Matematički dokaz Arhimedovog aksioma poluge

Petar Svirčević[1], *Zagreb*

Sažetak. U ovom članku se iz *Zakona težišta ravnog homogenog štapa* izvodi *Arhimedov zakon poluge*, za koji se stoljećima mislilo da je aksiom; dakle, došlo se do toga da se može uspostaviti nova aksiomatika *klasične statike*.

Odmah na početku moramo raščistiti s nekim terminima, koji su ustaljeni u *klasičnoj mehanici* odnosno u *klasičnoj statici*, a koji nisu možda najkorektniji, tim više što i sama aksiomatika klasične statike može biti drugačije postavljena. Naime genijalni *Arhimed* je, još prije dvadeset tri stoljeća, formulirao zakon do kojeg je došao eksperimentalno, a koji je nezaobilazan u svakidašnjoj praksi i koji se koristi svakog trenutka, gotovo na svakom mjestu u našoj tehničkoj civilizaciji. Taj zakon se zove *Arhimedov zakon poluge*, a bilo bi korektno da se zove *Arhimedov aksiom poluge*, jer nije dokazan, a mi ćemo ga dokazati, dakle radi se o teoremu, kako se naziva u matematici, jer u fizici se neki put i aksiomi i teoremi zajedničkim imenom zovu zakoni, osim kod aksiomatski izgrađene *Newtonove klasične mehanike*, koja je izvedena na osnovu tri dobro nam poznata aksioma. Svakako da je u još nekim područjima fizike uspostavljena aksiomatska izgradnja. Opće je poznato, da kada se neka disciplina izgrađuje aksiomatski, svejedno je da li se radi o matematici, dijelu fizike ili neke druge discipline, moraju biti, što se tiče aksioma, zadovoljeni principi *potpunosti*, *nezavisnosti* i *nekontradiktornosti*. To bi bile osnovne uvodne napomene, što se tiče aksiomatike.

Ako malo bolje promislimo, onda se pitamo što ćemo uzeti za aksiom, koji je jasan, a pomoću kojega će se dokazati navedeni zakon (teorem)? Odgovor je da će dokaz slijediti iz *Aksioma o težištu ravnog homogenog štapa* (*Metoda homogenog štapa*), koji kaže da se težište ravnog homogenog štapa nalazi u njegovom polovištu, a to nam je u potpunosti jasno, dok se to ne može reći za *Arhimedov zakon poluge*, koji kaže da se mase koncentrirane u točkama na krajevima poluge, koja nema svoje mase, odnose obrnuto nego duljine krakova od krajeva prema točki u kojoj je težište. Sada prelazimo na pripreme za razrješenje naše tvrdnje, koja je i u samon naslovu iskazana.

U ovom članku ćemo se najprije podsjetiti, kako se konstruira težište ravninskog trokuta, te konveksnog četverokuta, a slike ćemo crtati uz pomoć programa *The Geometer's Sketchpad*.

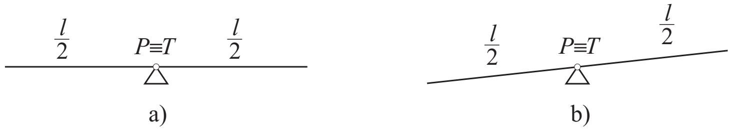
Sada ćemo objasniti što je to homogeni poligom bez debljine mase m, naime to bi značilo da se radi o prizmi, čija je površina baze P (površina poligona), duljina visine $h = 0$ (debljina poligona) i $\rho = \infty$ (jednolika gustoća mase), prema tome bi formalno bilo $m = Ph\rho = P \cdot 0 \cdot \infty$, što zbog produkta $0 \cdot \infty$ nije dobra definicija. Da izbjegnemo neodređeni oblik $0 \cdot \infty$ reći ćemo da je visina prizme, tj. debljina poligona, skoro 0 i označavati ćemo je s h_0, a gustoća je skoro ∞ i označavati ćemo je s ρ_∞, pa je $m = Ph_0\rho_\infty$. Intuitivno je jasno, što s ovakvim formalizmom želimo postići.

Pod pojmom homogenog ravnog štapa smatrat ćemo "dužinu" mase m čija je duljina l, a polumjer r_0 je jednak gotovo nula, ali različit od nule, i gustoća ρ_∞ je gotovo beskonačno velika, ali konačna.

Opće je poznata činjenica, da je težište homogenog štapa u homogenom polju sile teže u polovištu tog štapa, a to znači, da ako bi tu fizikalnu tvorevinu poduprli u polovištu, tj. težištu, onda bi ona ostala u ravnoteži. Često se misli, da ako je štap

[1] Autor predaje matematiku na Željezničkoj tehničkoj školi u Zagrebu, e-mail: petar.svircevic.hinet.hr

u ravnoteži tada mora biti horizontalan, kao na slici 1.a); no on može biti trajno i u kosom položaju, kao na slici 1.b), ako ga tako ostavimo, s tim da u točki $P \equiv T$ nema proklizavanja.



Slika 1.

Pređimo sada na trokut čije su "fizikalne" karakteristike već dogovorene. Esperimentalna je činjenica da je težište trokuta u sjecištu njegovih težišnica. No, napomenimo, da se može i strogo matematički dokazati (npr. pomoću vektora), da se sve tri spojnice (težišnice) vrha trokuta i polovišta njemu nasuprotne stranice sijeku u jednoj točki (težištu). Ovim razmatranjem bi opravdali nazive: *pravac nosilac težišnice*, *težišnica* i *težište*. Napokon recimo i to, da su sve presječnice trokuta s pravcem kroz težište također težišnice, sa svojstvima uravnoteženja koja imaju i glavne težišnice, a one se zovu sporedne težišnice; evidentno je da ih ima beskonačno mnogo.

Intuitivno i eksperimentalno nam je jasno da svaki ravninski lik ima težište u svojoj nutrini ili vanjštini. Naglasimo da bi mogli promatrati konveksne i konkavne n-terokute, s time da nećemo stalno naglašavati njihovu homogenost bez debljine, no mi ćemo se za naše potrebe baviti samo četverokutom, ali ćemo imati na umu njegove fizikalne, odnosno statičke, karakteristike.

Zamislimo da je dan koveksni četverokut čiji su vrhovi A_1, A_2, A_3, A_4; a zvat ćemo ga četverkut $A_1A_2A_3A_4$, i neka je on postavljen u ravninski koordinatni sustav, te neka su točke $A_i(x_i, y_i)$, $(i = 1, 2, 3, 4)$ desno orijentirane. Ako u tom četverokutu povučemo dijagonale $\overline{A_1A_3}$ i $\overline{A_2A_4}$ dobivamo četiri trokuta; i to dva trokuta $A_1A_2A_3$ i $A_3A_4A_1$ koji su, reći ćemo, *srodni po dijagonali* $\overline{A_1A_3}$; i trokuti $A_2A_3A_4$ i $A_4A_1A_2$ koji su *srodni po dijagonali* $\overline{A_2A_4}$. Ovi trokuti imaju težišta $T_{123}, T_{341}, T_{234}, T_{412}$, odnosno ako ih prikažemo pomoću koordinata

$$T_{ijk}\left(\frac{x_i + x_j + x_k}{3}, \frac{y_i + y_j + y_k}{3}\right), \tag{1}$$

gdje je $i, j, k = 1, 2, 3, 4$, $\ (i \neq j,\ \ i \neq k)$. Dakle imamo samo četiri mogućnosti, jer se radi zapravo o kombinacijama trećeg razreda od četiri elementa.

Podsjetimo se (strogi dokaz se može naći u [3]), da ako je zadan konveksni četverokut $A_1A_2A_3A_4$ desno orijentiranih vrhova; tada težišta $T_{123}, T_{234}, T_{341}, T_{412}$ trokuta $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ čine četverkut $T_{123}T_{234}T_{341}T_{412}$, koji je sličan četverokutu $A_1A_2A_3A_4$, te da se pravci $T_{123}T_{341}$ i $T_{234}T_{412}$, nosioci dijagonala $\overline{T_{123}T_{341}}$ i $\overline{T_{234}T_{412}}$, sijeku u težištu četverokuta $A_1A_2A_3A_4$, dakle težište je $T \equiv T_{123}T_{341} \cap T_{234}T_{412}$.

Sada ćemo dati teorem, koji ćemo iskoristiti kod rješenja našeg problema o Arhimedovom zakonu (teoremu) poluge.

Teorem 1. Za opći konveksni četverokut $A_1A_2A_3A_4$, vrijede ova dva identiteta

$$P(\Delta A_1A_2A_3) \cdot |T_{123}T| = P(\Delta A_3A_4A_1) \cdot |T_{341}T|, \tag{2}$$

$$P(\Delta A_4A_1A_2) \cdot |T_{412}T| = P(\Delta A_2A_3A_4) \cdot |T_{234}T|, \tag{3}$$

koji daju veze između produkta površina trokuta srodnih po dijagonali i udaljenosti njima korespodentnih tešišta i težišta četverokuta.

Uputa za dokaz T1. Najprije recimo nešto o provjeri teorema. Naime, ako u programu *The Geometer's Sketchpad* nacrtamo četverokut s već dogovorenim oznakama, tada se lako dobije da su jednakosti (2) i (3) točne, ali to nije dokaz.

Strogi dokaz navedenih identiteta može se uz dosta ispisa napraviti pomoću analitičke geometrije, ili još jednostavnije ako se upotrijebi program *Maple V*.

Budući nismo dokazivali **T1**, to ćemo strogo dokazati **T2** u kojem je sadržan korolar od **T1**, a odnosi se na *deltoid* kao specijalni četverokut, jer nećemo ništa gubiti na općenitosti što se tiče našeg temeljnog problema.

Definicija 1. Neka su u *ravninskom pravokutnom koordinatnom sustavu* (O, x, y) postavljena dva nedegenerirana trokuta $\Delta B_1B_2B_3$ i $\Delta C_1C_2C_3$ (sl. 2) desno orijentiranih vrhova; koji mogu biti bilo kakvi, a mogu se i samopresijecati, čije su površine

$$P_1 = P(\Delta B_1B_2B_3) > 0, P_2 = P(\Delta C_1C_2C_3) > 0, \tag{4}$$

a težišta su im u različitim točkama T_1, T_2, respektivno, dok su udaljenost i koordinate dane s

$$l = |T_1T_2| > 0, \quad T_1(0,0), \quad T_2(l,0).$$

Napomena 1. Ovo specijalno postavljanje težišta u ishodište sustava i na pozitivni dio osi x ništa ne umanjuje općenitost problema, a pojednostavnjuje izračunavanje.

Teorem 2. Uz *D1* postoje preslikavanja (u istom koordinatnom sustavu)

$$f_i : D_i \to K_i \;\; (i = 1, 2), \tag{6}$$

koja imaju svojstva

$$f_1 : \Delta B_1B_2B_3 \to \Delta A_1A_2A_4 \text{ (jednakokračni } \Delta\text{)}, \tag{7}$$

$$f_2 : \Delta C_1C_2C_3 \to \Delta A_2A_3A_4 \text{ (jednakokračni } \Delta\text{)}, \tag{8}$$

$$P_1 = P(\Delta B_1B_2B_3) = P(\Delta A_1A_2A_4), \tag{9}$$

$$P_2 = P(\Delta C_1C_2C_3) = P(\Delta A_2A_3A_4), \tag{10}$$

$$f_i : T_i \to T_i, \tag{11}$$

$$(\Delta A_1A_2A_3) \cap (\Delta A_2A_3A_4) = \overline{A_2A_4}. \tag{12}$$

Površina deltoida $A_1A_2A_3A_4$ ima svojstvo

$$P(A_1A_2A_3A_4) = P_1 + P_2, \tag{13}$$

$$T\left(\frac{P_2}{P_1 + P_2} l, 0\right). \tag{14}$$

Dokaz T2. Ako uvažimo *D1* i ako pogledamo sl. 2, zaključujemo da je dovoljno pokazati da sve koordinate vrhova deltoida možemo izraziti pomoću veličina l, P_1, P_2.

Neka je $a, b, c, d > 0$, tako da su koodinate vrhova deltoida dane s

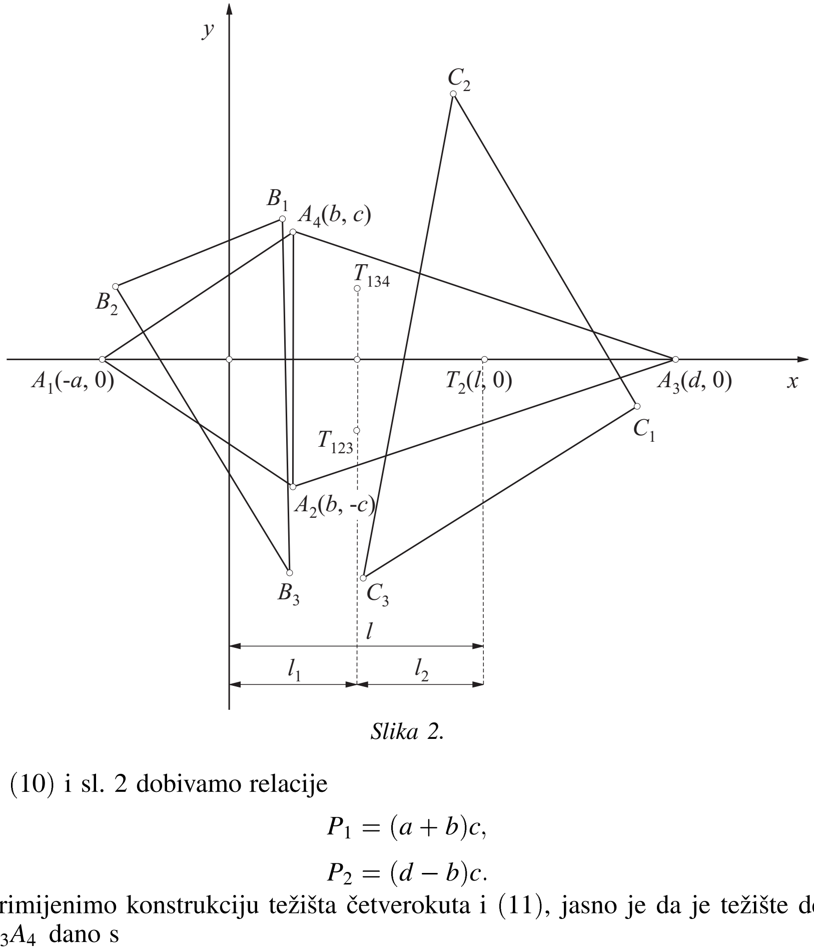
$$A_1(-a, 0),\ \ A_2(b, -c),\ \ A_3(d, 0),\ \ A_4(b, c). \tag{15}$$

Sada ćemo koristiti (1). Težište trokuta $\Delta A_1A_2A_3$ je

$$T_{123}\left(\frac{-a+b+d}{3}, -\frac{c}{3}\right), \tag{16}$$

i analogno za $\Delta A_1A_3A_4$

$$T_{134}\left(\frac{-a+b+d}{3}, \frac{c}{3}\right). \tag{17}$$



Slika 2.

Iz (9), (10) i sl. 2 dobivamo relacije

$$P_1 = (a+b)c, \tag{18}$$

$$P_2 = (d-b)c. \tag{19}$$

Ako primijenimo konstrukciju težišta četverokuta i (11), jasno je da je težište deltoida $A_1A_2A_3A_4$ dano s

$$T \equiv \overline{T_1T_2} \cap \overline{T_{123}T_{134}} \equiv (l_1, 0) \equiv \left(\frac{-a+b+d}{3}, 0\right). \tag{20}$$

Iz sl. 2 se vidi da je

$$O(0,0) \equiv T_1\left(\frac{-a+b+b}{3}, 0\right), \tag{21}$$

a odatle

$$a = 2b, \tag{22}$$

dok se iz

$$T_2(l,0) \equiv T_1\left(\frac{b+d+b}{3}, 0\right), \tag{23}$$

dobije da je

$$d = 3l - 2b. \tag{24}$$

Ako (18) podijelimo s (19) iz (22) i (24) slijede relacije

$$a = \frac{2P_1}{P_1+P_2}l, \quad b = \frac{P_1}{P_1+P_2}l, \quad c = \frac{P_1+P_2}{3l}, \quad d = \frac{P_1+3P_2}{P_1+P_2}l. \tag{25}$$

Iz (20) dobivamo

$$l_1 = \frac{-a+b+d}{3}. \tag{26}$$

Iz sl. 2, (25) i (26) slijede konačno relacije

$$l_1 = \frac{P_2}{P_1+P_2}l, \quad l_2 = \frac{P_1}{P_1+P_2}l. \tag{27}$$

Na kraju zaključujemo da je teorem u potpunosti dokazan, jer su koordinate u (25) i (27) funkcije od veličina l, P_1, P_2, što je i trebalo pokazati.

Korolar 1. Za deltoid $A_1A_2A_3A_4$ na sl. 2 vrijedi jednakost (3), što u našem slučaju glasi

$$P_1l_1 = P_2l_2. \tag{28}$$

Dokaz. Evidentno je da relacije (27) zadovoljavaju (28), što je i trebalo pokazati.

Teorem 3. (*Arhimedov zakon poluge*) *Neka je zadana ravna poluga (štap) bez mase, čija je duljina l, a na njezinim krajevima u točkama T_1 i T_2 koncentrirane su mase m_1 i m_2 respektivno. Točka T na polugi će se zvati težište zadanih masa onda i samo onda ako je*

$$m_1l_1 = m_2l_2, \tag{29}$$

gdje je

$$|T_1T| = l_1; \quad |TT_2| = l_2. \tag{30}$$

Dokaz T3. Ovaj idealizirani eksperiment malo ćemo konkretizirati, a ipak nećemo ništa gubiti na općenitosti, naime iz tvrdnje teorema izlazi da je specifična gustoća obje materijalne točke beskonačno velika, a volumen tih masa jednak je nuli, dakle mase postaju neodređeni oblici $0\cdot\infty$, jer je masa homogenog tijela jednaka produktu njegovog volumena i specifične gustoće, koja je konstantna. Zamislimo sada, da te materijalne točke ekspandiraju u homogene kugle, koje su disjunktne, istih jako velikih specifičnih gustoća, ali tako da točke T_1 i T_2 budu u središtima (težištima) tih kugli, koje su općenito različitih volumena. Poznato je, da se za konstantnu masu vulumen smanjuje, ako se specifična gustoća povečava i obratno. Jasno je, da se nakon ove prostorne transformacije ništa ne mijenja što se odnosi na težište T.

Idemo sada na novu zamišljenu transformaciju danih kugli u trokute jako malih (skoro nula) jednakih debljina i jako velikih (skoro beskonačno) jednakih specifičnih gustoća, što je u skladu s uvodnim izlaganjima, i neka je to prezentirano na sl.2, a sve je to napravljeno uz uvjet da su sada točke T_1 i T_2 težišta $\Delta B_1B_2B_3$ i $\Delta C_1C_2C_3$ respektivno, pa te trokute možemo preslikati u deltoid $A_1A_2A_3A_4$, što slijedi iz T2. Neka su debljine tih trokuta i deltoida h_0 a specifične gustoće ρ_∞. Budući vrijedi (28), tj. $P_1l_1 = P_2l_2$, a ako tu jednakost pomnožimo s h_0 i ρ_∞ dobivamo da

$$(P_1h_0\rho_\infty)l_1 = (P_2h_0\rho_\infty)l_2, \tag{31}$$

no budući je $m_1 = P_1h_0\rho_\infty$ i $m_2 = P_2h_0\rho_\infty$, to onda iz (31) slijedi (29), te se i nakon ove prostorne transformacije ništa ne mijenja što se odnosi na težište T. Lako se napravi i obrat, pa je time **Arhimedov zakon poluge** u potpunosti dokazan.

Napomena 2. U *T3* se kaže da poluga nema mase, tj. masa je jednaka nuli, svakako da u praksi to ne može biti. Kako ćemo onda realizirati pokus da se provjeri *T3*? Provjeru *Arhimedovog zakona poluge* možemo realizirati na jedan način (ima ih puno), tako da uzmemo ravni homogeni štap dovoljno dugačak, čija je duljina jednaka λ, i u polovištu tj. težištu T izvršimo podupiranje bez mogućeg proklizavanja, te od težišta u lijevu stranu u točki T_1 postavimo (objesimo) masu m_1, koja je za duljinu l_1 udaljena od T tj. $l_1 = |T_1T|$. Analogno postupimo i na desnom kraku, gdje u točki T_2 postavimo masu m_2, tako da je $l_2 = |TT_2|$. Uvjet da bi se pokus mogao izvršiti je $\lambda/2 \geqslant l_1, l_2$; i ako dobijemo da vrijedi $m_1l_1 = m_2l_2$, tada je točka T težište danih masa i obratno.

Napomena 3. U homogenom polju sile, npr. u gravitacijskom polju sile teže, je akceleracija $\vec{g}$ ($g \approx 9.81\,ms^{-2}$), pa ako (29) "pomnožimo" s $\vec{g}$ dobivamo

$$(m_1\vec{g})l_1 = (m_2\vec{g})l_2, \tag{32}$$

ili

$$\overrightarrow{F}_1l_1 = \overrightarrow{F}_2l_2, \tag{33}$$

a to je *Arhimedov zakon poluge* u vektorskom obliku, što je u stvari aksiom *klasične statike*. Budući da se on može izvesti, to se onda ne radi o aksiomu nego o teoremu, dakle može se sada uspostaviti *nova aksiomatika klasične statike*.

Napomena 4. *D1* i *T2* se mogu poopćiti, tako da se umjesto trokuta o ravninskom koordinatnom sustavu promatraju dva tetraedra u prostornom koordinatnom sustavu, i da se definiraju preslikavanja, koja će težišta tetraedara identički preslikati, a tetraedri će se preslikati u tertaedre čija je baza, jednakostranični trokut, zajednička, a volumeni im ostaju isti, te bi postupak tekao kao u obrađenom ravninskom slučaju, no time ne bi ništa dobili na općenitosti, samo bi imali kompliciraniji račun.

Literatura

[1] BORIS PAVKOVIĆ, *Lagrangeov zakon i njegove primjene*, MFL br.1. 1987–1988.

[2] BORIS PAVKOVIĆ, PETAR MLADINIĆ, *Arhimedova metoda težišta*, HMD, ŠK, Zagreb 1998.

[3] PETAR SVIRČEVIĆ, *Težište ravninskog poligona i njegovog ruba*, I. dio ; Matematičko–fizički list, br.4, god. 2003–2004, (str. 248–254), Zagreb

[4] *The Geometer's Sketchpad* (korišteni program za crteže)