О ЈЕДНОЈ ВРСТИ СИМЕТРИЈЕ БРОЈЕВА

Ратко Тошић, Нови Сад

Ако је дат неки природан број a, онда се нови број b може добити тако да се цифре броја a испишу обрнутим редом. На пример, из броја $a = 518$, добијамо број $b = 815$. У овом случају за број b кажемо да је **симетричан** броју a. Наравно да је онда и број a симетричан броју b, па зато кажемо да су бројеви a и b **узајамно симетрични** или да чине пар узајамно симетричних бројева. При томе ограничавамо се на посматрање природних бројева код којих су прва и последња цифра различите од нуле, да би узајамно симетрични бројеви имали исти број цифара и да бисмо за сваки дати број могли образовати њему симетричан број.

На пример, парови симетричних бројева су 25 и 52, 173 и 371, 1405 и 5041.

Постоје и природни бројеви који су симетрични сами себи, тј. који се не мењају кад им се цифре испишу у обрнутом поретку. За такве бројеве кажемо да су **симетрични бројеви**. На пример симетрични бројеви су 22, 313, 4334, 55555, 12321, 812218.

Симетрични бројеви називају се још и **палиндроми**, по угледу на речи које се читају исто слева на десно и здесна на лево. На пример, следеће речи су палиндроми: ПОП, НЕВЕН, РОТОР. И целе реченице могу бити палиндроми, на пример: САВА ЗИДАР ГРАДИ ЗА ВАС.

Решимо сада неколико задатака у вези са паровима узајамно симетричних бројева и палиндрома.

Задатак 1. Одреди број а) троцифрених; б) четвороцифрених палиндрома.
Решење. И троцифрени и четвороцифрени палиндроми одређени су са прве две цифре. Према томе, број троцифрених (четвороцифрених) палиндрома једнак је броју двоцифрених природних бројева, тј. 90.

Задатак 2. Одреди број парова различитих узајамно симетричних двоцифрених бројева.
Решење. Сваком двоцифреном броју који се не завршава нулом одговара тачно један њему симетричан број. Број таквих бројева је 81. При томе, ако су цифре двоцифреног броја једнаке, тј. ако је број палиндром, он је сам себи симетричан. Има 9 таквих бројева. Од преостала 72 броја може се формирати 36 парова различитих узајамно симетричних бројева.

При решавању задатака у којима фигуришу симетрични и узајамно симетрични бројеви, често се користи дељивост и својства дељивости природних бројева.

Задатак 3. а) Збир два узајамно симетрична двоцифрена броја дељив је са 11.
б) Разлика два узајамно симетрична двоцифрена броја дељив је са 9.
Решење. а) $\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11 \cdot (a + b)$.
б) $\overline{ab} - \overline{ba} = (10a + b) - (10b + a) = 9 \cdot (a - b)$.

Задатак 4. Доказати да је разлика два четвороцифрена узајамно симетрична броја исте парности дељива са 18.

Решење. Нека су $\overline{abcd}$ и $\overline{dcba}$ четвороцифрени бројеви исте парности (што значи да су цифре a и d обе парне или обе непарне). Како је $a-d$ паран број, у разлици $\overline{abcd}-\overline{dcba}=999(a-d)+90(b-c)$ су оба члана дељива са 9 и са 2, одакле следи тврђење.

Задатак 5. Одреди пар узајамно симетричних четвороцифрених бројева ако је један од њих 9 пута мањи од другог.

Решење. Означимо мањи од тражених бројева са x. Тај број није већи од 1111, јер је $9x$ четвороцифрени број. Он се завршава цифром 9, јер се $9x$ завршава цифром 1, дељив је са 9 јер бројеви x и $9x$ имају исти збир цифара. Збир друге и треће цифре једнак је 8, одакле следи да друга цифра мора бити 0. Према томе, трећа цифра је 8 и тражени број је 1089, при чему је $1089 \cdot 8 = 9801$.

Задатак 6. Производ два узајамно симетрична броја је осмоцифрен број који се завршава са три нуле. Наћи све парове таквих бројева.

Решење. Нека $m=\overline{abcd}$ и $n=\overline{dcba}$ чине такав пар бројева. Како је производ та два броја дељив са 1000, мора један од тих бројева бити дељив са $5^3 = 125$, а други са $2^3 = 8$. (Не може ниједан од та два броја бити дељив и са 5 и са 2, јер би се такав број завршавао нулом.) Бројеви дељиви са 125 који се не завршавају нулом, завршавају се једном од следећих комбинација цифара: 125, 375, 625, 875. Разматрајући сваки случај посебно (имајући у виду да бројеви $\overline{521a}$, $\overline{573a}$, $\overline{526a}$, $\overline{578a}$ треба да буду дељиви са 8), налазимо да m може бити сваки од бројева: 6125, 6375, 4625, 4875. Тим бројевима одговарају редом њима узајамно симетрични бројеви 5216, 5736, 5264, 5784.

Задатак 7. Да ли збир два узајамно симетрична броја може бити 2013-цифрен број чије су све цифре деветке?

Решење. Не. Лако се види да је збир цифара у сваком разреду једнак 9 и да не може бити преноса. Следи да је збир цифара добијеног збира два пута већи од збира цифара једног сабирка, тј. да је паран број. Међутим, број $2013 \cdot 9$ је непаран број.

Следећих неколико задатака односи се на бројеве палиндроме.

Задатак 8. Нађи најмањи троцифрени палиндром чији је збир са најмањим двоцифреним палиндромом такође палиндром.

Решење. Најмањи двоцифрени палиндром је 11. Тражени троцифрени палиндром тражићемо међу бројевима облика $\overline{1a1}$. Ако је $a < 9$ збир ће бити облика $\overline{1b2}$, где је $b = a + 1$, па тај збир неће бити палиндром. Преостаје да проверимо да је 191 + 11 = 202 палиндром. Дакле, тражени број је 191.

Задатак 9. Нађи парове троцифрених палиндрома који се записују помоћу две различите цифре чија је разлика троцифрени број записан са три узастопне цифре.

Решење. Нека $\overline{aba} = 100a + 10b + a$ и $\overline{bab} = 100b + 10a + b$ чине тражени пар, при чему је $a > b$. Њихова разлика је $\overline{aba} - \overline{bab} = 91 \cdot (a - b)$, где је $1 \leq a - b \leq 8$. Непосредном провером налазимо да је дати услов испуњен само за $a - b = 6$, одакле добијамо тражене парове: 717 и 171, 828, и 282, 939 и 393. Разлика сва три пара је $91 \cdot 6 = 546$.

Задатак 10. Одреди све четвороцифрене палиндроме са тачно 5 различитих простих делилаца.

Решење. Приметимо да палиндром не може да садржи истовремено просте чиниоце 2 и 5 (јер би се завршавао цифром 0). Исто тако, лако се види да је тражени број производ пет различитих простих бројева. Наиме, ако би се неки од тих простих фактора појављивао степенован неким бројем већим од 1, тај производ би био бар петоцифрен, јер је производ пет најмањих простих бројева различитих од 5 једнак $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 = 6006$. Тај производ је четвороцифрени палиндром. Још једно решење добијамо када 13 заменимо са 19. Дакле, имамо два решења: 6006 и $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 19 = 8778$.

Задатак 11. Редни број овог задатка је палиндром.

Решење. Очигледно.

У следећим задацима фигуришу и неки геометријски елементи.

Задатак 12. Дужина странице квадрата изражена у cm је прост број, а површина тог квадрата (у cm^2) једнака је збиру два двоцифрена узајамно симетрична броја. Који су то бројеви?

Решење. Нека $\overline{ab} = 10a + b$ и $\overline{ba} = 10b + a$ чине пар тражених узајамно симетричних бројева, где је $a > b$. Тада је $\overline{ab} + \overline{ba} = 11 \cdot (a + b)$, а како је 11 прост број и $3 \leq a + b \leq 17$, могуће је само да је $a + b = 11$. Дакле, дужина странице квадрата је 11cm, а површина $11 \cdot 11 = 121$cm^2. Сада за цифре a и b постоје следеће могућности:

1) $a = 9, b = 2$;   2) $a = 8, b = 3$;   3) $a = 7, b = 4$;   4) $a = 6, b = 5$.

Тражени парови узајамно симетричних бројева су (92, 29), (83, 38), (74, 47), (65, 56).

Задатак 13. Обим правоугаоника једнак је 806cm. Одреди дужине његових страница (у cm) ако је познато да су те дужине два узајамно симетрична броја.

Решење. Лако се види да су дужине страница два троцифрена узајамно симетрична броја чији је збир једнак 403. Из $\overline{abc} + \overline{cba} = 101 \cdot (a + c) + 20b = 403$, лако налазимо да је $a + c = 3$ и $b = 5$. Дакле, тражене дужине страница су 251cm и 152cm.

Задатак 14. Дужина ивице коцке је цео број центиметара, а запремина (у cm^3) једнака је разлици два двоцифрена узајамно симетрична броја. Који су то бројеви?

Решење. Нека су $\overline{ab} = 10a + b$ и $\overline{ba} = 10b + a$ тражени бројеви, при чему је $a > b$. Тада је $\overline{ab} - \overline{ba} = 9 \cdot (a - b) = 3 \cdot 3 \cdot (a - b)$, а како $1 \leq a + b \leq 8$, могуће је само $a - b = 3$. Следи да је дужина ивице коцке 3cm, а запремина $27cm^3$. За пар цифара a, b постоје могућности: (9, 6), (8, 5), (7, 4), (6, 3), (5, 2), (4, 1). Одавде лако налазимо шест парова тражених бројева: (96, 69), (85, 58), (74, 47), (63, 36), (52, 25), (41, 14).

Задатак 15. Да ли постоји коцка са ивицом целобројне дужине (у cm) чија је запремина (у cm^3) једнака збиру два двоцифрена узајамно симетрична броја?

Решење. Не. Збир $\overline{ab} + \overline{ba} = (10a + b) + (10b + a) = 11 \cdot (a + b)$, где су a и b једноцифрени бројеви, не може бити куб природног броја.

Задатак 16. Дужине страница правоугаоника су троцифрени палиндроми $\overline{aba}$ и $\overline{bab}$. Одреди обим тог правоугаоника ако је познато да је он такође троцифрени палиндром.

Решење. Тражени обим једнак је $2 \cdot (\overline{aba} + \overline{bab}) = 2 \cdot 111 \cdot (a + b)$, што је троцифрени број само за $a + b = 3$ и $a + b = 4$. У првом случају је обим једнак 666 (странице 121 и 212), у другом 888 (131 и 313).

Задаци за самостални рад

1. Нађи најмањи четвороцифрени палиндром чији је збир са најмањим двоцифреним палиндромом такође палиндром.
2. Одреди број а) петоцифрених; б) 2012-цифрених; в) n-цифрених палиндрома.
3. Одреди број парова узајамно симетричних
   а) троцифрених; б) четвороцифрених; в) n-цифрених бројева.
4. Докажи да не постоји једнакостраничан троугао код кога су дужина странице и обим два четвороцифрена узајамно симетрична броја.
5. Одреди дужину странице квадрата, ако је познато да су та дужина и обим квадрата (изражени у центиметрима) две четвороцифрена узајамно симетрична природна броја.
6. Дужина странице квадрата у cm је цео број, а његова површина изражена у cm^2 је троцифрени палиндром. Израчунај обим квадрата.
7. Одреди дужину ивице коцке у cm ако је познато да је запремина коцке (изражена у cm^3) збир два троцифрена узајамно симетрична броја.
8. Одреди дужине у центиметрима страница правоугаоника ако је познато да су та два узајамно симетрична броја и површина правоугаоника једнака $101088cm^2$.
9. Одреди пар узајамно симетричних петоцифрених бројева ако је један од њих 9 пута мањи од другог.
10. Докажи да ни један природан број не може бити два пута већи од њему симетричног броја.
11. Нека је n збир два петоцифрена узајамно симетрична броја. Докажи да је бар једна цифра броја n парна.

12. Одреди запремину коцке ако је познато да је она (изражена у cm^3):
а) троцифрени; б) четвороцифрени палиндром.
13. Нађи све троцифрене палиндроме дељиве са 18.
14. Нађи све четвороцифрене палиндроме који су дељиви са а) 36; б) 63.
15. На колико начина се могу изабрати један двоцифрен и један троцифрен палиндром тако да је и њихов збир палиндром?

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија