учел порано, а нив ги срекаваше низ оваа книга и досега. Со оваа глава се предвидува да ги прошириш твоите сознанија за овие поими, а ќе се запознаеш и со т.н. алгебарски дропки и сметањето со нив.

V.1. СТЕПЕН СО ПОКАЗАТЕЛ ПРИРОДЕН БРОЈ

Порано се запозна со поимот за степен со показател природен број. Нешто за него се потсети во претходните теми, а тука ќе се потсетиме подетално, преку повеќе примери и вежби, бидејќи тоа во наредните лекции ќе наоѓа почеста примена.

a) **Поим за степен.** Производот $a \cdot a$ кратко го запишавме со a^2, производот $a \cdot a \cdot a$ со a^3 и општо:

$$\boxed{\underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{n\text{-множители}} = a^n}$$

Симболот a^n го нарековме **степен**, бројот a **основа на степенот**, а бројот n – **степенов показател** или **експонент**, при што $n \in \mathbf{N}$, $n \geqslant 2$ и $a \in \mathbf{R}$.

1. Претстави ги во вид на степени производите

а) $b \cdot b \cdot b \cdot b$; б) $(-5)(-5)(-5)$;

в) $(a-1)(a-1)(a-1)$; г) $\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)$

Претстави ги во вид на производи степените:

д) 3^4; ѓ) $0{,}1^3$; е) $(x-2)^3$.

Степенот на бројот a со експонент 1 се зема дека е самиот тој број a, т.е.

$$\boxed{a^1 = a.}$$

Така, $(-3)^1 = -3$, $(x-1)^1 = x-1$.

2. Одреди кои од следниве тврдења се точни:

а) Ако $a = 0$, тогаш $a^n = 0$.
б) Ако $a = 1$, тогаш $a^n = 1$.
в) Ако $a > 0$, тогаш и $a^n > 0$.
г) Ако $a < 0$ и n е парен број, тогаш $a^n < 0$.
д) Ако $a < 0$ и n е непарен број, тогаш $a^n < 0$.
ѓ) Ако $a = b$, тогаш $a^n = b^n$.

3. Покажи со неколку примери дека: ако a и b се кои било позитивни броеви и n е кој било природен број, тогаш важи еквиваленцијата:

$$\boxed{a^n = b^n <=> a = b.} \qquad (1)$$

4. Одреди кои од следниве искази се вистинити:

а) $(-4)^5 < 0$; б) $(-8)^{126} > 0$;
в) $a^2b^3 > 0$ за $a < 0$ и $b < 0$; г) $a^2b^3 < 0$ за $a < 0$ и $b < 0$.

5. Најди вредност на x за која е точно равенството:

а) $x^6 = 1$; б) $x^5 = -1$;
в) $x^1 = -8$; г) $(-5)^x = -125$.

б. **Множење и делење на степени со еднакви основи.** Да се потсетиме: $a^3 \cdot a^4 = (a \cdot a \cdot a) \cdot (a \cdot a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^7$, т.е. $a^3 \cdot a^4 = a^{3+4} = a^7$. Општо:

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}} \qquad (2)$$

Навистина,

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \; \ldots \; a}_{m\text{-пати}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots \; a}_{n\text{-пати}} = a^{m+n}$$

6. Одреди усно на што е еднаков секој од производите:

а) $x^3 \cdot x^7$; б) $100^4 \cdot 100^{36}$;
в) $(x-1)^8 \cdot (x-1)^{24}$; г) $(-5)^3 \cdot (-5)^8$.

Да видиме на што е еднакво $\frac{a^5}{a^2}$ $(a \neq 0)$:

$$\frac{a^5}{a^2} = \frac{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a}{a \cdot a} = a^3, \text{ т.е. } \frac{a^5}{a^2} = a^{5-2} = a^3$$

Општо, ако $m > n$ и $a \neq 0$, тогаш

$$\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}} \qquad (3)$$

7. Докажи го равенството (3).

8. Пресметај: а) $\frac{x^8}{x^3}$ $(x \neq 0)$; б) $y^{17} : y^6$ $(y \neq 0)$.

Забелешка. Во сите случаи натаму ќе претпоставуваме дека именителот на дропката односно делителот е различен од нула, без да го одбележуваме тоа посебно.

в **Степенување на степен.** Да видиме како степенот $(a^3)^2$, на кој основата му е a^3 а показателот 2, можеме да го запишеме како степен со основа a.

$$(a^3)^2 = a^3 \cdot a^3 = a^6, \quad \text{т.е.} \quad (a^3)^2 = a^{3 \cdot 2} = a^6$$

Општо,

$$\boxed{(a^m)^n = a^{m\,n}} \qquad (4)$$

9. Докажи го равенството (4).

10. Следниве изрази претстави ги во вид на степен со основа x:

а) $(x^5)^7$; б) $(x^4 \cdot x^5)^3$; в) $\frac{x^2 \cdot (x^3 \cdot x^2)^2}{x^4}$

11. Одреди ја вредноста на следниве изрази:

а) $\frac{(2^3 \cdot 2^4)^6}{2^{40}}$; б) $\frac{3^{50}}{(3^2 \cdot 3^5)^7}$

г **Степенување на производ и количник.** Да покажеме дека:

$$\boxed{(ab)^m = a^m \cdot b^n} \qquad (5)$$

$$(ab)^m = \underbrace{(ab)\,(ab)\,(ab) \ldots (ab)}_{m\text{-множители}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \ldots a}_{m\text{-множители}} \cdot \underbrace{b \cdot b \cdot b \ldots b}_{m\text{-множители}} = a^m \cdot b^m.$$

Примери: 1. $(xy)^3 = x^3y^3.\ 2^3 \cdot x^3 = (2x)^3.$

2. $(x^2y^3)^4 = (x^2)^2 \cdot (y^3)^4 = x^4 \cdot y^{12}.$

12. Изврши го степенувањето на следниве производи:

а) $(xy)^7$; б) $(x^3y^5)^{10}$; в) $(xy^2z^3)^4$.

Изразот $\left(\frac{x}{y}\right)^3$ да го запишеме сега со помош на степените од x и y. Имаме:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^3=\frac{x^3}{y^3}, \quad \text{бидејќи} \quad \left(\frac{x}{y}\right)^3=\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}\cdot\frac{x}{y}=\frac{x^3}{y^3}.$$

Општо,

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n} \quad (b\neq 0);} \tag{6}$$

Секако, оваа формула може да се користи и вака:

$$\frac{a^4}{5^4}=\left(\frac{a}{5}\right)^4; \quad \frac{12^5}{18^5}=\left(\frac{12}{18}\right)^5=\left(\frac{2}{3}\right)^5.$$

13. Докажи го равенството (6).

14. Изврши го степенувањето на следниве количници:

а) $\left(\frac{2}{x}\right)^5$; б) $\left(\frac{3x^2}{y}\right)^4$; в) $\left(\frac{3xy^2}{2z}\right)^5$;

Вежби

15. Пресметај ја вредноста на следниве изрази:
а) $3^2 - 2^3$; б) $5\cdot 4^2-7^1$;
в) $10\cdot 3^3-5\cdot 2^4$; г) $(4^3-3^4)2^2$.

16. Одреди кои од следниве искази се вистинити:
а) $2^3=3^2 \land 3^2-2^3=1$; б) $(\forall n\in \mathbf{N})\ (-2)^n > 0$;
в) $(\exists n\in \mathbf{N})\ (-3)^n > 0$; г) Ако $3^2-2^3=1$, тогаш $2^3=3^2$.

17. Следниве броеви претстави ги кратко со помош на степени со основа **10**.

а) 1 000; б) 1 000 000; в) $\frac{1}{100000}$.

18. Следниве броеви претстави ги кратко како производ од еден природен **број** и степен со основа 10.

а) 4 000 000; б) 5 000 000 000; в) 720 000.

19. Одреди на што се еднакви производите:

а) $y^{17}\cdot y^3$; б) $a^3\cdot a^4\cdot a^5$; в) $z^5\cdot z\cdot z^{11}$.

20. Одреди на што се еднакви количниците:

а) $a^{32} : a^8$; б) $x^{50} : x^{10}$ в) $\frac{x^3\cdot x^5}{x^4}$; г) $\frac{y^{24}}{y^7\cdot y^3}$.

21. Пресметај ги вредностите на изразите (прво упрости ги):

а) $\dfrac{2^7 \cdot 2^3}{2^6}$; б) $\dfrac{3^{12}}{3^4 \cdot 3^5}$.

22. Следниве изрази претстави ги во вид на степени со основа a:

а) $(a^7)^3$; б) $(a^4 \cdot a^5)^6$; в) $(a \cdot a^2 \cdot a^3)^4$.

23. Изврши го степенувањето:

а) $(abc)^4$; б) $(x^2 \cdot y^3)^5$; в) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^{100}$ г) $\left(\dfrac{x^3}{y^4}\right)^5$

24. Пресметај ги на најекономичен начин изразите:

а) $\dfrac{10^6}{5^6}$; б) $\dfrac{32^3}{8^3}$; в) $\dfrac{4^2 \cdot 25^2}{10^2}$.

◑ $10^6 = (2 \cdot 5)^6 = 2^6 \cdot 5^6$.

25 Провери кои од следните бројни изрази немаат смисла:

а) $\dfrac{3 + 2^3}{2 - 3^2}$; б) $\dfrac{2 + 8 \cdot 3}{16 - 2^4}$; в) $\dfrac{4 \cdot 3^2 - 3 \cdot 12}{3 \cdot 2^3 - 6 \cdot 4}$.

26 Најди ја бројната вредност на изразот,

$$\frac{x + y}{y(y - 2)}$$

за: а) $x = 6$, $y = 3$; б) $x = -1$, $y = -2$; в) $x = 0$, $y = -1$.

За кои вредности на променливата y се добиваат бројни изрази што немаат смисла?

27 а) Што е константа? Запиши неколку константи.

б) Што е променлива? Запиши една променлива. Кои се нејзините вредности?

V.2. ПОЛИНОМИ. РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

а. Во математиката, покрај обичниот јазик, користиме разни математички знаци, т.е. симболи, како на пример:

$$1,\quad 2,\quad x,\quad y,\quad 4 \cdot x - 3,\quad 6a^2,\quad \frac{kx + m}{5},\quad a + b\sqrt{3}.$$

Досега, особено во минатата лекција се срекаваше со многу такви примери, а со задачите **25**, **26** и **27** во неа секако се потсети и поконкретно во врска со тоа.

Така, на прашањето „што е константа?“ сигурно одговори дека **константа** е симбол што служи за означување на точно определен математички објект. На пример, симболите 1 и 2 се константи, а константи се и: $\frac{1}{5}$, $\sqrt{3}$, $\{1, 2, 3\}$ (-множеството составено од броевите 1, 2 и 3), $\varnothing$ (-празното множество) и др.

Променлива, пак, е математички симбол (обично тоа е некоја буква, како: x, y, a, b, α, m и др.) што се користи како **заедничка** ознака за извесни одредени математички објекти – константи; во тој случај, за тие константи се вели дека се **вредности** (или **допуштени вредности**) на таа променлива.

На пример, ако буквата a, по договор е заедничка ознака за броевите 1, 2, 3, 4 и 5, тогаш самите тие броеви се вредности (т.е. допуштени вредности) за променливата a. Слично, ако n е заедничка ознака за природните броеви, тогаш секој природен број е вредност на променливата n и (поради тоа) n се вика **природна променлива.** Во таа смисла, ако x е заедничка ознака за реалните броеви, тогаш x се вика **реална променлива.**

1. Нека буквата p е заедничка ознака за едноцифрените прости броеви. Запиши ги сите вредности на променливата p.

Забелешка. За понатаму, променливите ќе ги сметаме за реални променливи секогаш кога не е поинаку одредено.

б. Со помош на константи и променливи, користејќи ги операциите собирање, одземање, множење и делење на реални броеви, како и степенување со показател природен број, можеме да формираме изрази што се наречени **рационални алгебарски изрази.**

Изразите, како што се:

$$a,\ 5\cdot a,\ -0{,}3\cdot ab^2,\ 4x^2y^3,\ \cdot\frac{2}{5}x^3, \dots$$

и, општо, производот од некоја бројна константа и степените од некои променливи, се викаат **мономи.** И самите знаци за броевите, како на пример: 1, 2, $-\frac{1}{3}$, $\sqrt{2}$ и сл., по договор, ги сметаме за мономи. (Уочи дека кај моном не се среќава делење со променлива; меѓутоа, може да има делење со (ненулти) број, зашто делењето може да се смета како множење со реципрочната вредност на тој број. Така, моном е, на пример, и изразот $\frac{2x^3}{5}$, зашто тој е еднаков со $\frac{2}{5}\cdot x^3$.)

2. Установи кои од следниве рационални алгебарски изрази се мономи:

а) $6a^3b^5$;	б) $3a^2b^2\cdot 2ab^3$;	в) $2a^3-5b$;
г) $\frac{4yz^2}{x}$;	д) $\frac{4yz^2}{7}$;	ѓ) $a(x+y)$.

Да се потсетиме. За мономот $6a^2b^5$ се вели дека има **нормален вид** (тој содржи само еден броен множител и не содржи степени со иста основа). Бројот 6 се вика **коефициент**, а другиот дел – **главна**

вредност на мономот. За мономите што имаат исти главни вредности се вели дека се **слични.** Збирот на два слични мономи може да се запише како моном сличен со нив, а со коефициент што е збир на нивните коефициенти. На пример:

$$4x^2y + 5x^2y = (4+5)x^2y = 9x^2y.$$

Степен, пак, на еден моном се определува како збир на показателите од степените на променливите во тој моном. Така, мономите $7x^2$, $-2xy^3$, $25x^2yz^4$ имаат степен: 2, 4, 7 соодветно.

3. Одреди го степенот на мономот

а) $4x^3$; б) $4x$; в) $4x^2y^3$; г) 4.

Нека A и B се некои мономи. Нивниот збир, т.е. $A+B$ го викаме **бином.** На пример, ако $A = x^2$, $B = 3xy$ и $C = 5$, тогаш:

$$A+B = x^2+3xy; \qquad B+C = 3xy+5; \qquad C+A = 5+x^2$$

се биноми. Бином е и $2-y$, зашто $2-y$ е $2+(-y)$.

Збир од три мономи, како на пример:

$$x^2 + \frac{3}{2}xy + 5, \qquad a^3+b^3 - 4abc,$$

се вика **трином.** Општо, збир од конечен број мономи се вика **цел рационален израз** или **полином.** (Притоа, и мономите ги сметаме за полиноми.)

Кај полином, значи, не се јавува делење со променлива или со израз што содржи променлива; затоа тој има смисла (е определен) за с и т е вредности на неговите променливи.

Изразите, пак:

а) $\dfrac{x}{x-2}$; б) $\dfrac{a+1}{b}$; в) $x^2 - xy + \dfrac{4}{x-y}$

не се полиноми; тие се примери на **дробни рационални изрази,** т.е. рационални изрази во кои се јавува делење со променлива или со израз што содржи променливи. Тие изрази **не се определени (немаат смисла)** за оние вредности на променливите за кои именителот (т.е. делителот) добива вредност нула.

Така, изразот под а) „не е определен за $x = 2$", бидејќи се добива „дропка со именител 0"; за сите други вредности тој има смисла, т.е. „е определен за сите $x \neq 2$".

4. За кои вредности на променливите, изразите б) и в) не се определени?

b. Изразите $x \cdot (x+3)$ и $x^2 + 3x$ имаат исти бројни вредности за секоја вредност на променливата x (зошто?); таквите изрази се викаат **идентични** рационални изрази. Два идентични изрази, сврзани со знакот за еднаквост („=“) образуваат равенство што се вика **идентитет.**

Така, равенствата: $2x+3x = 5x$, $x \cdot (x+3) = x^2+3x$ се идентитети, а идентитети се и сите закони за собирањето и множењето на реални броеви; на пример:

$$a+b = b+a; \qquad a+b+c = (a+b)+c;$$
$$a \cdot b = b \cdot a; \qquad a(b+c) = ab+ac.$$

Заменувањето на еден рационален израз со друг израз што е идентичен со него, обично, се вика идентична трансформација.

5. Трансформирај го следниов израз во идентично еднаков израз:

а) $4 \cdot (x-y)$; б) $ax+bx$; в) $\frac{a^2-2a}{a-2}$;

г) $9x^2-4x^2y-2x \cdot 4x+3x \cdot 2xy$.

6. Провери дали се идентитети равенствата:

а) $(a+2)(a-2) = a^2-4$; б) $\frac{2xy^2}{y} = 2xy^2$.

7. За кои вредности на променливите се идентитети следниве равенства:

а) $a(a^2+1) = a^3+a$. б) $(x+y)(x+y) = x^2+y^2$.

Секој полином може да се сведе на т.н. **нормален вид,** т.е. може да се запише како збир од неслични мономи што се во нормален вид. Таа постапка е наречена **сведување на полиноми.** Притоа, најголемиот од степените на мономите што го сочинуваат полиномот се вика **степен на полиномот.**

На пример, степенот на полиномот $4x^3+7x-5$ е 3 (т.е. полиномот е од трет степен), а на полиномот $3x^4+2x^3y^2-y^3$ е 5 (т.е. полиномот е од петти степен).

Пример 1. *Да го сведеме на нормален вид полиномот*

$$A = 7x^2y - 3xy \cdot (-2y) - 4xy^2 + 2xy \cdot (-3x) - 5x.$$

Бидејќи $-3xy \cdot (-2y) = 6xy^2$ и $2xy \cdot (-3x) = -6x^2y$, ќе имаме:

$$A = 7x^2y + 6xy^2 - 4xy^2 - 6x^2y - 5x =$$
$$= x^2y + 2xy^2 - 5x.$$

8. Сведи го полиномот:

$$7ab^2 + 7ab - ab^2 - 4ab + 2b \cdot (-3ab).$$

Вежби

9. Буквата x е заедничка ознака за сложените броеви од првата десетка. Запиши го множеството допуштени вредности на променливата x.

10. Запиши ги во нормален вид мономите:

а) $4xy^2 \cdot 0{,}5x^2$; б) $2a \cdot 3x^2 \cdot (-4ax)$.

11. Определи ги: коефициентот, главната вредност и степенот на мономите:

а) $5x^2$; б) $0{,}2ab^2$; в) xy^2z;

г) $3a^2x \cdot (-4ax^3)$; д) $5 \cdot \frac{1}{0{,}25}$.

12. Испитај дали се слични мономите:

а) $5a^2bc^2$ и $-3a^2b^2c$; б) $2xy \cdot 3x^2$ и $9x^3y$.

13. Пресметај ја вредноста на алгебарскиот израз за дадените вредности на променливите:

а) $5a^3+4b^2$ за $a=-1$, $b=-3$; б) $\frac{x^2-2xy+y^2}{x+y}$ за $x=3$, $y=-1$.

14. Провери дали се идентитети следниве равенства:

а) $3x \cdot (x+y) = 3x^2+3xy$; б) $(x+2y)^2 = x^2+2xy+y^2$;

в) $\frac{xy(2x-y)}{y(2x-y)} = x$.

15. Сведи го на нормален вид дадениот полином и одреди го неговиот степен

а) $4x^3-x^2+3x-2+x-4+x^3$; б) $13a^2bc+15ca^2b-8ba^2c$.

16. Да се извршат назначените операции со полиноми:

а) $3ac^2 \cdot (-4ac)$; б) $(-4x^2y)^3$;

в) $(4x^3-2x+5) \cdot 3x^2$; г) $(x-2y)(x+2y)$.

V.3. ОПЕРАЦИИ СО ПОЛИНОМИ. ФОРМУЛИ ЗА СКРАТЕНО МНОЖЕЊЕ

Со неколку примери ќе се потсетиме на операциите со полиноми и, специјално, на формулите за т.н. скратено множење. Сите тие произлегуваат од законите на операциите собирање, множење и делење на реални броеви.

Пример 1. (Множење на полином со моном)

$$(xy^2-2x+0{,}5) \cdot 5x^2.$$

Ќе го примениме дистрибутивниот закон на множењето спрема собирањето, проширен за повеќе собироци и ќе добиеме:

$$xy^2 \cdot 5x^2 - 2x \cdot 5x^2 + 0{,}5 \cdot 5x^2;$$

потоа, овој полином ќе го сведеме на нормален вид. Така, ќе имаме:

$$(xy^2 - 2x + 0{,}5) \cdot 5x^2 = 5x^3y^2 - 10x^3 + 2{,}5x^2.$$

Значи, *полином се множи со моном така што секој член од полиномот се помножува со мономот и добиените производи се собираат.*

1. Пресметај: $(6xy - 5x^2y + 2x - 3y) \cdot (-4xy^2)$.

2. Дадени се изразите: $A = 3a^2 - 1$, $B = a^3 + 3a^2$, $C = 5a$. Сведи го на нормален вид изразот $(A-B) \cdot C - A \cdot C$.

Пример 2. (Множење на полином со полином)

$$(x^2-2xy+x) \cdot (x-3y).$$

Ако ставиме: $A = x - 3y$, ќе можеме да го примениме правилото за множење на полином со моном, како во примерот 1.

Имаме:

$$\begin{aligned}&(x^2-2xy+x) \cdot (x-3y) = (x^2-2xy+x) \cdot A = \\ &= x^2 \cdot A - 2xy \cdot A + x \cdot A = x^2(x-3y) - 2xy\,(x-3y) + x(x-3y) = \\ &= x^3 - 3x^2y - 2x^2y + 6xy^2 + x^2 - 3xy = \\ &= x^3 - 5x^2y + 6xy^2 + x^2 - 3xy.\end{aligned}$$

3. Искажи го правилото за множење полином со полином.

4. Претстави го како полином во нормален вид изразот

$$(4ab - 3a^2) \cdot (2a + 3b).$$

Пример 3. (Квадрат од бином)

$$\begin{aligned}(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) &= A^2+AB+BA+B^2 = \\ &= A^2+2AB+B^2.\end{aligned}$$

Слично:

$$(A-B)^2 = (A-B)\,(A-B) = \ldots = A^2 - 2AB+B^2.$$

Значи:

$$\boxed{\begin{aligned}(A+B)^2 &= A^2+2AB+B^2\\ (A-B)^2 &= A^2-2AB+B^2\end{aligned}}$$

Притоа, A и B може да бидат кои било мономи или полиноми.

Еве неколку конкретни примери.

а) $(a+7)^2 = a^2+14a+49$.

б) $(a-7)^2 = a^2-14a+49$.

в) $(-3x+4y)^2 = 9x^2-24xy+16y^2$.

г) $(3a^2 + ax^3)^2 = 9a^4 + 6a^3x^3 + a^2x^6$.

Во некои случаи корисно е равенството да се разгледа и во „обратната насока“:

д) $a^2 - 8a + 16 = (a - 4)^2$.

ѓ) $25x^2+10x^2y^2+ x^2y^4 = (5x + xy^2)^2$.

5. Пресметај: а) $\left(\frac{2}{5}a + \frac{5}{4}ab^2\right)^2$; б) $(3xy^2-4yx^2)^2$.

в) $(a + b + c)^2$; г) $(2x - 3y + 5)^2$.

Пример 4. (Производ од збир и разлика на два израза)

$$(A+B)(A-B) = A^2-AB+BA-B^2 = A^2-B^2.$$

$$\boxed{(A + B)(A - B) = A^2 - B^2}$$

Искажи го со зборови ова равенство!

а) $(a-5)(a+5) = a^2-25$.

б) $(5x+4y)(5x-4y) = 25x^2-16y^2$.

в) $9x^2 - 49 = (3x - 7)(3x + 7)$.

г) $75^2-74^2 = (75-74) \cdot (75+74) = 1 \cdot 149 = 149$.

6. Пресметај:

а) $(3a-2xy) \cdot (3a+2xy)$; б) $46^2 - 44^2$

Пример 5. (Трет степен од бином)

$$(A+B)^3 = (A+B)^2 \cdot (A+B) = (A^2 + 2AB + B^2)(A + B) =$$
$$= A^3+A^2B+2A^2B+2AB^2+B^2A+B^3 =$$
$$= A^3+3A^2B+3AB^2+B^3;$$

значи, третиот степен од бином има четири членови: кубот на првиот член, тројниот производ од квадратот на првиот член со вториот, тројниот производ на првиот член со квадратот на вториот, кубот на вториот член:

$$\boxed{\begin{aligned}(A+B)^3 &= A^3+3A^2B+3AB^2+B^3\\(A-B)^3 &= A^3-3A^2B+3AB^2-B^3\end{aligned}}$$

Така: а) $(a+4)^3 = a^3+3\cdot a^2\cdot 4+3\cdot a\cdot 4^2+4^3 =$
$= a^3+12a^2+48a+64;$

б) $(2x-3)^3 = (2x)^3-3\cdot(2x)^2\cdot 3+3\cdot 2x\cdot 3^2-3^3 =$
$= 8x^3-36x^2+54x-27.$

7. Пресметај:

а) $(a-5)^3$; б) $(2x-3y)^3$.

8. Докажи дека:

$$(A+B)(A^2-AB+B^2) = A^3+B^3$$

$$(A-B)(A^2+AB+B^2) = A^3-B^3$$

Да се потсетиме и на делењето на полином со полином.

Прво, да го поделиме мономот $18ax^3y^5$ со $-3xy^4$. Имаме:

$$18ax^3y^5 : (-3xy^4) = \frac{18}{-3}ax^{3-1}y^{5-4} = -6ax^2y.$$

Потоа, да поделиме полином со моном:

$$(8x^3y^2+2x^5y^3) : 4x^2y = \frac{8}{4}x^{3-2}y^{2-1}+\frac{2}{4}x^{5-2}y^{3-1} =$$
$$= 2xy+\frac{1}{2}x^3y^2.$$

Полином се дели со моном на тој начин што секој член од полиномот се поделува со мономот и добиените количници се собераат. Тоа произлегува од правилото за делење на збир со рационален број.

Слично на постапката за делење на два природни броеви, постои постапка и за делење на два полинома (по една променлива). Таа се состои во следното:

1) И деленикот и делителот се подредуваат по експонентите на една од променливите што влегуваат во нив (од најголемиот кон најмалиот).

2) Првиот член од деленикот се дели со првиот член од делителот и се добива првиот член на количникот.

3) Првиот член на количникот се множи со делителот и добиениот производ се одзема од деленикот.

4) Првиот член од остатокот се дели со првиот член од делителот, и се добива вториот член на количникот. Таа постапка се продолжува сè додека не се добие остаток нула или остаток чиј степен по таа променлива е помал од степенот на делителот по истата променлива.

Пример 6. (Делење на полином со полином)

$$(6a^2x^4 - 5a^3x + 2x^5 - ax^3) : (-ax + 2x^3).$$

Прво, полиномите ќе ги подредиме по x. Имаме:

$$\begin{array}{l}
(2x^5 + 6a^2x^4 - ax^3 - 5a^3x) : (2x^3 - ax) = x^2 + 3a^2x \\
2x^5 - ax^3 \\
- \quad + \\
\hline
= \quad 6a^2x^4 - 5a^3x \\
 6a^2x^4 - 3a^3x \\
 - \qquad + \\
\hline
= \qquad - 2a^3x
\end{array}$$

Така, количникот од делењето е полиномот $x^2 + 3a^2x$, а изразот $-2a^3x$ е **остаток.**

Пример 7. *Да го поделиме полиномот*

$$9x - 5x^2 + x^3 - 9 \text{ со } 3 + x^2 - 2x.$$

Имаме:

$$\begin{array}{l}
(x^3 - 5x^2 + 9x - 9) : (x^2 - 2x + 3) = x - 3 \\
x^3 - 2x^2 + 3x \\
- \quad + \quad - \\
\hline
= \quad -3x^2 + 6x - 9 \\
 -3x^2 + 6x - 9 \\
 + \quad - \quad + \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

Значи, количникот е $x - 3$, а остатокот е нула.

Во случај кога остатокот е нула, се вели дека полиномот-делител **се содржи** во полиномот-деленик или дека полиномот-деленик е **делив** со полиномот-делител.

Значи, полиномот $x^3 - 5x + 9x - 9$ е делив со полиномот $x^2 - 2x + 3$ и може да се претстави како производ од два множитела – количникот и делителот, т.е.

$$x^3 - 5x + 9x - 9 = (x - 3) \cdot (x^2 - 2x + 3).$$

Множителите на полиномот се викаат уште и негови **делители.**

9. $(4x^2+9x+4x^3+4) : (1+2x) = ?$

Вежби

10. Пресметај:

а) $4 \cdot (5x^3-2x+1) + (4x^2-x-2)(-5x)$;
б) $(A+B)\,C - AC$, ако: $A=5a-2$, $B=3a^2-5a$, $C=-2a$.

11. Пресметај:

а) $(x^2-3)(x^2+2)$; б) $(3xy+5y)(4xy-2x)$;
в) $(x+2y)(x^2-2xy+4y^2)$.

12. Пресметај:

а) $(2a+3)^2$; б) $(5x^2-4y^3)^2$;
в) 79^2 ($79 = 80 - 1$).

13. Пресметај:

а) $(a^2-5)(a^2+5)$; б) $(3x^2-5y)(5y+3x^2)$;
в) $(1-a^2)(a^2+1)(1+a^4)$; г) $\left(\frac{2}{3}+x\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)\left(x^2+\frac{4}{9}\right)$.

14. Провери дали е идентитет равенството:

$$(x+y)^3 = x(x-3y)^2 + y(y-2x)^2.$$

15. На празното место стави соодветен моном, така што

а) $(\quad - \quad)^3 = 27a^3 \quad + \quad -64$;
б) $(3x^2- \quad)^3 = \quad + \quad + \quad + 8y^3$.

16. Најди го количникот и остатокот од делењето (на полиномите):

а) $(5x^3-3x^2+x-3) : (x^2-2)$;
б) $(6x^2y^2 - 13y^3 + 8x^3 - 12x^2y + 6y^4) : (2x - 3y)$.

V.4. РАЗЛОЖУВАЊЕ НА ПОЛИНОМИ НА МНОЖИТЕЛИ

Множењето на полиноми, како што видовме е мошне едноставно. Обратното дејство – **разложување на полином** (како производ од полиноми) – е многу потешко.

Овде ќе се запознаеме со некои општи идеи што се користат при разложувањето на даден полином.

а. **Разложување со извлекување заеднички множител.** Ако сите членови на даден полином имаат заеднички множител (т.е. делител), тогаш тој множител може „да се извлече пред заграда" врз основа на дистрибутивниот закон: $AX + AY = A(X+Y)$ и слично.

Пример 1. а) $ax+2ay = a(x+2y)$;

б) $9x^2y^3+12x^3y-6x^2y = 3x^2y(3y^2+4x-2)$,

зашто $3x^2y$ е делител на сите членови од дадениот полином.

1. Разложи го на множители полиномот:

а) $10n^2+5n$; б) $7ax^4-21a^2x^3+14a^3cx^2$;

в) $6xy^2(1-a)+4xy^3(1-a)$.

б) Разложување со примена на формулите за скратено множење. За разложување на некои полиноми може да се искористат формулите за скратено множење:

1) $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$; 2) $A^2\pm 2AB+B^2=(A\pm B)^2$;

3) $A^3\pm B^3=(A\pm B)(A^2\mp AB+B^2)$ и др.

Пример 2. *Да го разложиме полиномот:*

$$9x^2-49y^2.$$

Дадениов полином има два члена, па постои можност да се примени формулата 1) или 3). Забележуваме дека:

$$9x^2=(3x)^2=A^2, \qquad 49y^2=(7y)^2=B^2,$$

т.е. дадениот полином е од обликот A^2-B^2; затоа, според 1), имаме:

$$9x^2-49y^2=(3x)^2-(7y)^2=(3x-7y)(3x+7y).$$

Пример 3. *Да го разложиме полиномот* $72a^2x^2-50a^2$.

Имаме: $72a^2x^2-50a^2 = 2a^2(36x^2-25) = 2a^2(6x-5)(6x+5)$.

2. Разложи го полиномот:

а) $64x^2-y^2$; б) $50a^2-18$; в) x^4-16.

Пример 4. *Да го разложиме биномот:*

а) $125a^3-64b^3$; б) $343x^6+27y^3$.

Решение. а) *Имаме:* $125a^3=(5a)^3$, $64b^3=(4b)^3$, па според формулата 3):

$$125a^3-64b^3=(5a)^3-(4b)^3=(5a-4b)(25a^2+20ab+16b^2);$$

б) $343x^6+27y^3=(7x^2)^3+(3y)^3=(7x^2+3y)(49x^4-21x^2y+9y^2)$.

3. Разложи ги полиномите:

а) n^3-8; б) x^3y^3+64; в) x^6-y^6.

Пример 5. *Да го разложиме полиномот:*

а) $9x^2+12xy+4y^2$; б) $25a^2-40ab+16b^2$.

Решение. а) Дадениот полином има три члена. Тоа ни сугерира да провериме дали може да се примени формулата 2) (Квадрат од бином). Имаме:

$9x^2=(3x)^2$, $4y^2=(2y)^2$, $12xy=2\cdot 3x\cdot 2y$,

што значи дека условите за квадрат од бином се исполнети, па:

$$9x^2+12xy+4y^2=(3x+2y)^2.$$

б) По проверката (како погоре), ќе добиеме:

$$25a^2-40ab+16b^2=(5a)^2-2\cdot(5a)(4b)+(4b)^2=(5a-4b)^2.$$

4. Разложи ги на множители полиномите:

а) $16x^2-8xy+y^2$; б) $5x^2+30xy+45y^2$.

b. **Разложување со групирање на членовите.** Претходните две идеи за разложување на полиноми обично се користат во комбинација со уште една идеја – идејата за групирање на членовите во полиномот. Со неа ќе се запознаеме преку еден пример.

Пример 6. *Да го разложиме полиномот*

$$ax+bx+by+ay.$$

Првиот и четвртиот собирок имаат заеднички множител a, а вториот и третиот – го имаат b. Затоа, собироците ќе ги групираме вака:

$$(ax+ay)\quad+\quad(bx+by)$$

а потоа ги извлекуваме спомнатите заеднички множители:

$$a(x+y)\quad+\quad b(x+y).$$

Сега, $x+y$ е заеднички множител на двата собирока, па $a(x+y)+b(x+y)=(a+b)(x+y)$. Значи:

$$ax+bx+by+ay=(a+b)(x+y).$$

5. Разложи ги следниве полиноми:

а) $2ax-6ay-bx+3by$; б) $28xy-12ax+9a-21y$.

Пример 7. *Да се разложи:* $9x^2+6xy+y^2-z^2$.

$$9x^2+6xy+y^2-z^2=(9x^2+6xy+y^2)-z^2=$$
$$=(3x+y)^2-z^2=(3x+y+z)(3x+y-z).$$

(Методот на групирање го користевме комбинирано со формулите за скратено множење).

6. а) $1-x^2-4xy-y^2$; б) x^2-3x-y^2+3y.

Вежби

Разложи ги на множители следниве полиноми (7–11):

7. а) $5 - 5x$; б) $x^3y^2 - xy$; в) $21x^3y^4 - 14xy^3$;
г) $x^2(a - 4) - y^2(4 - a)$; д) $x^2(a^2 - a - 1) - a^2 + a + 1$.

8. а) $1 - a^2$; б) $5 - 5a^2$; в) $0{,}25a^2b^2 - 0{,}16$;
г) $(2x-1)^2 - 9y^2$; д) $9(x-y)^2 - 4(x+y)^2$.

9. а) $x^3 - 8y^3$; б) $54x^3 - 16$; в) $1 + 125x^3$;
г) $(x+y)^3 - y^3$; д) $1 - 64x^6$.

10. а) $ax - ay - bx + by$; б) $14a^3bx - 7a^3b^2 + 14a^2cbx - 7a^2b^2c$.

11. а) $ax^3 - ay^3 - bx^3 + by^3$; б) $9a^3x^2 + 9x^2 - 16y^2 - 16a^3y^2$.

12 Најди ги НЗД и НЗС на броевите 60 и 126.

13 Разложи ги полиномите: $x^3 - x$ и $x^3 - x^2$ и запиши ги нивните заеднички делители.

V.5. НАЈГОЛЕМ ЗАЕДНИЧКИ ДЕЛИТЕЛ (НЗД) И НАЈМАЛ ЗАЕДНИЧКИ СОДРЖАТЕЛ (НЗС)

а. **Најголем заеднички делител.** Нека се дадени два полинома, на пример:

$$xy(x+3) \text{ и } x(x+3)^2. \tag{1}$$

Нивните делители, покрај бројот 1, се:

– на $xy(x+3)$: x, y, $x+3$, xy, $x(x+3)$, $y(x+3)$, $xy(x+3)$.

– на $x(x+3)^2$: x, $x+3$, $x(x+3)$, $x(x+3)^2$.

Гледаме дека полиномите

$$x,\ x+3 \text{ и } x(x+3) \tag{2}$$

се делители на обата полинома, т.е. тие се нивни **заеднички делители.** Притоа можеме да забележиме дека заедничкиот делител $x(x+3)$ е содржател на секој од заедничките делители (2).

Заедничкиот делител на два (или повеќе) полиноми што ги содржи сите нивни заеднички делители се вика **најголем заеднички делител** (НЗД) на тие полиноми.

Така, НЗД на полиномите (1) е $x(x+3)$. Еве уште два примера:

а) за полиномите $36x^3y^3$, $54x^2y^5$ НЗД е $18x^2y^3$; запишуваме:

$$\text{НЗД}\ (36x^3y^3,\ 54x^2y^5) = 18x^2y^3.$$

б) НЗД $(6x^2(x-1)^2(x+y)^2,\ 8xy(x-1)(x+y)^3) = 2x(x-1)(x+y)^2$.

1. Најди го НЗД на полиномите:

а) $5x$, $8xy$; б) $8xy^3$, $12x^5y^2$;

в) $2ab$, $4ac$, $8ad$; г) $14(a+3)^2\,(a-5)$, $21a(a+3)^5$.

Во горните примери и задачи, наоѓањето на НЗД на дадените полиноми беше мошне едноставно. Тоа е скоро секогаш така кога дадените полиноми се разложени на прости множители (или на степени од прости множители), т.е на полиноми што натаму не може да се разложуваат.

Според тоа, НЗД *на два или повеќе полиноми го наоѓаме на следниов начин:*

– дадените полиноми ќе ги разложиме на прости множители;

– ќе ги помножиме меѓусебно сите прости множители што се заеднички за дадените полиноми; притоа, секој од нив го земаме со најмалиот показател со кој се јавува во разложените полиноми.

Пример 1. *Да го најдеме НЗД на полиномите*

$$6x^3-162, \qquad 8x^2-72, \qquad 4x^2-24x+36.$$

Решение.

$6x^3-126 = 6(x^3-27) = 2 \cdot 3(x-3)\,(x^2+3x+9)$;
$8x^2-72 = 8(x^2-9) = 2^3(x-3)\,(x+3)$;
$4x^2-24x+36 = 4(x^2-6x+9) = 2^2(x-3)^2$.

Сега, постапувајќи како погоре, ќе најдеме дека НЗД на дадените полиноми е $2(x-3)$.

2. Најди го НЗД на полиномите:

а) $2a^2-2ab$, $8a^2-8b^2$; б) $3a$, $5b$;

в) a^3-4a, $a^4-4a^3+4a^2$, a^4-8a.

Забелешка. Полиноми што немаат друг заеднички делител освен 1 се викаат **заемно прости полиноми.** Такви се, на пример, $3a$ и $5b$, x^2-1 и x^2-4 и др.

6. **Најмал заеднички содржател.** Порано рековме дека **содржател** на еден полином е полином којшто е делив (т.е. се дели без остаток) со дадениот.

Заеднички содржател, пак, на два или повеќе дадени полиноми е полином што е содржател на секој од нив.

Пример 2. *За полиномите $6x$ и $4(x-y)$ заеднички содржатели се:*

$$12x(x-y),\ 24x^2(x-y),\ 60x(x-y)^2y,$$

и, општо,

$$12x(x-y) \cdot P,$$

каде што P е произволен полином (со кои било променливи).

Значи, два или повеќе дадени полиноми имаат безброј многу заеднички содржатели; оној содржател што е делител на сите други содржатели, се вика **најмал заеднички содржател** (НЗС) на дадените полиноми.

Така: а) НЗС на полиномите $6x$ и $4(x - y)$ е полиномот $12x(x - y)$; запишуваме:

$$\text{НЗС}(6x,\ 4(x-y)) = 12x(x-y);$$

$$\text{б) НЗС}(12ab,\ 8a^2c^2,\ 6c^4) = 24a^2bc^4.$$

3. Најди го НЗС на полиномите:

а) $15abx^2,\ 9ab^3$; б) $y^3(2x-1),\ xy(x-1)$.

За наоѓањето на НЗС на полиноми се постапува слично како за НЗД:

– прво, дадените полиноми се разложуваат на прости множители;

– потоа се образува производ од **сите прости** множители; притоа, секој од нив се зема со најголемиот показател со кој се јавува во разложените полиноми.

Пример 3. *Да го најдеме НЗС на полиномите:*

$$2a^2-2ab,\quad 8a^2-8b^2.$$

Решение:

$$2a^2-2ab = 2a(a-b);$$
$$8a^2-8b^2 = 8(a^2-b^2) = 2^3(a-b)(a+b).$$

Така,

$$\text{НЗС}(2a^2 - 2ab,\ 8a^2 - 8b^2) = 2^3a(a - b)(a + b) = 8a(a^2 - b^2).$$

4. Најди го НЗС на полиномите:

а) $3a,\ 5b$; б) $a^3-a^2b,\ 3a^2-6ab+3b^2$.

5. Најди го: а) НЗД, б) НЗС на полиномите:

$$x^2-y^2,\ x^3-y^3,\ x^2-2xy+y^2.$$

Вежби

6. Најди ги сите делители на полиномот

а) $ax(a-2)$, б) $x(a-2)^3$.

Потоа најди ги сите заеднички делители на полиномите од а) и б).

7. Најди го НЗД на полиномите:

а) $8x^2y^3,\ 10xy^5$; б) $6x^2y^3,\ 15x^3y^4,\ 12x^2y$;
в) $ax(a-x)^2,\ x^2(a+x)\ (a-x),\ axy(a-x)^3$.

8. Најди го НЗД на следниве полиноми:

а) $ax^2-a^2x,\ x^3-ax^2$; б) $x^2+2ax+a^2,\ x^2+ax$;
в) $a^3+a^2+a+1,\ a^2+2a+1,\ a^2-1$.

9. Најди три (различни) содржатели на полиномот x^3+x.

10. Најди го НЗС на полиномите:

а) $3x^2,\ 4x^3$; б) $15x,\ 6x^2,\ 10x^3$;
в) $x-y,\ x^2+xy+y^2$; г) $6xy+9y^2,\ 4x^2+6xy$.

11. Најди го НЗС на полиномите:

а) $xy,\ x^2+xy,\ xy+y^2$;
б) $3x-6y,\ x^2-4xy+4y^2,\ 2x^3-16y^3$.

12. Најди НЗС и НЗД на полиномите:

а) $a^2-7a,\ a^3-49a,\ a^2-14a+49$;
б) $2a^3+12a^2x+18ax^2,\ a^3+27x^3,\ 2a^2-18x^2$.

13 За кои рационални изрази се вели дека се идентични?
Запиши два идентични рационални изрази, а) полиномни, б) дробно рационални.

14. а) Дропката $\frac{4}{5}$ прошири ја со 3;

б) Скрати ја дропката $\frac{60}{45}$ (до нескратлива);

в) Сведи ги на еднаков именител дропките: $\frac{5}{6}$ и $\frac{3}{8}$.

V.6. АЛГЕБАРСКИ ДРОПКИ; ПРОШИРУВАЊЕ И СКРАТУВАЊЕ

Нека A и B се полиноми. Изразот

$$\frac{A}{B}\ (B \neq 0) \tag{1}$$

се вика **алгебарска дропка**; и тука, A се вика **броител**, а B **именител** на дропката.

На пример:

$$\frac{x}{y},\quad \frac{x^2-4}{2x},\quad \frac{3}{7},\quad \frac{a+b}{a-2},\quad \frac{a+3b}{a^2-ab}$$

се алгебарски дропки. (И обичните дропки како: $\frac{3}{7}$, $\frac{\sqrt{2}}{6}$ итн. се сметаат за алгебарски.)

1. Запиши неколку алгебарски дропки со именител а) без променливи, б) со променливи.

Една алгебарска дропка, како и обично, има смисла само кога именителот на дропката е различен од нула.

Според тоа, *променливите во алгебарската дропка може да ги примаат само оние вредности, за кои именителот добива вредност различна од нула;* за нив се вели дека се **„допуштени вредности на променливите во дропката"** или дека **„дропката е дефинирана за тие вредности"**.

На пример, за алгебарската дропка

$$\frac{x-y}{y-5}$$

допуштените вредности за x се сите реални броеви, а за y – сите реални броеви, освен бројот 5.

2. Одреди ги допуштените вредности на променливите во дропката:

а) $\frac{x^2-y^2}{2xy}$; б) $\frac{a+3b}{a^2-ab}$.

3. Спореди ги вредностите на следните дропки, за дадените вредности на променливите:

а) $\frac{3x}{x-2}$ и $\frac{3x^2}{x^2-2x}$ за x: 1, 3, 5;

б) $\frac{a}{a-b}$ и $\frac{ab}{ab-b^2}$ за (a, b): (2, 1), (0, 5), (−1, 2).

За две алгебарски дропки $\frac{A}{B}$ и $\frac{C}{D}$ се вели дека се **идентично еднакви,** ако за секоја комбинација од допуштените вредности на променливите во двете дропки соодветните бројни вредности на тие дропки се еднакви; во тој случај равенството

$$\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$$

се вика **идентитет** (над множеството допуштени вредности).

Такви се, на пример, дропките под а), односно под б), во задачата 3.

За идентично еднаквите алгебарски дропки, како и кај обичните дропки, важи:

$$\boxed{\frac{A}{B}=\frac{C}{D} \iff AD = BC} \quad (B \neq 0,\ D \neq 0). \qquad (2)$$

Забелешка. Една алгебарска дропка станува обична дропка кога променливите се заменат со нивни допуштени вредности. Поради тоа, за алгебарските дропки ќе важат исти својства и ќе може да се извршуваат операции на ист начин како кај обичните дропки.

б. Проширување на алгебарска дропка. Ако и броителот и именителот на алгебарската дропка (1) се помножи со ист полином P различен од нула, се добива дропка што е идентично еднаква со зададената, т.е.

$$\boxed{\frac{A}{B} = \frac{A \cdot P}{B \cdot P}, \quad P \neq 0.} \tag{3}$$

Во тој случај се вели дека дадената дропка е **проширена** со полиномот P.

Пример 1. *Да ја проширими дропката* $\dfrac{x-2}{x+2}$ *со полиномот* $x + 2$.

Решение.

$$\frac{x-2}{x+2} = \frac{(x-2)\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot(x+2)} = \frac{x^2-4}{(x+2)^2}, \qquad x \neq -2.$$

(Можеме да се увериме дека добиената дропка е идентично еднаква со дадената, со помош на својството (2); провери со множење дека

$$(x-2)\ (x+2)^2 = (x+2)\ (x^2-4),\ x \neq 2.)$$

4. Прошири ја дропката $\dfrac{2x}{x-1}$ со полиномот:

а) $3x$; б) $1+x$; в) x^2+x+1.

в. Сведување на алгебарски дропки на еднакви именители. Со помош на својството за проширување, две или повеќе дропки може да се доведат на еднакви именители. Таа постапка може да се согледа од решението на следнава задача.

Задача 1. *Да се доведат на еднакви именители следниве дропки:*

$$\frac{b}{a^2-a}, \frac{a}{ab+b}, \frac{1}{a^2-1}.$$

Решение. Бараниот именител може да биде **само** некој содржател на именителите на дадените дропки; најпрактично е да се земе **нивниот најмал заеднички содржател.** Затоа да го одредиме НЗС на именителите:

$$ab+b=b(a+1);$$
$$a^2-a=a(a-1); \qquad \text{НЗС: } ab(a-1)(a+1).$$
$$a^2-1=(a-1)(a+1).$$

Според тоа, ако првата дропка ја прошириме со $a(a-1)$, втората со $b(a+1)$ и третата со ab, тие ќе имаат еднакви именители:

$$\frac{a}{ab+b}=\frac{a}{b(a+1)}\cdot\frac{a(a-1)}{a(a-1)}=\frac{a^2(a-1)}{ab(a^2-1)},$$

$$\frac{b}{a^2-a}=\frac{b}{a(a-1)}\cdot\frac{b(a+1)}{b(a+1)}=\frac{b^2(a+1)}{ab(a^2-1)},$$

$$\frac{1}{a^2-1}=\frac{1}{a^2-1}\cdot\frac{ab}{ab}=\frac{ab}{(a^2-1)ab}.$$

5. Доведи ги на еднакви именители дропките:

а) $\frac{x}{4a}$, $\frac{y}{3a^2c}$; б) $\frac{y}{x^2-xy}$ $\frac{x}{xy-y^2}$.

Скратување на алгебарска дропка. Често пати се јавува потреба да се упрости дадена дропка; тоа се постигнува исто како кај обичните дропки – со скратување, т.е. со делење и на броителот и именителот со ист полином P (различен од нула), т.е.

$$\boxed{\frac{A}{B}=\frac{A:P}{B:P} \qquad (P\neq 0).}$$

За таа цел, најзгодно е броителот и именителот да се разложат на прости множители. Да разгледаме еден пример.

Пример 2. *Да ја скратиме дропката*

$$\frac{ax-a^2}{ax^2-a^2x}.$$

Решение.

$$\frac{ax-a^2}{ax^2-a^2x}=\frac{a(x-a):a(x-a)}{ax(x-a):a(x-a)}=\frac{1}{x}$$

6. Скрати ја дропката:

а) $\frac{6xy}{21axy}$; б) $\frac{x^3-4x^2}{x^2-16}$.

9 Вежби

7. За кои вредности на променливата x, нема смисла изразот:

а) $\frac{x^2+4x+4}{(x+2)(x-1)}$; б) $\frac{x}{x^3-4x}$?

8. За кои вредности на променливите, следниве алгебарски дропки се дефинирани (имаат смисла):

а) $\frac{a-3}{a^2b-16b}$; б) $\frac{2a+b}{a^4-ab^3}$?

9. Одреди кои од дадените равенства се идентитети:

а) $\frac{7y^2}{5x}=\frac{14y^4}{10x^3}$; б) $\frac{12x^3y^3}{8yx^4}=\frac{3y^2}{2x}$;

в) $\frac{x+2}{x-1}=\frac{x^2+x}{x^2-x}$

10. Прошири ја следнава алгебарска дропка:

а) $\frac{4}{5x}$ со $3x^2$ б) $\frac{2a^2}{3x}$ со $4ax^2$

в) $\frac{x^2-x+1}{x-1}$ со $x+1$ $(x+1\neq 0)$

11. Сведи ги на еднаков именител дропките:

а) $\frac{x}{6y^2}$, $\frac{y}{4x^3}$; б) $\frac{2a}{3x-6}$, $\frac{3a}{2x-4}$; в) $\frac{1}{x^2+xy+y^2}$, $\frac{1}{x^2-y^2}$, $\frac{1}{x^3-y^3}$.

12. Скрати ја дропката (до нескратлива)

а) $\frac{12a^3-x^5}{8a^5x^2}$; б) $\frac{9x^2-4}{6ax+4a}$; в) $\frac{a^3x-ax^3}{a^2x+ax^2}$.

$\boxed{13.}$ Изврши ги назначените операции со (обични) дропки:

а) $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}$; б) $\frac{3}{4}+\frac{5}{6}$; в) $\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}$; г) $\frac{6}{7}:\frac{3}{14}$.

V.7. ОПЕРАЦИИ СО АЛГЕБАРСКИ ДРОПКИ

Алгебарските дропки се собираат, одземаат, множат и делат како и обичните дропки.

а **Собирање и одземање.** *Збирот на алгебарски дропки со еднакви именители е дропка со ист именител, а броител еднаков на збирот од броителите на собироците,* т.е.

$$\boxed{\frac{A}{M}+\frac{B}{M}=\frac{A+B}{M}\quad (M\neq 0)}\qquad (1)$$

Пример 1.

$$\frac{3}{5a^2}+\frac{4}{5a^2}+\frac{6c}{5a^2}=\frac{3+4+6c}{5a^2}=\frac{7+6c}{5a^2} \qquad (a \neq 0).$$

1. Пресметај:

а) $\frac{2}{3a}+\frac{4c}{3a}+\frac{-1}{3a}$; б) $\frac{2x-y}{a-3}+\frac{x-y}{a-3}+\frac{y-2x}{a-3}$

Разликата на две алгебарски дропки со еднакви именители е дропка со ист именител, а броител еднаков со разликата од броителот на намаленикот и броителот на намалителот, т.е.

$$\boxed{\frac{A}{M}-\frac{B}{M}=\frac{A-B}{M} \quad (M \neq 0).} \qquad (2)$$

Пример 2.

$$\frac{8x-3}{2x-1}-\frac{3x-9}{2x-1}=\frac{8x-3-(3x-9)}{2x-1}=\frac{5x+6}{2x-1}.$$

2. Пресметај:

а) $\frac{a+3x}{a}-\frac{a-x}{a}$; б) $\frac{1}{1-x}-\frac{2a}{x-1}+\frac{a}{x-1}$.

За да се собераат или одземаат дропки со различни именители, тие прво треба да се сведат на дропки со исти именители.

Пример 3. *Да го најдеме збирот:*

$$\frac{a+x}{x}+\frac{x}{x-a}-\frac{x^2}{x^2-ax}.$$

Решение. За да ги сведеме дропките на ист именител, ќе го најдеме НЗС од нивните именители:

$$\text{НЗС }(x,\ x-a,\ x^2-ax)=x(x-a),$$

а потоа ќе ги запишеме со ист именител:

$$\frac{a+x}{x}+\frac{x}{x-a}-\frac{x^2}{x^2-ax}=\frac{(x+a)\,(x-a)+x\cdot x-x^2\cdot 1}{x(x-a)}=$$

$$=\frac{x^2-a^2+x^2-x^2}{x(x-a)}=\frac{x^2-a^2}{x(x-a)}=\frac{(x-a)\,(x+a)}{x(x-a)}=\frac{x+a}{x}.$$

3. Пресметај:

а) $\frac{3-x}{2} - \frac{1-x^2}{3x}$; б) $\frac{1}{a-1} - \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a^2}$.

6. **Множење и делење.** *Производот на две алгебарски дропки е дропка чиј броител е еднаков на производот од броителите на множителите, а именителот е еднаков на производот од именителите од множителите*, т.е.

$$\boxed{\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D} \qquad (B\neq 0,\ D\neq 0).} \tag{3}$$

Пример 4.

а) $\frac{4x^3}{3y^2}\cdot\frac{6y^5}{5x^4}=\frac{4x^3\cdot 6y^5}{3y^2\cdot 5x^4}=\frac{24x^3y^5}{15x^4y^2}=\frac{8y^3}{5x}$;

б) $\frac{x-1}{x^2-9}\cdot\frac{x+3}{3x-3}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x^2-9)(3x-3)}=\frac{(x-1)(x+3)}{(x-3)(x+3)3(x-1)}=\frac{1}{3(x-3)}$.

4. Пресметај:

а) $\frac{2a}{5x}\cdot\frac{3x}{4ac}$; б) $\frac{x^2-1}{x-2}\cdot\frac{5x-10}{3-3x^2}$.

Делењето на алгебарски дропки се врши исто како кај обичните; имено, *количникот на две дропки е еднаков со производот од деленикот и реципрочната вредност од делителот*, т.е.

$$\boxed{\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}=\frac{AD}{BC} \qquad (B\neq 0,\ C\neq 0,\ D\neq 0)}$$

Пример 5.

а) $\frac{9ax^2}{10c^3}:\frac{6a^2}{5c^2x}=\frac{9ax^2}{10c^3}\cdot\frac{5c^2x}{6a^2}=\frac{45ac^2x^3}{60a^2c^3}=\frac{3x^3}{4ac}$;

б) $\frac{x^2+2xy+y^2}{4x^2-1}:\frac{x+y}{2x+1}=\frac{(x+y)^2}{(2x-1)(2x+1)}\cdot\frac{2x+1}{x+y}=\frac{x+y}{2x-1}$.

5. Пресметај:

а) $8x^2y:\frac{4y}{x}$; б) $\frac{a^2-9x^2}{a^2-ax}:\frac{a^2-3ax}{a-x}$.

б. **Двојни алгебарски дропки.** Дропка чиј броител или именител е **дробен** рационален израз се вика **двојна алгебарска дропка.** На пример:

$$\frac{\frac{6}{x^2}}{\frac{3}{x}};\quad \frac{\frac{a^2-1}{5}}{a+1};\quad \frac{3x-1}{\frac{4}{1+3x}};\quad \frac{\frac{y}{x}-\frac{1}{xy}}{x+\frac{x}{y}}$$

се двојни алгебарски дропки.

Секоја двојна алгебарска дропка може идентично да се трансформира во алгебарска дропка, ако нејзиниот броител се подели со именителот. На пример:

а) $$\frac{\frac{6}{x^2}}{\frac{3}{x}} = \frac{6}{x^2} : \frac{3}{x} = \frac{6}{x^2} \cdot \frac{x}{3} = \frac{6x}{3x^2} = \frac{2}{x}$$

б) $$\frac{\frac{a^2-1}{5}}{a+1} = \frac{a^2-1}{5} : (a+1) = \frac{(a-1)(a+1)}{5} \cdot \frac{1}{a+1} = \frac{a-1}{5};$$

в) $$\frac{\frac{y}{x}-\frac{1}{xy}}{x+\frac{x}{y}} = \left(\frac{y}{x} - \frac{1}{xy}\right) : \left(x + \frac{x}{y}\right) =$$

$$= \frac{y^2-1}{xy} : \frac{xy+x}{y} = \frac{(y-1)(y+1)}{xy} \cdot \frac{y}{x(y+1)} = \frac{y-1}{x^2}.$$

6. Трансформирај ги двојните дропки:

а) $\dfrac{\frac{x^2+2x}{3x+6}}{x}$; б) $\dfrac{1+\frac{a}{a-1}}{1-\frac{a}{a-1}}$

г. **Вежби**

7. Пресметај:

а) $\dfrac{2x}{3y^2} + \dfrac{4x-9}{3y^2}$; б) $\dfrac{7a}{4x^2} - \dfrac{5a}{x^2}$ в) $\dfrac{3x^2-2x-6}{x-5} + \dfrac{2x^2+7x-4}{x-5}$.

8. Изврши ги назначените операции:

а) $\dfrac{x}{x-3} - \dfrac{x-2}{x}$; б) $\dfrac{2x}{x-y} + \dfrac{y}{x} + \dfrac{3}{x+y}$; в) $\dfrac{a+3b}{a-2b} + \dfrac{a+b}{a+2b}$;

г) $\dfrac{a-2b}{2a+b} + \dfrac{3a+4b}{2a-b} - \dfrac{a+b}{a}$.

9. Изврши ги назначените операции:

а) $\dfrac{x+2}{2x^2-2x}+\dfrac{x-1}{x^2-2x+1}$. б) $\dfrac{5}{x^2-2x}-\dfrac{1-x}{x^2-4}$.

10. Пресметај ги производите:

а) $\dfrac{x-y}{x+y}\cdot\dfrac{x^2+xy}{xy-y^2}$ б) $(x^2-y^2)\cdot\dfrac{2xy}{x+y}$

в) $\dfrac{x^4+x^3+x+1}{x^3-x^2+x-1}\cdot\dfrac{2x^2+2}{x^3+1}$.

11. Изврши ги назначените операции:

а) $\dfrac{15a^2+30a}{a+3}:(5a+10)$; б) $\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}\right):\left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{y^2}\right)$.

в) $\left(2a-1+\dfrac{15}{a-3}\right):\left(a-3=\dfrac{5a}{2a-6}\right)$

12. Трансформирај ги двојните дропки:

а) $\dfrac{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}}{\dfrac{x^2-y^2}{2xy}}$ б) $\dfrac{1-\dfrac{3a^2}{1-a^2}}{\dfrac{a}{a-1}+1}$.

13. Упрости ги следниве изрази:

а) $\dfrac{4^7}{4^9}$; б) $\dfrac{x^6}{x^8}$; в) $\dfrac{x^3\cdot x^4}{x^7}$.

V.8. СТЕПЕН СО ПОКАЗАТЕЛ ЦЕЛ БРОЈ

Во една од претходните лекции се потсетивме дека за $a\neq 0$ и $m>n$ важи равенството:

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Лесно се уверуваме дека левата страна на равенството (1) има смисла и за $m=n$ и за $m<n$.

Примери: 1.

1. $2^3 : 2^3 = 1$.
2. $b^5 : b^5 = 1$ $(b\neq 0)$.
3. $a^n : a^n = 1$ $(a\neq 0)$.
4. $\dfrac{a^2}{a^3}=\dfrac{a\cdot a}{a\cdot a\cdot a}=\dfrac{1}{a}$ $(a\neq 0)$.
5. $\dfrac{a^2}{a^4}=\dfrac{a\cdot a}{a\cdot a\cdot a\cdot a}=\dfrac{1}{a^2}$ $(a\neq 0)$.

Ако равенството (1) го примениме за количниците во горните примери, не водејќи сметка дека важи само за $m > n$, и добиеното го споредиме, ќе добиеме:

1. $2^3 : 2^3 = 2^{3-3} = 2^\circ$, т.е. $2^\circ = 1$.

2'. $b^5 : b^5 = b^{5-5} = b^\circ$, т.е. $b^\circ = 1$.

3. $a^n : a^n = a^{n-n} = a^\circ$, т.е. $a^\circ = 1$.

4'. $\frac{a^2}{a^3} = a^{2-3} = a^{-1}$, т.е. $a^{-1} = \frac{1}{a}$.

5'. $\frac{a^2}{a^4} = a^{2-4} = a^{-2}$, т.е. $a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

По слична постапка можеме да добиеме и дека

$$a^{-3} = \frac{1}{a^3},\quad a^{-4} = \frac{1}{a^4} \dots\ a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ова ни дава повод да воведеме и степени со показател нула и со показател цел негативен број за да може равенството (1) да важи и кога $m \leqslant n$. Затоа земаме по дефиниција

$$\boxed{a^\circ = 1 \text{ и } a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad (a \neq 0).}$$

Со ова извршивме проширување на поимот за степен. Со тоа, степенот a^n за $a \neq 0$ има смисла за кој било цел број n.

Досега извршивме неколку проширувања на поимот за број. Притоа, секогаш водевме сметка во новото множество броеви да важат сите важни законитости што важеле пред тоа. Исто така, и тука треба да докажеме дека за новото проширување на поимот степен важат равенствата:

$$\boxed{\begin{array}{lll} 1^\circ.\ a^m \cdot a^n = a^{m+n}. & 2^\circ.\ a^m : a^n = a^{m-n}, & 3^\circ.\ (a^m)^n = a^{mn}. \\ 4^\circ.\ (ab)^n = a^n b^n. & 5^\circ.\ \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} & (m, n \in \mathbb{Z},\ a \neq 0 \neq b). \end{array}}$$

Ќе го докажеме прво равенството 4°: $(a \cdot b)^n = a^n\ b^n$

а) За $n = 0$ имаме $(a \cdot b)^\circ = a^\circ \cdot b^\circ$. Левата страна е еднаква на десната, бидејќи $(ab)^\circ = 1$ и $a^\circ \cdot b^\circ = 1 \cdot 1 = 1$, т.е. $1=1$.

б) Нека $n = -k$ $(k > 0)$.

$$(ab)^n = (ab)^{-k} = \frac{1}{(ab)^k} = \frac{1}{a^k \cdot b^k} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{b^k} = a^{-k} \cdot b^{-k} = a^n b^n.$$

1. На потполно ист начин се докажува дека важи и равенството 5°. Докажи!

Доказите на равенствата 1°, 2° и 3° се малку посложени. Така, за доказот на равенството 1° треба да се разгледаат неколку случаи во зависност од знакот на броевите m, n и $m+n$ и дали некој од нив е нула.

Ние ќе го разгледаме случајот кога $m > 0$, $n < 0$ и $m+n > 0$.

Нека $n = -k$; тогаш $m - k > 0$.

$$a^m \cdot a^n = a^m \cdot a^{-k} = \frac{a^m}{a^k} = a^{m-k} = a^{m+n}, \text{ т.е. } a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

што требаше и да докажеме.

Да покажеме дека равенството 1° важи и кога еден од експонентите е нула. Нека $n = 0$ и $m > 0$. Тога.

$$a^m \cdot a^0 = a^m \cdot 1 = a^m = a^{m+0}$$

На сличен начин се докажува и за другите случаи за равенството 1°, а и за равенствата под 2° и 3°.

Примери:

6. $(-254)^0 = 1.$

7. $(x-1)^0 = 1$ за $x \neq 1.$

2. Одреди кои од следниве искази се вистинити:

а) $(\forall x \in \mathbf{N})\ (x - 2)^0 = 1$ в) $(-5)^0 = 1 \wedge 5^0 = 1$

б) $(\exists x \in \mathbf{N})\ (x + 1)^0 = 1$ г) $1^0 = 0 \vee 0^1 = 1$

Примери:

8. $a^5 \cdot a^{-3} = a^{5-3} = a^2$
9. $a^{-3} \cdot a^{-2} = a^{(-3)+(-2)} = a^{-5}$
10. $(a^3)^{-4} = a^{3 \cdot (-4)} = a^{-12}$
11. $(a^{-5})^{-3} = a^{15}$

12. $\dfrac{(a^4)^{-2} \cdot a^3}{a^{-5}} = \dfrac{a^{-8} \cdot a^3}{a^{-5}} = a^{(-8)+3-(-5)} = a^{-8+3+5} = a^0 = 1.$

3. Запиши ги како степени со основа x следниве изрази:

а) $x^{-3} \cdot x^{-5}$ в) $(x^{-2})^3 \cdot x^4$

б) $(x^{-4})^{-5}$ г) $\dfrac{(x^3)^{-2} \cdot x^5}{x^{-7}}$

б. Да видиме како се степенува дропка со негативен показател (при $a \neq 0$ и $b \neq 0$):

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^{n}}=\frac{1}{\frac{a^n}{b^n}}=\frac{b^n}{a^n}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}}$$

Значи, дропка се степенува со негативен показател на тој начин што нејзината реципрочна вредност се степенува со спротивниот број на дадениот показател.

4. Запиши ги со позитивен показател следниве степени:

а) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$ б) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-m}$ в) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-3}$

5. Пресметај ја вредноста на следниве изрази:

а. $1^{-1}+2^{-2}+3^{-3}$.
б. $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$

Секоја дропка во која има степени со негативни показатели може да се трансформира во дропка со степени без негативни показатели. Исто така, секоја дропка може да се запише со броител 1 или со именител 1.

Пример 13. а. $\frac{a^3b^{-4}}{c^{-3}d}=\frac{a^3c^3}{b^4d}$.

б. $\frac{a^3b^{-4}}{c^{-3}d}=\frac{1}{a^{-3}b^4c^{-3}d}$.

в. $\frac{a^3b^4}{c^{-3}d}=a^3b^4c^3d^{-1}$

6. Запиши ги без негативни показатели следниве изрази:

а. $\frac{5x^{-2}y}{z^{-3}}$. б. $\frac{4^{-1}b^3c^{-5}}{a^{-2}}$.

7. Запиши ги со броител 1 следниве дропки:

а. $\frac{3^2a^{-2}b}{c^4}$. б. $\frac{5x^{-2}b^3}{c^{-2}}$.

Од историјата на математиката

Негативни показатели на степени се среќаваат уште во делото на Н. Шуке „Наука за бројот во три дела“ (XV в.). Прв систематски почнал да ги употребува И. Њутн, којшто во едно од своите писма од 1676 година пишува: „Бидејќи алгебристите, наместо *aa, aaa* итн. пишуваат a^2, a^3 итн., така и јас . . . наместо $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a^3}$ пишувам a^{-1}, a^{-2}, a^{-3} итн.“

Вежби

8. Одреди кои од следниве искази се вистинити:

а. $7^3 \cdot 7^{-3} = 1 \wedge (-345+18)^\circ = 1$
б. $(\forall x \in \mathbf{N})\ (x-5)^\circ = 1$
в. $(\forall x \in \mathbf{N})\ (x^2+1)^\circ = 1.$

9. Запиши ги како степен со основа b ($b \neq 0$) следниве изрази:

а. $b^{-3} \cdot b^2$ в. $\dfrac{b^8 \cdot b^{-4}}{b^{-2}}$

б. $(b^3)^{-3} \cdot b^4$ г. $(b^{-3})^2 : (b^2)^{-3}.$

10. Запиши ги со позитивен показател следниве изрази:

а) $\left(\dfrac{7}{8}\right)^{-5}$; б) $\left(\dfrac{1}{6}\right)^{-3}$

11. Пресметај ја вредноста на следниве изрази:

а) $1^\circ + 1^{-1} - 1^{10}$; б) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{-2} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}$

12. Запиши ги со броител 1 следниве дропки:

а) $\dfrac{a^{-3}b^4}{c^{-2}}$ ($a, c \neq 0$); б) $\dfrac{3^2x^{-1}y^3}{z^4}$ ($x, z \neq 0$).

ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ – V

1. Упрости ги следниве изрази:

а) $x^4 \cdot x^{10}$; б) $x^{24} : x^6$; в) $\dfrac{x^{12} \cdot x^8}{x^{17}}$

2. Следниве изрази претстави ги во вид на степен со основа a:

а) $(a^3a^5)^2$; б) $(a^2a^4a^6)^3$; в) $\left(\dfrac{a^3a^2}{a^4}\right)^3.$

3. Доведи го на нормален вид полиномот

а) $3x^2y\ \ 4xy^3$; б) $(-2x^2y)^3$; в) $4xy^2-2x^2y-xy^2+5x^2y.$

Потоа, пресметај ја неговата бројна вредност за $x = -2$ и $y = -1$.

4. Провери дали е идентитет равенството:

$$x^2-2x+4 = (x-2)^2.$$

5. Провери дали равенството

$$x^2+y^2-(x-y)^2 = 2xy$$

е идентитет и потоа пресметај ја вредноста на изразот $x^2+y^2-(x-y)^2$ за $x = 25$, $y = 26$.

6. Изврши ги назначените операции:

а) $(x + 2y)(3x - 5y)$; б) $(5 - x)^2$; в) $(3 + 2x)^2$;
г) $(x+y-3)^2$; д) $(2x-3+4y)^2$.

$(2x-3+4y)^2 = [(2x-3)+4y]^2$.

7. Следниот израз претстави го како полином во нормален вид:

а) $(3x + 5x^2)^2$; б) $(5x^2y - 6x^3y^2)^2$;
в) $(4x + 3x^2)^3$; г) $(2xy - 3x^2y)^3$.

8. Докажи дека е идентитет следново равенство:

а) $(ax + by)^2 - (ay + bx)^2 = (a^2-b^2)(x^2-y^2)$;
б) $(x + y)^3 = x(x - 3y)^2 + y(y - 3x)^2$.

9. Изврши ги назначените операции:

а) $(9x^2y^3 - 6x^4y^5) : 3x^2y^4$; б) $(x^5 + 1) : (x + 1)$;
в) $(9x^2 - 15x - 10x^3 + 6x^4) : (2x^2 + 3)$.

10. Разложи го на множители полиномот:

а) $15ax^2 - 10a^2x$; б) $6x^5y^3 - 2x^2y^2 + 4x^3y^5$.

11. Разложи го на множители полиномот:

а) $ax - ay + bx - by$; б) $a^2 - a - 5a + 5$;
в) $ax + 2a + bx + 2b + x + 2$; г) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$.

12. Разложи го на множители полиномот:

а) $9x^2 - 4y^2$, б) $(x - y)^2 - a^2$; в) $(x - 1)^2 - (y - 3)^2$.

13. Најди го НЗД на полиномите:

а) $18a^2b^3c^4$, $24a^3b^2c^3$, $36a^4b^2$; б) ab^4+a^4b, $a^2b^4-a^4b^2$.

14. Најди го НЗС на полиномите:

а) $a^3 - 2a^2 + a$, $a^4 - a^3$; б) $a^2 + ab + b^2$, $a^2 - b^2$.

15. Скрати ја дропката:

а) $\dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 6x + 9}$; б) $\dfrac{x^3 + xy^2}{x^4 - y^4}$.

16. Пресметај:

$$\frac{2}{x - 1} + \frac{3}{x + 1} + \frac{x + 1}{x^2 - 1};$$

17. Изврши ги назначените операции:

а) $\dfrac{a-3b}{a+b} \cdot \dfrac{a^2+ab}{2a-6b}$; б) $\left(1 + \dfrac{x}{1-x}\right) : \left(\dfrac{1-y}{1-x^2} \cdot \dfrac{x+x^2}{1-y^2}\right)$

18. Упрости ги двојните дропки:

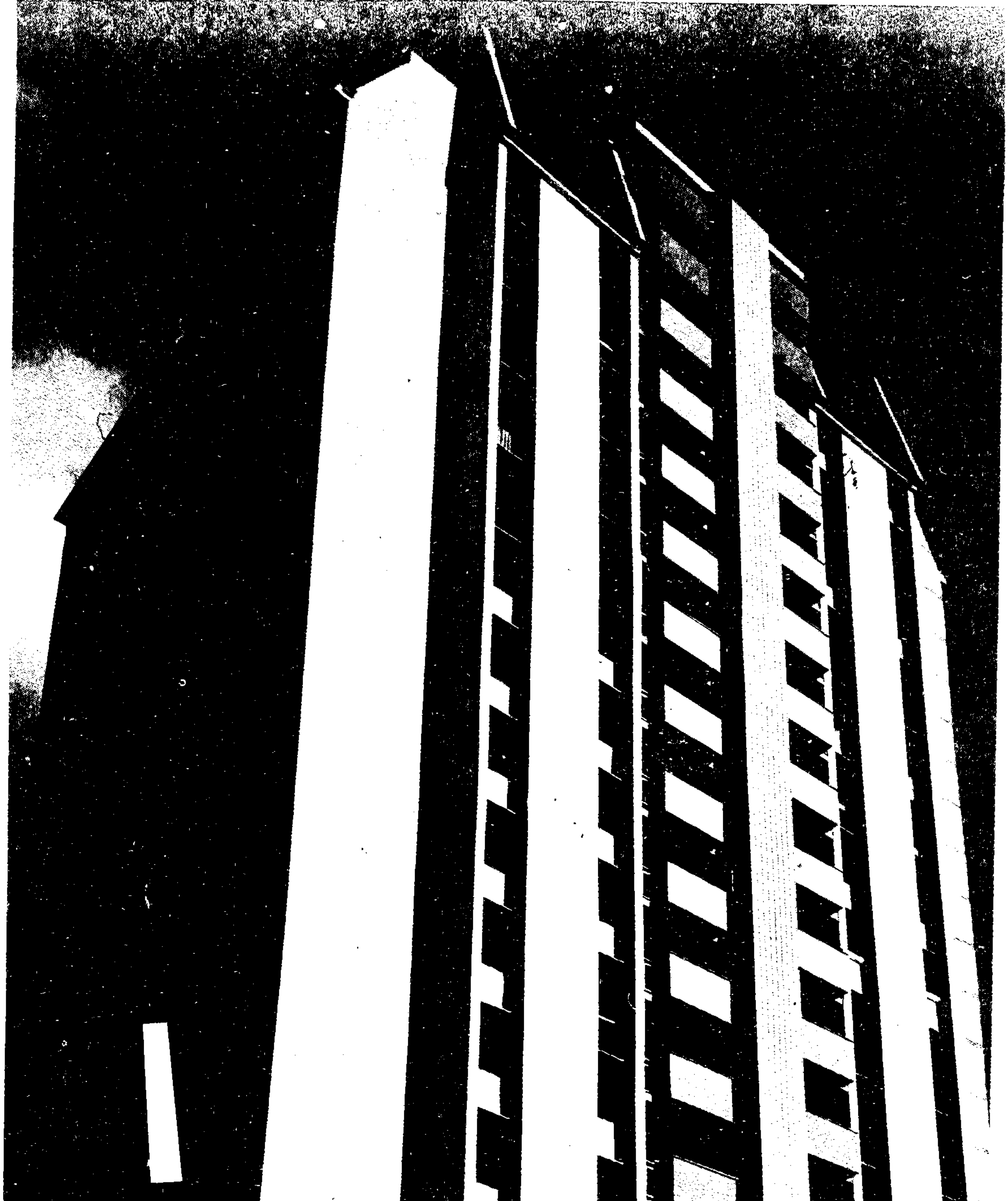
а) $\dfrac{x + \dfrac{3}{x}}{\dfrac{4}{x} - x}$ б) $\dfrac{\dfrac{1}{1-a} - \dfrac{1}{1+a}}{\dfrac{1}{1-a} + \dfrac{1}{1+a}}$

19. Изврши ги назначените операции:

а) $a^5 \cdot a^{-3}$; б) $(a^{-2})^{-4}$; в) $a^8 : a^{-2}$.

20. Пресметај:

а) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2} + (-3)^0$; б) $4 \cdot 2^3 - 8 \cdot 2^{-3} + 2^4 \cdot 2^{-4}$.



ОДГОВОРИ, УПАТСТВА И РЕШЕНИЈА

ОДГОВОРИ И УПАТСТВА

I. ЕЛЕМЕНТИ ОД МАТЕМАТИЧКАТА ЛОГИКА

I.1. **1.** а), г), д). **2.** а), г), д). **3.** $\tau(p) = \top, \tau(q) = \top, \tau(r) = \bot$. **4.** а) $\top$. б) $\bot$. в) $\bot$. г) $\top$. **6.** а), ѓ). **7.** б), г), д). **8.** а) $\bot$. б) $\bot$. в) $\bot$.

I.2. **1.** а) $\top$ б) $\bot$. в) $\bot$. г) $\bot$. **2.** а) $\bot$. б) $\bot$. в) $\bot$. **5.** а) 7 е помал или е еднаков со 8; $\tau(7 \leq 8) = \top$. **6.** а) 3% од 200 не е 6 (или: Не е точно дека 3% од 200 е 6.); τ(30% од 200 не е 6) $= \bot$. г) τ(26 не е делив со 4) $= \top$. **7.** а) $\top$. б) $\top$. в) $\top$. **8.** а) $\top$ б) $\top$ г) $\top$. д) $\bot$. **9.** а) $\tau(3 \mid 27 \vee 3 \mid 35) = \top$. в) $\tau(3 \mid 35 \wedge 3 \mid 24) = \bot$. **10.** Сите искази се вистинити. **12.** а) Живата не е метал; $\bot$. б) $3 \neq 5$; $\top$. г) $(-3)(-5) \neq -15$; $\top$. **13.** б), в), г).

I.3. **1.** Вистинити се а), в), г). **2.** $\tau(2 \mid 52 \Rightarrow 4 \mid 52) = \top, \tau(4 \mid 52 \Rightarrow 8 \mid 52) = \bot, \tau(8 \mid 52 \Rightarrow 4 \mid 52) = \top$ **3.** б) $p \Rightarrow q$: $(1 > 3) \Rightarrow (3 = 0)$; $q \Rightarrow p$: $3 = 0) \Rightarrow (1 > 3)$; $\tau(p \Rightarrow q) = \top = \tau(q \Rightarrow p)$. в) $p \Rightarrow q$; $(5 \mid 7) \Rightarrow (5 \mid 35)$; $q \Rightarrow p$: $(5 \mid 35 \Rightarrow 5 \mid 7)$; $\tau(p \Rightarrow q) = \top$, $\tau(q \Rightarrow p) = \bot$. **4.** а), б), г). **5.** б), в). **6.** а) Претпоставка: $6 \mid 54$; заклучок: $3 \mid 27$. **7.** а) $\tau(p \Rightarrow q) = \tau\left(\frac{1}{2} < 2 \Rightarrow \frac{3}{4} < 1\right) = \bot$. **8.** а), б), в), г). **9.** а) $\bot$. б) $\top$. в) $\top$. **10.** б), г). **11.** а), г), д).

I.4. **1.** $\top$. **4.** $(\neg p \wedge \neg q) \Rightarrow r$, каде што е p: „3 е прост број", q: „3 е парен број", r: „3 е сложен број". **6.** а) Види таблица 1. б) Види таблица 2.

Таблица 1.

p	$\neg q$	$p \wedge \neg p$
$\top$	$\bot$	$\bot$
$\bot$	$\top$	$\bot$

Таблица 2.

p	q	$\neg p$	$p \Rightarrow q$	$\neg p \vee q$	$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

7. а) Тавтологија, б) Неутрална. **8.** Еквивалентни се формулите под а). **9.** $p \wedge q \Rightarrow r \vee s$. **11.** $\top$ Упат. $\tau(\neg(p \wedge q)) = \top$, $\tau(\neg p \vee \neg q) = \top$. **12.** в) Види таблица 3. ѓ) Види таблица 4.

Таблица 3.

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
$\top$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\bot$	$\top$

Таблица 4.

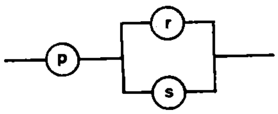
p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q \Rightarrow \neg p$	F
$\top$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$
$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$	$\bot$	$\bot$	$\top$
$\bot$	$\top$	$\top$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$
$\bot$	$\bot$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$	$\top$

13. а) и в). **14.** Под б) и под в). **15.** б).

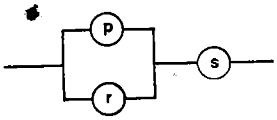
I.5. **3.** а) 8 не е сложен број или 8 не е делив со 2. б) $2 \neq 3$ и $3 \neq 2 + 1$. **4.** Законот за замена на импликацијата, законите на Де Морган и законот за двојна негација. **5.** а) 9 е непарен број и 5 е прост број. **7.** 36 не е делив со 6 или 36 е делив со 3. **8.** а) 9 не е сложен број или $9 \neq 9$. б) $5 \leqslant 3$ или $5 \neq 3 + 2$.
9. $\neg(\neg p \wedge \neg\neg q) \iff \neg(\neg p \wedge q) \iff \neg\neg p \vee \neg q \iff p \vee \neg q$. **10.** $p \vee q$.
12. Вистинити се б) и г), а невистинити се а), в) и д).

I.6. **1.** а) – д) Да, со должини: а) и д) 1, б) 2, в) и г) 3. **2.** $\tau(P(5)) = \perp$, $\tau(Q(3,2)=\top$, $\tau(R(3, 4, 5)=\perp$. **3.** а) $\{4, 5, 6\}$. б) $\{(1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1)\}$. в) $\varnothing$. г) $\left\{\frac{3}{2}\right\}$ **4.** а) – г) Т. **5.** а) $(\forall x \in \mathbf{N})$ $(x + x = 2x)$. б) $(\forall x \in \mathbf{N})$ $(x > 0)$. в) $(\exists x \in \mathbf{Z})$ $(2x - 3) = 6$. г) $(\forall x \in \mathbf{R})$ $(x + 1 = 1 + x)$. **6.** а) За секој природен број x, $x + 5 = 7$. **8.** а) и в). **9.** а) Т. б) $\perp$. в) Т. г) $\top$ д) $\perp$. **10.** а) $\{4\}$. б) $\{1, 2, 3\}$ в) $\{2, 4\}$. **11.** *На пример:* $\{(1, 2), (2, 4), (-\frac{1}{2}, \frac{11}{4})\}$. **12.** а) и б) $\top$. в) $\perp$. **13.** а) и д) $\top$; б), в) и г) $\perp$. **14.** а) $(\forall a \in \mathbf{N})$ $(a + 10 = 10 + a)$. б) $(\exists x \in \mathbf{Z})$ $(2x + 1 > 0)$. **15.** а) За секој природен број a, $a^2 + 1 > 0$. **16.** а Не секој природен број е парен број (или Постои природен број што не е парен број). б) Не постои природен број што е парен број (или: Секој природен број е непарен број). **17.** а) $(\exists x \in \mathbf{N})$ $(x + 1 \leqslant 2)$. б) $(\forall x \in \mathbf{N})$ $(x + 3 \neq 3 + x)$.

I.7. **1.** а) Кога барем еден од прекинувачите е вклучен.



6а)



6б)

9. а) $p \vee (q \wedge r \wedge s)$ или $(q \wedge r \wedge s) \vee p$.) **11.** а) и в) за ниту една вредност (контрадикции), в) и г) за која било вредност.

I.ЗПУ. **1.** Искази се под б) и г). **2.** а) $\perp$. б) $\top$. в) $\perp$. г) $\perp$. **3.** Под б). **5.** Под а), в) и г). **6.** Под б). **7.** Сите. **8.** Под б). **9.** Под а) и в). **12.** 8 е парен број. **13.** За конјункцијата, дисјункцијата и еквиваленцијата. **14.** а) $(\exists x \in \mathbf{Z})$ $(3x^2 + 1 = 0)$. б) $(\forall x \in \mathbf{R}) \neg(x^2 + 1 < 0)$.

II. ТЕОРЕМА, МЕТОДИ НА ДОКАЖУВАЊЕ

II.1. **3.** Низ дадена точка M што не лежи на дадена права p минува една и само една права q што е паралелна со дадената. **6.** а) **Симетрала на отсечка** се вика правата што е нормална на отсечката и минува низ нејзината средна точка. Дефинирачки поим е „права“. **7.** а) Пресекот на тежишните линии на еден триаголник се вика **тежиште** на тој триаголник. **9.** (На пример:) Надвор од една права има безброј многу точки. **10.** а) Не. б) Да.

II.2. **3.** Претпоставка е: „многуаголникот е триаголник“, а заклучокот: „збирот на неговите внатрешни агли е 180°“. **6.** Еден четириаголник е тетивен ако и само ако неговите спротивни агли, пар по пар, се суплементни. **7.** Доволен услов за два агла да се еднакви е тие агли да се накрсни. Потребен услов два агла да се накрсни е тие агли да се еднакви. **9.** б) Претпоставка: „Два агла имаат заемно паралелни краци“. *Заклучок:* „Тие агли се еднакви или суплементни“. **10.** а) Условна. б) Категорична. **12.** а) Условна форма. Во категорична: „Напоредните агли се суплементни“. б) „Ако два агла се суплементни, тогаш тие се напоредни“; не е теорема.

в) „Доволен услов два агла да се суплементни е тие да се напоредни". г) „Потребен услов два агла да се напоредни е тие да се суплементни". д) Доволниот услов не е потребен, а потребниот услов не е доволен. ѓ) Поради д), не е можна формулација со „ако и само ако".

II.3. **1.** Под а) (модус поненс). **2.** Под а) и б) (модус толенс). **4.** Врз основа на модус поненс. **6.** Врз основа на модус толенс. **8.** Врз основа на модус поненс. **10.** Врз основа на модус толенс, **12.** Под а) и в).

II.4. **1.** Под б). **2.** Врз основа на модус поненс. **3.** Врз основа на модус толенс. **5.** Врз основа на модус толенс. **6.** Врз основа на хипотетичен силогизам. **7.** Врз основа на правилото за контрапозиција.

II.5. **5.** Нека $\triangle ABC$ е произволен (нацртај). Да ги продолжиме страните AC и BC (од темето C) и низ C да повлечеме права, паралелна со страната AB итн. . . .

II.6. **2.** Доказ. Да претпоставиме дека правите a и c се сечат; нивниот пресек да го означиме со M. Точката $M \notin b$ (зошто?). Тогаш низ точката M минуваат две прави (a и c) што се паралелни со правата b. Ова, пак, противречи на аксиомата за паралелни прави. Поради тоа, не е можно правите a и c да се сечат, т.е. тие се паралелни.

II.7. **3.** $P_1 = \frac{1}{2} \cdot a_1 h$ и $P_2 = \frac{1}{2} \cdot a_2 h$ па $P_1 : P_2 = a_1 : a_2$. **7.** Ортоцентарот и центарот на опишаната кружница. **8.** $\alpha = 72°$, $\gamma = 36°$. **9.** Упат. Тежишната линија CC_1 (повлечена од правиот агол на $\triangle ABC$) продолжи ја до точка M, така што $\overline{CC_1} = \overline{MC_1}$, а потоа докажи дека четириаголникот $ACBM$ е правоаголник. **11.** а) Уп. $x : a = a : b$. б) Од $xdf = abc$ се добива $x : ab = c : df$. Конструирај ги, прво, отсечките $s = ab$ и $t = df$ (како во задачата 6), а потоа отсечката $x = \frac{sc}{t}$ (како во задачата 5).

II.ЗПУ. **2.** (На пример:) Спротивните агли во паралелограмот се еднакви меѓу себе. **3.** Ако една призма е квадар, тогаш неговите дијагонали се сечат во една точка и се преполовуваат. **7.** Тоа е теорема-својство за поимот правоаголник, а теорема-признак за еднаквост на дијагоналите (во четириаголник). **9.** Не. **10.** Да; со модус толенс. **11.** Да; модус поненс. **12.** Не. **13.** Да; модус толенс. **14.** Да; модус толенс. **15.** Заклучокот не е правилно изведен (види II.3.Б, последната исказна формула). **16.** Да; правило на контрапозиција. **17.** Да; хипотетичен силогизам. **21.** Во рамностран. **22.** 115°, 120°, 125°. **23.** Уп. Види ја зад. 9 од II.7.

III. ПРИРОДНИ И ЦЕЛИ БРОЕВИ

III.1. **1.** Не; бројот 1 не е следбеник на природен број. **2.** а) ⊤. б) ⊥. в) ⊤. **4.** а) – г) ⊤. **6.** б) $(50 \cdot 6) \cdot (15 \cdot 4)$. **9.** За $(2b + 3c + 1)$. **11.** а) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. б) $B = \{9, 10, 11, 12\}$. **12.** б), г). **13.** а), б), в). **14.** а) $(\forall n)$ $(n \in \mathbf{N} => n > 0)$ или $(\forall n \in \mathbf{N})$ $(n > 0)$. б) $(\exists n \in \mathbf{N})$ $(n < 1)$. **18.** б) $abd + cd + c$. в) $aa + ac + ba + bc$. **19.** а) $5(a + b)$. б) $(a + b)\, c + (a + b)\, m = (a + b)\,(c + m)$. **22.** 2, 3, 1, 0, 0, 1. **23.** б), за $x = 0$.

III.2. **2.** $a - b \in \mathbf{N} <=> a > b$. **3.** $\{7, 9\}$. **4.** $a - b \in \mathbf{N}_0 <=> a \geq b$. **6.** $\{5n \mid n \in \mathbf{N}\} = \{5, 10, 15, 20, \ldots\}$. **7.** $\{1, 2, 7, 14\}$. **8.** а) $\{18, 20\}$. б) $\varnothing$. в) $\{(18, 20), (20, 14)\}$. **10.** $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. **11.** $\{6n \mid n \in \mathbf{N}\}$. **12.** $\{12, 24, 36, \ldots\} = \{12n \mid n \in \mathbf{N}\}$; 12. **13.** $\{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$. **15.** а), б) и в).

III.3. **2.** Да. **3.** Не; на пример, $14 + 2 \notin A$. **6.** Не; на пример, $2 : 5 \notin \mathbf{N}$. **9.** A и C – да; B и D – не. **10.** A и D – да; B и C – не.

12.

$*$	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	1	2
3	1	1	3	1
4	1	2	1	4

13. $(G, {}_0)$ не е групоид.

III.4. 7. а) -24. в) -65. **14.** $k = -4$. **15.** а) -7. б) 11. в). -1. **16.** $\{(1, 3), (3, 1), (-1, -3), (-3, -1)\}$. **17.** а) $\{(1, 2), (2, 1)\}$. б) Безброј многу.

III.5. 1. а) Комутативен и асоцијативен. б) $1° - 3°$. в) Ниедно од својствата $1° - 3°$. **3.** Сите три; неутрален елемент: $e = 2$. **6.** Не. **7.** Во $(\mathbf{Z}, \cdot)$, на пример 3 нема инверзен, а групоидот $(S, *)$ не е асоцијативен. **9.** а) Комутативен и асоцијативен. б) Ниедно. **10.** Секој од нив е: комутативен, асоцијативен, со неутрален елемент: 2 за $(S, \circ)$, 16 за $(S, *)$. **11.** а) Да. б) Не. **14.** а) Да. б) Не; 0 нема инверзен. **15.** Да. **16.** б) 1; 2; -2. в) За $3 * x = 4$: $x = 2$; за $2 * x = 1$: $x = 0$.

III.6. 2. A_3 и A_4. **5.** $-6, -3, 0, 2, 5$. **6.** Релацијата е транзитивна. **11.** а) $x > -4$. б) $x > 1$. **14.** а) $xz - xy$. б) $3bc$. **18.** а) $5 > 1$. б) $3 < 2$. **19.** $(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$. **20.** а) $x > -6$. б) $x > -5$.

III.7. 1. а) и в). **3.** $7 \mid 3500 \wedge 7 \mid 42 \Rightarrow 7 \mid (3500 + 42)$. **5.** а) 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. **6.** $3850 = 2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 11$. **9.** а) $a = ma_1 \wedge b = nb_1 \Rightarrow ab = mn\,(a_1b_1)$, што значи дека $mn \mid ab$. **10.** а) Ако n е парен, тогаш $2 \mid n$, па (според 9 б)) $2 \mid n(n + 1)$. Ако, пак, n е непарен, тогаш $n + 1$ е парен, па го добиваме истиот заклучок. **11.** а) $(2k + 1)^2 - (2k - 1)^2 = 8k$. б) Уп. $2m \cdot (2m + 1) = 4m\,(m + 1)$; примени ја зад. 10 а). **12.** а) $2 \cdot 3^2 \cdot 11$, б) $3^2 \cdot 7 \cdot 13$. в) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 17$. **13.** а) 6. Упат. $150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$; $2 \cdot 3 \cdot 150 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2$. б) 14. в) 182. **14.** Не, не е симетрична, б) Не, не е антисиметрична.

III.8. 6. а) $2^5 \cdot 3^2 = 288$. б) $2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 630$. **10.** $6 \mid a \Leftrightarrow (\exists a_1),\ a = 6a_1 \Leftrightarrow (\exists a_1)\ a = 2 \cdot 3a_1 \Leftrightarrow 2 \mid a \wedge 3 \mid a$. **14.** б) $2^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 19 = 2280$.

III.9. 2. а) $=$ НЗД$(a, b) \Rightarrow (d \mid a) \wedge (d \mid b) \Rightarrow (\exists a_1, b_1)\ (a = da_1 \wedge b = db_1)$. б) Ако $c \mid d$, тогаш $d = cd_1$ за некој $d_1 \in \mathbf{N}$, па поради $a = da_1$ и $b = db_1$, добиваме $a = cd_1a_1$ и $b = cd_1b_1$, што значи дека $c \mid a$ и $c \mid b$. **4.** 45. **5.** 9. **6.** 7. **10.** а) 7. г) 42. **11.** б) $1 = 3036 \cdot 1001 - 397 \cdot 7655$. **13.** Упат. Искористи ја теоремата 2. **14.** НЗД $(21n + 4, 14n + 3) = 1$ за секој $n \in \mathbf{N}$; имено: $21n + 4 = (14n + 3) \cdot 1 + (7n + 1)$, $14n + 3 = (7n + 1) \cdot 2 + 1$. **15.** $9n + 31 = (2n + 7) \cdot 4 + (n + 3)$, $2n + 7 = (n + 3) \cdot 2 + 1$.

III.10. 2. а) 39 и 67; 54, -23 и -30. **6.** 39, 25 и -3. **7.** Да. **11.** Да, поради транзитивноста на релацијата $\mid$.

III.11. 3. 7. Упат. $7^2 \equiv 1\ (mod\ 16)$, $7^{65} = 7 \cdot (7^2)^{32}$. **6.** Упат. Примени ја Т.1. **7.** Упат. Проследи го пак примерот 2. **8.** $11 \mid a_n \ldots a_2a_1a_0 \Leftrightarrow 11 \mid (a_0 - a_1 + a_2 - \ldots + (-1)^n a_n)$. Упат. $1 \equiv 1\ (mod\ 11)$, $10 \equiv -1\ (mod\ 11)$, $10^2 \equiv 1\ (mod\ 11)$, итн. а) Не. б) Да. **9.** а) 1. Упат. $6 \equiv -1\ (mod\ 7)$. б) 4. Упат. $8^2 \equiv -1\ (mod\ 5)$. **10.** а) Упат. $37 \equiv 2\ (mod\ 7)$, $51 \equiv 2\ (mod\ 7)$, $30 \equiv 2\ (mod\ 7)$, па $37^{n+2} + 51^{n+1} + 30^n \equiv 2^{n+2} + 2^{n+1} + 2^n\ (=7 \cdot 2^n)\ (mod\ 7)$. б) Упат. $47 \equiv 3$, $5^2 \equiv 3$, $69 \equiv 3$ (сите по модул 11). **11.** а) Упат. $6^2 \equiv 5\ (mod\ 31)$, па $5^{n+1} + 6^{2n+1} \equiv 25 \cdot 5^n + 6 \cdot 5^n\ (mod\ 31)$ итн. **12.** Упат. Постапи како во примерот 5. **14.** а) 7. б) 0. в) 1. **15.** Упат. $m \mid (ca - cb)$, $m \mid c\,(a - b)$; бидејќи $(c, m) = 1$, следува дека $m \mid a - b$, што значи дека $a \equiv b\ (mod\ m)$. На пример: $44 \equiv 20\ (mod\ 8)$, т.е. $4.11 \equiv 4 \cdot 5\ (mod\ 8)$, но $11 \equiv 5\ (mod\ 8)$.

III.ЗПУ. 1. $\{5n \mid n \in \mathbf{N}\} = \{5, 10, 15, \ldots\}$. **2.** $\{24, 48, 72, \ldots\}$. **3.** $\{(3, 1), (5, 3), (7, 5)\}$. **4.** а) Да. б) Не. **5.** M со $*$ не е групоид: НЗД $(6, 8) = 2 \notin M$. $(M, \circ)$ е групоид. **6.** $(\forall a \in \mathbf{Z})\ (\exists b \in \mathbf{Z})\ (a + (-a) = 0)$. **7.** $\{(1, 5), (5, 1), (-1, -5), (-5, -1)\}$. **8.** $(S_n, +)$ е група, а $(S, \cdot)$ не е – нема неутрален елемент. **10.** Да. **11.** а) и б). Да. в) Не. **12.** $\{(x, 0) \mid x \in \mathbf{Z}\}$ $\{(0, y) \mid y \in \mathbf{Z}\}$. **13.** $x > 9$. **14.** 1) а) Не. б) Да. 2) а) Да. б) Не. 3) а) и б) Да.

15. а) и б) Комутативен и асоцијативен. в) Некомутативен, неасоцијативен и без неутрален елемент. г) Комутативен, асоцијативен, со неутрален елемент $(e = 0)$. д) Исто како г), само $e = 2$. ѓ) Комутативен, а неасоцијативен, без неутрален елемент. **16.** а) и б) Асоцијативен, некомутативен, без неутрален елемент. в) Комутативен, без неутрален елемент. д) Комутативен, асоцијативен со неутрален елемент $(e = 2)$. **17.** а) Да; $e = -2$, $x' = -4 - x$. б) Не,нема инверзен, на пример, $x = 1$. в) Не, нема инверзен, на пример $x = 18$. г) Не, не е асоцијативен. **19.** а) $x = -2$ б) $x = 8$. в) Нема решение. г) Нема решение. д) $x = 0$; 2; 4 (три решенија). **20.** а) и б) Да. в) Не. **24.** 1 е најмалиот природен број (не е следбеник на ниеден природен број); 1 е неутрален елемент за множењето; 1 не е ни прост ни сложен број. **26.** 1262. **28.** 12. **30.** 70, 181 и др. (3 | **31.** $7 = 3 \cdot 35 - 7 \cdot 14$; $7 = 5 \cdot 35 - 12 \cdot 14$; и др. **32.** а) $(a\ ,\ b) \in \{(221, 117), (117, 221)\}$. Упат $a = 13a_1$, $b = 13b_1$, при што a_1 и b_1 се заемно прости; $13a_1b_1 = 1989$, $a_1b_1 = 153$, $a_1b_1 = 17 \cdot 9$. б) Нема решение. **33.** а) $x = 7$. б) $(x, y) \in \{(8, 0), (3, 5)\}$. **34.** $7 \mid \overline{a_n \dots a_2a_1a_0} \Leftrightarrow 7 \mid (a_0 + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + \dots$.Упат. $1 \equiv 1 \ (mod\ 7)$, $10 \equiv 3\ (mod\ 7)$, $10^2 \equiv 2\ (mod\ 7)$, $10^3 \equiv -1\ (mod\ 7)$ итн. **36.** а) 1. б) 4.

IV. РЕАЛНИ БРОЕВИ. ПРИБЛИЖНИ ВРЕДНОСТИ

IV.1. **2.** а), в). **3.** а), б). **7.** а), б). **14.** а) $\frac{4}{5}$. б) $\frac{4}{5}$. **15.** а) $\frac{a}{a-1}$. б) $\frac{2}{a+3b}$

IV.2. **3.** а) $\frac{3}{2}$. в) $\frac{1}{2}$. **7.** а) $\frac{2-a}{6}$. б) $\frac{a+2b+4}{6}$. **11.** а) $\frac{2a}{3b}$. в) $\frac{x+1}{2}$ **12.** а) $\frac{a}{a-1}$. в) $\frac{1}{a-b}$. **13.** а) $\frac{2a}{a+b}$. б) $\frac{1}{a+1}$. **14.** а) $\frac{6}{x-3}$. б) $\frac{x-3}{x^2-2x}$.

IV.3. **2.** а) $\frac{3}{5} > \frac{4}{7}$. **4.** а) и в). **7.** Не; 2 нема инверзен. **8.** $-\frac{5}{3} < -\frac{7}{3} < \frac{3}{4} < \frac{5}{6} < \frac{4}{3}$. **9.** $\frac{31}{20}$.

IV.4. **1.** а) 0,75. г) 1,1625. **2.** а) $\frac{2}{5}$. б) в) $32\frac{1}{8}$. **6.** 0,06 $\frac{6}{100} = \frac{3}{50}$. **9.** $-1,8$. **10.** 9,128 (приближно).

IV.5. **1.** а) 2,5000 ... б) 0,333 ... **3.** а) $2\frac{7}{9}$. б) $6\frac{5}{11}$. в) $\frac{26}{55}$. г) $\frac{4}{7}$. **4.** б) $4,3207 > 4,3158$. **5.** а) $8,23051\ldots > 8,23042\ldots$ **6.** а) 2,1(6). б) 4,25(0). в) 0,(461538). **7.** 4,0(45). **8.** а) $\frac{4}{9}$. в) 1. **9.** а) $\frac{18}{11}$. в) $5\frac{23}{999}$. **10.** а) $2\frac{16}{45}$. в) $3\frac{1}{4}$. **11.** а) $\frac{497}{110}$ (види го примерот 4). **12.** а) $\frac{137}{110}$

IV.6. **1.** 1,3636636663 ... **3.** б), в), г). **4.** $\frac{36}{25} = 1,44 > 1,42 > \sqrt{2}$. **5.** а) 3, 5, 6 . **9.** б) $\frac{447}{250} = 1,788 < 2,23 < \sqrt{5}$.

IV.7. **2.** $\sqrt{3} = \sqrt{1^2 + 2}$ е должината на хипотенузата на триаголник со катети 1 и $\sqrt{2}$. **5.** а) 1 е лево од $\sqrt{2}$. 12. а) [2, 4). б) (– 3,2]. **14.** а) [– 3,5]. б) (– 2,3].

IV.8. **1.** а) 2 и 3; 2,3 и 2,4; 2,33 и 2,34; 2,333 и 2,334. **2.** 5,1019 ..., со точност 0,0001. **3.** 4,3777 ..., со точност 0,0001. **4.** 2,4 ..., со точност 0,05. **5.** в) 2 и 3; 2,2 и 2,3; 2,23 и 2,24; 2,236 и 2,237; 2,2360 и 2,2361. **7.** а) 2,0806 ... **8.** б) 3,16 ...

IV.9. **2.** $\frac{2}{23} = 0,0869\ldots < 0,09$, т.е. $\delta = 9\%$. **3.** $| v - 80 | = 80 \cdot \delta = 80 \cdot 0,05 = 4$; $76 \leqslant v \leqslant 84$ (km/h). **6.** а) $0,009 < 1\%$. г) $0,045 < 5\%$. **7.** $u = (220 \pm 13,2)$.

IV.10. **1.** а) 6 и 2. б) 3,2 и 0. **2.** а) 0,05; б) 0,5. **3.** а) $63,0 \cdot 10$; $6,3 \cdot 10^2$; $63000 \cdot 10^{-2}$. **4.** а) 500000. б) 500000. **5.** а) Сите три броја – по три важечки цифри. **6.** а) 3,14. б)

3,142. **7.** а) 3 и 2. б) 1,2 и 7. **8.** а) 0,005. б) 50000. в) $\frac{1}{2} \cdot 10^{-7}$. г) $\frac{1}{2} \cdot 10^{-7}$. **9.** а) 3. б) 3. в) 5. г) 5. **10.** б) 5,74; 5,745; 5,74456. **11.** б) 12800; $150 \cdot 10^6$; $139 \cdot 10^4$.

IV.11. **1.** 1,74. **2.** 0,20. **3.** 4,68V. **4.** 45,5 cm^3. **5.** 59 km/h. **6.** 6,50. **7.** б) 0,32. в) 1,67. г) 2,82. д) 113. **9.** 168,6 cm^2. **10.** 2,6 А. **11.** 541 cm^3.

IV.ЗПУ. **2.** Не е поле (2 нема инверзен). **6.** $\frac{106}{45}$. **8.** Затоа што количникот на цели броеви е рационален број. **11.** $\frac{7}{5} < \sqrt{2}$. **14.** 1,45 и 1,46. **15.** а) 2,57. б) 4,6. **17.** а) 0,0021. б) $6 \cdot 10^{-5}$. **18.** а) 51,5. б) 41. **19.** а) 221. б) 326. **20.** $L = (4{,}2 \pm 0{,}1)m$, $P = (4{,}3 \pm 0{,}3)\ m^2$. **21.** $\approx 24{,}3\ m$. **22.** 0,008%. **23.** Поточно е мерењето на топката ($\delta = 8\%$) отколку на Сонцето ($\delta = 10\%$). **24.** $51{,}4 \pm 0{,}5$.

V. АЛГЕБАРСКИ РАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

V.1. **1.** б) $(-5)^3$. в) $(a-1)^3$. **4.** а), б) и г). **5.** а) 1. б) -1. в) -8. г) 3. **8.** а) x^5. *b)* y^{11}. **10.** а) a^{35}. б) x^{27}. в) x^{12}. **11.** а) 4. б) 3. **12.** в) $x^4y^8z^{12}$. **14.** б) $\frac{3^4x^8}{y^4}$. **15.** а) 1. б) 73. в) 190. г) -68. **16.** Под в). **17.** а) 10^3. в) $\frac{1}{10^5}$. **18.** а) $4 \cdot 10^6$. б) $5 \cdot 10^9$. **19.** а) y^{20}. б) a^{12}. **20.** а) a^{24}. в) x^4. г) y^{14} **21.** а) 16. б) 27. **22.** б) a^{54}. в) a^{24}. **23.** б) $x^{10}y^{15}$. г) $\frac{x^{15}}{y^{20}}$. **24.** $\frac{32^3}{8^3} = \frac{(4 \cdot 8)^3}{8^3} = \frac{4^3 \cdot 8^3}{8^3} = 4^3 = 64$. **25.** б) и в). **26.** Нема смисла за $y \in \{0, 2\}$.

V.2. **1.** 2, 3, 5, 7. **2.** а), б) и д). **3.** а) 3. б) 1. г) 0. **4.** б) За $b=0$. в) За секој пар броеви (x, y) при кој $x = y$. **5.** а) $4x-4y$. г) $x^2(2y+1)$. **6.** а) Да. б) Не. **7.** а) За секој $a \in \mathbf{R}$. б) За $x = 0$ или $y = 0$. **8.** $3ab$. **9.** $\{4, 6, 8, 9, 10\}$. **10.** б) $-24a^2x^3$. **11.** в) Коефициентот е 1, главната вредност е xy^2z, а степенот е 4. д) Коефициентот е 20, а степенот е 0 (нема главна вредност). **12.** а) Не. б) Да. **13.** б) 8. **14.** а) Да. б) и в) Не. **15.** б) $20a^2bc$; степенот е 4.

V.3. **2.** $5a^4+15a^3$. **4.** $-6a^3-a^2b+12ab^2$. **5.** а) $\frac{4}{25}a^2 + a^2b^2 + \frac{25}{16}a^2b^4$. **6.** а) $9a^2-4x^2y^2$. **7.** б) $4x^2-12xy+9y^2$. **9.** $2x^2+x+4$, остаток 0. **10.** б) $-6a^3 + 10a^2$. **11.** а) x^4-x^2. в) $x^3+2x^2y+8y^3$. **12.** а) $4a^2+12a+9$. б) $25x^4-40x^2y^3+16y^6$. **13.** в) $1-a^8$. г) $x^4 - \frac{16}{81}$. **14.** Не е идентитет. **15.** а) $(3a-4)^3$. б) $(3x^2-(-2y))^3$. **16.** а) $5x-3$ (количник) и $11x-9$ (остаток). б) $4x^2+3xy^2-2y^3$ (количник) и 0 (остаток).

V.4. **1.** а) $5n(2n+1)$. б) $7ax^2(x^2-3ax+2a^2c)$. **2.** б) $2 \cdot (5a-3)$. в) $(x-2)\ (x+2)\ (x^2+4)$. **3.** б) $(xy+4)\ (x^2y^2-4xy+16)$. **4.** а) $(4x-y)^2$. **5.** а) $(x-3y)\ (2a-b)$. **6.** а) $(1-x-y)\ (1+x+y)$. **7.** б) $xy(x^2y-1)$. г) $(a-4)\ (x^2+y^2)$. **8.** в) $(0{,}5ab-0{,}4)\ (0{,}5ab+0{,}4)$. д) $(x-5y)\ (5x-y)$. **9.** б) $2(3x-2)\ (9x^2-6x+4)$. г) $x \cdot (x^2+3xy+3y^2)$. **10.** б) $7a^2b(a+c)\ (2x-b)$. **11.** б) $(a+1)\ (a^2-a+1)\ (3x-4y)\ (3x+4y)$.

V.5. **1.** а) x. г) $7(a+3)^2$. **2.** а) $2(a-b)$. б) 1. **3.** а) $45ab^3x^2$. **4.** а) $15ab$. б) $3a^3(a-b)^2$. **5.** а) $x-y$. б) $(x^2-y^2)\ (x^3-y^3)$. **7.** б) $3x^2y$. в) $x(a-x)$. **8.** а) $x(x-a)$. в) $a+1$. **10.** б) $30x^3$. г) $6xy(2x+3y)$. **11.** б) $6(x-2y)^2\ (x^2+2xy+4y^2)$. **12.** а) НЗС: $a(a+7)\ (a-7)^2$; НЗД: $a-7$.

V.6. **2.** а) $x \neq 0$ и $y \neq 0$. б) $a \neq 0$ и $a \neq b$. **4.** б) $\frac{2x+2x^2}{x^2-1}$. **5.** б) $\frac{y^2}{xy(x-y)}$, $\frac{x^2}{xy(x-y)}$

6. а) $\frac{2}{7a}$. б) $\frac{x^2}{x+4}$ **7.** б) 0; 2; −2. **8.** б) $a \neq 0$ и $a \neq b$. **9.** Само под б). **10.** в) $\frac{x^3+1}{x^2-1}$.
11. б) $\frac{4a}{6(x-2)}$, $\frac{9a}{6(x-2)}$. **12.** а) $\frac{3x^3}{2a^2}$. б) $\frac{3x-2}{2a}$. в) $a-x$.

V.7. **1.** а) $\frac{4c+1}{3a}$. б) $\frac{x-y}{a-3}$. **2.** б) $\frac{1+a}{1-x}$. **3.** б) $\frac{a^2+1}{a^2(a^2-1)}$. **4.** а) $\frac{3}{10c}$. б) $-\frac{5}{3}$. **5.** а) $2x^3$.
б) $\frac{a+3x}{a^2}$. **6.** б) $1-2a$. **8.** а) $\frac{x+6}{x(x-3)}$. г) $\frac{4a^2+2ab+4b^2}{(2a-b)(2a+b)}$. **9.** а) $\frac{3x^2+x+2}{2x(x-1)^2}$ **10.** а) $\frac{x}{y}$.
в) $\frac{2(x+1)}{x-1}$. **11.** а) $\frac{3a}{a+3}$. б) $\frac{xy}{y-x}$. в) 2. **12.** а) $\frac{2}{x-y}$. б) $\frac{2a+1}{a+1}$.

V.8. **2.** б) и в). **3.** а) x^{-6}. б) x^{20}. в) x^{-2}. г) x^6. **4.** а) $\left(\frac{2}{3}\right)^2$
5. а) $\frac{139}{108}$. б) −53. **6.** а) $\frac{5yz^3}{x^2}$. **7.** а) $\frac{1}{3^{-2}a^2b^{-1}c^4}$. **8.** а) и в). **9.** б) b^{-2}. г) b.
11. а) 1. б) −9.

V.ЗПУ. **1.** в) x^3. **2.** а) a^{16}. **3.** в) $3x^2y+3xy^2$; 18. **4.** Не е. **5.** Да; 1300.
6. г) $x^2+y^2+9+2xy-6x-6y$. **7.** б) $25x^4y^2-60x^5y^3+36x^6y^4$. **9.** б) $x^4-x^3+x^2-x+1$, остаток 0. в) $3x^2-5x$, остаток 0. **10.** б) $2x^2y^2(3x^3y+2xy^3-1)$. **11.** в) $(x+2)(a+b+1)$. г) $(x-2)(x+2)(x+3)$. **12.** в) $(x-y+2)(x+y-4)$. **13.** б) $ab(a+b)$. **14.** а) $a^3(a-1)^2$.
15. б) $\frac{x}{x^2-y^2}$. **16.** $\frac{5x}{x^2-1}$. **17.** б) $\frac{1+y}{x}$. **18.** б) a. **19.** б) a^k. в) a^{10}. **20.** б) 2^5.