## L олимпијада

1. Нека $n$ е природен број и нека $a_1, a_2, ..., a_k$, $(k \ge 2)$ се меѓусебно различни природни броеви од множеството $\{1, 2, ..., n\}$ такви што броевите $a_i(a_{i+1} - 1)$ се деливи со $n$ за секој $i \in \{1, 2, ..., k-1\}$. Докажи дека бројот $a_k(a_1 - 1)$ не е делив со $n$.

**Решение.** *Прв начин*. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. нека

$$a_i a_{i+1} \equiv a_i \pmod n \text{ за } i = 1, 2, ..., k$$

(индексите се сметаат по модул $k$). Тогаш за секој $j$ важи

$$a_j \equiv a_j a_{j+1} \equiv a_j a_{j+1} a_{j+2} \equiv ... \equiv a_j a_{j+1} ... a_{j+k-1} = a_1 a_2 ... a_k \pmod n,$$

па затоа $a_1 \equiv a_2 \equiv ... \equiv a_k \pmod n$, што е противречност.

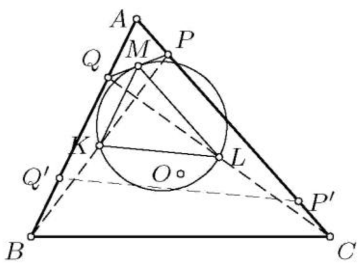
*Втор начин*. Ако $a, b$ и $c$ се такви цели броеви што $n$ е делител на $a(b-1)$ и $b(c-1)$, тогаш $n$ е делител на $a(c-1) = ab(c-1) - a(b-1)(c-1)$. Оттука по индукција следува дека $n$ еделител на $a_1(a_{i+1} - 1)$ за $i = 1, 2, .., k-1$. Во случајов $n$ е делител на $a_1(a_k - 1) = a_k(a_1 - 1) + a_k - a_1$. Според тоа, $n$ е делител на $a_k(a_1 - 1)$ ако и само ако $n$ е делител на $a_k - a_1$. Последното не е можно, бидејќи $0 < |a_k - a_1| < n$.

*Трет начин*. Нека $a_0 = a_k$, $a_{k+1} = a_1$ и нека $n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$ за $i = 0, 1, ..., k$. Нека $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_l^{\alpha_l}$ е каноничната репрезентација на бројот $n$. Ако $p_i \mid a_j$ за некој $j \in \{1, 2, ..., k-1\}$, од $p_i \mid a_{j-1}(a_j - 1)$ и $\mathrm{NZD}(a_{j-1}, a_j) = 1$ следува $\mathrm{NZD}(p_i, a_j - 1) = 1$, па затоа $p_i^{\alpha_i} \mid a_{j-1}$. Слично, ако $p_i \mid a_j - 1$ за некој $j \in \{1, ..., k-1\}$, од $p_i \mid a_j(a_{j+1} - 1)$ и $\mathrm{NZD}(a_j, a_j - 1) = 1$ следува $\mathrm{NZD}(p_i, a_j)$ $= 1$, па затоа $p_i^{\alpha_i} \mid a_{j+1} - 1$. Значи, за секој $j \in \{1, 2, ..., k\}$ важи $a_j \equiv c_i$ $(\mathrm{mod}\, p_i^{\alpha_i})$, каде $c_i \in \{0, 1\}$ за секој $i \in \{1, 2, ..., l\}$. Сега од Кинеската теорема за остатоци следува дека $a_1 \equiv a_2 \equiv ... \equiv a_k \pmod n$, што е противречност.

*Четврт начин*. Нека $a_0 = a_k$, $a_{k+1} = a_1$ и нека $n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$ за $i = 0, 1, ..., k$. Да означиме $d_i = \mathrm{NZD}(a_i, n)$. Од $\mathrm{NZD}(d_i, a_i - 1) = 1$ и $d_i \mid n \mid a_{i-1}(a_i - 1)$ следува $d_i \mid a_{i-1}$ и оттука $d_i \mid \mathrm{NZD}(a_{i-1}, n) = d_{i-1}$. Според тоа, $d_k \mid d_{k-1} \mid ... \mid d_1 \mid d_0 = d_k$ и оттука следува $d_k = d_{k-1} = ... = d_1 = d$ за некој $d$. На потполно идентичен начин добиваме дека $e_k = e_{k-1} = ... = e_1 = e$ за некој $e$ каде $e_i = \mathrm{NZD}(a_i - 1, n)$. Понатаму, од $n \mid a_i(a_{i+1} - 1)$ следува $n \mid de$. Сега од $s_i \equiv a_j \equiv 0 \pmod d$ и $s_i \equiv a_j \equiv 1 \pmod e$ следува $d_i \equiv a_j \equiv 1 \pmod n$, што е противречност.

2. Точката $O$ е центар на опишаната кружница на $\triangle ABC$, а $P$ и $Q$ се внатрешни точки на отсечките $AC$ и $AB$, соодветно. Точките $K, L$ и $M$ се средини на отсечките $BP, CQ$ и $PQ$, соодветно, а $\Gamma$ е кружницата која минува низ точките $K, L$ и $M$. Ако правата $PQ$ е тангента на кружницата $\Gamma$, докажи дека $\overline{OP} = \overline{OQ}$.

**Решение.** *Прв начин*. Бидејќи $PQ$ е тангента на $\Gamma$ и $MK \parallel AB$ и $ML \parallel AC$, добиваме дека $\measuredangle LKM = \measuredangle LMP = \measuredangle APQ$ и $\measuredangle KLM = \measuredangle KMQ = \measuredangle AQP$, па затоа триаголниците $MKL$ и $APQ$ се слични. Оттука следува дека




$\frac{\overline{AQ}}{\overline{AP}} = \frac{\overline{ML}}{\overline{MK}} = \frac{\overline{PC}}{\overline{QB}}$, т.е. $\overline{AP} \cdot \overline{PC} = \overline{AQ} \cdot \overline{QB}$.

Сега, $\overline{AP} \cdot \overline{PC} = \overline{OA}^2 - \overline{OP}^2$ и $\overline{AQ} \cdot \overline{QB} = \overline{OA}^2 - \overline{OQ}^2$, како степени на точките $P$ и $Q$ во однос на опишаната кружница околу триаголникот $ABC$. Конечно, од последните три равенства следува $\overline{OP} = \overline{OQ}$.

*Втор начин*. Нека $P'$ и $Q'$ се точки такви што $\overrightarrow{P'C} = \overrightarrow{AP}$ и $\overrightarrow{Q'B} = \overrightarrow{AQ}$. Тогаш

$$\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{ML} = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{BQ} + \overrightarrow{PC}) = \tfrac{1}{2}(\overrightarrow{Q'A} + \overrightarrow{AP'}) = \tfrac{1}{2}\overrightarrow{Q'P'},$$

па затоа $Q'P' \parallel KL$. Сега, $\measuredangle AQ'P' = \measuredangle MKL = \measuredangle APQ$, од каде следува дека точките $P, Q, P', Q'$ лежат на иста кружница. Центарот на оваа кружница е пресекот на симетралите на отсечките $PP'$ и $QQ'$, што е точката $O$, бидејќи овие симетрали се совпаѓаат со симетралите на отсечките $AC$ и $AB$. Оттука следува $\overline{OP} = \overline{OQ}$.

3. Нека $s_1, s_2, s_3, \ldots.$ е строго растечка низа природни броеви таква што следните две нејзини поднизи

$$s_{s_1}, s_{s_2}, s_{s_3}, \ldots \text{ и } s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, s_{s_3+1}, \ldots$$

се аритметички прогресии. Докажи дека низата $s_1, s_2, s_3, \ldots.$ е аритметичка прогресија.

**Решение.** Нека $s_{s_n} = an + b$ и $s_{s_n+1} = cn + d$ за секој $n$, каде $a, b, c, d$ се константи. Од $an + b = s_{s_n} \le cn + d = s_{s_n+1} \le s_{s_{n+1}} = a(n+1) + b$ добиваме дека $b - d \le (c-a)n \le a + b - d$, за секој $n$, па затоа мора да е $a = c$.

Бидејќи низата $s_1, s_2, s_3, \ldots.$ е строго растечка, важи $s_m - s_n \ge m - n$ за $m \ge n$.

Затоа $1 \le s_{n+1} - s_n \le s_{s_n+1} - s_{s_n} = a$, па постојат $m = \min\{s_{n+1} - s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $M = \max\{s_{n+1} - s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Нека $s_{k+1} - s_k = m$ и $s_{l+1} - s_l = M$. Имаме:

$$\begin{aligned} Mm &= \sum_{i=1}^{M} m \le \sum_{i=1}^{M} (s_{s_k+i} - s_{s_k+i-1}) = s_{s_k+1} - s_{s_k} = a \\ &= s_{s_l+1} - s_{s_l} = \sum_{i=1}^{m} (s_{s_k+i} - s_{s_k+i-1}) \le \sum_{i=1}^{m} M = Mm. \end{aligned} \tag{1}$$

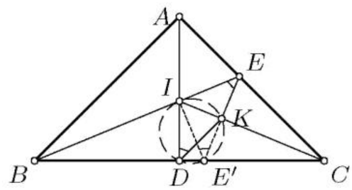
Според тоа, сите неравенства во (1) мора да се равенства, па за $i = 1$ добиваме $m = s_{s_k+1} - s_{s_k} = d - b = s_{s_l+1} - s_{s_l} = M$, т.е. $s_{n+1} - s_n$ е константа.

4. Во триаголникот $ABC$ важи $\overline{AB} = \overline{AC}$. Симетралите на $\measuredangle CAB$ и $\measuredangle ABC$ ги сечат страните $BC$ и $CA$ во точките $D$ и $E$, соодветно. Нека $K$ е центарот на впишаната кружница во триаголникот $ADC$. Ако $\measuredangle BEK = 45^\circ$, определи ги сите можни вредности на $\measuredangle CAB$.

**Решение.** Со $I$ да го означиме центарот на впишаната кружница во $\triangle ABC$, а со $E'$ точката симетрична на точката $E$ во однос на правата $CI$. Бидејќи

$$\measuredangle IE'K = \measuredangle IEK = 45^\circ = \measuredangle IDK,$$

заклучуваме дека точките $I, D, E', K$ лежат на иста кружница.




Ако $E' \equiv D$, тогаш триаголниците $IEC$ и $IDC$ се складни, па затоа $\measuredangle BEC = 90^\circ$, од каде што следува дека $\triangle ABC$ е рамностран и $\measuredangle CAB = 60^\circ$. Навистина, во овој случај равенството $\measuredangle BEK = \measuredangle IDK = 45^\circ$ тривијално важи.

Ако $E' \not\equiv D$, тогаш точките $D$ и $K$ се на кружница над дијаметар $IE'$, па затоа $90^\circ = \measuredangle IKE' = \measuredangle IKE$. Понатаму,

$$\measuredangle CIE = 45^\circ \text{ и } \measuredangle BIC = 90^\circ + \tfrac{1}{2}\measuredangle CAB = 135^\circ,$$

па затоа $\measuredangle CAB = 90^\circ$. Од друга страна, ако $\measuredangle CAB = 90^\circ$, нека нормалата во $K$ на $CI$ ги сече $AC$ и $BC$ соодветно во точките $E^*$ и $E^{**}$. Точките $I, D, E^{**}, K$ припаѓаат на кружницата , па е $\measuredangle IE^*K = \measuredangle IE^{**}K = \measuredangle IDK = 45^\circ$ и $\measuredangle CIE^* = 45^\circ = \measuredangle CIE$, па е $E^* \equiv E$.

Според тоа, можни вредности за $\measuredangle CAB$ се $60^\circ$ и $90^\circ$.

5. Определи ги сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ такви што за секои природни броеви $a$ и $b$ постои недегенериран триаголник чии должини на страни се

$$a,\ f(b) \text{ и } f(b + f(a) - 1).$$

**Решение.** *Прв начин*. Ставаме $a=1$ и добиваме дека $1, f(b)$ и $f(b+f(1)-1)$ се страни на триаголник, па затоа мора да важи $f(b+f(1)-1)=f(b)$. Ако $f(1)\neq 1$, од последното равенство следува дека функцијата $f$ е периодична, па затоа важи $f(x)\le M$ за некој $M$. Но, тогаш $2M, f(b)$ и $f(b+f(2M)-1)$ не може да се страни на триаголник, па затоа $f(1)=1$.

За $b=1$ добиваме дека $a,1$ и $f(f(a))$ се страни на триаголник за секој $a$, па затоа $f(f(a))=a$, т.е. $f$ е биекција. Ако наместо $a$ ставиме $f(a)$ добиваме дека $f(a), f(b)$ и $f(a+b-1)$ се страни на триаголник.

Нека $f(2)=z$. Очигледно $z>1$ и $f(z)=2$. Бидејќи $f(z), f(z)$ и $f(2z-1)$ се страни на триаголник, имаме $f(2z-1)<2f(z)=4$, т.е. $f(2z-1)\in\{1,2,3\}$. Но, $f$ е биекција и $2z-1\notin\{1,2\}$, па затоа единствена можност е $f(2z-1)=3$, т.е. $f(3)=2z-1$.

Со индукција ќе докажеме дека $f(n)=(n-1)z-(n-2)$, за секој $n\in\mathbb{N}$. Јасно, ова важи за $n\le 2$. Нека претпоставиме дека равенството важи за секој $n<k$ ($k\ge 3$). Бидејќи $f((k-1)z-k+2), f(z)$ и $f(kz-k+1)$ се страни на триаголник, важи

$$f(kz-k+1)\le f(z)+f((k-1)z-k+2)\le 2+k-1=k+1,$$

па како функцијата е биекција следува дека $f(kz-k+1)=k+1$ и оттука $f(k+1)=kz-k+1$, со што индуктивниот доказ е завршен. Исто така следува дека $f$ е растечка. Тоа значи дека од $z\ge 2$ следува $2=f(z)\ge f(2)=z$, па е $z=2$. Конечно, $f(n)=2(n-1)-n+2=n$. Лесно се проверува дека функцијата $f(n)=n$, $n\in\mathbb{N}$ ги исполнува условите на задачата.

*Втор начин*. Да претпоставиме дека $f(1)=d+1>1$. Ако земеме $a=1$, тогаш бидејќи $1, f(b)$ и $f(b+f(a)-1)=f(b+d)$ се страни на триаголник добиваме $|f(b)-f(b+d)|<1$, па затоа $f(b)=f(b+d)$, за секој $b\in\mathbb{N}$. Значи, функцијата $f$ е периодична, па затоа таа е ограничена, на пример со $m$. Тогаш за секој природен број $a$ важи $a<f(b)+f(b+f(a)-1)\le 2m$, што е противречност. Од добиената противречност следува дека $f(1)=1$. Ако во условот на задачата земеме $b=1$, добиваме дека за секој природен број $a$ важи $|f(f(a))-a|<1$, па затоа $f(f(a))=a$. Оттука

$$f(a+b-1)=f(f(f(a))+b-1)<f(a)+f(b).$$

Ако $e=f(2)-1$, тогаш

$$f(1+en)-f(1+e(n-1))<f(f(2))=2,\ n\in\mathbb{N}.$$

Според тоа, $f(1+en)\le 1+f(1+e(n-1))$ и како $f(1)=1$, по индукција следува

$f(1+e(n-1)) \le n$.

Од друга страна, од $f(f(a)) = a$ следува дека $f$ е биекција. Затоа $e = 1$ и $f(n) = n$, за $n \in \mathbb{N}$. Лесно се проверува дека оваа функција го задоволува условот на задачата.

6. Нека се $a_1, a_2, ..., a_n$ по парови различни природни броеви и нека је $M$ е множество кое се состои од $n-1$ природни броеви и не го содржи бројот $s = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Скакулец треба да направи $n$ скокови надесно по бројната права, тргнувајќи од точката со координата 0. Притоа, должините на неговите скокови мора да бидат еднакви на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$, во некој редослед. Докажи, дека тој редослед може да се избере таке што скакулецот никогаш нема да скокне во точка чија координата е во множеството $M$.

**Решение.** Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $n$. За $n = 1$ тврдењето очигледно важи. Нека претпоставиме дека $n \ge 2$ и дека тврдењето важи за сите $k < n$. Нека $a_1 < a_2 < ... < a_n$ и $m = \min M$. Можни се два случаја.

1) $m < a_n$. Ако $a_n \notin M$, скакулецот го прави првиот скок со должина $a_n$. Потоа, треба да направи скокови со дужина $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ така што прескокнува $n-2$ точки од множеството $M \setminus \{m\}$, а тоа според индуктивната претпоставка може да го направи.

   Нека претпоставиме дека $a_n \in M$. Паровите $(a_i, a_i + a_n)$ за $1 \le i \le n-1$ се меѓусобно дисјунктни, па барем еден од нив не содржи ниту еден елемент од множеството $M \setminus \{a_n\}$ (а не го содржи ниту $a_n$). Нека тоа е парот $(a_k, a_k + a_n)$. По два скока со должини $a_k$ и $a_n$ редоследно, на скакулецот му останува да направи скокови со должини $a_1, ..., a_{k-1}, a_{k+1} ..., a_{n-1}$ така што ќе прескокне $n-3$ точки на множеството $M \setminus \{m, a_n\}$, што според индуктивната претпоставка повторно може да го направи.

2) $m \ge a_n$. Според индуктивната претпоставка, скакулецот може првиот скок да го направи со должина $a_n$ и останатите скокови по некој редослед $a_{i_1}$ , . . . , $a_{i_{n-1}}$ така што ѓе ги заобиколи сите точки на множеството $M \setminus \{m\}$. Ако притоа не скокне и во точката $m$, доказот е завршен. Затоа нека претпоставиме дека во $k-$тиот скок тој скокнува во точката $m$, т.е. $a_n + a_{i_1} + ... + a_{i_k - 1} = m$. Во овој случај, скакулецот со низа $a_{i_1}, ..., a_{i_k}, a_n$, $a_{i_{k+1}}, ..., a_{n-1}$ ги исполнува барањата на задачата. Навистина, и на овој начин скакулецот ги прескокнува точките на множеството $M \setminus \{m\}$, но ја прескокнува и точката $m$ бидејќи $a_{i_1} + ... + a_{i_k} < m < a_{i_1} + ... + a_{i_k} + a_n$.