Јенс Карстенсен
Алија Муминагиќ

ГЕОМЕТРИСКИ РЕШЕНИЈА НА НЕКОИ ЗАДАЧИ ПОВРЗАНИ СО АРКУСТАНГЕНСИТЕ

Во оваа работа даваме геометриски доказ на адициона теорема за функцијата arctg (што не е вообичаен доказ) и геометриски решенија на некои задачи за arctg -ите.

Најпрво да се потсетиме за

1. Аркус функции или циклометриски функции ги нарекуваме инверзните функции на тригонометриските функции. Една од тие функции е функцијата аркустангенс.

Дефинција. Функцијата аркустангенс ја нарекуваме функцијата

$$\operatorname{arctg} = (\operatorname{tg}_{|(-\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2})})^{-1}$$

(т.е. инверзната функција на рестрикцијата на функцијата tg на интервалот $(-\frac{\pi}{2}\frac{\pi}{2})$ е аркустангенс функција, во ознака $\operatorname{arctg} x$).

2. Претпоставуваме дека својствата и графикот на функцијата $y = \operatorname{arctg} x$ им се познати на читателите.

3. Исполнето е $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

4. Адициона теорема за функцијата аркустангенс

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \begin{cases} \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} & , \quad xy < 1 \\ \pi + \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} & , \quad x > 0, xy > 1 \\ -\pi + \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} & , \quad x < 0, xy > 1 \end{cases}.$$

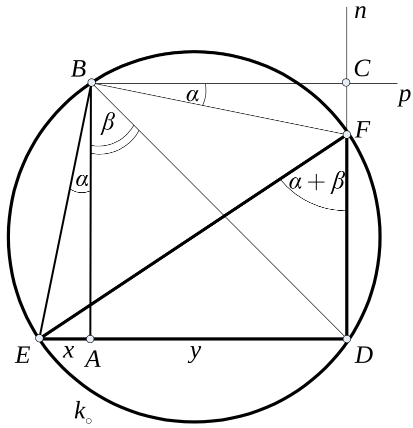
Во наредниот дел следува геометриски доказ за равенството

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

Нека е даден правоаголен триаголник ABE во кој што $\measuredangle A = 90^\circ$, $\overline{AB} = 1$ и $\overline{EA} = x$. Ќе ја продолжиме катетата EA преку точката A до точката D така што $\measuredangle DBA = \beta$ и нека $\overline{AD} = y$ (види цртеж).

Низ точката B повлекуваме права $p \parallel ED$, а во точката D конструираме нормала $n \perp ED$. Пресечната точка на нормалата и правата

p ќе ја означиме со C, а пресечната точка на опишаната кружница $k_\circ$ околу триаголникот DBE и таа нормала со F. Ќе ги споиме точките B и E со точката F.



Бидејќи $\measuredangle EDF = 90^\circ$ следува дека EF е дијаметар на кружницата $k_\circ$ и заради тоа $\measuredangle FBE = 90^\circ$ (како периферниски агол над дијаметар). Сега имаме

$$\measuredangle FBA = \measuredangle FBE - \measuredangle ABE = 90^\circ - \alpha$$

$$\measuredangle CBF = \measuredangle CBA - \measuredangle FBA$$

$$= 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$$

што значи $\Delta ABE \sim \Delta FCE$ (имаат исти агли), а од таа сличност произлегува дека

$$\frac{\overline{EA}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FC}}{\overline{CB}} \Leftrightarrow$$

$$\overline{FC} = \overline{CB} \cdot \frac{\overline{EA}}{\overline{AB}} = (\overline{AB} = 1) = \overline{CB} \cdot \overline{EA} = (\overline{CB} = \overline{DA}) = \overline{EA} \cdot \overline{DA} = xy \,. \qquad (1)$$

Понатаму,

$$\overline{DF} = \overline{DC} - \overline{FC} = 1 - xy \qquad (2)$$

Во триаголникот EAB е исполнето $\operatorname{tg}\alpha = x$, т.е.

$$\alpha = \operatorname{arctg} x, \qquad (3)$$

а во триаголникот ADB е исполнето $\operatorname{tg}\beta = y$, т.е.

$$\beta = \operatorname{arctg} y, \qquad (4)$$

од каде за триаголникот EDF добиваме

$$\operatorname{tg}\measuredangle DFE = \frac{\overline{DE}}{\overline{FD}} \overset{(2)}{=} \frac{x+y}{1-xy}.$$

Поради равенството $\measuredangle DFE = \measuredangle DBE = \alpha + \beta$ добиваме

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{x+y}{1-xy},$$

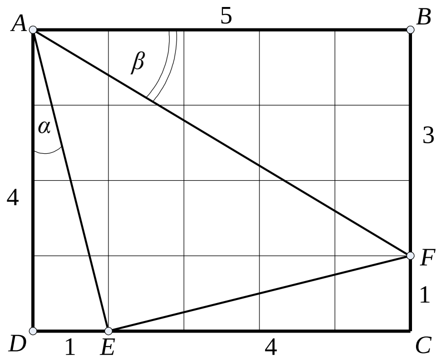
т.е.

$$\alpha + \beta = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy} \overset{(3),(4)}{\Leftrightarrow} \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}.$$

Во наредниот дел следуваат геометриски решенија на некои задачи.

Задача 1. Докажи дека $\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{3}{5}=\frac{\pi}{4}$.

Решение. Нека $ABCD$ е правоаголник со страни $\overline{AD}=\overline{BC}=4$ и $\overline{AB}=\overline{CD}=5$. Точките E и F од страните CD и BC се такви што $\overline{DE}=\overline{CF}=1$. Лесно се покажува дека триаголникот AEF е правоаголен и рамнокрак($\measuredangle E=90^\circ$, $\overline{AE}=\overline{EF}$). Нека $\measuredangle EAD=\alpha$ и $\measuredangle BAF=\beta$ (види цртеж). Според тоа



$$\alpha+\measuredangle FAE+\beta=90^\circ,$$

и заради равенството $\measuredangle FAE=45^\circ$, добиваме

$$\alpha+\beta=45^\circ. \tag{5}$$

Понатаму, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{4}$, т.е. $\alpha=\operatorname{arctg}\frac{1}{4}$ и $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{5}$, т.е. $\beta=\operatorname{arctg}\frac{3}{5}$, и конечно

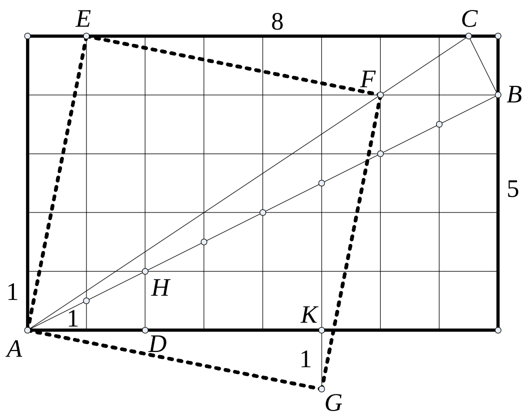
$$\alpha+\beta=\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{3}{5}\overset{(5)}{\Leftrightarrow}\operatorname{arctg}\frac{1}{4}+\operatorname{arctg}\frac{3}{5}=\frac{\pi}{4},$$

што требаше да се докаже.

Задача 2. Докажи дека

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}. \tag{*}$$

Решение 1. Формулата (*) прва ја докажал австрискиот математичар Schulz von Strassnitzki (1803-1852), но често се припишува на Zacharias Dase (1824-1861) познат како “човек машина за пресметување”. Таа формула ја користел за пресметување на бројот π на 25 децимали. Следува решение во малку “компримиран” облик.



Од цртежот гледаме дека е исполнето

$$\operatorname{tg}\measuredangle HAD=\frac{1}{2}\text{, т.е. }\measuredangle HAD=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{tg}\measuredangle KAG=\frac{1}{5}\text{, т.е. }\measuredangle KAD=\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$$

$$\operatorname{tg}\measuredangle CAB=\frac{1}{8}\text{, т.е. }\measuredangle CAB=\operatorname{arctg}\frac{1}{8}.$$

Не е тешко да се докаже дека четириаголникот $AGFE$ е квадрат, од каде што добиваме

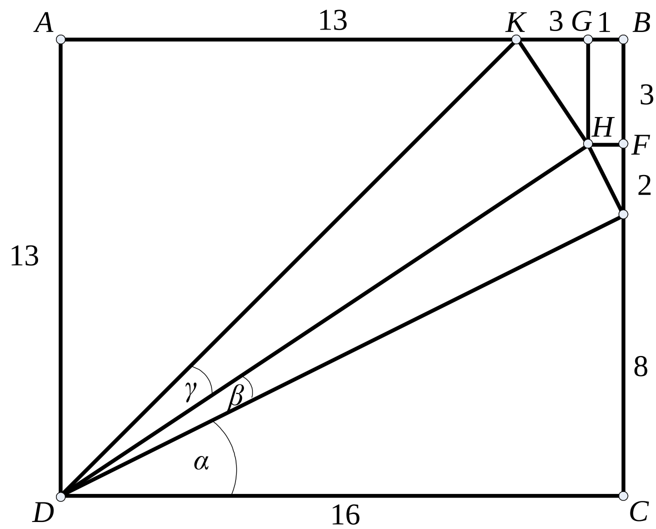
$$\measuredangle FAG=\measuredangle CAG=45^{\circ}=\frac{\pi}{4},$$

Па според тоа

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4},$$

што требаше да се докаже.

Решение 2. Нека $ABCD$ е правоаголник со страни $\overline{AB}=\overline{CD}=16$ и $\overline{AD}=\overline{BC}=13$. Точките E и F припаѓаат на страната BC при што $\overline{BF}=3$ и $\overline{FE}=2$, а точките G и K припаѓаат на страната AB при што $\overline{BG}=1$ и $\overline{GK}=2$. Освен тоа, точката H е избрана на тој начин што $BGHF$ е правоаголник(види цртеж). Ќе ги повлечеме отсечките DE и EH. Правоаголните триаголници DCE и EFH се слични па според тоа $\measuredangle DEH=90^{\circ}$. Сега лесно се добива дека $\overline{DE}=8\sqrt{5}, \overline{EH}=\sqrt{5}$ (според Питагорина теорема за триаголниците DCE и EFH).



Ќе ја повлечеме отсечката DH. Во правоаголниот триаголник DEH имаме $\overline{DH}=5\sqrt{13}$. Исто така ќе ги повлечеме отсечките DK и HK. Не е тешко да се провери дека $\overline{DK} = 13\sqrt{2}$ и $\overline{HK} = \sqrt{13}$. Сега, во триаголникот DHK имаме $\overline{DH} = 5\sqrt{13}$, $\overline{HK} = \sqrt{13}$ и $\overline{DK} = 13\sqrt{2}$, при што е исполнето

$$\overline{DH}^2 + \overline{KH}^2 = 25 \cdot 13 + 13 = 26 \cdot 13 = 2 \cdot 13^2 = \overline{DK}^2$$

Според обратната теорема на Питагора, добиваме дека триаголникот DHK е правоаголен. Нека $\alpha = \measuredangle EDC$, $\beta = \measuredangle HDE$ и $\gamma = \measuredangle HDK$. Од правоаголните триаголници ΔECD, ΔHDE и ΔKHD имаме

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}, \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sqrt{5}}{8\sqrt{5}} = \frac{1}{8}, \qquad \beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{8}$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sqrt{13}}{5\sqrt{13}} = \frac{1}{5}, \qquad \gamma = \operatorname{arctg}\frac{1}{5}.$$

Сега, од равенството $\alpha + \beta + \gamma = 45^\circ$ (зошто?), добиваме

$$\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4},$$

што требаше да се докаже.

Литература

[1] Pavković-Veljan, Elementarna Matematika 2, Školska kniga, Zagreb, 1995.

[2] David Miles, Proof of Machin, Rutherford and Dase in a single Diagram (Mathematics in School, November 2010).

[3] Hasan Ünal, A Visual Proof of Dasés formula (Mathematics in School, May 2011).

[4] Jens Carstensen& Alija Muminagić, Arctan-nogle former (Mathematik Magasinet, februar 2012).

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ