Ристо Малчески
Самоил Малчески

СОЈУЗНИ НАТПРЕВАРИ ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД СРЕДНОТО ОБРАЗОВАНИЕ 1960 – 1991

Скопје, 2022

Рецензенти

С О Д Р Ж И Н А

ПРЕДГОВОР

Сојузните натпревари за учениците од средното образование во поранешната држава СФРЈ се одржува од 1960 година. Тие беа највисоко ниво на натпревари на младите математичари на Југославија. Задачите од овие натпревари беа добар показател за равојот на системот на натпревари во Јогославија, но и одличен материјал за подготоцка на идните натпреварувачи. Од 1963 година Југославија учествуваше на Меѓународните математички олимпијади, за кои екипата се определуваше врз основа на резултатите на Сојузниот натпревар, а во некои години и врз основа на дополнителен натпревар, познат како Мала олимпијада. Во книгава се содржани задачите од сите сојузни натпревари до моментот кога учениците од Македонија учествува на истите. Исто така се поставени и задачите од Малата олимпијада, освен годините кои неповратно се изгубени и тоа 1964-1968 и 1971 година. Во другите години каде нема задачи од Малата олимпијада, истата не е одржана, а за годините 1990 и 1991 година не ни е познато дали е одржана Малата олимпијада.

Всушност во книгата се поместени 455 решени задачи кои на првите 32 сојузни натпревари се задавани за учениците од средното образование, како и задачите од споменатата Мала олимпијада.

Што се однесува до самиот Сојузен натпревар, тој по правило секоја година се организираше во различна република или покраина на тогашната држава, па така на натпреварот учествуваа осум екипи од шесте републики и двете поклраини. Изборот на задачите за натпреварот го правеше Комисија составена од водачите на екипите, а со Комисијата претседаваше колега од републиката, односно покраината домаќин. Оттука може да се каже дека начинот на организацијата и работата на самиот натпревар во голема мера наликуваше на начинот според кој денес се организира Балканската математичка олимпијада, како и Меѓународната математичка олимпијада.

Како што рековме во книгава се дадени решенијата на сите задачи задавани на Сојузните натпревари во разгледуваниот период. Стандардно, книгава содржи список на користената литература.

За крај, и покрај вложениот напор, свесни сме дека се можни подобрувања на оваа книга, која покрај содржинско има и историско значење. Ова посебно се однесува на евентуалните грешки, кои за жал не го одминуваат издавањето на било кој ракопис. Затоа однапред сме благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе допринесе да се подобри книгава.

Мај 2022 Авторите
Скопје

Сојузен натпревар 1960

III година

1. Основата на квадар со висина 5 е правоаголник со периметар 4.

а) Определи ги должините на рабовите на основата така што квадарот ќе има максимален волумен.

б) Изрази го волуменот на квадарот во функција на еден основен раб. Определи го доменот на оваа фнкција.

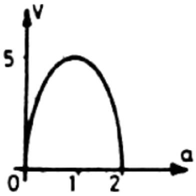
в) Нацртај го графикот на функцијата добиена под б).

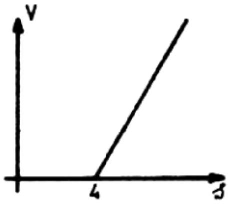
Нека е даден еден основен раб $a=2$ и висина $h=5$ на квадарот. Како сега зависи волуменот од периметарот на основата? Кои се допуштените вредности за овој волумен? Прикажи ја соодветната функција графички.

Решение. Нека основните рабови на квадарот се a и b. Тогаш $a+b=2$, па за волуменот на квадарот добиваме

$$V = 5ab = 5a(2-a) = 10-5a^2,$$

каде $0<a<2$. Максимумот на оваа функција се достигнува за $a=1$ и е $V=5$. Притоа $b=2-1=1$. Графикот на функцијата е прикажан на цртежот десно.





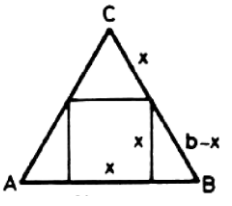
Со s да го означиме периметарот на основата. Тогаш за $a=2$ имаме $s=4+2b$, па затоа $b=\frac{s-4}{2}$ и како $h=5$ добиваме

$$V=10b=5(s-4)=5s-20,$$

каде $s>4$ ж. Графикот на оваа функција е прикажан на цртежот лево.

2. Определи го работ на коцката која е впишана во правилна тристрана пирамида со раб на основата a и висина v, така што четирите темиња припаѓаат на основата, а другите четири на бочните ѕидови на пирамидата.

Решение. Нека x е работ на коцката за која се исполнети условите на задачата и α е рамнината во која лежи горната основа на коцката, т.е. рамнината која ги содржи четирите темиња на коцката кои припаѓаат на бочните ѕидови на коцката. Со A, B, C да ги означиме пресечните точки на рамнината α со бочните ѕидови на пирамидата и нека $b=AB$. Тогаш



$$v:(v-x)=a:b \text{ и } \frac{(b-x)\sqrt{3}}{2}=x.$$

Ако од овие две равенства го елиминираме b добиваме

$$x=\frac{\sqrt{3}av}{\sqrt{3}a+(2+\sqrt{3})v}.$$

3. Реши ја неравенката

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+3)>-3.$$

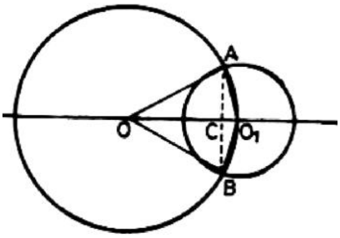
Решение. Даденото неравенство е исполнето ако и само ако

$$0<x^2-4x+3<8. \qquad (1)$$

Решението на левата неравенка во (1) е за $x<1$ или $x>3$, а на десната е $-1<x<5$. Според тоа, решението на дадената неравенка е $x\in(-1,1)\cup(3,5)$.

4. Даден е кружница (c) со центар O и радиус R. Точката O_1 која е на кружницата (c) е центар на друга кружница со радиус $\frac{R}{2}$.

Ако A и B се пресечните точки на овие две кружници, определи ја приближната вредност на $\measuredangle AOB$ (во радијани), а потоа волуменот на пресекот на топките кои се добиваат со ротација на двата круга околу правата OO_1.



Решение. Нека $\alpha=\measuredangle AOB$. Тогаш во рамнокракиот триаголник O_1AO ($AO=OO_1=R$, $O_1A=\frac{R}{2}$) аголот при врвот е $\frac{\alpha}{2}$, па затоа важи

$$\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{\frac{R}{4}}{R}=\frac{1}{4}.$$

Според тоа,

$$\measuredangle AOB=\alpha=4\arcsin\frac{1}{4}\approx 1,01072102057.$$

Со C да го означиме пресекот на правите AB и OO_1. Бидејќи $\measuredangle CAO_1=\frac{\alpha}{4}$, добиваме

$$O_1C=O_1A\sin\frac{\alpha}{4}=\frac{R}{8} \text{ и } OC=\frac{7R}{8}.$$

Бараниот волумен е еднаков на збирот на волумените на два топкини отсечоци – првиот има радиус $O_1A=\frac{R}{2}$ и растојание од центарот на топката $O_1C=\frac{R}{8}$, а вториот има радиус $AO=R$ и растојание од центарот на топката $OC=\frac{7R}{8}$. Ако ја искористиме формулата

$$V_0=\pi(\tfrac{2}{3}R^3-R^2x+\tfrac{1}{3}x^3)$$

за волумен на топкин отсечок со радиус R и растојание од центарот на топката x за бараниот волумен добиваме

$$V=\frac{13}{192}\pi R^3.$$

5. Докажи го идентитетот

$$(1-\cos b\cos c)^2-2(1-\cos b\cos c)-\sin^2 b\sin^2 c+\sin^2 b+\sin^2 c=0\,.$$

Решение. Со елементарни трансформации добиваме

$$\begin{aligned}&(1-\cos b\cos c)^2-2(1-\cos b\cos c)-\sin^2 b\sin^2 c+\sin^2 b+\sin^2 c=\\&=1-2\cos b\cos c+\cos^2 b\cos^2 c-2+2\cos b\cos c-\sin^2 b\sin^2 c+\sin^2 b+\sin^2 c\\&=-1+(1-\sin^2 b)(1-\sin^2 c)-\sin^2 b\sin^2 c+\sin^2 b+\sin^2 c=0\end{aligned}$$

IV година

1. Докажи дека производот на три последователни броја е делив со $7\cdot 8\cdot 9$, ако средниот број е куб на природен број.

Решение. Дадениот производ има вид $(x^3-1)x^3(x^3+1)$, каде x е природен број. Ако бројот x е парен, тогаш x^3, што значи и дадениот производ е делив со $2^3=8$. Ако x е непарен број, тогаш x^3-1 и x^3+1 се два последователни парни броја, па затоа нивниот производ е делив со 8. Значи, дадениот производ е делив со 8.

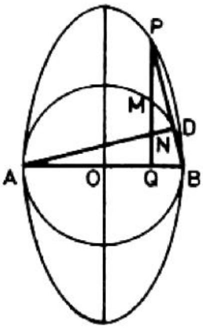
Ако $3\,|\,x$, тогаш $9\,|\,x^3$; ако $x\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$, тогаш $9\,|\,x^3-1$, а ако $x\equiv -1(\mathrm{mod}\,3)$, тогаш $9\,|\,x^3+1$. Според тоа, во секој случај дадениот производ е делив со 9.

Останува да докажеме дека даденио птоизвод е делив со 7. Воследнава табела се дадени остатоците при делење со 7 на $x, x^2, x^3, x^3-1, x^3+1$:

x	x^2	x^3	x^3-1	x^3+1
0	0	0	6	1
1	1	1	0	2
2	4	1	0	2
3	2	6	5	0
4	2	1	0	2
5	4	6	5	0
6	1	6	5	0

Забележуваме дека во секој секој ред во една од колоните на x^3, x^3-1, x^3+1има остаток 0, што значи дека еден од броевите x^3, x^3-1, x^3+1 е делив со 7.

2. Дадена е кр ужница (O,r), нејзин радиус AB и точка M на кружницата. Нека Q е проекцијата на M на AB, N е средината на MQ и D е другата точка на пресекот на правата AN и дадената кружница. Определи го геометриското место на пресекот P на правите BD и QM, кога точката M се движи по кружницата (O,r).



Решение. Да избереме координатен систем така што точката O е координатен почеток, а точките A и B припаѓаат на $x-$оската и соодветно имаат координати $(-r,0)$ и $(r,0)$, цртеж десно. Нека точката M има координати (x_0,y_0), при што $x_0^2+y_0^2=r^2$ и $x_0\neq\pm r$. Тогаш точката N има координати $(x_0,\frac{y_0}{2})$. Бидејќи

$$\measuredangle QAN=\measuredangle BAD=90^\circ-\measuredangle DBA=90^\circ-\measuredangle PBD=\measuredangle QPB,$$

заклучуваме дека триаголниците ANQ и PBQ се слични, па затоа

$$PQ=\frac{AQ\cdot BQ}{NQ}=\frac{(r+x_0)(r-x_0)}{\frac{y_0}{2}}=2y_0.$$

Според тоа, точката P има координати $(x_0,2y_0)$, па затоа припаѓа на елипсата

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{4r^2}=1.$$

Лесно се проверува дека секоја точка од оваа елипса, освен точките $A(-r,0)$ и $B(r,0)$ може да се добијат на опишаниот начин.

3. Разликата на реципрочните вредности на два цели броја е еднаква на $0,0aa...$, каде $a\in\{1,2,....,9\}$. За кои вредности на a задачата има решенија и колку?

Решение. Треба да се определи цел број x ($x\neq 0,-1$) таков што

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{x(x+1)}=0,0aa...=\frac{a}{90},$$

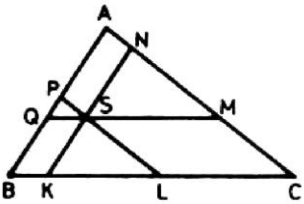
т.е. $x(x+1)=\frac{90}{a}$, каде $a\in\{1,2,....,9\}$. Десната страна на последното равенство прима целобројни вредности 90, 45, 30, 18, 15, 10 за соодветните вредности на a : 1, 2, 3, 5, 6, 9. Но, од овие шест броја само 90 и 30 може да се запишан како произод на два последователни цели броја:

$$90=9\cdot 10=-10\cdot(-9),\quad 30=5\cdot 6=-6\cdot(-5).$$

Значи, бараните вредности за a се 1 и 3 (соодветите вредности за x се 9 и -10, односно 5 и -6).

4. Низ произволна точка во внатрешноста на даден триаголник минуваат три прави кои се паралелни на страните на триаголникот. Овие прави ја делат плоштината на триаголникот на шест делови од кои три се триаголници со плоштини s_1,s_2,s_3. Определи ја плоштината на дадениот триаголник.

Решение. Со A,B,C да ги означиме темињата на дадениот триаголник, со S внатрешната точка, а пресечните точки на споменатите прави со страните на



триаголникот да ги означиме како на цртежот десно. Јасно, триаголниците PQS, NSM и SKL се слични на триаголникот ABC. Со k_1, k_2, k_3 да ги означиме соодветните коефициенти на сличност. Имаме:

$$\frac{BK}{BC}=\frac{QS}{BC}=k_1, \frac{LC}{BC}=\frac{SM}{BC}=k_2, \frac{KL}{BC}=k_3.$$

Но, $BK+LC+KL=BC$, па затоа $k_1+k_2+k_3=1$. Од друга страна, ако со s ја означиме плоштината на триаголникот ABC, имаме

$$\frac{s_1}{s}=k_1^2, \frac{s_2}{s}=k_2^2, \frac{s_3}{s}=k_3^2,$$

односно

$$\sqrt{\frac{s_1}{s}}=k_1, \sqrt{\frac{s_2}{s}}=k_2, \sqrt{\frac{s_3}{s}}=k_3.$$

Затоа,

$$\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}+\sqrt{s_3}=\sqrt{s},$$

т.е.

$$s=(\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}+\sqrt{s_3})^2 .$$

5. Дадена е фамилијата криви

$$y=(m-1)x^2+2mx+4.$$

а) Докажи дека сите дадени криви минуваат низ две фиксни точки A и B. Определи ги овие точки.

б) Определи ја онаа крива од дадената фамилија која ја допира оската Ox, а потоа определи ја онаа крива чие теме е точката B (B езаедничката точка на дадените криви, која не припаѓа на оската Ox).

Решение. а) Очигледно сите криви на фамилијата минуваат низ точките $A(-2,0)$ и $B(0,4)$.

б) Оската Ox ја дпира кривата $y=(x+2)^2$, се добива за $m=2$, а теме во точката B има крувата $y=-x^2+4$, се добива за $m=0$.

Сојузен натпревар 1961

III година

1. Ако x_1 и x_2 се решенија на равенката $x^2+kx+1=0$, определи ги оние вредности на k за кои е точно неравенството

$$(\frac{x_1}{x_2})^2+(\frac{x_2}{x_1})^2>2\,. \qquad (1)$$

Решение. Од Виетовите формули следува $x_1+x_2=-k,\ x_1x_2=1$. Понатаму:

$$(\frac{x_1}{x_2})^2+(\frac{x_2}{x_1})^2=\frac{x_1^4+x_2^4}{(x_1x_2)^2}=((x_1+x_2)^2-2x_1x_2)^2-2x_1^2x_1^2$$

$$=(k^2-2)^2-2=k^2(k^2-4)+2.$$

Од претходните равенства следува дека неравенството (1) важи ако и само ако $k^2>4$,т.е. ако и само ако $k(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$.

2. Определи ја најголемата вредност на изразот

$$\log_2^4 x+12\log_2^2 x\cdot\log_2(\frac{8}{x})\,,$$

ако променливата x се менува на интерваот $[1,64]$.

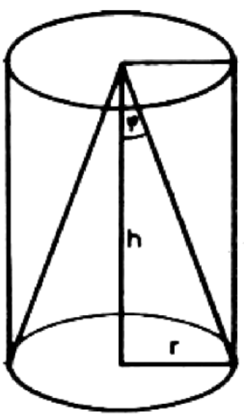
Решение. Нека $\log_2 x=1$. Забележуваме дека t расте од 0 до 6 кога x расте од 1 до 64. Понатаму,

$$\log_2^4 x+12\log_2^2 x\cdot\log_2(\frac{8}{x})=\log_2^4 x+12\log_2^2 x\cdot(3-\log_2 x)$$

$$=t^4-12t^3+36t^2=(t(t-6))^2.$$

Функцијата $f(t)=t(t-6)$ прима негативни вредности за $0<t<6$ и достигнува минимум во точката $t=3$. Затоа максимумот на дадениот израз е еднаков на $(f(3))^2=81$.

3. Прав цилиндар и конус имаат заедничка основа, а врвот на конусот се наоѓа во средината на другата основа на цилиндарот. Определи го аголот меѓу изводницата на конусот и оската на цилиндарот ако односот на плоштините на цилиндарот и конусот е 7:4.



Решение. Нека r и h се соодветно радиусот на основата на цилиндарот и неговата висина. Тогаш плоштините на цилиндарот и конусот соодветно се:

$$P_1=2\pi rh+2r^2\pi,\quad P_2=r\pi\sqrt{r^2+h^2}+r^2\pi\,.$$

Од условот $\frac{P_1}{P_2}=\frac{7}{4}$ последователно добиваме:

$$8h+8r=7\sqrt{r^2+h^2}+7r,$$
$$48r^2-16rh-15h^2=0,$$
$$48(\tfrac{r}{h})^2-16\tfrac{r}{h}-15=0$$

и конечно $\frac{r}{h}=\frac{3}{4}$. Ако со φ го означиме бараниот агол (види цртеж), тогаш $\operatorname{tg}\varphi=\frac{r}{h}=\frac{3}{4}$, па затоа $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{3}{4}$.

4. Страните на триаголникот ABC се a,b и c, при што $a<b<c$. Над нив се конструирани слични правоаголници, така што плоштината на правоаголникот над страната c е поголема од збирот на плоштините на другите два правоаголници за плоштина на квадратот чија страна е m. Определи ги вторите страни на конструираните правоаголници.

Решение. Нека kc е висината на правоаголникот конструиран над страната со должина c, при што $k>0$. Постојат следниве четири можности за висините на правоаголниците кои се конструирани соодветно над страните со должини a и b:

$$1)\ ka,kb;\ \ 2)\ ka,\tfrac{b}{k};\ \ 3)\ \tfrac{a}{k},kb;\ \ 4)\ \tfrac{a}{k},\tfrac{b}{k}.$$

Доволно е во секој од овие случаи да се определи вредноста на коефициентот k. Условот на задачата во наведените случаи го добива видот:

1) $kc^2=ka^2+kb^2+m^2$,

2) $kc^2=ka^2+\frac{b^2}{k}+m^2$,

3) $kc^2=\frac{a^2}{k}+kb^2+m^2$,

4) $kc^2=\frac{a^2}{k}+\frac{b^2}{k}+m^2$.

Ако $c^2>a^2+b^2$, тогаш во случајот 1) го добиваме решението $k=\frac{m^2}{c^2-a^2-b^2}$. Во случаите 2), 3) и 4) k е позитивно решение на следниве равенки:

$$(c^2-a^2)k^2-m^2k-b^2=0,$$
$$(c^2-b^2)k^2-m^2k-a^2=0,$$
$$c^2k^2-m^2k-a^2-b^2=0.$$

Според тоа, ако $c^2>a^2+b^2$,тогаш постојат четири решенија, а ако $c^2\le a^2+b^2$, тогаш постојат три решенија.

IV година

1. Дадена е низата $a_n=\frac{c^2+n-2}{2}, n\in\mathbb{N}$.

а) Определи го збирот S_n на првите n членови.

б) Докажи дека броителот на збирот S_c е делив со 25 ако $c=10k+1$, каде k е природен број.

Решение. а) Имаме:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{c^2+k-2}{2}=n\frac{c^2-2}{2}+\frac{1}{2}(1+2+...+n)=\frac{n}{4}(2c^2+n-3).$$

б) Ако $c=10k+1$, тогаш броителот на S_c е еднаков на

$$(10k+1)(2(10k+1)^2+10k+1-3)=25k(10k+1)(8k+2).$$

2. Докажи дека збирот на квадратите на растојанијата од произволна точка на кружницата до сите темиња на рамностраниот триаголник впишан во таа кружница е константен.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека опишаната кружница k е кружница со радиус r и центар во координатниот почеток, а темињата на рамностраниот триаголник се точките A,B,C со координати, соодветно: $(\frac{r}{2},\frac{r\sqrt{3}}{2}), (-r,0), (\frac{r}{2},-\frac{r\sqrt{3}}{2})$. Произволна точка X на кружницата k има координати (rx,ry), каде $x^2+y^2=1$. Тогаш:

$$\begin{aligned}XA^2+XB^2+XC^2&=(rx-\tfrac{r}{2})^2+(ry-\tfrac{r\sqrt{3}}{2})^2+(rx+r)^2+r^2y^2+(rx-\tfrac{r}{2})^2+(ry+\tfrac{r\sqrt{3}}{2})^2\\&=3(x^2+y^2)r^2+3r^2=6r^2.\end{aligned}$$

3. Определи го параметарот λ така што растојанието од центарот на кружницата

$$x^2+y^2+4x-4y-17=0$$

до правата $x-(\lambda+2)y-\lambda-4=0$ е еднакво на $\frac{5}{\sqrt{2}}$. Тангентите кои го допираат кружницата во пресечните точки со дадената права и самата права формираат триаголник. Определи ја плоштината на пресекот на опишаниот круг околу тој триаголник и дадениот круг. (За λ земи го целобројното решение.)

Решение. Равенката на кружницата k можеме да ја запишеме во видот

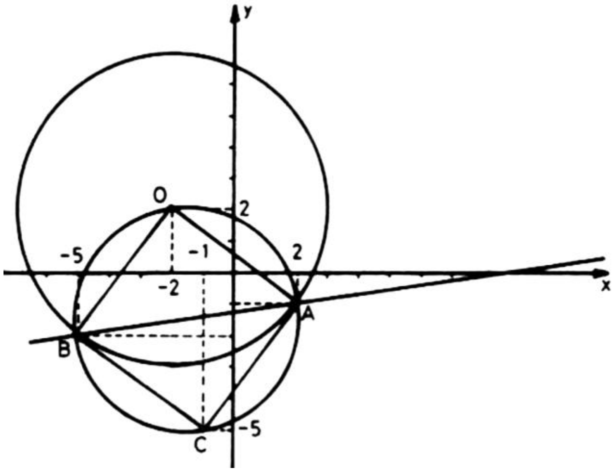
$$(x+2)^2+(y-2)^2=25.$$

Центарот на кружницата е тоќката $O(-2,2)$. Равенката

$$\frac{|-2-2(\lambda+2)-\lambda-4|}{\sqrt{1+(\lambda+2)^2}}=\frac{5}{\sqrt{2}}$$

има две решенија $\lambda_1=5$ и $\lambda_2=-\frac{15}{7}$. Правата $x-7y-9=0$ ја сече кружницата k во точките $A(2,-1)$ и $B(-5,-2)$, види цртеж. Равенките на тангентите на кружницата k во точките A и B, соодветно се:

$$y+1=\tfrac{4}{3}(x-2) \text{ и } y+2=-\tfrac{3}{4}(x+5).$$



Пресечната точка на овие тангенти е $C(-1,-5)$. Да забележиме дека четириаголникот $AOBC$ е квадрат со страна 5. Бараната плоштна е еднаква на

$$\tfrac{5^2\pi}{4}+\tfrac{1}{2}(\tfrac{50}{4}\pi-25)=\tfrac{25}{2}(\pi-1).$$

4. Докажи дека позитивните реални броеви a,b и c може да се должини на страни на триаголник ако и само ако неравенството $a^2p+b^2q>c^2pq$ важи за секои парови позитивни реални броеви p и q чиј збир е еднаков на 1.

Решение. Прво да забележиме дека позитивните броеви a,b,c може да се должини на страни на триаголник ако и само ако

$$a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b.$$

Да означиме

$$p=x, q=1-x, a^2p+b^2q-c^2pq=f(x)=c^2x^2+(a^2-b^2-c^2)x+b^2.$$

Дискриминантата на триномот $f(x)$ е:

$$D=(a^2-b^2-c^2)^2-4b^2c^2=-(a+b+c)(a+b-c)(a+b-c)(b+c-a).$$

Неравенството $f(x)>0$ важи за секој рален број x ако и само ако $D<0$,т.е.ако и само ако важи

$$(a+b-c)(a+b-c)(b+c-a)>0. \qquad (1)$$

Лесно се гледа дека за позитивни броеви a,b,c може да биде негативен најмногу еден од броевите $a+b-c, b+c-a, c+a-b$. Неравенството (1) важи ако и само ако

$$a+b>c,\ b+c>a,\ c+a>b.$$

Сојузен натпревар 1962

III година

1. Дадена е функцијата $f(x)=ax^2+bx+c, a>0$. Докажи дека за секои x_1 и x_2 важи

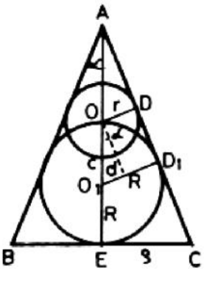
$$f(\tfrac{x_1+x_2}{2})\le\tfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Решение. Бидејќи $a>0$, за секои $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ важи

$$\begin{aligned}f(\tfrac{x_1+x_2}{2})&=a(\tfrac{x_1+x_2}{2})^2+b\tfrac{x_1+x_2}{2}+c\\&=a\tfrac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4}+b\tfrac{x_1+x_2}{2}+c\\&=a\tfrac{2x_1^2+2x_2^2-(x_1^2+x_2^2-2x_1x_2)}{4}+b\tfrac{x_1+x_2}{2}+c\\&\le a\tfrac{x_1^2+x_2^2}{2}+b\tfrac{x_1+x_2}{2}+c\\&=\tfrac{ax_1^2+bx_1+c+ax_2^2++bx_2+c}{2}\\&=\tfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x_1=x_2$.

2. Дадени се топки со радиуси R и r ($R<r$). Растојанието меѓу центрите на овие топки е c, при што $R-r<c<R+r$. Изрази го волуменот на конусот кој е опишан околу овие топки како функција од $R, d=R-r+c$. Докажи дека односот на волуменот на овој конус и поголемата топка е поголем или еднаков на 2. Определи ја плоштината на оној конус за кој тој однос е еднаков на 2.



Решение. Нека ABC е фиксиран оскин пресек на дадениот конус (A е врв на конусот). Со O и O_1 да ги означиме центрите на дадените топки, со D и D_1 се нивните допирни точки кои припаѓаат на разгледуваниот пресек со конусот, со E средината на основата на пресекот и со α аголот меѓу изводницата и висината на конусот (цртеж десно). Од правоаголниот $\triangle AOD$ добиваме $\frac{r}{AO}=\sin\alpha$, а од правоаголниот трапез O_1D_1DO дека $\frac{d}{c}=\sin\alpha$. Оттука следува $\frac{r}{AO}=\frac{d}{c}$, т.е. $AO=\frac{cr}{d}$. Затоа висината на конусот е

$$h=AO+OO_1+O_1E=\tfrac{cr}{d}+c+R=\tfrac{c(r+d)+Rd}{d}=R\tfrac{c+d}{d}.$$

Ако со ρ да го означиме радиусот на основата на конусот, од триаголникот AEC добиваме

$$\rho = \operatorname{tg}\alpha = R\frac{c+d}{d}\frac{\frac{d}{c}}{\sqrt{1-\frac{d^2}{c^2}}} = R\frac{c+d}{\sqrt{c^2-d^2}} .$$

Затоа волуменот на конусот е

$$V = \frac{1}{3}\pi\rho^2 h = \frac{\pi R^3}{3}\frac{(c+d)^2}{d(c-d)},$$

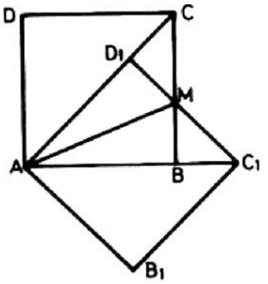
а неговиот однос спрема волуменот на поголемата топка е

$$V : \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{(c+d)^2}{4d(c-d)}.$$

За да овој однос биде поголем или еднаков на 2, потребно и доволно е да важи $(c+d)^2 \geq 8d(c-d)$, односно $(c-3d)^2 \geq 0$. Знак за равенство важи ако и само ако $c = 3d$. Тогаш $\rho = R\sqrt{2}, h = 4R$, па изводницата на таков конус е еднаква на $\sqrt{h^2+\rho^2} = 3R\sqrt{2}$, а плоштината е

$$P = \pi R\sqrt{2}(R\sqrt{2} + 3R\sqrt{2}) = 8\pi R^2.$$

3. Квадрат $ABCD$ со страна a е заротиран за 45° околу темето A, така што темето B_1 на добиениот квадрат $A_1B_1C_1D_1$ се наоѓа во внатрешноста на дадениот квадрат. Нека M е пресекот на правите C_1D_1 и BC. Определи ја плоштината на квадратот со страна AM.



Решение. Триаголникот MBC_1 е рамнокрак правоаголен (цртеж десно), па затоа

$$MB = BC_1 = AC_1 - AB = a(\sqrt{2}-1).$$

Од правоаголниот триаголник ABM добиваме

$$\begin{aligned} AM^2 &= AB^2 + MB^2 \\ &= a^2 + a^2(\sqrt{2}-1)^2 \\ &= 2a^2(2-\sqrt{2}). \end{aligned}$$

4. Дадена е функцијата $f(x) = A\cos x + B\sin x$ (A и B се константи). Ако постојат реални броеви x_1 и x_2 такви што разликата $x_1 - x_2$ не е цел број пати π и $f(x_1) = f(x_2) = 0$, докажи дека за секој реален број x важи $f(x) = 0$.

Решение. Ако равенството $f(x_1) = 0$ го помножиме со $\sin x_2$, а равенството $f(x_2) = 0$ го помножиме со $\sin x_1$ и така добиените равенства ги одземеме добиваме, $A\sin(x_2 - x_1) = 0$. Сега, бидејќи $x_2 - x_1 \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$, добиваме дека $A = 0$. Слично се докажува дека $B = 0$, па затоа $f(x) = 0$.

IV година

1. Дадена е низата $\log\sqrt{x}, \log\sqrt[4]{x}, \log\sqrt[8]{x},\dots$. Определи го збирот $S(x)$ на оваа низа и нацртај го графикот на функцијата $S(x), x>0$.

Решение. Општиот член на низата е

$$a_n(x)=\log(x^{\frac{1}{2^n}})=\tfrac{1}{2^n}\log x\,,$$

па затоа

$$\frac{a_n(x)}{a_{n-1}(x)}=\frac{\frac{1}{2^n}\log x}{\frac{1}{2^{n-1}}\log x}=\frac{1}{2}\,,$$

што значи дека дадената низа е геометриска. Ако $\log x=0$, тогаш $a_n(x)=0$. Збирот на соодветниот ред е

$$S(x)=\frac{a_0(x)}{1-\frac{1}{2}}=2\log x\,.$$

На читателот му препуштаме да го скицира графикот на оваа функција.

2. Дадена се функциите $y_1=\sin^4 x+\cos^4 x$ и $y_2=\sin^6 x+\cos^6 x$. Докажи дека овие функции имаат основен период $\frac{\pi}{2}$ и дека $3y_1-2y_2=1$. За кои вредности на x првата функција има за $\frac{1}{16}$ поголема вредност од другата?

Решение. Со едноставни тригонометриски трансформации се добива

$$y_1=\sin^4 x+\cos^4 x=\tfrac{3+\cos 4x}{4},$$
$$y_2=\sin^6 x+\cos^6 x=\tfrac{5+3\cos 4x}{8}.$$

Затоа овие функции имаат основна периода еднаква на $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ и важи

$$3y_1-2y_2=1.$$

Равенката $y_1=y_2+\frac{1}{16}$ е еквивалентна на равенката $\cos 4x=\frac{1}{2}$, чии решенија се $x=\pm\frac{\pi}{12}+k\frac{\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$.

3. Дадени се страните $a=BC$ и $b=CA$ на триаголникот ABC. Определи ја должината на третата страна, ако таа е еднаква на должината на сооодветната висина. За кои вредности на a и b задачата има решение?

Решение. Нека c е должината на непознатата страна и $s=\frac{a+b+c}{2}$. Од условот на задачата и Хероновата формула следува

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\frac{c^2}{2}\,,$$

од што по квадрирањето и средувањето по непозната c добиваме:

$$5c^4 - 2(a^2 + b^2)c^2 + (a^2 - b^2)^2 = 0\,. \qquad (1)$$

Дискриминантата на оваа равенка е

$$D = -4(a^4 - 3a^2b^2 + b^4) = -4(a^2 - \tfrac{3+\sqrt{5}}{2}b^2)(a^2 - \tfrac{3-\sqrt{5}}{2}b^2)$$

и е ненегативна само ако

$$\tfrac{\sqrt{5}-1}{2} \le \tfrac{a}{b} \le \tfrac{\sqrt{5}+1}{2}\,.$$

Тогаш (1) има решенија $c^2 = \frac{1}{5}(a^2 + b^2 \pm \sqrt{D})$. Во случајот кога $a = b$, едното од решенијата е еднакво на нула, па отпаѓа. Во случајот кога $D = 0$, решенијата се поклопуваат.

4. Во рамнината α се дадени права p и точка P, која не припаѓа на правата p. Определи го геометриското место на точки M во рамнината α, за кои важи $\frac{MP}{MN} = c$, ако N е подножјето на нормалата од точката P на правата p, а c е даден позитивен број.

Решение. Бараното геометриско место е еден од конусните пресеци: елипса ако $c < 1$, парабола ако $c = 1$ и хипербола ако $c > 1$. Доказот на ова тврдење може да се најде во секој учебник по аналитичка геометрија, а негде наведениот услов се зема во дефиницијата на поимот конусен пресек.

Сојузен натпревар 1963

III година

1. Докажи дека за секое реално решение x на равенката $x^2+px+q=0$ (p и q се реални броеви) важи

$$x\geq\frac{4q-(p+\lambda)^2}{4\lambda},$$

каде λ е произволен позитивен број.

Решение. Нека $p^2\geq 4q$ (само во тој случај равенката има реални решенија), $\lambda>0$ и $x=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$. Тогаш

$$x-\frac{4q-(p+\lambda)^2}{4\lambda}=\frac{(\lambda\pm\sqrt{p^2-4q})^2}{4\lambda}\geq 0.$$

2. Реши ја неравенкта

$$\frac{x}{x-a}-\frac{2a}{x+a}>\frac{8a^2}{x^2-a^2},$$

каде a е реален параметар.

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна со неравенката

$$\frac{(x-3a)(x+2a)}{(x-a)(x+a)}>0.$$

Множеството решенија на последната неравенка е:

$$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)\text{, ако } a=0,$$

$$(-\infty,-2a)\cup(-a,a)\cup(3a,+\infty)\text{, ако } a>0,$$

$$(-\infty,3a)\cup(a,-a)\cup(-2a,+\infty)\text{, ако } a<0.$$

3. Нека a,b,c се страните на триаголникот и α,β,γ се неговите агли. Докажи дека за острите агли x,y,z кои се определени со равенствата

$$\cos x=\frac{a}{b+c},\ \cos y=\frac{b}{c+a},\ \cos z=\frac{c}{a+b}$$

важат следниве равенства

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}=1,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Решение. Да забележиме дека за $0<\varphi<\pi$ важи $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}}$. Користејќи ја оваа формула добиваме

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}+\frac{1-\cos y}{1+\cos y}+\frac{1-\cos z}{1+\cos z}=\frac{b+c-a}{b+c+a}+\frac{a+c-b}{a+c+b}+\frac{a+b-c}{a+b+c}=1,$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{(a+b+c)^3}}\,. \qquad (1)$$

Според косинусната теорема имаме $\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Понатаму:

$$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}=\frac{a^2-(b-c)^2}{(b+c)^2-a^2}=\frac{(a-b+c)(a+b-c)}{(b+c-a))b+c+a)}\,.$$

Слични формули имаме и за $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$ и $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$. Затоа

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)}{(a+b+c)^3}}\,. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) следува равенството

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

4. Основата на пирамидата е паралелограм. Низ еден раб на основата и средната линија на бочниот ѕид наспроти тој раб повлечена е рамнина. Во кој одно оваа рамнина го дели волуменот на пирамидата?

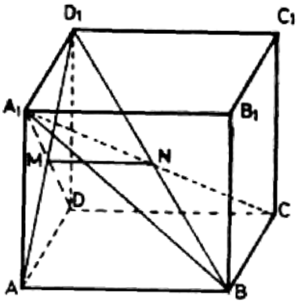
Решение. Нека A_1ABCD е дадената пирамида (со основа $ABCD$), потоа $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е паралелопипед (со рабови BB_1, CC_1, DD_1), V е волуменот на тој паралелопипед и M и N се соодветно средини на отсечките A_1D и A_1C (цртеж десно). Тогаш

$$V_{A_1ABCD}=\tfrac{1}{3}V,$$

$$V_{A_1ABNM}=V_{D_1A_1AB}-V_{D_1A_1MN}$$

$$=\tfrac{1}{6}V-\tfrac{1}{24}V=\tfrac{3}{24}V=\tfrac{3}{8}V_{A_1ABCD}.$$

Според тоа, рамнината $ABNM$ го дели волуменот на пирамидата A_1ABCD во однос 5:3.



IV година

1. Од квадрат со страна $2a$ исечени се четири рамнокраки триаголници, чии основи се страните на дадениот квадрат и чии висини се еднакви на x. Преостанатиот дек на квадратот претставува мрежа на правилна четиристрана пирамида.

а) Изрази го волуменот V на таа пирамида во функција од параметарот x.

б) Определи го x така што волуменот V ќе биде најголем.

в) Скицирај го графикот на функцијата $V(x)$.

Решение. а) Се добива пирамида со основа квадрат со дијагонала $2a-2x$. Лесно се добива дека бочниот раб и висината на пирамидата соодветно се еднакви на $\sqrt{a^2+x^2}$ и $\sqrt{2ax}$. Оттука за волуменот на пирамидата добиваме

$$V(x)=\frac{1}{3}\frac{(2a-2x)^2}{2}\sqrt{2ax}=\frac{2\sqrt{2a}}{3}\sqrt{x}(a-x)^2,$$

каде $0<x<a$.

б) За функцијата $V(x)$ имаме:

$$V'(x)=\frac{2\sqrt{2a}}{3}\frac{(a-x)(a-5x)}{2\sqrt{x}}.$$

Понатаму,

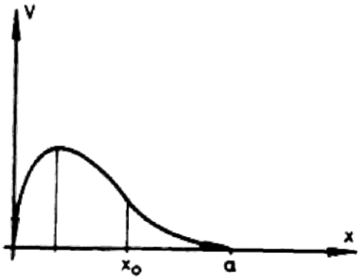
- $V'(x)>0$, ако $0<x<\frac{a}{5}$,
- $V'(x)=0$, ако $x=\frac{a}{5}$,
- $V'(x)<0$, ако $\frac{a}{5}<x<a$.

Според тоа, функцијата $V(x)$ расте на интервалот $(0,\frac{a}{5})$ и опаѓа на интервалот $(\frac{a}{5},a)$, а во точката $x=\frac{a}{5}$ има минимум.

в) Вториот извод на функцијата е

$$V''(x)=\frac{2\sqrt{2a}}{3}\frac{15x^2-6ax-a^2}{4x\sqrt{x}}, 0<x<a.$$

Квадратниот трином $15x^2-6ax-a^2$ има во интервалот $(0,a)$ нула $x_0=\frac{3+\sqrt{24}}{15}a$. Ова е превојна точка на функцијата $V(x)$ чиј график е прикажан на цртежотдесно.



2. Докажи дека во рамнокрак триаголник со основа c, крак a и симетрала d на аголот на основата важи равенството

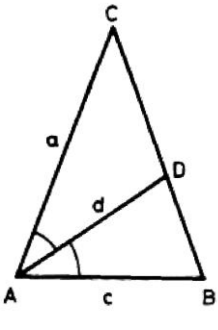
$$d^2=c^2\frac{a(2a+c)}{(a+c)^2}.$$

Решение. Нека ABC е рамнокрак триаголник со основа AB и нека D е пресекот на симетралата на аголот во темето A со кракот BC (цртеж десно). Тогаш

$$\frac{BD}{DC}=\frac{c}{a} \text{ и } BD+DC=a,$$

па затоа $BD=\frac{ac}{a+c}, DC=\frac{a^2}{a+c}$. Од косинусната теорема следува

$$(\frac{ac}{a+c})^2=c^2+d^2-2cd\cos\frac{A}{2},$$
$$(\frac{a^2}{a+c})^2=a^2+d^2-2ad\cos\frac{A}{2}.$$



Ако од последните две равенства го елеминираме $\cos\frac{A}{2}$ го добиваме равенството $d^2=c^2\frac{a(2a+c)}{(a+c)^2}$.

3. Нека AB е дијаметарот на кружницата K со радиус R која припаѓа на рамнината α и нека S е точка која припаѓа на нормалата на рамнината α во точката B. Низ точката S е повлечена рамнина β, која е нормална на рамнината ABS и која со рамнината α формира агол од $\frac{\pi}{3}$.

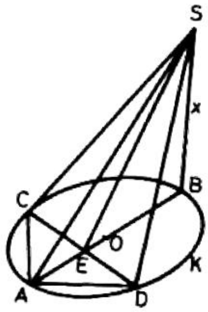
а) Определи ги граничните вредности за $x = BS$ така што β ја сече кружницата K во две точки C и D.

б) Докажи дека аглите SCA и SDA се прави.

в) Определи го збирот y на квадратите на рабовите на тетратедарот $SDAC$ во функција од x и R.

г) Определи го геометриското место на екстремот на функцијата $y(x)$ кога R се менува.

Решение. а) Нека E е пресекот на рамнината β и правата AB. Триаголникот SEB е правоаголен, при што $\measuredangle SBE = \frac{\pi}{2}, \measuredangle SEB = \frac{\pi}{3}$, па затоа $BE = \frac{x}{\sqrt{3}}$. Точката E е внатрешна точка за отсечката AB (т.е. кружницата K и рамнината β имаат две заеднички точки) ако и само ако $0 < x < 2R\sqrt{3}$.



б) Нека $0 < x < 2R\sqrt{3}$ и нека O е центар на кружницата K. Тогаш $OE = | BE - BO | = | \frac{x}{\sqrt{3}} - R |$. Да забележиме дека триаголниците CEO, CEA, SBE, SBA, SEC се правоаголни со прави агли кај темињата E, E, B, B, E (цртеж десно). Сега од Питагоровата теорема следува:

$$CE^2 = CO^2 - OE^2 = R^2 - (\tfrac{x}{\sqrt{3}} - R)^2 = \tfrac{2Rx}{\sqrt{3}} - \tfrac{x^2}{3},$$

$$AC^2 = AE^2 + CE^2 = (2R - \tfrac{x}{\sqrt{3}})^2 + \tfrac{2Rx}{\sqrt{3}} - \tfrac{x^2}{3} = 4R^2 - \tfrac{2Rx}{\sqrt{3}},$$

$$SC^2 = SE^2 + CE^2 = SB^2 + BE^2 + CE^2 = x^2 + \tfrac{2Rx}{\sqrt{3}},$$

$$SC^2 + AC^2 = x^2 + 4R^2 = BS^2 + AB^2 = SA^2.$$

Според тоа, триаголникот SCA е правоаголен со прав агол во темето C. Аналогно се докажува дека аголот SDA е прав.

в) Имаме:

$$y = SA^2 + SD^2 + AD^2 + SC^2 + AC^2 + CD^2 = 3\rangle SA^2 + CD^2 = \tfrac{5}{3}x^2 + \tfrac{8R}{\sqrt{3}}x + 12R^2.$$

г) Координатите на темето на параболата се

$$x = -\tfrac{4\sqrt{3}}{5}R, y = \tfrac{44}{5}R^2,$$

од каде со елиминирање на параметарот R го добиваме геометриското место на темето

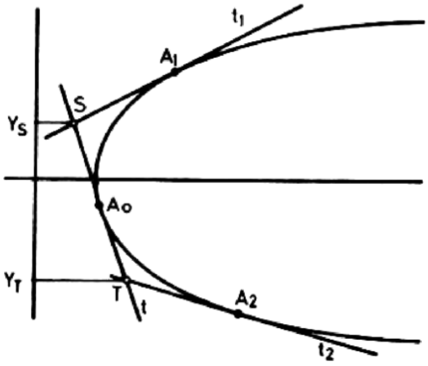
$$y=\tfrac{55}{12}x^2, \quad x<0.$$

(Добиената квадратна функција ја разгледувавме како функција која е определена на множеството од сите реални броеви. Функцијата $y(x),\ 0<x<2R\sqrt{3}$ нема екстреми.)

4. Отсечокот на произволна тангента на параболата $y^2=2px$, ограничен со две фиксирани тангенти на параболата, ортогонално се проектира на директрисата на параболата. Докажи дека должината на оваа проеција е константна.

Решение. Нека $A_1(x_1,y_1)$ и $A_2(x_2,y_2)$ се фиксирани точки на дадената парабола, $A_0(x_0,y_0)$ е произволна точка од параболата (цртеж десно). Тангентите t_0,t_1,t_2 на параболата соодветно во точките $A_0,A_1,\ A_2$ се определени со равенките:

$$x-x_0=\tfrac{y_0}{p}(y-y_0),$$
$$x-x_1=\tfrac{y_1}{p}(y-y_1),$$
$$x-x_2=\tfrac{y_2}{p}(y-y_2).$$



Нека $S(x_S,y_S)$ е пресекот на правите t_0 и t_1, а $T(x_T,y_T)$ епресекот на правите t_0 и t_2. Тогаш

$$y_S=\tfrac{1}{2}(y_1+y_0) \text{ и } y_T=\tfrac{1}{2}(y_2+y_0).$$

Бидејќи директрисата на параболата $y^2=2px$ е паралелна со $y-$оската, добиваме дека должината на проекцијата на отсечката ST на таа директриса е еднаква на

$$|y_S-y_T|=\tfrac{1}{2}|y_1-y_2|$$

и не зависи од точкаsa A_0.

Сојузен натпревар 1964

III година

1. Определи го множеството отчки (a,b) во Декартовиот правоаголен координатен систем Oab така што сите решенија на равенката

$$x^4 - 2(a-b)x^2 + 2(4-ab) = 0$$

се реални.

Решение. Од дадената равенка добиваме

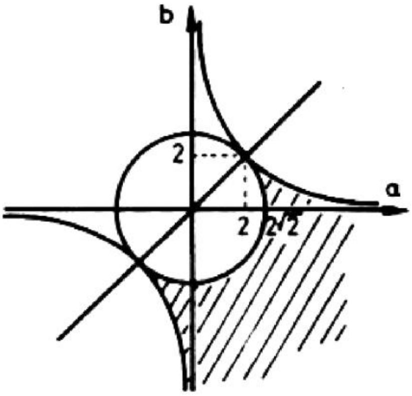
$$x^2 = a - b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 8}\,.$$

За да сите решенија на дадената равенка се реални поребно и доволно е да важи:

1) $a^2 + b^2 \geq 8$ и

2) $a - b \pm \sqrt{a^2 + b^2 - 8} \geq 0$.

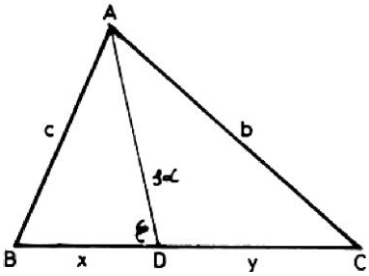
Условот 1) го задоволуваат сите точки на рамнината Oab кои припаѓаат на кружницата $a^2 + b^2 = 8$ или се надвор од неа, а условот 2) го задоволуваат сите точки за кои $a \geq b$ и $ab \leq 4$, т.е. точките кои се под правата $b = a$ и се меѓу двете гранки на хиперболата $ab = 4$. Бараното множество е прикажано на цртежот десно.



2. Ако r е радиусот на впишаната кружница во триаголник со плоштина p и $s_\alpha, s_\beta, s_\gamma$ се должините на симетралите на внатрешните агли на тој триаголник, докажи дека $rs_\alpha s_\beta s_\gamma \leq p^2$ и знак за равенство важи ако и само ако триаголникот е рамностран.

Решение. Прво ќе докажеме дека, ако a, b, c се должини на страни на триаголник и $s = \frac{a+b+c}{2}$ е неговиот полупериметар, тогаш важи равенството

$$s_\alpha = \frac{4bcs(s-a)}{(b+c)^2}\,. \qquad (1)$$



За таа цел со A, B, C да ги означиме темињата на триаголникот, со D пресекот на симетралата на аголот во темето A со страната BC, со x и y отсечоците кои симетралата ги прави на страната BC и $\varphi = \measuredangle ADB$. Од релациите $x + y = a$ и

$x:y=c:b$ добиваме $x=\frac{ac}{b+c}$ и $y=\frac{ab}{b+c}$. Од друга страна, применувајќи ја косинусната теорема за триаголниците ADC и ABD, добиваме

$$c^2=x^2+s_\alpha^2-2xs_\alpha\cos\varphi,$$

$$b^2=y^2+s_\alpha^2+2ys_\alpha\cos\varphi.$$

Ако првото равенство го помножиме со y, а второто со x и добиените равенства ги собереме, добиваме

$$c^2y+b^2x=axy+as_\alpha^2 \ .$$

Во последното равенство ги заменуваме вредностите за x и y и добиваме равенство кое е еквивалентно со равенството (1).

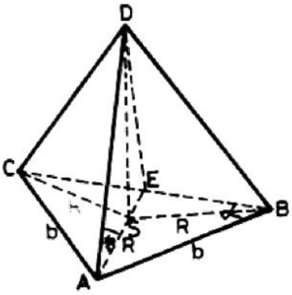
Од равенството (1), бидејќи $bc\le(\frac{b+c}{2})^2$ следува

$$s_\alpha\le\sqrt{s(s-a)}\ .$$

Аналогно се докажува дека $s_\beta\le\sqrt{s(s-b)}$ и $s_\gamma\le\sqrt{s(s-c)}$. Затоа

$$rs_\alpha s_\beta s_\gamma\le rs\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=p^2\ .$$

3. Рамнокрак триаголник со агол α при основата е основа на пирамида таква што сите нејзини бочни ѕидови со основата формираат еднакви агли $\varphi=90^\circ-\alpha$. Рамнината која минува низ висината на пирамидата и врвот на рамнокракиот триаголник на основата ја сече пирамидата во фигура чија плоштина е p. Определи го волуменот на пирамидата.



Решение. Со A,B,C да ги означиме темињата на основата на пирамидата, врвот на пирамидата со D, подножјето на висината на бочниот ѕид BCD со E (цртеж десно). Понатаму, нека кракот на основата е b, радиусот на нејзината опишана кружница е R и S е подножјето на висината повлечена од врвот на пирамидата. Триаголниците DAS и DBS имаат соодветно прави агли $\measuredangle ASD$ и $\measuredangle BSD$, заедничка страна SD и $\measuredangle DAS=\measuredangle DBS=\varphi$, па затоа се складни. Според тоа, $AS=BS$ и слично $AS=CS$, што значи дека S е центар на опишаната кружница на основата и $AS=BS=R=\frac{b}{2\sin\alpha}$.

Од правоаголниот триаголник ABE добиваме $AE=b\sin\alpha$, а од правоаголниот триаголник DAS следува

$$SD=R\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{2\sin\alpha}\operatorname{ctg}\alpha=\frac{b\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}\ .$$

Затоа

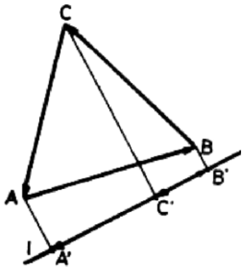
$$p=\frac{1}{2}AE\cdot SD=\frac{1}{2}b\sin\alpha\frac{b\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}=\frac{1}{4}b^2\operatorname{ctg}\alpha\text{, т.е. } b^2=4p\operatorname{tg}\alpha\,.$$

За волуменот на пирамидата добиваме

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}b^2\sin(180^\circ-2\alpha)\frac{b\cos\alpha}{2\sin^2\alpha}=\frac{1}{6}b^3\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{4}{3}\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}(p\operatorname{tg}\alpha)^{\frac{3}{2}}\,.$$

4. Рамностран триаголник ABC ортогонално се проектира на произволна оска. Определи го аголот на еден од векторите $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$ спрема таа оска, така што збирот на третите степени на проекциите на тие вектори е еднаков на нула.

Решение. Јасно е дека збирот на третите степени (на алгебарските вредности) на проекциите на векторите $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$ на оската l ќе биде еднаков на нула само во случај кога една од проекциите е еднаква на нула, т.е.кога една од страните на триаголникот ABC е нормална на оската l.



IV година

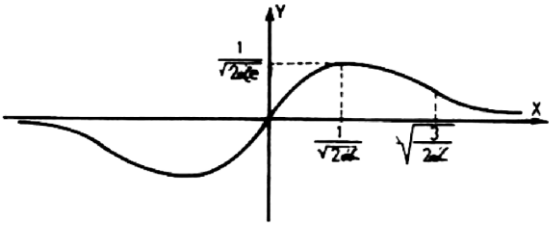
1. Дадена е функцијата $y=xe^{-ax^2}$, каде a е позитивен параметар.

а) Испитај го текот на графикот на оваа функција за произволно a и скицирај го графикот за $a=2$.

б) Екстремните точки на дадената функција ја менуваат со a својата положба во xOy рамнината. Определи ја кривата $y=f(x)$ на која и припаѓаат овие екстремни точки.

в) Определи ја плоштината $P(b)$ на делот од рамнината ограничен со лакот на делот од графикот на дадената функција, $x-$оската и правата $x=b\,(b>0)$. Колкава е граничната вредност на плоштината $P(b)$ кога $b\to+\infty$?

Решение. а) Дадената функција е дефинирана за секој $x\in\mathbb{R}$ и е непарна. Нулата и знакот на функцијата се совпаѓаат со нулата и знакот на аргументот. Од $y'=(1-2ax^2)e^{-ax^2}$ следува дека функцијата има стационарни точки во $x_1=-\frac{1}{\sqrt{2a}}$ и $x_2=\frac{1}{\sqrt{2a}}$. Притоа функцијата има минимум $y_1=y(x_1)=-\frac{1}{\sqrt{2ae}}$, односно максимум $y_2=y(x_2)=\frac{1}{\sqrt{2ae}}$. Интервалите на монотоност, како и конвексноста се прикажани на дадениот график. Понатаму, од $y''=2ax(2ax^2-3)e^{-ax^2}$, заклучуваме дека функцијата има три превосјни точки и тоа $(-\sqrt{\frac{3}{2a}},-\sqrt{\frac{3}{2ae^3}})$, $(\sqrt{\frac{3}{2a}},\sqrt{\frac{3}{2ae^3}})$ и $(0,0)$.

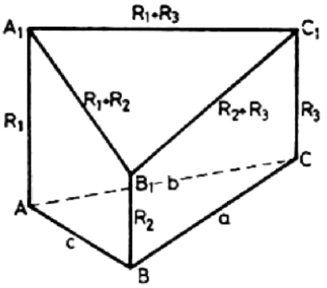


б) Од $y(x_1)=-\frac{1}{\sqrt{2ae}}$ и $y(x_2)=\frac{1}{\sqrt{2ae}}$ следува дека сите екстремни точки припаѓаат на правата $y=\frac{x}{\sqrt{e}}$.

в) Имаме:

$$P(b)=\int_0^b xe^{-ax^2}dx=\frac{1}{2a}(1-e^{-ab^2}),\ \lim_{b\to\infty}P(b)=\frac{1}{2a}.$$

2. Три сфери допираат една рамнина во точките A,B,C при што $AB=c$, $BC=a$, $CA=b$. Определи ги радиусите на овие сфери, ако се знае дека тие меѓусебно се допираат.



Решение. Центрите на дадените сфери да ги означиме со A_1,B_1,C_1, а радиусите со R_1,R_2,R_3 (цртеж десно). Во правоаголниот трапез ABB_1A_1 важи $AB=c$, $BB_1=R_2$, $B_1A_1=R_1+R_2$, $A_1A=R_1$, па затоа

$$c^2=(R_1+R_2)^2-(R_1-R_2)^2=4R_1R_2.$$

Слично се добива $a^2=4R_2R_3$ и $b^2=4R_3R_1$. Од последните три равенства се добиваат бараните вредности на радиусите на сферите:

$$R_1=\frac{bc}{2a},\ R_2=\frac{ca}{2b},\ R_3=\frac{ab}{2c}.$$

3. Дали може броевите $2,\sqrt{6},4\frac{1}{2}$ да бидат членови на една иста аритметичка или една иста геоемтриска прогресија?

Решение. За да броевите $2,\sqrt{6},4\frac{1}{2}$ се членови на аритметичка прогресија потребно и доволно е да постојат реален број d и природни броеви k и l такви што

$$\sqrt{6}-2=kd,\ \frac{9}{2}-\sqrt{6}=ld.$$

Но, тоа не е можно, бидејќи тогаш треба да важи

$$\frac{k}{l}=\frac{\sqrt{6}-2}{\frac{9}{2}-\sqrt{6}}=\frac{2(11\sqrt{6}-30)}{57},$$

што не е можно, бидејќи левата страна е рационален, а десната страна е ирационален број.

Дадените броеви се членови на геометриска прогресија со коефициент q, кој е така избран што

$$\frac{\sqrt{6}}{2}=q^k,\ \frac{9}{2\sqrt{6}}=(\frac{\sqrt{6}}{2})^3=q^{3k}$$

за некој природен број k.

4. Докажи дека неравенството

$$b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2>\frac{1}{2}(a^4+b^4+c^4)$$

каде a,b,c се позитивни броеви е потребен и доволен услов за да a,b,c се должини на страни на триаголник.

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$a^4+b^4+c^4-2(b^2c^2+c^2a^2+a^2b^2)<0,$$

односно со

$$-(a+b+c)(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)<0.$$

Но, $a,b,c>0$, па затоа последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(a+b-c)(b+c-a)(c+a-b)>0,$$

од каде следува тврдењето на задачата.

5. Дадени се две паралелни прави a_1 и a_2 и m точки на a_1 и n точки на a_2. Секоја од m-те точки на правата a_1 е поврзана со секоја од n-те точки на правата a_2. Ако во ниту една точка меѓу правите a_1 и a_2 не се сечат повеќе од две од добиените отсечки определи го бројот на овие пресечни точки.

Решение. Сите четириелементи множества кои содржат по две од дадените точки од секоја од дадените прави определуваат точно една од опишаните пресечни точки и обратно. Затоа бараниот број е еднаков на $\binom{m}{2}\binom{n}{2}$.

Сојузен натпревар 1965

III година

1. Реши ја равенката

$$x^3-(m^2+3)x^2+(m^2+3)x+m^4-1=0$$

по непозната x раставувајќи го на множители полиномот $P(m)$ на левата страна на оваа равенка.

Решение. Имаме

$$P(m)=m^4-(x^2-x)m^2+(x-1)^2=(m^2-x+1)(m^2-(x-1)^2)\,.$$

Решенијата на дадената равенка се:

$$x_1=m^2+1,\quad x_2=m+1,\quad x_3=-m+1\,.$$

2. Определи ги рабовите на квадарот, ако е познат нивниот збир s и неговата дијагонала d , а едниот раб е геометриска средина на другите два раба.

Решение. Нека a,b,c се рабовите на квадарот и нека $c=\sqrt{ab}$. Според условот на задачата

$$a+b+\sqrt{ab}=s,\ a^2+b^2+ab=d^2\,,$$

од каде добиваме

$$(s-\sqrt{ab})^2=d^2+ab \text{ и } \sqrt{ab}=\tfrac{s^2-d^2}{2s}\,,$$

при што мора да важи $s>d$. Понатаму, лесно се добива

$$ab=(\tfrac{s^2-d^2}{2s})^2,\quad a+b=\tfrac{s^2+d^2}{2s}\,.$$

Значи, a и b се решенија на квадратната равенка

$$t^2-\tfrac{s^2+d^2}{2s}t+(\tfrac{s^2-d^2}{2s})^2=0\,,$$

по непозната t . Оваа равенка има решенија ако и само ако

$$(\tfrac{s^2+d^2}{2s})^2-4(\tfrac{s^2-d^2}{2s})^2\geq 0\,,$$

т.е. ако и само ако $3d^2\geq s^2$. Конечно, при условот $d<s\leq d\sqrt{3}$ ги добиваме бараните броеви

$$\frac{s^2+d^2+\sqrt{(3d^2-s^2)(3s^2-d^2)}}{4s},\ \frac{s^2+d^2-\sqrt{(3d^2-s^2)(3s^2-d^2)}}{4s},\ \frac{s^2-d^2}{2s}\,.$$

3. Определи ги сите реални решенија $x\,(0<x<2\pi)$ на неравенката

$$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}>1.$$

Решение. Имаме:

$$\frac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=\frac{\sin 3x(1+2\cos x)}{\cos 3x(1+2\cos x)}\,.$$

Според тоа, треба да ги определиме сите реални броеви x за кои важи

$$\mathrm{tg}\,3x > 1,\ \cos x \neq \tfrac{1}{2},\ 0 < x < 2\pi\,.$$

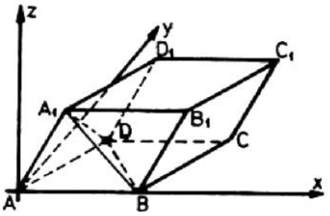
Множеството од сите такви броеви е еднакво на

$$\bigcup_{k=0}^{5}\left(\frac{(4k+1)\pi}{12},\frac{(4k+2)\pi}{12}\right).$$

4. Во паралелопипед чии ѕидови се складни ромбови со агол од 60° дадена е најголемата дијагонала d. Определи ги дијагоналите на ова тело.

Решение. Нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е дадениот паралелопипед и нека

$$\measuredangle BAD = \measuredangle DAA_1 = \measuredangle A_1AB = 60^\circ\,.$$



Воведуваме правоаголен координатен систем таков што важи:

1) координатниот почеток O се соваѓа со точката A,
2) точката B припаѓа на позитивниот дел на $x-$оската,
3) точката D припаѓа на xOy рамнината и има позитивна $y-$координата,
4) точката A_1 има позитивна $z-$координата (цртеж десно).

Нека $a = AB$. Тогаш ABD е рамностран триаголник со висина $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, а $ABDA_1$ е правилен тетраедар со висина $\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Сега лесно се добива дека координатите на сите темиња на паралелопипедот се:

$$A(0,0,0),\ B(a,0,0),\ C(\tfrac{3a}{2},\tfrac{a\sqrt{3}}{2},0),\ D(\tfrac{a}{2},\tfrac{a\sqrt{3}}{2},0),$$

$$A_1(\tfrac{a}{2},\tfrac{a\sqrt{3}}{6},\tfrac{a\sqrt{6}}{3}),\qquad B_1(\tfrac{3a}{2},\tfrac{a\sqrt{3}}{6},\tfrac{a\sqrt{6}}{3}),$$

$$C_1(2a,\tfrac{2a\sqrt{3}}{3},\tfrac{a\sqrt{6}}{3}),\quad D_1(a,\tfrac{2a\sqrt{3}}{3},\tfrac{a\sqrt{6}}{3}).$$

Понтаму,

$$d^2 = AC_1^2 = (2a)^2 + (\tfrac{2a\sqrt{3}}{3})^2 + (\tfrac{a\sqrt{6}}{3})^2 = 6a^2\,,$$

од каде добиваме $a = \frac{d}{\sqrt{6}}$. Понатаму, лесно се добива дека должините на дијагоналите на паралелопипедот се

$$BD_1 = DB_1 = CA_1 = \frac{d}{\sqrt{6}}$$

IV година

1. Определи го збирот на сите броеви во табелата

$$\begin{array}{ccccc}
1 & 2 & 3 & \dots & k \\
2 & 3 & 4 & \dots & k+1 \\
3 & 4 & 5 & \dots & k+2 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
k & k+1 & k+2 & \dots & 2k-1
\end{array}$$

Решение. Бараниот збир е еднаков на:

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=j}^{j+k-1} i = \sum_{j=1}^{k}\tfrac{k}{2}(2j+k-1) = \frac{k^2(k-1)}{2} + k\sum_{j=1}^{k} j = \frac{k^2(k-1)}{2} + k\frac{k(k+1)}{2} = k^3.$$

2. Дадена е функцијата $y = x^3 + px + q$.

а) Ако M е локален максимум, а m е локален минимум на дадената функција, докажи дека

$$Mm = q^2 + \tfrac{4}{27}p^3.$$

б) Определи ги p и q, така што $M - m = 4$ и -2 е нула на функцијата. Испитај го текот на добиената функција.

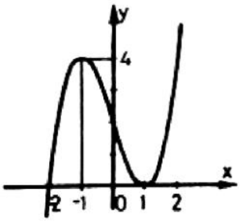
Решение. а) Бидејќи $y' = 3x^2 + p$, лесно се добива дека дадената функција има локални екстреми во точките $x_1 = -\sqrt{-\frac{p}{3}}$, $x_2 = \sqrt{-\frac{p}{3}}$, ако $p < 0$. Затоа

$$\begin{aligned} Mm = y(x_1)y(x_2) &= (\tfrac{p}{3}\sqrt{-\tfrac{p}{3}} - p\sqrt{-\tfrac{p}{3}} + q)(-\tfrac{p}{3}\sqrt{-\tfrac{p}{3}} + p\sqrt{-\tfrac{p}{3}} + q) \\ &= (q - \tfrac{2p}{3}\sqrt{-\tfrac{p}{3}})(q + \tfrac{2p}{3}\sqrt{-\tfrac{p}{3}}) = q^2 + \tfrac{4}{27}p^3. \end{aligned}$$

б) Системот равенки

$$\begin{aligned} M - m = -\tfrac{4p}{3}\sqrt{-\tfrac{p}{3}} = 4, \\ (-2)^3 - 2p + q = 0, \end{aligned}$$

има точно едно решение: $p = -, q = 2$.



Графикот на функцијата $y = x^3 - 3x + 2$ е прикажан на цртежот десно.

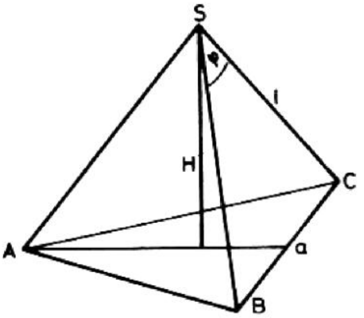
3. Даден е конвексен петаголник $A_1A_2A_3A_4A_5$ и точки B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, такви што секоја страна на петаголникот содржи точно една од овие точки. Конструирани се сите прави определени со темињата на петаголниот и точките B_1, B_2, B_3, B_4, B_5. Ако се знае дека (не сметајќи ги точките A_i и B_j) никои три од овие прави не се сечат во една точка и никои две не се паралелни, определи го бројот на сите точки во кои се сечат по две од овие прави.

Решение. Конструирани се вкупно 35 прави (10 определени со точките A_i, десет определени со точките B_i и уште 15 прави кои ги поврзуваат точките B_i со темињата на петаголникот). Секоја од точките A_i содржи точно 7 од овие прави, а секоја од точките B_i содржи точно 8 од овие прави. Бројот на точките во кои се сечат точно две од конструираните прави е еднаков на

$$\binom{35}{2}-4[\binom{7}{2}-1]-5[\binom{8}{2}-1]=360\,.$$

4. На рабовите на триедарот со врв S, кај кој сите агли меѓу рабовите се еднакви, дадени се отсечки $SA=SB=SC=l$. Определи го аголот меѓу рабовите така што волуменот на тераедарот $SABC$ ќе биде најголем.

Решение. Нека сите агли на дадениот триедар се еднакви на φ (при што $0<\varphi<\frac{2\pi}{3}$) и нека $a=AB$ и h се соодветно основниот раб и висината повлечена од темето S на тетраедарот $SABC$ (цртеж десно). Тогаш



$$a^2=l^2+l^2-2l^2\cos\varphi=4l^2\sin^2\frac{\varphi}{2},$$

$$a=2l\sin\frac{\varphi}{2},$$

$$H^2=l^2-(\frac{2}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}2l\sin\frac{\varphi}{2})^2,$$

$$H=l\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Волуменот на тетраедарот е

$$V(\varphi)=\frac{H}{3}\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{1}{3}l^3\sin^2\frac{\varphi}{2}\sqrt{3-4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\,.$$

Изводот на функцијата $f(t)=t\sqrt{3-4t},\,0<t<\frac{3}{4}(=\sin^2\frac{\pi}{3})$ е

$$f\,'(t)=\frac{3-6t}{\sqrt{3-4t}}\begin{cases}>0, & \text{ако е } 0<t<\frac{1}{2},\\ =0, & \text{ако е } t=\frac{1}{2},\\ <0, & \text{ако е } \frac{1}{2}<t<\frac{3}{4}.\end{cases}$$

Според тоа, функцијата f го достигнува максимумот за $t=\frac{1}{2}$, па функцијата $V(\varphi)$, $0<\varphi<\frac{2\pi}{3}$, достигнува максимум за $\sin^2\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{2}$, т.е. за $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

Сојузен натпревар 1966

III година

1. Определи четирицифрен број кој е квадрат на природен број и кај кој првите две цифри и последните две цифри се еднакви.

Решение. Од условот на задачата следува

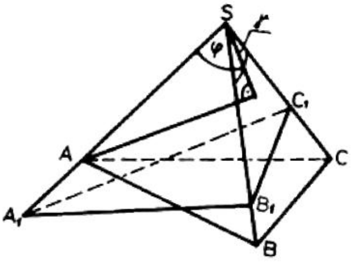
$$\overline{aabb}=1100a+11b=11(100a+b)=k^2, \quad k\in\mathbb{Z},$$

што значи дека $100a+b=11l^2, l\in\mathbb{Z}$, каде $a,b\in\{1,2,...,9\}$. Со непосредна поверка се добива дека единствена можност е $l=8, a=7, b=4$.

Навистина $88^2=7744$.

2. Докажи дека волумените на тетраедрите кои имаат еден заеднички триедар се однесуваат како производите на нивните рабови кои минуваат низ темето на заедничкиот триедар.

Решение. Нека се $SABC$ и $SA_1B_1C_1$ тетраедрите за кои се исполнети условите на задачата и нека $\gamma=\measuredangle BSC=\measuredangle B_1SC_1$, а φ е аголот меѓу правата SA и рамнината BSC (цртеж десно). Висините на тетраедрите $SABC$ и $SA_1B_1C_1$ од темињаsa A и A_1 соодветно се еднакви на $SA\sin\varphi$ и $SA_1\sin\varphi$. Волумените на овие тетраедри се



$$V_{SABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}SB\cdot SC\sin\gamma SA\sin\varphi,$$

$$V_{SA_1B_1C_1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}SB_1\cdot SC_1\sin\gamma SA_1\sin\varphi,$$

па оттука следува

$$\frac{V_{SABC}}{V_{SA_1B_1C_1}}=\frac{SB\cdot SC\cdot SA}{SB_1\cdot SC_1\cdot SA_1}.$$

3. Определи ги сите вредности x кои припаѓаат на интервалот $[0,2\pi]$ за кои е точно неравенството

$$2(\cos^2 x-\sqrt{3}\sin^2 x)>(\sqrt{3}-1)\sin^2 2x.$$

Решение. Дадената неравенка е еквивалентна на неравенката

$$2(\sqrt{3}-1)\sin^4 x+(1-3\sqrt{3})\sin^2 x+1>0.$$

Со y_1, y_2 ($y_1<y_2$) да ги означиме решенијата на квадратната равенка

$$2(\sqrt{3}-1)y^2+(1-3\sqrt{3})y+1=0.$$

Лесно се проверува дека за нив важи $0<y_1<1<y_2$. Ако се земе предвид дека $0\le\sin^2 x\le 1$, добиваме дека дадената неравенка е задоволена за $0\le\sin^2 x<y_1$, односно за $|\sin x|<\sqrt{y_1}$. Според тоа, вредностите $x\in[0,2\pi]$ кои ја задоволуваат неравенката се:

$$0\le x<\arcsin\sqrt{y_1},\ \pi-\arcsin\sqrt{y_1}<x<\pi+\arcsin\sqrt{y_1},\ 2\pi-\arcsin\sqrt{y_1}<x\le 2\pi\ .$$

4. Реши го системот равенки

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ ax+by+cz=d \\ a^2x+b^2y+c^2z=d^2 \end{cases}$$

каде a,b,c се реални параметри такви што $a\ne b\ne c\ne a$.

Решение. При дадените услови системот има единствено решение

$$x=\frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)},\ y=\frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)},\ z=\frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}\ .$$

5. Кружниците K' и K'' надворешно се допираат, а нивната надворешна заедничка тангента ги допира во точките A_1 и A_2. Нека C_1 и C_2 се соодветно центрите на K' и K'' и нека E е пресек на заедничката надворешна и заедничката внатрешна тангента на овие кружници.

а) Докажи дека триаголникот C_1EC_2 е правоаголен.

б) Ако кружниците K' и K'' и отсечката A_1A_2 ротираат околу правата C_1C_2, тогаш отсечката A_1A_2 опишува омотач на потсечен конус, а кружниците K' и K'' опишуваат сфери. Определи ја плоштината M на потсечениот конус.

в) Ако радиусите r_1 и r_2 на добиените сфери се променливи, а нивниот збир $r_1+r_2=a$ е константен,определи ја максималната можна вредност на плоштината M.

Решение. а) Со B да ја означиме допирната точка на двете кружници и со D средината на отсечката C_1C_2 (види цртеж). Отсечките EA_1, EB, EA_2 се еднакви меѓу себе и нивната должина да ја означиме со x. Отсечката ED е средна отсечка на трапезот $A_1C_1C_2A_2$, па затоа е еднаква на полузбирот на основите

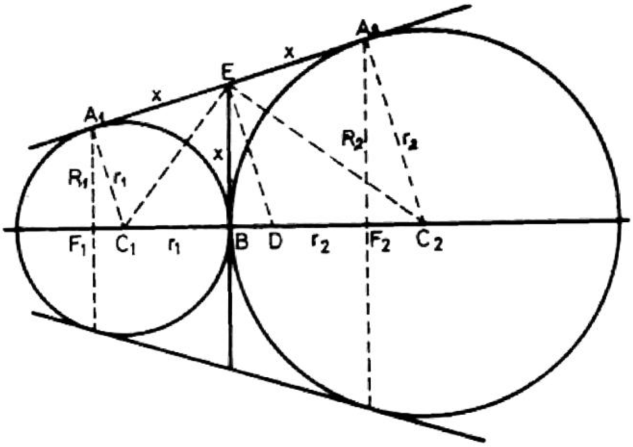
$$ED=\frac{r_1+r_2}{2}=C_1D=DC_2.$$

Затоа точката E припаѓа на кружницата над дијаметар C_1C_2, па $\measuredangle C_1EC_2$ е прав.

б) Со F_1 и F_2 да ги означиме центрите на основите на добиениот потсечен конус, а со R_1 и R_2 нивните радиуси. Во трапезот $F_1F_2A_2A_1$ отсечката EB е средна линија, па затоа $R_1+R_2=2x$. Плоштината на омотачот на конусот е

$$M=2x\pi(R_1+R_2)=4\pi x^2.$$

Од сличноста на триаголниците EBC_1 и C_2BE следува $r_1r_2=x^2$, па затоа $M=4\pi r_1r_2$.



в) Бидејќи

$$M=4\pi r_1r_2\le 4\pi(\tfrac{r_1+r_2}{2})^2=\pi a^2$$

и равенство важи ако и само ако $r_1=r_2$, па бараната максимална вредност е πa^2 и се добива кога потсечениот конус преминува во цилиндар.

IV година

1. Ако x_1,x_2,x_3 се решенија на равенката $x^3-1=0$, докажи дека за секој природен број n е исполнето равенството

$$x_1^n+x_2^n+x_3^n=x_1^nx_2^n+x_2^nx_3^n+x_3^nx_1^n.$$

Решение. Имаме

$$x_1=1,\ x_2=\cos\tfrac{2\pi}{3}+i\sin\tfrac{2\pi}{3},$$
$$x_3=\cos\tfrac{4\pi}{3}+i\sin\tfrac{4\pi}{3},$$
$$x_1x_2=x_2,\ x_1x_3=x_3,\ x_2x_3=x_1.$$

Оттука директно следува бараното равенство.

2. Дадени се по три црни топчиња нумерирани со броевите 1 и 2 и по 6 бели топчиња нумерирани со броевите 1, 2 и 3. На колку начини може да наредат во низа девет топчиња, така што меѓу нив има 3 црни и 6 бели топчиња?

Решение. Бараниот број е еднаков на $\binom{9}{3}2^33^6=489888$, бидејќи еместа на кои ќе се наоѓаат црните топчиња мпоже да се изберат на $\binom{9}{3}$ начини, потоа на секое од тие три места можеме црното топче да го ставиме на два начини, а на секое од преостанатите 6 места бело топше можеме да ставиме на 3 начини.

3. Докажи дека дропката $\frac{3n+1}{2n^2+n}$, каде n е природен број, не може да се скрати.

Решение. Трена да докажеме дека броевите n и $3n+1$ се заемно прости, а исто така и броевите $2n+1$ и $3n+1$. Имаме

$$(n,3n+1)=(n,3n+1-3n)=(n,1)=1,$$

$$(2n+1,3n+1)=(2n+1,3n+1-2n-1)=(2n+1,n)=(2n+1-2n,n)=(1,n)=1.$$

4. Нека x_1 е произволен реален број, а x е таков реален број за кој важи $|x-x_1|\le\frac{1}{100}$.

а) Докажи дека разликата на вредностите на функцијата $\sin x$ во точките x и x_1 не е поголема од $\frac{1}{100}$.

б) Дали за функцијата $\sin x^2$ може да се определи интервал $\Delta=(x_1-\delta,x_1+\delta)$ така што

$$|\sin x^2-\sin x_1^2|\le\frac{1}{100},\text{ за секој } x\in\Delta,$$

каде δ е конечен позитивен број кој не зависи од x_1?

Решение. а) Користејќи го познатото неравенство $|\sin t|\le|t|, t\in\mathbb{R}$, добиваме

$$|\sin x-\sin x_1|=2|\sin\tfrac{x-x_1}{2}\cos\tfrac{x+x_1}{2}|\le 2|\tfrac{x-x_1}{2}|=|x-x_1|\le\tfrac{1}{100}.$$

б) Одговорот е негативен. Имено, да земеме $x_1=\sqrt{n\pi}, n\in\mathbb{N}$. Бидејќи

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{\tfrac{\pi}{2}+n\pi}-\sqrt{n\pi})=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}+\sqrt{n\pi}}=0,$$

за доволно големо n ќе важи $\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}-\sqrt{n\pi}<\delta$, за било кој однапред зададен $\delta>0$. Значи, ако избереме $x=\sqrt{\frac{\pi}{2}+n\pi}$, ќе важи $x\in\Delta$ и

$$|\sin x^2-\sin x_1^2|=|\sin(\tfrac{\pi}{2}+n\pi)-\sin n\pi|=1>\tfrac{1}{100}.$$

Сојузен натпревар 1967

II година

1. Даден е триномот о $(k+1)x^2-2kx+k-1$, каде k е реален параметар.

а) Определи го геометриското место на темињата на сите параболи зададени со равенката

$$y=(k+1)x^2-2kx+k-1.$$

б) Дали сите овие параболи имаат заедничка точка?

в) Докажи дека само едно решение на равенката

$$(k+1)x^2-2kx+k-1=0 \qquad (1)$$

е променливо и истото прикажи го графички.

г) Определи за кој природен број k променливото решение на равенката (1) е периодичен децимален број со една цифра во периодата.

Решение. а) Темето на параболата

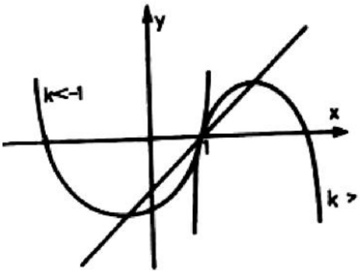
$$y=(k+1)x^2-2kx+k-1, \text{ н } k\neq-1$$

има координати

$$x=1-\tfrac{1}{k+1},\ y=-\tfrac{1}{k+1}.$$

Геометриското место на темињата на овие параболи е множеството $\{(x,y)\,|\,y=x-1, x\neq 1\}$.

б) Секоја од параболите на дадената фамилија ја содржи точката (1,0), цртеж десно.



в) Решенијата на равенката (1) се $x_1=1$ и $x_2=\frac{k-1}{k+1}$.

г) Бараните броеви се 2, 5, 8 и 17.

2. Даден е триномот $9n^2+3n-2$, каде n е цел број.

а) Докажи дека за ниту еден n овој трином не е делив со 9.

б) Докажи дека постојат бесконечно многу цели броеви n за кои дадениот трином е делив со 4.

Решение. Нека $f(n)=9n^2+3n-2$.

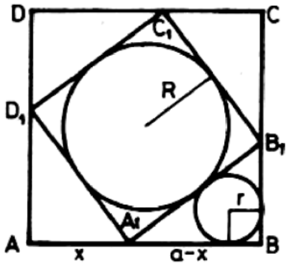
а) За секој цел број n важи $f(n)\equiv 1 (\bmod 3)$, од каде што следува дека бројот и $f(n)$ не е делив со 9 за ниту еден цел број м n.

б) Важи

$$f(4k)\equiv -2 (\bmod 4),\ f(4k+1)\equiv 2 (\bmod 4),\ f(4k+2)\equiv 0 (\bmod 4),\ f(4k+3)\equiv 0 (\bmod 4).$$

Според тоа, бројот $f(n)$ е делив со 4 ако и само ако остатокот при делењето на бројот n со 4 е еднаков на 2 или 3.

3. Даден е квадрат Q со страна a во кој е вписан квадрат Q_1 чии темиња припаѓаат на страните на квадратот Q. Во квадратот Q_1 и во секој од четирите добиени триаголници се вписани кругови. Определи ја положбата на темињата на вписаниот квадрат Q_1 така што збирот на плоштините на сите вписани кругови и минимален.



Решение. Нека $ABCD$ е дадениот квадрат и $A_1B_1C_1D_1$ е вписаниот квадрат, при што точките A_1, B_1, C_1, D_1 припаѓаат соодветно на страните $AB, BC,$ CD, DA. Со R и r да ги означиме радиусите на вписаните кружници во квадратот $A_1B_1C_1D_1$ и триаголникот A_1BB_1 (цртеж десно). Тогаш $A_1B_1=2R$ и $A_1B+BB_1=a$, па бидејќи триаголникот A_1BB_1 е правоаголен (со прав агол во темето B), добиваме $a-2r=2R$. Збирот на плоштините на вписаните кругови е

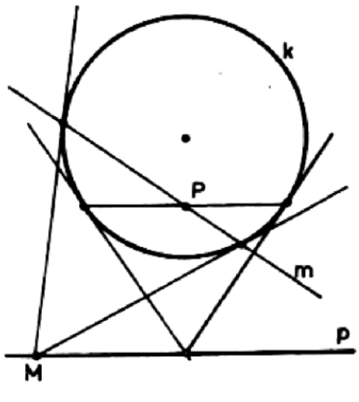
$$\pi R^2+4\pi r^2=(\tfrac{a}{2}-r)^2\pi+4\pi r^2=(5r^2-ar+\tfrac{a^2}{4})\pi=(5(r-\tfrac{a}{10})^2+\tfrac{a^2}{5})\pi,$$

и има минимална вредност за $r=\frac{a}{10}$. Да означиме $AA_1=x, BA_1=y$. За $r=\frac{a}{10}$ добиваме $R=\frac{2a}{5}$ и

$$x+y=a,\ x^2+y^2=4R^2=\tfrac{16}{25}a^2,$$

од каде лесно се добива $x=(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{7}}{10})a$ или $x=(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{7}}{10})a$.

4. Дадена е непроѕирна сфера и рамнина α која со сферата нема заеднички точки. Во точка M на рамнината α се наоѓа светлосен извор кој ја осветлува сферата. Докажи дека рамнината која го одделува осветлениот од неосветлениот дел од сферата минува низ точка P која не зависи од положбата на точката M.



Решение. Нека β е рамнината која ги содржи центарот на дадената сфера и точката M на рамнината α, а е нормална на рамнината α. Со p да го означиме пресекот на рамнините α и β, а со k пресекот на дадената сфера и рамнината β. Нека P е полот на правата p во однос на кружницата k и m е поларата на точката M во однос на истата кружница (цртеж десно). Тогаш правата m ги содржи точките во кои тангентите од M на кружницата k ја допираат таа кружница, а како $M\in p$, добиваме дека $P \in m$. Рамнината која ја содржи правата m (па според тоа и точката P), а е нормална на рамнината β, го одделува осветлениот од неосветлениот дел на сферата ако изворот на светлина е во точката M. Точката P е пол на рамнината α во однос на дадената сфера, а ја содржат сите опишани рамнини.

III година

1. Реши ја равенката

$$\sqrt{5x+1}-2\sqrt{4-x}+\sqrt{5}\sqrt{x+2}=\sqrt{61-4x}.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

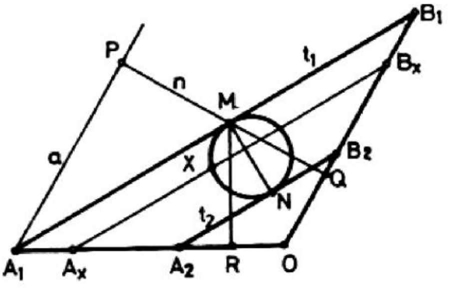
$$\sqrt{5x+1}+\sqrt{5x+10}=\sqrt{61-4x}+\sqrt{16-4x},$$

при што сите изрази се дефинирани за $-\frac{1}{5} \leq x \leq 4$. Да означиме

$$f(x)=\sqrt{5x+1}+\sqrt{5x+10},\, g(x)=\sqrt{61-4x}+\sqrt{16-4x}.$$

Тогаш $f(3)=g(3)=9$. За $-\frac{1}{5} \leq x < 3$ важи $f(x) < f(3)=g(3) < g(x)$, а за $3 < x \leq 4$ важи $f(x) > f(3)=g(3) > g(x)$. Според тоа, $x=3$ е единствено решение на равенката.

2. Во внатрешноста на даден агол со теме O се наоѓа кружница, која нема заеднички точки со краците на аголот. На кружницата определи точки M и N такви што збирот на растојанијата од точката M до краците на аголот е најголем можен, а збирот на растојанијата од точката N до краците на аголот е најмал можен.



Решение. Нека s симетралата на внатрешниот агол, а t_1 и t_2 се тангентите на дадената кружница кои се нормални на правата s. Нека се A_1, B_1 и M (односно A_2, B_2 и N) се соодветно пресечните точки на тангентата t_1 (односно t_2) со краците на дадениот агол и допирната точка со дадената кружница. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека точката A_2 припаѓа на отсечката OA_1, а точката B_2 на отсечката OB_1. Нека a е правата која ја содржи точката A_1 и е паралелна на OB_1, а P,Q,R се редоследно подножјата на нормалите од точката M на правитse a, OB_1, OA_1. Бидејќи $a \| OB_1$, заклучуваме дека точките P,M,Q се колинеарни., а отсечката PQ е еднаква на висината повлечена од темето A_1 во триаголникот A_1OB_1 (цртеж десно).

Триаголниците A_1RM и A_1PM се складни, бидејќи $\measuredangle PA_1M=\measuredangle A_1B_1O=\measuredangle RA_1M$, $A_1M=A_1M$ и $\measuredangle A_1PM=\measuredangle A_1RM=90^\circ$. Затоа $MP=MR$, па добиваме

$$MR+MQ=MP+MQ=PQ\,.$$

Нека $X\neq M$ е произволна точка на дадената кружница, а A_x и B_x се редоследно пресеците на правата која минува низ X и е паралелна со t_1 со правите OA_1 и OB_1. Аналогно како погоре докажуваме дека збирот на растојанијата од точката X до краците OA_1 и OB_1 е еднаков на висината од темето A_x во триаголникот A_xOB_x. Бидејќи X е внатрешна точка на триаголникот A_1OB_1, заклучуваме дека точката A_x припаѓа на отсечката OA_1, па затоа $OA_1>OA_x$, а како триаголниците A_1OB_1 и A_xOB_x се слични (имаат по две паралелни страни и налегнатите агли се еднакви), заклучуваме дека и висината од темето A_1 на триаголникот A_1OB_1 е поголема од висината од темето A_x на триаголникот A_xOB_x. Со тоа е докажано дека од сите точки на дадената кружница точката M има најголем збир на растојанијата до краците на дадениот агол. На сличен начин се докажува дека кај точката N тој збир е минимален.

3. Реши ја неравенката

$$(1+\sqrt{3})\sin 2x+2\cos^2 x\geq 2(1+\sqrt{3}\cos^2 x)\,.$$

Решение. Користејќи ја формулата $2\cos^2 x=1+\cos 2x$ дадената неравенка ја запишуваме во видот

$$(1+\sqrt{3})\sin 2x\geq 1+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)\cos 2x\,. \tag{1}$$

Нека $t=\cos 2x$. Ако x е решение на дадената неравенска, тогаш $\sin 2x\geq 0$, па затоа $\sin 2x=\sqrt{1-t^2}$ и

$$(1+\sqrt{3})\sqrt{1-t^2}\geq 1+\sqrt{3}+(\sqrt{3}-1)t\,. \tag{2}$$

Неравенката (2) може да ја квадрираме бидејќи двете нејзини страни се ненегативни, со што ја добиваме неравенката $(2t+1)t\leq 0$, чие решение е множеството $[-\frac{1}{2},0]$. Множеството решенија на неравенката (1) е

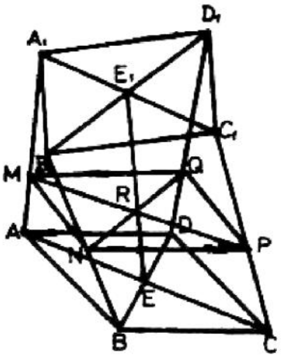
$$S=\{x\,|-\tfrac{1}{2}\leq\cos 2x\leq 0,\sin 2x\geq 0\}=\bigcup_{k=-\infty}^{+\infty}[\tfrac{\pi}{4}+k\pi,\tfrac{\pi}{3}+k\pi]\,.$$

4. Нека $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ се два паралелограми кои припаѓаат на непаралелни рамнини. Точките M,N,P,Q соодветно ги делат отсечките AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 во ист однос.

а) Докажи дека четириаголникот $MNPQ$ паралелограм.

б) Определи го геометриското место на средините на сите паралелограми $MNPQ$ кои се добиваат кога точката M минува по отсечката AA_1.

Решение. а) Нека O е произволна точка и нека $\overrightarrow{OM}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OA_1}$, каде $0\le\lambda\le1$. Тогаш (цртеж десно):



$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}&=\lambda\overrightarrow{OB}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB_1}-\lambda\overrightarrow{OA}-(1-\lambda)\overrightarrow{OA_1}\\&=\lambda(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})+(1-\lambda)(\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OA_1})\\&=\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{A_1B_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}&=\lambda\overrightarrow{OC}+(1-\lambda)\overrightarrow{OC_1}-\lambda\overrightarrow{OD}-(1-\lambda)\overrightarrow{OD_1}\\&=\lambda(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})+(1-\lambda)(\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OD_1})\\&=\lambda\overrightarrow{DC}+(1-\lambda)\overrightarrow{D_1C_1}\\&=\lambda\overrightarrow{AB}+(1-\lambda)\overrightarrow{A_1B_1}.\end{aligned}$$

Според тоа, $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$, т.е. $MNPQ$ е паралелограм.

б) Нека E,E_1,R се центрите на паралелограмите $ABCD$, $A_1B_1C_1D_1$, $MNPQ$, соодветно. Тогаш

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OR}&=\tfrac{1}{4}(\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})\\&=\tfrac{\lambda}{4}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})+\tfrac{1-\lambda}{4}(\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_1}+\overrightarrow{OC_1}+\overrightarrow{OD_1})\\&=\lambda\overrightarrow{OE}+(1-\lambda)\overrightarrow{OE_1}.\end{aligned}$$

Ако $0\le\lambda\le1$, тогаш точката R припаѓа на отсечката EE_1. Обратно, нека X е произволна точка од отсечката EE_1 и нека

$$\overrightarrow{OX}=\mu\overrightarrow{OE}+(1-\mu)\overrightarrow{OE_1}.$$

Понатаму, нека M_1,N_1,P_1,Q_1 се редоследно точки на отсечките AA_1,BB_1,CC_1, DD_1 кои ги делат овие отсечки во ист однос во кој точката X ја дели отсечката EE_1. Тогаш $M_1N_1P_1Q_1$ е паралелограм чија средна точка е точката X.

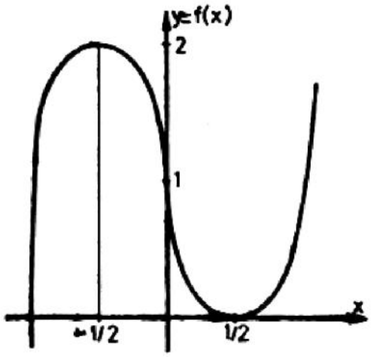
Значи, бараното геометриско место е отсечката EE_1.

IV година

1. а) Определи го множеството точки во кои функција од фамилијата определена со формулата $f(x)=\frac{4x^3}{p^2}-3x+p$, каде $p\neq0$, достигнува локален максимум и множеството точки во кои фукција од оваа фамилија достигнува локален минимум. Нацртај го графикот на функцијата која се добива за $p=1$ и определи ги точките на пресек на тој график со $x-$оската.

б) Прикажи го $\cos 3t$ како функција од $\cos t$ и со смената $x=\cos t$ определи ги нулите на функцијата $f(x)=4x^3-3x+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение. а) Функцијата $f(x)=\frac{4x^3}{p^2}-3x+p$, каде $p\neq 0$, во точката $-\frac{p}{2}$ има локален максимум еднаков на $2p$, а во точката $\frac{p}{2}$ има локален минимум еднаков на 0. Множеството точки на максимуми е $\{(x,y)\,|\,y=-4x,\,x\neq 0\}$, а множеството точки на минимуми е $\{(x,0)\,|\,x\neq 0\}$.



Графикот на функцијата $f(x)=4x^3-3x+1$ е прикажан на цртежот десно.

б) Бидејќи $\cos 3t=4\cos^3 t-3\cos t$, со смената $x=\cos t$ добиваме

$$f(x)=f(\cos t)=4\cos^3 t-3\cos t+\frac{\sqrt{2}}{2}=\cos 3t+\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Множеството решенија на равенката $\cos 3t=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ е

$$S=\{\tfrac{\pi}{4}+\tfrac{2k\pi}{3}\,|\,k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\tfrac{5\pi}{12}+\tfrac{2k\pi}{3}\,|\,k\in\mathbb{Z}\}=\bigcup_{j=1}^{6}\{t_j+2k\pi\,|\,k\in\mathbb{Z}\},$$

каде $t_1=\frac{\pi}{4}, t_2=\frac{5\pi}{12}, t_3=\frac{11\pi}{12}, t_4=\frac{13\pi}{12}, t_5=\frac{19\pi}{12}, t_6=\frac{21\pi}{12}$. Лесно се проверува дека $\cos t_1=\cos t_6, \cos t_2=\cos t_5, \cos t_3=\cos t_4$. Според тоа, равенката $4x^3-3x+\frac{\sqrt{2}}{2}=0$ има три решенија: $x_1=\cos\frac{\pi}{4}, x_2=\cos\frac{5\pi}{12}, x_3=\cos\frac{11\pi}{12}$.

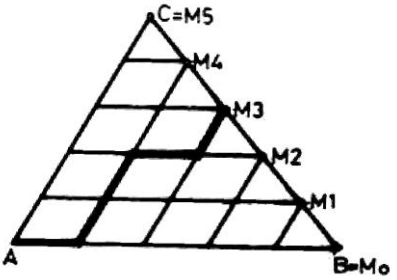
2. Страната BC на триаголникот ABC со точките $M_0=B, M_1, M_2, ..., M_{n-1}$, $M_n=C$ е поделена на n делови и од овие точки до страните AB и AC се конструирани отсечки паралелни со страните AC и AB соодветно.

а) На колку различни начини од точката A може да се стигне по добиената мрежа до точката M_k $(k=0,1,2,...,n)$, ако движењето е дозволено во насока на векторот $\overrightarrow{AB}$ и во насока на векторот $\overrightarrow{AC}$.

б) Определи го бројот на погоре опишаните патишта кои водат од точката A до сите точки $M_0, M_1, ..., M_n$.

в) Ако точките $M_0, M_1, ..., M_n$ се еквидистантни, определи го збирот на должините на сите патишта AM_k.

Решение. а) Патот до точката M_k се состои од k отсечки паралелни со правата AC и $n-k$ отсечки паралелни со правата AB (види цртеж).



Оттука следува дека бараниот број е еднаков на $\binom{n}{k}$.

б) Од а) следува дека бараниот број е:

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}=2^n.$$

в) Должината на сите патишта е еднаква на

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(k\frac{AB}{n}+(n-k)\frac{AC}{n}\right)=AB\sum_{k=1}^{n}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+AC\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}$$
$$=2^{n-1}(AB+AC).$$

3. Ако n е природен број, а реалниот број $2^n x$ не е еднаков на цел број пати π, докажи дека

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+...+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2^n x.$$

Решение. Да забележиме дека

$$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\sin 2\alpha}=\frac{\sin(2\alpha-\alpha)}{\sin 2\alpha\sin\alpha}=\frac{1}{\sin 2\alpha},$$

ако $\alpha\neq\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$. Ставајќи во равенството $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{1}{\sin 2\alpha}$ наместо α редоследно $x, 2x, 2^2x, ..., 2^{n-1}x$, при што $x\neq\frac{k\pi}{2}, k\in\mathbb{Z}$ и собирајќи ги добиените равенства, наоѓаме

$$\frac{1}{\sin 2x}+\frac{1}{\sin 4x}+...+\frac{1}{\sin 2^n x}=\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} 2^n x.$$

4. Иста како 4-та задача за III година.

Мала олимпијада 1967

1. Реши ја равенката $\log(ax+b)=2\log(x+1)$, каде a и b се реални параметри.

Решение. Прво $\log(ax+b)$ и $\log(x|+1)$ се определени за $ax+b>0$ и $x+1>0$ и дискриминантата на равенката $(x+1)^2=ax+b$ е еднаква на $D=a^2-4a+4b$. Според тоа, $x_1=\frac{a-2-\sqrt{D}}{2}$ е решение на дадената равенка ако

$$D\geq 0, \sqrt{D}<a, a\sqrt{D}<a^2-2a+2b,$$

$x_2=\frac{a-2+\sqrt{D}}{2}$ е решение на дадената равенка ако

$$D\geq 0, \sqrt{D}>-a, a\sqrt{D}>2a-a^2-2b.$$

Лесно се докажува дека запишаните услови можеме да ги изразиме во попогоден облик, т.е.

- x_1 е решение ако $D\geq 0, a>b, a>0$,
- x_2 е решение ако $D\geq 0$ и важи $a>0$ или $b>a$.

2. Ако a,b,c се страните на триаголникот и α,β,γ се соодветните агли изразени во радијани, докажи дека

$$\frac{\pi}{3}\leq\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}.$$

Решение. Неравенството $a\geq b$ е еквивалентно со неравенството $\alpha\geq\beta$, па затоа важи $(a-b)(\alpha-\beta)\geq 0$. Притоа знак за равенство важи ако и само ако $a=b$. Слично, $(b-c)(\beta-\gamma)\geq 0$ и $(c-a)(\gamma-\alpha)\geq 0$. Затоа

$$(a-b)(\alpha-\beta)+(b-c)(\beta-\gamma)+(c-a)(\gamma-\alpha)\geq 0. \qquad (1)$$

Ако искористиме дека $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, добиваме дека неравенството (1) последователно е еквивалентно со неравенствата

$$\begin{aligned}&a(2\alpha-\beta-\gamma)+b(2\beta-\alpha-\gamma)+c(2\gamma-\alpha-\beta)\geq 0,\\&a(3\alpha-\pi)+b(3\beta-\pi)+c(3\gamma-\pi)\geq 0,\\&3(a\alpha+b\beta+c\gamma)\geq\pi(a+b+c),\\&\frac{\pi}{3}\leq\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

Од очигледното неравенство

$$(b+c-a)\alpha+\beta(c+a-b)+\gamma(a+b-c)>0,$$

ако искористиме дека $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ со еквивалентни трансформации добиваме

$$\begin{aligned}&a(\beta+\gamma-\alpha)+b(\alpha+\gamma-\beta)+c(\alpha+\beta-\gamma)>0,\\&a(\pi-2\alpha)+b(\pi-2\beta)+c(\pi-2\gamma)>0,\\&2(a\alpha+b\beta+c\gamma)<\pi(a+b+c),\\&\frac{a\alpha+b\beta+c\gamma}{a+b+c}<\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

3. Ако P и R се точки во кои спротивните страни AB и CD на просторниот четириаголник $ABCD$ сечат произволна рамнина π_1 паралелна со другите две спротивни страни, а Q и S се точките во кои страните BC и AD на тој четириаголник сечат произволна рамнина π_2 паралелна со другите две страни, докажи дека точките P,Q,R,S припаѓаат на иста рамнина.

Решение. Нека O е произволна точка. Бидејќи точките P и R припаѓаат на рамнина на која се паралелни правите AD и BC, добиваме дека овие точки ги делат отсечките AB и DC во ист однос, т.е. постои реален број λ таков што важи

$$\overrightarrow{OP}=\lambda\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\overrightarrow{OB},\quad \overrightarrow{OR}=\lambda\overrightarrow{OD}+(1-\lambda)\overrightarrow{OC}. \qquad (1)$$

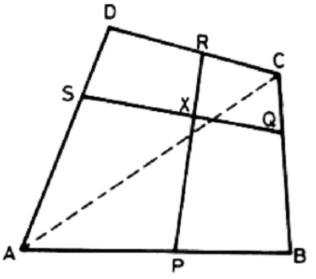
Аналогно добиваме дека постои број μ таков што

$$\overrightarrow{OS}=\mu\overrightarrow{OA}+(1-\mu)\overrightarrow{OD},\quad \overrightarrow{OQ}=\mu\overrightarrow{OB}+(1-\mu)\overrightarrow{OC}.\quad (2)$$

Нека X е точка на отсечката PR и Y е точка на отсечката QS определени со условите

$$\overrightarrow{OX}=\lambda\overrightarrow{OS}+(1-\lambda)\overrightarrow{OQ},\quad \overrightarrow{OY}=\mu\overrightarrow{OP}+(1-\mu)\overrightarrow{OR}.\quad (3)$$

(цртеж десно). Тогаш од равенствата (1), (2) и (3) следува



$$\overrightarrow{OX}=\lambda\mu\overrightarrow{OA}+(1-\lambda)\mu\overrightarrow{OB}+(1-\lambda)(1-\mu)\overrightarrow{OC}+\lambda(1-\mu)\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OY}.$$

Според тоа, $X\equiv Y$, правите PR и QS се сечат, а точките P,Q,R,S припаѓаат на иста рамнина.

4. Во просторот се дадени точките A,B,C,D,E такви што важи

$$AB=BC=CD=DE=EA,\ \measuredangle ABC=\measuredangle BCD=\measuredangle CDE=\measuredangle DEA=\measuredangle EAB.$$

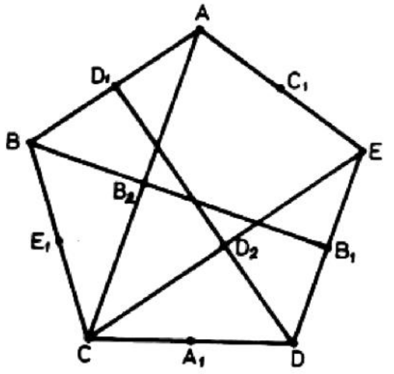
Докажи дека точките A,B,C,D,E припаѓаат на една рамнина.

Решение. Од условот на задачата следува дека триаголниците ABC, BCD, CDE, DEA и EAB се складни, па затоа дијагоналите AC,BD,CE,DA,EB на петаголникот $ABCDE$ се еднакви. Нека $f(A)=B$, $f(B)=A$, $f(C)=E$ и $f(D)=D$. Тогаш f е изометрички го пресликува множеството $\{A,B,C,D\}$ на множеството $\{A,B,E,D\}$ и еднозначно може да се продолжи до изометрија на целиот простор. Таа изометрија е едно од следниве две пресликувања:

1) Симетрија во однос на рамнина π која ја содржи средината D_1 на отсечката AB и е нормална на правата AB. Во овој случај точките C и E се заемно симетрични во однос на рамнината π. Затоа $AB\,||\,CE$, па следува дека точките A,B,C,E припаѓаат на една рамнина.

2) Симетрија во однос на правата DD_1. Во овој случај средината D_2 на отсечката CE припаѓа на правата DD_1, па точките C,D,E,D_1,D_2 припаѓаат на една рамнина.

Аналогно можеме да заклучуваме тргнувајќи од множествата $\{B,C,D,E\}$, $\{C,D,E,A\}$, $\{D,E,A,B\}$ или $\{E,A,B,C\}$ наместо од множеството $\{A,B,C,D\}$. Ако барем два од паровите C и E, D и A, E и B, A и C, B и D се симетрични во однос на рамнините кои се дефинираат аналогно на дефиницијата на рамнината π, тогаш од дадените пет точки можеме да избереме барем две четворки компланарни



точки, па следува дека и сите дадени точки се компланарни.

Во спротивно, средините на барем четири од дијагоналите CE, DA, EB, AC, BD припаѓаат по ред на правите $DD_1, EE_1, AA_1, BB_1, CC_1$, каде A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 се по ред средините на отсечките CD, DE, EA, AB, BC. Барем две од овие четири дијагонали тргнуваат од исто теме на петаголникот $ABCDE$. Нека, на пример, тоа се дијагоналите CE и CA, т.е. нека средините D_2 и B_2 на дијагоналите CE и CA припаѓаат по ред на правите DD_1 и BB_1. Тогаш компланарни се точките C, D, E, B_1, D_1, D_2. Истото тоа важи и за точките A, B, C, D_1, B_1, B_2. Според тоа, рамнината определена со точките B_1, C, D_1 ја содржи секоја од точките A, B, C, D, E.

5. Докажи дека условите

(A) $c \neq 0, \sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$,

(B) $a > 0, b > 0, \ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$

се еквивалентни.

Решение. Нека $c \neq 0, \sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}$. Тогаш

$$a+b = a+b+2c+2\sqrt{a+c}\sqrt{b+c}, \text{ т.е. } c = -\sqrt{a+c}\sqrt{b+c}.$$

Затоа $c < 0$, $a \geq -c > 0, b \geq -c > 0$ и притоа важи

$$\begin{aligned} &c^2 = (a+c)(b+c), \\ &ab+bc+ca = 0, \\ &\tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b} + \tfrac{1}{c} = 0. \end{aligned}$$

Нека $a > 0, b > 0, \ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$. Тогаш $c < 0$ и $ab + bc + ca = 0$, од каде следува $c^2 = (a+c)(b+c)$. Но, $c < 0$, па од последното равенство следува равенството $c = -\sqrt{(a+c)(b+c)}$. Броевите $a+c$ и $b+c$ се со ист знак. Ако $a+c < 0$ и $b+c < 0$, тогаш $c < -a < 0$ и $c < -b < 0$, па следува

$$|c+a| < |c|, \ |b+c| < |c| \text{ и } (a+c)(b+c) < c^2,$$

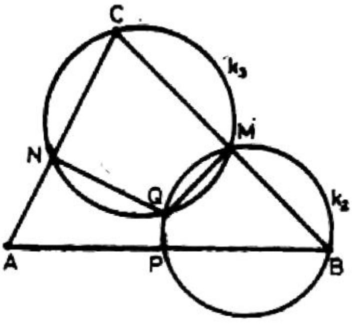
што е противречност. Затоа $a+c > 0, b+c > 0$, па добиваме

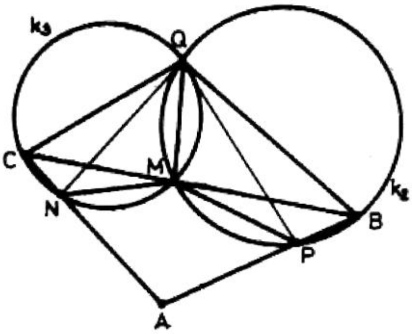
$$\begin{aligned} &c = -\sqrt{a+c}\sqrt{b+c}, \\ &a+b = a+b+2c+2\sqrt{a+c}\sqrt{b+c}, \\ &a+b = (\sqrt{a+c} + \sqrt{b+c})^2, \\ &\sqrt{a+b} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+c}. \end{aligned}$$

6. На страните BC, CA, AB на триаголникот ABC редоследно се дадени точките M, N, P различни од темињата. Докажи дека кружниците опишани околу триаголниците ANP, BPM, CMN имаат заедничка точка.

Решение. Нека k_1, k_2, k_3 се редоследно кружниците опишани околу триаголниците ANP, BPM, CMN. Ќе ги разгледаме следниве случаи.

а) Кружниците k_2 и k_3 имаат две заеднички точки M и Q и точката Q се наоѓа во внатрешноста на триаголникот ABC (цртеж долу лево). Тогаш





$$\begin{aligned}\measuredangle NAP + \measuredangle NQP &= 180^\circ - \measuredangle NCM - \measuredangle PBM + 360^\circ - \measuredangle MQN - \measuredangle PQM \\ &= 540^\circ - (\measuredangle NCM + \measuredangle MQN) - (\measuredangle PBM + \measuredangle PQM) \\ &= 540^\circ - 180^\circ - 180^\circ = 180^\circ,\end{aligned}$$

па следува дека Q припаѓа на кружницата k_1.

б) Кружниците k_2 и k_3 имаат две заеднички точки M и Q и точките A и Q се наоѓаат на различни страни од правата BC (цртеж десно горе). Тогаш

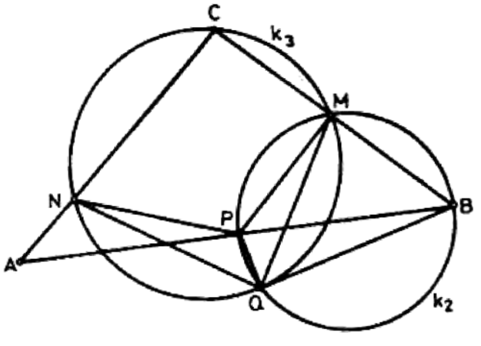
$$\measuredangle NAP + \measuredangle NQP = \measuredangle NAP + \measuredangle NQM + \measuredangle MQP = \measuredangle NAP + \measuredangle NCM + \measuredangle MBP = 180^\circ,$$

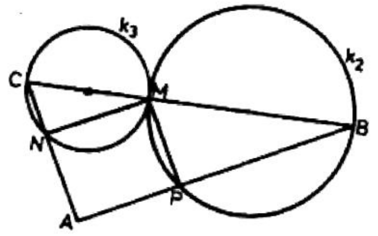
па следува дека Q припаѓа на кружницата k_1.

в) Кружниците k_2 и k_3 имаат заедничка точка Q надвор од триаголникот ABC, но на иста страна на правата BC на која е точката A (цртеж лево долу). Тогаш

$$\measuredangle ANQ = 180^\circ - \measuredangle CNQ = \measuredangle CMQ = 180^\circ - \measuredangle QMB = 180^\circ - \measuredangle QPB = \measuredangle APQ,$$

па точките A, Q, P, N припаѓаат на иста кружница.





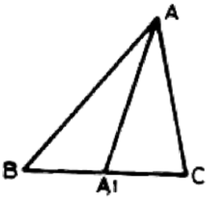
г) Кружниците k_2 и k_3 се допираат во точка M (цртеж горе десно). Тогаш центрите на кружниците k_2 и k_3 се на правата BC, па затоа

$$\measuredangle CNM = \measuredangle MPB = 90^\circ \text{ и } \measuredangle NAP + \measuredangle NMP = 360^\circ - \measuredangle MNA - \measuredangle MPA = 180^\circ,$$

од каде следува дека точката M припаѓа на кружницата k_1.

д) Случајот кога кружниците k_2 и k_3 имаат заеднички точки M и Q, при што $Q = P$ или $Q = N$ е едноставен и го препушптаме на читателот за вежба.

7. Определи триаголник со минимален периметар чии што должини на страни се цели броеви, а една тежишна линија е еднаква на соодветната страна.



Решение. Нека A_1 е средина на страната BC на триаголникот ABC (цртеж десно) и нека a,b,c се природни броеви такви што $BC = AA_1 = a$, $CA = b$ и $AB = c$. Тогаш

$$b^2 = \tfrac{5a^2}{4} - a^2 \cos\measuredangle AA_1C,$$

$$c^2 = \tfrac{5a^2}{4} + a^2 \cos\measuredangle AA_1C,$$

од каде следува $\frac{5a^2}{4} - b^2 = c^2 - \frac{5a^2}{4}$, т.е. $5a^2 = 2(b^2 + c^2)$. Од последното равенство следува дека a е парен број. Лесно се проверува дека за $a \in \{2,4,6,8,12,14\}$ равенката $5a^2 = 2(b^2 + c^2)$ нема решение во множеството природни броеви за кое важи $b + c > a$, $c + a > b$, $a + b > c$. За $a = 10$ единствено решение за кое важат наведените услови е $a = 10, \{b,c\} = \{9,13\}$. Периметарот на соодветниот триаголник е 32. Ако за природните броеви a,b,c кои може да бидат должини на страни на триаголники важи $5a^2 = 2(b^2 + c^2)$ и $a \ge 16$, тогаш $a + b + c > a + a \ge 32$. Според тоа, должините на страните на бараниот триаголник се 9, 10 и 13.

8. Ако е $a_k \ge 0$ за $k = 1,2,...,n$ и $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, докажи дека

$$(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n) \le 1 + S_n + \tfrac{1}{2!}S_n^2 + ... + \tfrac{1}{n!}S_n^n.$$

Решение. Неравенството ќе го докажеме со математичка индукција.

За $n = 1$ неравенството го прима обликот $1 + a_1 \le 1 + a_1$ и очигледно и точно.

Нека претпоставиме дека за некоју природен број n важи

$$(1 + a_1)(1 + a_2)...(1 + a_n) \le 1 + S_n + \tfrac{1}{2!}S_n^2 + ... + \tfrac{1}{n!}S_n^n \qquad (1)$$

Од биномната формула следува дека за ненегативни броеви $a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1}$ и за секој природен број $k \in \{1,2,...,n\}$ важи

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1})^k \ge (a_1 + a_2 + ... + a_n)^k + k(a_1 + a_2 + ... + a_n)^{k-1} a_{n+1},$$

од каде следува

$$\frac{S_{n+1}^k}{k!} \ge \frac{S_n^k}{k!} + \frac{S_n^{k-1}}{(k-1)!} a_{n+1}, \tag{2}$$

каде $S_{n+1} = a_1 + a_2 + ... + a_n + a_{n+1}$. Од биномната формула исто така следува

$$\frac{S_{n+1}^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(S_n + a_{n+1})^{n+1}}{(n+1)!} \ge \frac{(n+1)S_n^n a_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{S_n^n}{n!} a_{n+1}. \tag{3}$$

Сега, од индуктивната претпоставка (1) и неравенствата (2) и (3) добиваме

$$\begin{aligned}(1+a_1)(1+a_2)...(1+a_n)(1+a_{n+1}) &\le (1+S_n + \tfrac{1}{2!}S_n^2 + ... + \tfrac{1}{n!}S_n^n)(1+a_{n+1})\\ &\le 1 + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{S_n^k}{k!} + \frac{S_n^{k-1}}{(k-1)!}a_{n+1}\right) + \frac{S_n^n}{n!}a_{n+1}\\ &\le 1 + S_{n+1} + \tfrac{1}{2!}S_{n+1}^2 + ... + \tfrac{1}{(n+1)!}S_{n+1}^{n+1}\end{aligned}$$

со што доказот е завршен.

9. Дадени се броевите $x_1, x_2, ..., x_n$ секој од кои е еднаков или на 1 или на -1 и такви што $x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_nx_1 = 0$. Докажи дека бројот n е делив со 4.

Решение. Од $x_1x_2 + x_2x_3 + ... + x_nx_1 = 0$ и како секој од броевите $x_1x_2, x_2x_3, ...,$ x_nx_1 е еднаков на 1 или -1, заклучуваме дека меѓу броевите има еднаков број позитивни и негативни броеви. Затоа $n = 2k$, каде k е природен број. Да забележиме дека меѓу броевите $x_1x_2, x_2x_3, ..., x_nx_1$ има толку негативни броеви колку што во низата $x_1, x_2, ..., x_n, x_1$ има членови со различен предзнак од претхгодниот член. Бидејќи во оваа низа првиот и последниот член се еднакви на x_1, заклучуваме дека бројот на промените на знакот е парен. Според тоа, постои природен број l таков што важи $k = 2l$, па затоа $n = 4l$.

10. Во рамнината се дадени милион прави такви што

а) Никои две од дадените прави не се паралелни.

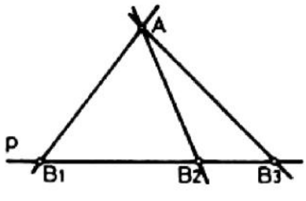
б) Пресекот на произволни две од дадените прави припаѓа барем на уште една од тие прави.

Докажи дека сите прави се сечат во една точка.

Решение. Нека претпоставиме дека не постои точка која припаѓа на секоја од дадените прави. Нека A е пресечна точка и p е дадена права за кои важи:

а) точката A не припаѓа на правата p,

б) растојанието од точката A до правата p е минимално.



Според условот на задачата точката A припаѓа на барем три од дадените прави. Нека тие прави ја сечат правата p во точките B_1, B_2, B_3 и нека е, на пример, точката B_2 меѓу точките B_1 и B_3 (види цртеж). Јасно, барем еден од аглите $\measuredangle AB_2B_1$ и $\measuredangle AB_2B_3$ не е остар. Нека, на пример, $\measuredangle AB_2B_3 > 90^\circ$. Тогаш во триаголникот AB_2B_3 важи $AB_3 > B_2B_3$, па затоа $d(B_2, AB_3) < d(A, B_2B_3)$, што е противречност. ($d(X, YZ)$ е ознака за растојанието од точката X до правата YZ .)

11. Во рамнината се дадени n точки такви што меѓу произволни пет од тие точки постојат четири кои припаѓаат на една кружница. Ако $n \geq 7$, докажи дека барем $n-1$ од дадените точки припаѓаат на една кружница. Дали ова тврдење важи за $n < 7$?

Решение. Нека $n \geq 7$ и нека $S = \{A_1, A_2, ..., A_7\}$ е подмножество од даденото множество точки. Да претпоставиме дека никои пет од точките на множеството S не припаѓаат на една кружница. Нека k_1 е кружницата која содржи четири од точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, на пример,

$$A_1, A_2, A_3, A_4 \in k_1 .$$

Нека k_2 е кружницата која содржи четири од точките A_1, A_2, A_3, A_5, A_6. Тогаш кружницата k_2 не може да ги содржи сите точки A_1, A_2, A_3, бидејќи во спротивно би се поклопувала со k_1 и би содржела барем пет од дадените n точки. Нека, на пример,

$$A_2, A_3, A_5, A_6 \in k_2 .$$

Нека k_3 е кружницата која содржи четири од точките A_1, A_3, A_4, A_5, A_6. Лесно се добива дека $A_3 \notin k_3$, т.е. дека

$$A_1, A_4, A_5, A_6 \in k_3 ,$$

(во останатите случаи k_3 се поклопува со некоја од кружниците k_1 или k_2 и содржи пет од дадените n точки). Нека k_4 е кружница која содржи четири од точките A_1, A_2, A_3, A_5, A_7. Тогаш кружницата k_4 ја содржи точката A_1 (во спротивно се поклопува со k_2 и содржи пет од дадените точки), k_4 ги содржи точките A_5 и A_7 (во спротивно ќе се поклопува со k_1 и ќе содржи пет точки). Нека, на пример,

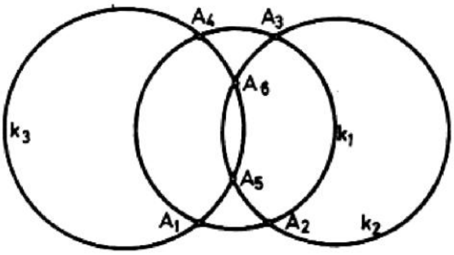
$$A_1, A_3, A_5, A_7 \in k_4 .$$

Нека k_5, k_6, k_7 се кружници кои содржат по четири точки соодветно од следниве петчлени множества

$$\{A_2, A_3, A_4, A_5, A_7\}, \quad \{A_2, A_3, A_5, A_6, A_7\}, \quad \{A_3, A_4, A_5, A_6, A_7\}.$$

Лесно се докажува дека важи

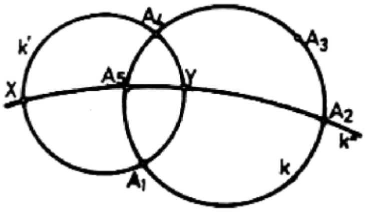
$$A_2, A_4, A_5, A_7 \in k_5 , \qquad A_1, A_2, A_6, A_7 \in k_6 , \qquad A_3, A_4, A_6, A_7 \in k_7 .$$



Да претпоставиме дека точките A_1, A_2, A_3, A_4 во запишаниот редослед се јавуваат на кружницата k_1 (цртеж десно). Бидејќи k_2 ги содржи точките A_2 и A_3, а k_3 ги содржи точките A_1 и A_4, добиваме дека заедничките точки A_5 и A_6 на овие кружници двете се наоѓаат внатре или двете се надвор од кружницата k_1. Нека претпоставиме дека точките A_5 и A_6 се во кружницата k_1. Тогаш и точката A_7 е во кружницата k_1, бидејќи

$$A_6, A_7 \in k_6 \cap k_7, \quad A_1, A_2 \in k_6, \quad A_3, A_4 \in k_7.$$

Но, бидејќи $A_1, A_3 \in k_4$, $A_2, A_4 \in k_5$ и $A_5, A_7 \in k_4 \cap k_5$, добиваме дека една од точките A_5 и A_7 е внатре во кружницата k_1, а другата е надвор од неа. Добиената противречност покажува дека пет од точките на множеството S припаѓаат на една кружница. Нека претпоставиме дека кружницата k ги содржи точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Нека X и Y се некои две од дадените точки за кои важи $X, Y \notin \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$. Нека претпоставиме дека $X \notin k, Y \notin k$.



Нека k' е кружница која содржи четири од точките A_1, A_4, A_5, X, Y, а $k"$ е кружница која содржи четири од точките A_2, A_3, A_5, X, Y. Тогаш една од точките A_1, A_4, A_5 не припаѓа на кружницата k'. Нека, на пример, $A_1, A_4, X, Y \in k'$ (цртеж десно). Слично, една од точките A_2, A_3, A_5 не припаѓа на $k"$. Нека, на пример, $A_2, A_5, X, Y \in k"$. Тогаш никои четири од точките A_3, A_4, A_5, X, Y не припаѓаат на една кружница, што е противречност. Според тоа, најмногу една од точките X и Y не припаѓа на k, па лесно следува дека најмногу една од сите n точки не припаѓа на k.

За $n = 6$ тврдењето не важи (цртеж горе), за $n = 5$ тврдењетso очигледно важи, а за $n < 5$ тврдењето губи смисла.

Сојузен натпревар 1968

II година

1. Определи ги сите целобројни решенија на равенката

$$\sqrt{x-\tfrac{1}{5}}+\sqrt{y-\tfrac{1}{5}}=\sqrt{5}\,.$$

Решение. Левата страна на равенката е определена за $x\geq\frac{1}{5}, y\geq\frac{1}{5}$, а како $x,y\in\mathbb{Z}$, добиваме $x\geq 1, y\geq 1$. Исто така мора да важи $x-\frac{1}{5}\leq 5, y-\frac{1}{5}\leq 5$, односно $x\leq 5, y\leq 5$. Сега, да ги побараме решенијата на равенката за кои $x\leq y$. Воведуваме смена $y=x+k$, па затоа треба да ги побараме решенијата на равенката

$$\sqrt{x+k-\tfrac{1}{5}}=\sqrt{5}-\sqrt{x-\tfrac{1}{5}}\,,$$

за кои $x\in\{1,...,5\}, k\in\{0,...,5-x\}$. Последната равенка, по двократно квадрирање, се сведува на равенката

$$x=\frac{k^2-10k+29}{20}\,,$$

која при дадените услови има единствено решение $x=1, k=1$. Според тоа, единствени можни решенија на почетната равека се $x=1, y=2$ и $x=2, y=1$. Непосредно се проверува дека тие навистина се решенија на почетната равенка.

2. Во рамнината се дадени четири точки A,B,C,D. Во оваа рамнина конструирај кружница која минува низ точките A и B така што тангентните отсечки конструирани од точките C и D се еднакви.

Решение. За да тангентните отсечки од точките C и D на некоја кружница се еднакви потребно и доволно е точките C и D да се еднакво оддалечени од центарот на таа кружница. Според тоа, центарот на бараната кружница припаѓа на симетралата на отсечката CD, т.е. се наоѓа во пресекот на симетралите на отсечките AB и CD.

Конструкцијата и доказот му ги препуштаме на читателот за вежба. Задачата има решение ако симетралите на отсечките AB и CD имаат една или повеќе заеднички точки и ако кружницата со центар во некоја од тие точки која ги содржи A и B во својата внатрешност не ги содржи точките C и D.

3. Сфера ги содржи средините на бочните рабови на тристрана пирамида и го допира секој раб на основата во неговата средина.

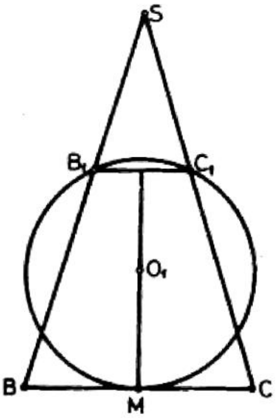
а) Докажи дека таа пирамида е правилна.

б) Определи го радиусот на таа сфера, ако основните рабови и висината на бочните ѕидови на пирамидат се еднакви на дадена отсечка a.

Решение. а) Нека $SABC$ е дадената пирамида (со врв S), A_1, B_1, C_1, M, N, P се редоследно средините на отсечките SA, SB, SC, BC, CA, AB. Понатаму, нека s е дадената сфера и k и k_1 се редоследно нејзините пресеци со рамнините ABC и B_1MC_1. Бидејќи правите BC, CA и AB се тангенти на сферата s, тие се тангенти и на кружницата k (соодветно во точките M, N и P). Затоа

$$AB = 2AP = 2AN = AC = 2CN = 2CM = BC,$$

т.е. триаголникот ABC е рамностран. Понатаму, ако O_1 е центар на кружницата k_1, тогаш точките B и B_1 се симетрични на точките C и C_1 во однос на правата O_1M (цртеж десно), па следува $B_1B = C_1C$, т.е. $SB = SC$. Аналогно се докажува дека $SA = SB$, со што е докажано дека пирамидата $SABC$ е правилна.



б) Нека O е центарот на дадената сфера, R е нејзиниот радиус, T и T_1 се тежиштата на триаголниците ABC и $A_1B_1C_1$, $h = ST$, $y = OT$, $a = AB = SM$ (цртеж десно). Тогаш

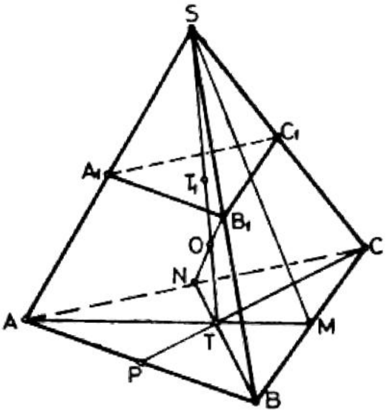
$$h^2 = SM^2 - MT^2 = a^2 - (\tfrac{1}{3}\tfrac{a\sqrt{3}}{2})^2 = \tfrac{11}{12}a^2.$$

Бидејќи триаголниците OTP и OT_1A_1 се правоаголни (со прави агли во темињата T и T_1), добиваме

$$R^2 = OT^2 + TP^2 = OT_1^2 + A_1T_1^2,$$

$$y^2 + (\tfrac{1}{3}\tfrac{a\sqrt{3}}{2})^2 = (\tfrac{h}{2} - y)^2 - (\tfrac{2}{3}\tfrac{a\sqrt{3}}{4})^2.$$

Понатаму, лесно добиваме дека $y = \frac{h}{2} - y$, т.е. $y = \frac{h}{4}$ и $R = \frac{3a}{8}$.



4. Определи ги сите реални броеви a, за кои ниту еден број x за кој важи

$$ax^2 + (1-a^2)x - a > 0$$

не е по апсолутна вредност поголем од 2.

Решение. За дадено $a \geq 0$ секогаш постојат реални вредности за x со произволно голема апсолутна вредност кои ја задоволуваат дадената неравенка. Затоа нека претпоставиме дека $a < 0$. Тогаш условот наведен во задачата е еквивалентен на условот двата корени на равенката

$$ax^2 + (1-a^2)x - a = 0$$

по апсолутна вредност да се помали или еднакви на 2 (лесно се проверува дека нејзините корени се секогаш реални и различни). Бидејќи тие корени се $x_1 = a$ и $x_2 = -\frac{1}{a}$, добиваме дека наведениот услов е исполнет ако и само ако $-2 \le a \le -\frac{1}{2}$.

III година

1. Реши го системот равенки

$$x^m = y^n,$$
$$\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}.$$

Решение. Системот има смисла ако и само ако $m, n \in \mathbb{R}$ и $a > 0, a \ne 1$. Притоа непознатите треба да ги задоволуваат условите $x, y > 0$ и $x \ne 1$. Воведуваме смена $\log_a x = u, \log_a y = v$, со што дадениот систем го добива видот

$$mu = nv, u - v = \frac{u}{v}. \tag{1}$$

Во случајот ако $m = 0$ мора да е и $n = 0$ (не е можно $v = 0$). Тогаш системот се сведува на равенката $u - v = \frac{u}{v}$, чии решенија се паровите од облик $(\frac{v^2}{v-1}, v)$, за $v \ne 1$, па во овој случај решенијата на дадениот систем се паровите од видот

$$(y^{\frac{\log_a y}{\log_a y-1}}, y), \ \ y > 0, y \ne 1, y \ne a.$$

Да претпоставиме дека $m \ne 0$. Тогаш решавајќи го системот (1) добиваме дека за $m = n$ истиот нема решение, а за $m \ne n$ решение е паротот $(\frac{n^2}{m(n-m)}, \frac{n}{n-m})$. Тогаш решението на дадениот систем е $(a^{\frac{n^2}{m(n-m)}}, a^{\frac{n}{n-m}})$.

2. Во рамнината xOy определи множество точки (x, y) за чии координати важи $0 \le x \le 2\pi$ и

$$\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin x} - \sqrt{1-\sin x}) \le y \le 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin 4x} + \sqrt{1-\sin 4x}).$$

Решение. Дадената релација може да се запише во видот

$$\frac{1}{2}(|\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}| - |\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}|) \le y \le 1 + \frac{1}{2}(|\sin 2x + \cos 2x| + |\sin 2x - \cos 2x|).$$

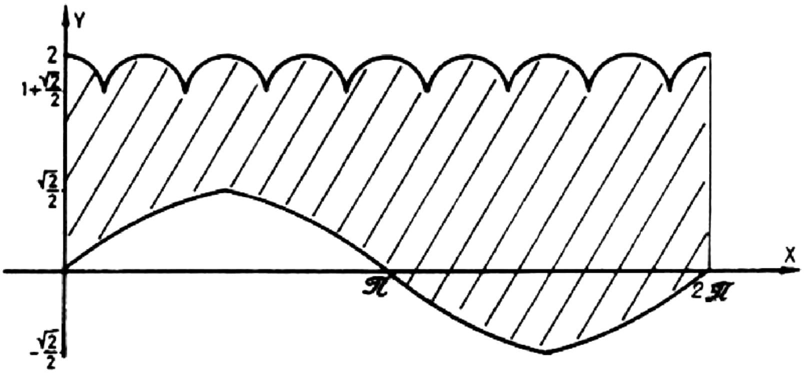
Левата страна на ова двојно неравенство има вредности

$$L = \begin{cases} \sin\frac{x}{2}, & x \in [0, \frac{\pi}{2}], \\ \cos\frac{x}{2}, & x \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}), \\ -\sin\frac{x}{2}, & x \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi], \end{cases}$$

а десната страна има вредности

$$D=\begin{cases}1+\cos 2x, & x\in[0,\frac{\pi}{8}]\cup(\frac{7\pi}{8},\frac{9\pi}{8}]\cup(\frac{15\pi}{8},2\pi],\\ 1+\sin 2x, & x\in(\frac{\pi}{8},\frac{3\pi}{8})\cup(\frac{9\pi}{8},\frac{11\pi}{8}],\\ 1-\cos 2x, & x\in(\frac{3\pi}{8},\frac{5\pi}{8}]\cup(\frac{11\pi}{8},\frac{13\pi}{8}],\\ 1-\sin 2x, & x\in(\frac{5\pi}{8},\frac{7\pi}{8})\cup(\frac{13\pi}{8},\frac{15\pi}{8}].\end{cases}$$

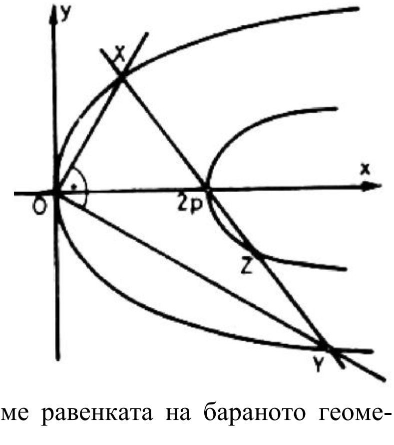
Множеството точки во рамнината xOy за кои $0\le x\le 2\pi$ и $L\le y\le D$ е прикажано на долниот цртеж.



3. Краците на прав агол со фиксирано теме во координатниот почеток ја сечат параболата $y^2=2px$ во точките X и Y.

а) Определи го геометриското место на можните средини на отсечките XY.

б) Докажи дека правите XY имаат една заедничка точка.



Решение. а) Нека правата OX има равенка $y=tx, t>0$. Тогаш правата OY има равенка $y=-\frac{1}{t}x$. Нивните пресеци со дадената парабола (различни од точката O) имаат координати

$$X(\frac{2p}{t^2},\frac{2p}{t}),\ Y(2pt^2,-2pt).$$

Затоа средината Z на отсечката XY има координати:

$$x=p(t^2+\frac{1}{t^2}),\ y=p(-t+\frac{1}{t}).$$

Ако го елиминираме параметарот t ја добиваме равенката на бараното геометриско место

$$y^2=p(x-2p).$$

Лесно се проверува дека секоја точка од оваа парабола е средина на една од опишаните отсечки XY.

б) Правата XY има равенка

$$(x-\tfrac{2p}{t^2}):(t^2-\tfrac{1}{t^2})=(y-\tfrac{2p}{t}):(-t-\tfrac{1}{t}).$$

Непосредно се проверува дека оваа равенка, за произвоно t, ја задоволуваат координатите на точката $(2p,0)$.

4. Прво докажи го идентитетот

$$(x+y+z)^2=\tfrac{1}{2}((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2)+3(xy+yz+zx)$$

а потоа:

а) Ако збирот $x+y+z$ има константна вредност s, определи при кои услови изразот $xy+yz+zx$ има најголема можна вредност.

б) Користејќи го добиениот резултат реши го следниов проблем: Познато е дека вредноста на дијаматот е пропорционална со квадратот на неговата маса. Ако еден дијамант се подели на три дела, чии маси се x,y,z, докажи дека вкупната вредност е секогаш помала од вредноста на целиот дијамант и дека таа е најмала кога дијамантот ќе се подели на три еднакви дела.

Решение. а) Од дадениот идентитет, кој се докажува со непосредна проверка, следува

$$xy+yz+zx=\tfrac{1}{3}[(x+y+z)^2-\tfrac{1}{2}((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2]\le\tfrac{1}{3}s^2,$$

при што равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{s}{3}$. Според тоа, бараната најголема можна вредност е еднаква на $\frac{1}{3}s^2$ и таа се достигнува за $x=y=z=\frac{s}{3}$.

б) Тврдењето следува од двојното неравенство

$$(x+y+z)^2\ge x^2+y^2+z^2=(x+y+z)^2-2(xy+yz+zx)\ge s^2-\tfrac{2}{3}s^2=\tfrac{1}{3}s^2,$$

при што во левото неравенство знак за равенство важи ако и само ако два од броевите x,y,z се еднакви на нула, а во десното неравенство знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{s}{3}$.

IV година

1. Нека p и q се прости броеви, бројот q^3-1 е делив со p, а бројот $p-1$ е делив со q. Докажи дека $p=1+q+q^2$.

Решение. Од $q\,|\,p-1$ следува $q<p$, па како p е прост број, од $p>q-1$ и $p\,|\,q^3-1=(p-1)(p^2+p+1)$ следува $p\,|\,q^2+q+1$. Нека $q^2+q+1=kp$ и спротивно на тврдењето $k>1$. Тогаш од $q\,|\,p-1$ следува $p-1=lq$ за некој $l\in\mathbb{N}$, па затоа

$$q^2+q+1=k(lq+1)=klq+k\,.$$

Оттука следува $q\,|\,k-1$, па е $k\geq q+1$. Но, тогаш

$$q^2+q+1\geq (q+1)(lq+1)\geq q^2+2q+1,$$

што е противречност. Од добиената противречност следува $k=1$ и $p=1+q+q^2$.

2. Во едно одделение има 25 ученици. Докажи дека од нив не може да се формираат повеќе од 30 кошаркарски екипи со по 5 играчи во секоја, ако било кои две екипи немаат повеќе од еден играч кој е член и на двете екипи.

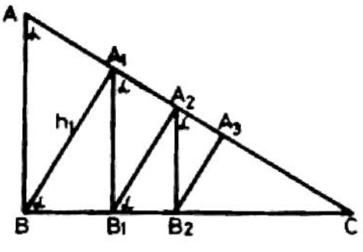
Решение. Нека при дадените услови може да се формираат n екипи. Да ги воочиме сите двоелементни подмножества од множеството од 25 ученици, кои ги има $\binom{25}{2}=300$. Секоја од овие n екипи содржи по $\binom{5}{2}=10$ такви двоелементни подмножества. Според условот на задачата два пара од различни екипи се различни, па затоа мора да важи $10n\leq 300$, т.е. $n\leq 30$.

Забелешка. Може да се докаже дека на опишаниот начин може да се формираат 30 екипи, т.е. дека $n=30$.

3. Во правоаголен триаголник ABC, со прав агол во темето B, дадени се аголот α во темето A и висината повлечена кон хипотенузата $BA_1=h_1$. Од точката A_1 е повлечена нормала A_1B_1 на BC, од точката B_1 нормала B_1A_2 на AC, од точката A_2 нормала A_2B_2 на BC итн. Потоа во секој од триаголниците ABA_1, BA_1B_1, $A_1B_1A_2$, $B_1A_2B_2$ итн. е вишан круг.

а) Определи го збирот на плоштините на сите вишани кругови.

б) Определи го аголот α така да овој збир биде максимален.



Решение. а) Лесно се покажува дека радиусот на вишаната кружница во правоаголен триаголник со хипотенуза c и остар агол α е еднаков на $\frac{c}{2}(\sin\alpha+\cos\alpha-1)$. Дадените триаголници

$$ABA_1,\, BA_1B_1,\, A_1B_1A_2,\, B_1A_2B_2,\ldots$$

се правоаголни со остар агол α и хипотенузи соодветно еднакви на

$$\frac{h_1}{\sin\alpha},\, h_1,\, h_1\sin\alpha,\, h_1\sin^2\alpha,\ldots.$$

Затоа бараниот збир на плоштините на нивните вишани кружници е

$$\begin{aligned}S&=\tfrac{\pi}{4}h_1^2(\sin\alpha+\cos\alpha-1)^2\left(\tfrac{1}{\sin^2\alpha}+1+\sin^2\alpha+\ldots\right)\\&=\tfrac{\pi}{4}h_1^2\left(\tfrac{\sin\alpha+\cos\alpha-1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2.\end{aligned}$$

б) Изразот во последната заграда на интервалот $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ има максимум за $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и овој максимум е еднаков на $4(3-2\sqrt{2})$, па затоа $S = \pi h_1^2(3-2\sqrt{2})$.

4. Иста како 4-тата задача од III година.

Мала олимпијада 1968

1. Во рамнината се дадени 6 точки и секои две од нив се поврзани со отсечка. Докажи дека односот на должината d на најдолгата од нив отсечка спрема должината δ на најкратката од нив отсечка не е помал од $\sqrt{3}$.

Решение. Прво да претпоставиме дека постојат три од дадените шест точки (нека се тоа A, B, C) кои припаѓаат на една права и нека B е меѓу A и C. Тогаш

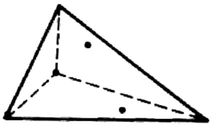
$$d \geq AC \geq 2\min\{AB, BC\} \geq 2\delta,$$

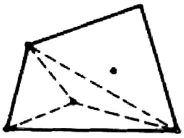
од каде следува $\frac{d}{\delta} \geq 2 > \sqrt{3}$.

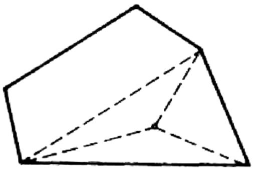
Нека сега меѓу дадените точки не постојат три колинеарни. Ќе докажеме дека некои три од нив формираат триаголник во кој еден агол е поголем или еднаков на 120°.

Да ја формираме конвексната обвивка на дадените шест точки, т.е. најмалото конвексно множество кое ги содржи шесте точки. Таа може да биде триаголник, четириаголник, петаголник или шестаголник. Посебно ќе го разгледаме секој од овие случаи.

Во случај кога конвексната обвивка е триаголник, четириаголник или петаголник (цртеж долу), барем една од дадените точки лежи во внатрешноста на обвивката, па затоа постои триаголник чии темиња се дадените точки, во кој се наоѓа една од дадените точки. Ако оваа точка ја поврземе со темињата на триаголникот во кој се наоѓа, тогаш збирот на трите агли чие теме е воочената точка ќе биде 360°, па затоа барем еден од нив ќе биде поголем или еднаков на 120°. Соодветниот триаголник ги задоволува бараните услови.







Ако дадените шест точки формираат конвексен шестаголник, тогаш збирот на аглите на шестаголникоте 720°, па затоа барем еден од нив е поголем или еднаков на 120°.

Сега да го воочиме триаголникот чија егзистенција ја докажавме. Нека неговите темиња се A, B, C и нека $\measuredangle BCA > 120^\circ$. Тогаш

$$d \geq AB = \sqrt{AC^2 + BC^2 - 2AC \cdot BC \cos \measuredangle BCA} \geq \sqrt{\delta^2 + \delta^2 + 2\delta^2 \cdot \tfrac{1}{2}} = \delta\sqrt{3} .$$

Забелешка. Докажаната оценка $\frac{d}{\delta} \geq \sqrt{3}$ не е најдобрата можна оценка. Може да се докаже дека важи $\frac{d}{\delta} \geq 2\cos 18^\circ \approx 1{,}90$, при што знак за равенство се достигнува ако пет од дадените точки се темиња на правилен петаголник, а шестата точка е неговиот центар на опишаната (впишаната) кружница.

2. За да природниот број $n > 3$ е прост потребно и доволно е да постои природен број α таков што $n! = n(n-1)(\alpha n + 1)$. Докажи!

Решение. *Условот е доволен.* Нека за некој $\alpha \in \mathbb{N}$ е исполнето

$$n! = n(n-1)(\alpha n + 1), \text{ т.е. } (n-2)! = \alpha n + 1,$$

и нека n не е прост број. Ако p е било кој делител на n, тогаш $1 < p < n-2$, па значи $n \,|\, (n-2)!$. Меѓутоа $p \,|\, n,$ па затоа αn не е делив со p, што е противречност.

Условот е потребен. Ќе докажеме две помошни тврдења.

а) Ако $(a,m) = 1,\ a, m \in \mathbb{N}$, тогаш броевите $a, 2a, \dots, ma$ земени во некој редослед при делење со m даваат остатоци $0,1,2,\dots,m-1$.

Навистина, ако ka и la, $k \neq l$ даваат ист остаток, тогаш $m \,|\, (k-l)$, што е противречност.

б) Ако p е прост број, тогаш за секој $k,\ \ 2 \leq k \leq p-2$ постои $l,\ 2 \leq l \leq p-2$, таков што $p \,|\, (kl-1), k \neq l$.

Според а) броевите $k, 2k, \dots, pk,\ \ 2 \leq k \leq p-2$, земени во некој редослед, при делење со p даваат остатоци $0,1,2,\dots,p-1$. Меѓутоа

$$p \nmid (k-1), p \nmid pk, p \nmid (p-k-1),$$

па значи еден и само еден од броевите $kl,\ l = 2,3,\dots,p-2$, при делење со p дава остаток 1. Притоа $k \neq l$ бидејќи ако $k = l$, тогаш

$$p \,|\, (k^2 - 1) = (k-1)(k+1),$$

што противречи на $2 \leq k \leq p-2$ и p е прост број.

Од тврдењето б) имаме, ако p е прост број тогаш множителите $2,3,\dots,n-2$ на производот $(n-2)!$ можеме да ги поделиме на $\frac{n-3}{2}$ парови, такви што производот на секој од паровите при делење со n дава остаток 1. Затоа $n \,|\, ((n-2)! - 1)$, т.е. постои $\alpha \in \mathbb{N}$ таков што $n! = n(n-1)(\alpha n + 1)$.

3. Секоја од страните BC, CA, AB на триаголникот ABC е поделена на три еднакви отсечки и над средната отсечка на секоја страна надвор од триаголникот

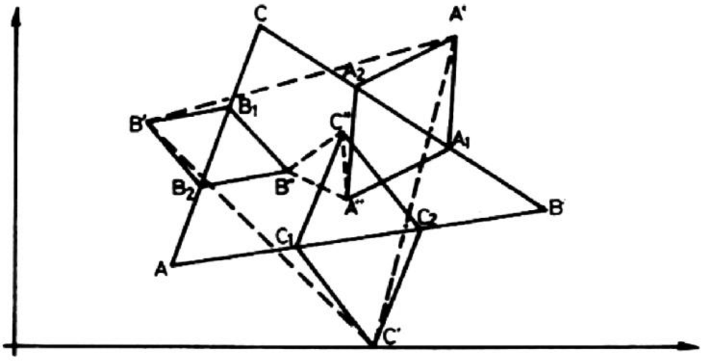
ABC е конструиран рамностран триаголник. Темињата на овие триаголници кои не припаѓаат на страните на дадениот триаголник се означени со A', B', C'. Нека A'', B'', C'' се соодветно симетричните точки на точките A', B', C' редоследно во однос на страните BAC, CA, AB. Докажи:

а) Триаголниците $A'B'C'$ и $A''B''C''$ се рамнострани.

б) Траголниците ABC, $A'B'C'$ и $A''B''C''$ имаат заедничко тежиште.

Решение. а) Нека дадениот триаголник се наоѓа во комплексната рамнина и нека неговите темиња A, B, C имаат афикси a, b, c. Тогаш точките C_1 и C_2 (види цртеж) соодветно имаат афикси

$$a+\frac{b-a}{3}=\frac{2a+b}{3} \text{ и } \frac{2a+b}{3}+\frac{b-a}{3}=\frac{a+2b}{3}.$$



Точката C' се добива со ротација на точката C_2 околу точката C_1 за агол $-\frac{\pi}{3}$, па затоа таа има афикс $\frac{2a+b}{3}+\frac{b-a}{3}(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})$. На сличен начин се добива дека афиксите на точките A', B', A'', B'', C'' се:

$$A': \quad \frac{2b+c}{3}+\frac{c-b}{3}(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}),$$

$$B': \quad \frac{2c+a}{3}+\frac{a-c}{3}(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}),$$

$$A'': \quad \frac{2b+c}{3}+\frac{c-b}{3}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}),$$

$$B'': \quad \frac{2c+a}{3}+\frac{a-c}{3}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}),$$

$$C'': \quad \frac{2a+b}{3}+\frac{b-a}{3}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}).$$

Со ротација на точката B' околу точката A' за агол $\frac{\pi}{3}$ се добива точката чиј афикс е

$$\frac{2b+c}{3}+\frac{c-b}{3}(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})+\frac{c+a-2b}{3}(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})+\frac{a+b-2c}{3}=\frac{2a+b}{3}+\frac{b-a}{3}(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3})$$

односно точката C'. Затоа триаголникот $A'B'C'$ е рамностран. На сличен начин се докажува дека и триаголникот $A''B''C''$ е рамностран.

б) Тежиштето T на триаголникот ABC има афикс $\frac{1}{3}(a+b+c)$, тежиштето T' на триаголникот $A'B'C'$ има афикс

$$\tfrac{1}{3}(\tfrac{3a+3b+3c}{3}+\tfrac{b-a+c-b+a-c}{3}(\cos\tfrac{\pi}{3}-i\sin\tfrac{\pi}{3}))=\tfrac{1}{3}(a+b+c),$$

а ист афикс има и тежиштето T'' на триаголникот $A''B''C''$, со што е докажано тврдењето на задачата.

4. Ако полином со степен n прима целобројни вредности за вредностите $k,k+1,...,k+n$ на променливата x, каде k е цел број, тогаш тој полином прима целобројни вредности за секој цел број x. Докажи!

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $k=0$ (во спротивно наместо дадениот полином P кој прима целобројни вредности во точките $k,k+1,...,k+n$, ќе го разгледуваме полиномот $P_1(x)=P(x+k)$ кој прима целобројни вредности во точките $0,1,...,n$).

Јасно, ако полином од прва степен во точките 0 и 1 прима целобројни вредности, тогаш тој прима целобројни вредности за секој цел број.

Нека претпоставиме дека секој полином Q со степен $n-1$ кој во точките $0,1,...,n-1$ прима целобројни вредности, прима целобројни вредности во сите целобројни точки. Нека P е полином од $n-$ти степен таков што $P(0),P(1),...,$ $P(n)$ се цели броеви. Тогаш

$$Q(x)=P(x+1)-P(x)$$

е полином од $(n-1)-$ви степен таков што

$$Q(0)=P(1)-P(0), Q(1)=P(2)-P(1),...,Q(n-1)=P(n)-P(n-1)$$

се цели броеви. Од индуктивната претпоставка следува дека полиномот Q прима целобројни вредности за секој цел број x. Но, оттука следува дека полиномот P го има истото својство. На пример, тоа може да се заклучи со индукција по $x\in\mathbb{Z}$, бидејќи $P(n+1)=P(n)+Q(n)$ и $P(-1)=P(0)-Q(-1)$ итн.

5. Нека n е природен број поголем од 1, а x е реален број.

а) Пресметај

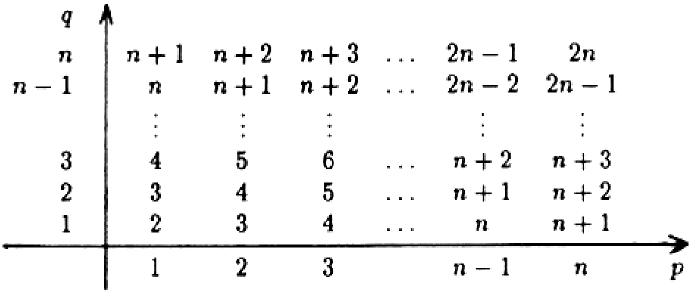
$$S(x,n)=\sum_{\substack{p,q=1\\p\neq q}}^{n}(x+p)(x+q).$$

б) Дали постојат цели броеви x, за кои $S(x,n)=0$.

Решение. а) Дадениот збир да го запишеме во видот

$$S(x,n)=\sum_{\substack{p,q=1\\p\neq q}}^{n}(x+p)(x+q)=\sum_{\substack{p,q=1\\p\neq q}}^{n}(x^2+(p+q)x+pq)=Ax^2+Bx+C,$$

каде A,B,C се коефициенти кои треба да се определат. Парови (p,q) такви што $p,q\in\{1,2,...,n\}$ и $p\neq q$ има n^2-n, па затоа $A=n^2-n$. За да го пресметаме коефициентот B, да ги подредиме сите збирови во табела која што е прикажано на долниот цртеж:

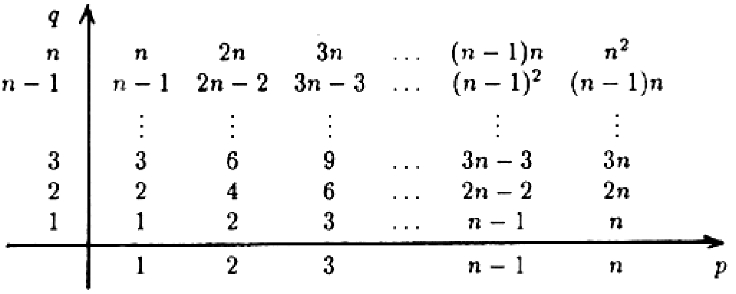


q							
n	$n+1$	$n+2$	$n+3$	$\dots$	$2n-1$	$2n$	
$n-1$	n	$n+1$	$n+2$	$\dots$	$2n-2$	$2n-1$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
3	4	5	6	$\dots$	$n+2$	$n+3$	
2	3	4	5	$\dots$	$n+1$	$n+2$	
1	2	3	4	$\dots$	n	$n+1$	
	1	2	3		$n-1$	n	p

Оттука лесно се добива дека

$$B=2+2\cdot3+...+(n-1)n+n(n+1)+(n-1)(n+2)+...+2(2n-1)+2n-(2+4+...+2n)$$
$$=(2+2n)+2(2+2n)+3(2+2n)+...+(n-1)(2+2n)+n(n+1)-2(1+2+...+n)$$
$$=2(n+1)(1+2+...+(n-1))+n(n+1)-2\tfrac{n(n+1)}{2}$$
$$=2(n+1)\tfrac{(n-1)n}{2}=(n-1)n(n+1).$$

На сличен начин, користејќи ја долната табела



q							
n	n	$2n$	$3n$	$\dots$	$(n-1)n$	n^2	
$n-1$	$n-1$	$2n-2$	$3n-3$	$\dots$	$(n-1)^2$	$(n-1)n$	
	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	
3	3	6	9	$\dots$	$3n-3$	$3n$	
2	2	4	6	$\dots$	$2n-2$	$2n$	
1	1	2	3	$\dots$	$n-1$	n	
	1	2	3		$n-1$	n	p

во која се запишани сите производи pq, добиваме

$$C=(1+2+...+n)+2(1+2+...+n)+...+n(1+2+...+n)-(1^2+2^2+...+n^2)$$
$$=\tfrac{n(n+1)}{2}\cdot\tfrac{n(n+1)}{2}-\tfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\tfrac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n+2).$$

Според тоа,

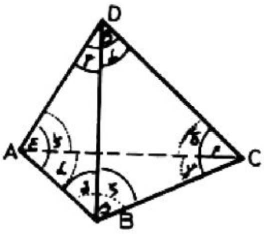
$$S(x,n)=(n-1)nx^2+(n-1)n(n+1)x+\tfrac{1}{12}(n-1)n(n+1)(3n+2).$$

б) Решавајќи ја равенката $S(x,n)=0$ добиваме $x=\frac{-(n+1)\pm\sqrt{\frac{n+1}{3}}}{2}$ и овој број при целобројни вредности на n ќе биде цел број ако и само ако $n=3k^2-1, k\in\mathbb{N}$.

6. За да центарот S на сферата опишана околу тетраедарот се совпадне со центарот S' на сферата впишана во тетраедарот, потребно и доволно е разминувачките рабови на тетраедарот да се еднакви. Докажи!

Решение. Прво да претпоставиме дека центрите на сферите S и S' се совпаѓаат. Тогаш ѕидовите на дадениот тетраедар се еднакво оддалечени од центарот S на опишаната сфера, па затоа пресеците на соодветните рамнини со опишаната сфера се складни кружници. Аглите BAC и BDC се периферни агли во скалдни кружници над тетивата BC (цртеж десно), па затоа се еднакви и нивната вредност да ја означиме со α. На сличен начин добиваме дека

$$\measuredangle CBA = \measuredangle CDA = \beta,$$
$$\measuredangle ACB = \measuredangle ADB = \gamma,$$
$$\measuredangle ABD = \measuredangle ACD = \delta,$$
$$\measuredangle BCD = \measuredangle BAD = \varepsilon,$$
$$\measuredangle CBD = \measuredangle CAD = \varsigma.$$



Од триаголниците ABC, BCD, CDA, DAB добиваме

$$\alpha+\beta+\gamma=180^\circ, \alpha+\varepsilon+\varsigma=180^\circ, \quad \beta+\delta+\varsigma=180^\circ, \ \gamma+\delta+\varepsilon=180^\circ.$$

Од првите две равенки на овој систем следува $\beta+\gamma=\varepsilon+\varsigma$, а од другите две следува $\beta+\varsigma=\gamma+\varepsilon$. Од овие две релации добиваме дека $\beta=\varepsilon$ и $\varsigma=\gamma$. Оттука следува дека триаголниците ABC и DCB се складни, па затоа $AB=DC$ и $CA=BD$. Слично се докажува дека $BC=DA$.

Обратно, нека разминувачките рабови на тетраедарот се еднакви. Тоа значи дека ѕидовите на тетраедарот се меѓусебно складни триаголници, па затоа и опишаните кружници околу нив се складни. Според тоа, тие ѕидови се еднакво оддалечени од центарот S на опишаната сфера околу тетраедарот, што значи дека центарот S' на впишаната сфера се совпаѓа со S.

Сојузен натпревар 1969

II година

1. Која релација што не зависи од m постои меѓу решенијата на равенката

$$(x^2-6x+5)+m(x^2-5x+6)=0\,?$$

Решение. Ако $m\neq -1$, тогаш дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$x^2-\tfrac{5m+6}{m+1}x+\tfrac{6m+5}{m+1}=0$$

и има решенија x_1 и x_2 за кои важи

$$x_1+x_2=\tfrac{5m+6}{m+1}=5+\tfrac{1}{m+1},$$

$$x_1x_2=\tfrac{6m+5}{m+1}=6-\tfrac{1}{m+1}.$$

Ако ги собереме последните две равенства добиваме

$$x_1+x_2+x_1x_2=11.$$

2. Докажи дека за секој природен број n барем еден од броевите $3^{3n}+2^{3n}$ и $3^{3n}-2^{3n}$ е делив со 35.

Решение. Ако $n=2k+1$, каде $k\in\{0,1,2,...\}$, тогаш

$$3^{3n}+2^{3n}=27^n+8^n=27^{3k+1}+8^{3k+1}=(27+8)\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i 27^{2k-i}8^i$$

$$=35\sum_{i=0}^{2k}(-1)^i 27^{2k-i}8^i,$$

што значи $35\,|\,3^{3n}+2^{3n}$.

Ако $n=2k$, каде $k\in\{1,2,3,....\}$, тогаш

$$3^{3n}-2^{3n}=3^{6k}-2^{6k}=729^k-64^k=(729-64)\sum_{i=0}^{k-`}729^{k-1-i}64^i$$

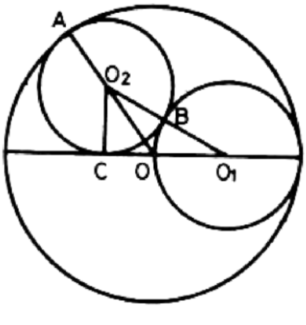
$$=35\cdot 19\sum_{i=0}^{k-`}729^{k-1-i}64^i,$$

што значи $35\,|\,3^{3n}-2^{3n}$.

3. Дадени се две кружници со центри O и O_1 и радиуси R и $\frac{R}{2}$. Кружниците внатрешно се допираат во точката T. Конструирај кружница која ги допира дадените кружници и правата OO_1.

Решение. *Анализа.* Со k и k_1 да ги означиме дадените кружници со центри O и O_1. Нека претпоставиме дека кружницата k_2 со центар O_2 и радиус x ги допира кружниците k и k_1 и правата OO_1, редоследно во точките A, B и C, (цртеж десно). Да означиме $OC=c$. Бидејќи

$O_1O_2=\frac{R}{2}+x$, $OO_2=R-x$, $O_2C=x$, $CO_1=\frac{R}{2}+c$,



и бидејќи триаголниците O_2CO и O_2CO_1 се правоаголни (со прави агли во темето C), од Питагоровата теорема следува

$$(\tfrac{R}{2}+c)^2+x^2=(\tfrac{R}{2}-c)^2,$$

$$c^2+x^2=(R-x)^2,$$

т.е.

$$Rc+c^2=Rx, c^2=R^2-2Rx\,.$$

Ако го елиминираме c од овие равенства, добиваме $x=\frac{4R}{9}$. Да забележиме дека $O_1O_2=\frac{17R}{18}, OO_2=\frac{5R}{9}$.

Конструкција. Конструираме кружница k_3 со центар O_1 и радиус $\frac{17R}{18}$ и кружница k_4 со центар O и радиус $\frac{5R}{9}$. Нека O_2' е пресек на кружниците k_3 и k_4. Конструираме кружница k_2' со центар O_2' и радиус $\frac{4R}{9}$. Тогаш k_2' е бараната кружница.

Доказ. Кружниците k_3 и k_4 се сечат бидејќи броевите $\frac{17R}{18}$, $\frac{5R}{9}$ и $\frac{R}{2}$ го задоволуваат потребниот и доволен услов да може да се страни на триаголник. Бидејќи $(\frac{17R}{18})^2>(\frac{5R}{9})^2+(\frac{R}{2})^2$, заклучуваме дека $O_1O_2'O$ е тапоаголен триаголник со тап агол во темето O. Според тоа, точката O се наоѓа меѓу точката O_1 и подножјето C' на висината на триаголникот $O_1O_2'O$ од темето O_2'. Да означиме $C'O=c'$ и $C'O_2'=h$. Бидејќи триаголниците $O_2'C'O$ и $O_2'C'O_1$ се правоаголни со прави агли во темето C', важи

$$h^2=(\tfrac{5R}{9})^2-c'^2=(\tfrac{17R}{18})^2-(\tfrac{R}{2}+c')^2.$$

Понатаму, лесно добиваме $c'=\frac{R}{3}$ и $h=\frac{4R}{9}$, што значи дека кружницата k_2' ја допира правата OO_1. Од равенството

$$O_2'O_1=\tfrac{17R}{18}=\tfrac{R}{2}+\tfrac{4R}{9}$$

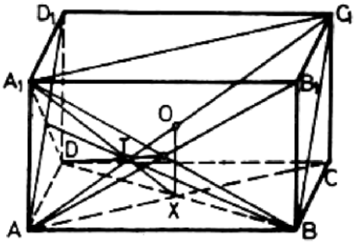
следува дека кружницата k_2' ја допира кружницата k_1. Бидејќи

$$O_2'O=\sqrt{c'^2+h^2}=\tfrac{5R}{9}=R-\tfrac{4R}{9},$$

заклучуваме дека кружниците k_2' и k се допираат.

Дискусија. Кружниците k_2' и k_1 имаат две пресечни точки, што значи дека задачата има две решенија.

4. Во тристрана пирамида сите агли на бочните ѕидови при врвот на пирамидата се прави. Докажи дека врвот на пирамидата, тежиштето на основата и центарот на сферата опишана околу пирамидата припаѓаат на иста права.



Решение. Нека $ABDA_1$ е дадената пирамида и нека сите агли на бочните ѕидови во темето A се прави. Понатаму, нека $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е паралелопипед (со еден ѕид $ABCD$ и рабови AA_1, BB_1, CC_1, DD_1), цртеж десно. Нека O е средината на отсечката AC_1 и T е тежиштето на триаголникот A_1BD. Тогаш O е центарот на опишаната сфера околу паралелопипедот $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (па според тоа и околу пирамидата $ABDA_1$). Правата AC_1 е пресек на рамнините ABC_1D_1, ACC_1A_1 и ADC_1B_1. Бидејќи средината X на отсечката BD припаѓа на правата AC, заклучуваме дека тежишната линија A_1X на триаголникот A_1BD припаѓа на рамнината ACC_1A_1. Слично се докажува дека и рамнините ABC_1D_1 и ADC_1B_1 содржат по една тежишна линија на триаголникот A_1BD. Според тоа, точката T припаѓа на пресекот на овие три рамнини, т.е. на правата AO.

III година

1. Тристрана пирамида $OABC$ има бочни рабови $OA=a$, $OB=b$, $OC=c$, а аглите AOB, BOC, COA се прави. Ако α, β, γ се аглите кај темињата A, B, C на основата ABC, докажи дека

$$\operatorname{ctg}\alpha : \operatorname{ctg}\beta : \operatorname{ctg}\gamma = a^2 : b^2 : c^2 .$$

Решение. Со примена на косинусната и Питагоровата теорема добиваме

$$\cos\alpha = \frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC} = \frac{a^2+b^2+a^2+c^2-b^2-c^2}{2\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}} .$$

Понатаму,

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{a^2+c^2}} .$$

Аналогно добиваме

$$\cos\beta = \frac{b^2}{\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{b^2+a^2}}, \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}}{\sqrt{b^2+c^2}\sqrt{b^2+a^2}} ,$$

па лесно следува дека

$$\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{ctg}\beta}=\frac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta\sin\alpha}=\frac{a^2}{b^2}.$$

Слично се докажуваат останатите односи.

2. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$x_1+x_2+...+x_n=1,$$
$$x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=1,$$
$$..............................$$
$$x_1^n+x_2^n+...+x_n^n=1.$$

Решение. Очигледно дека системот ги има следниве n решенија:

$$(1,0,0,....,0,0),\ (0,1,0,....,0,0),\ ...,\ (0,0,0,...,0,1).$$

Ќе докажеме дека системот нема други решенија.

Нека $n=2$. Тогаш од $x_1+x_2=x_1^2+x_2^2=1$ следува

$$2x_1x_2=(x_1+x_2)-(x_1^2+x_2^2)=0,$$

па затоа еден од броевите x_1 и x_2 мора да е еднаков на 0, а другиот на 1.

Нека $n=3$. Тогаш од $x_1+x_2+x_3=x_1^2+x_2^2+x_3^2=x_1^3+x_2^3+x_3^3=1$ и равенстата

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=(x_1+x_2+x_3)^2-2(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1),$$
$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=(x_1+x_2+x_3)(x_1^2+x_2^2+x_3^2-x_1x_2-x_2x_3-x_3x_1)+3x_1x_2x_3,$$

следува $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1=0$ и $x_1x_2x_3=0$. Според тоа, барем еден од броевите x_1,x_2,x_3 е еднаков на 0, па аналогно како во претходниот случај добиваме дека и еден од преостанатите два броја е еднаков на 0, а другиот е еднаков на 1.

Нека $n\geq 4$. Тогаш од равенството $x_1^2+x_2^2+...+x_n^2=1$ следува

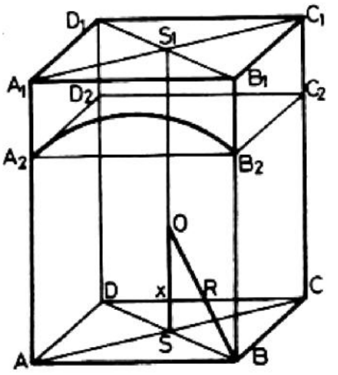
$$x_1^2\leq 1,\ x_2^2\leq 1,\ ...,\ x_n^2\leq 1.$$

Ако некој од броевите $x_1^2,x_2^2,...,x_n^2$ (на пример x_1^2) е еднаков на 1, тогаш секој од броевите $x_2^2,...,x_n^2$ е еднаков на 0, т.е. секој од броевите $x_2,...,x_n$ е еднаков на 0, па од условот $x_1+x_2+...+x_n=1$ следува $x_1=1$. Ако $x_1^2<1,\ x_2^2<1,\ ...,\ x_n^2<1$, тогаш

$$1=x_1^2+x_2^2+...+x_n^2>x_1^4+x_2^4+...+x_n^4=1,$$

што е противречност, т.е. $n-$торката $(x_1,x_2,...,x_n)$ не е решение на системот.

3. Дадена е правилна четиристрана призма со основен раб $2a$ и висина $a(1+\sqrt{3})$. Една сфера минува низ четирите темиња на долната основа и ја допира горната основа. Определи ја плоштината на оној дел од призмата кој е внатре во сферата.



Решение. Нека A,B,C,D,A_1,B_1,C_1,D_1 се темињата на дадената призма, при што основата е квадратот $ABCD$ со страна $2a$, а AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 се рабови на призмата со должина $a(1+\sqrt{3})$. Понатаму, нека S е пресекот на дијагоналите на квадратот $ABCD$, S_1 е пресекот на дијагоналите на квадратот $A_1B_1C_1D_1$, O и R се соодветно центарот и радиусот на дадената сфера и $x=OS$ (цртеж десно). Триаголникот OSB е правоаголен со прав агол во темето S, па затоа

$$S_1S-S_1O=x=\sqrt{OB^2-BS^2},$$
$$((1+\sqrt{3})a-R)^2=R^2-2a^2,$$
$$R=a\sqrt{3},$$
$$x=a.$$

Ако A_2,B_2,C_2,D_2 се редоследно точки на рабовите AA_1,BB_1,CC_1,DD_1 такви што $AA_2=BB_2=CC_2=DD_2=2a$, тогаш $ABCDA_2B_2C_2D_2$ е коцка, а дадената сфера е опишана околу таа коцка. Делот од плоштината на ѕидот ABB_1A_1 на призмата кој се наоѓа внатре во кружницата опишана околу квадратот ABB_2A_2 е еднаков на

$$(2a)^2+\tfrac{1}{4}((a\sqrt{2})^2\pi-(2a)^2)=\tfrac{a^2\pi}{2}+3a^2.$$

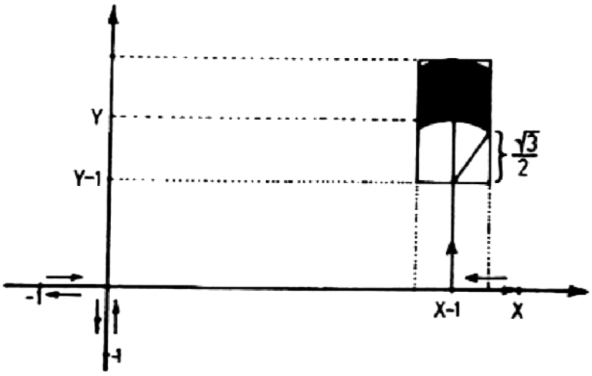
Делот од плоштината на призмата кој се наоѓа во внатрешноста на сферата е еднаков на

$$4(\tfrac{a^2\pi}{2}+3a^2)+4a^2=2a^2(8+\pi).$$

4. Некој кратковид мудрец кој гледа предмети само на растојание помало од $1m$, направил ваква опклада: Ако било каде на растојание d од него се постави некој предмет, тогаш тој (под услов по секој направен чекор од $1m$ да му се каже дали на тој начин се приближил или се оддалечил од предметот) во конечно многу чекори ќе го најде предметот, а бројот на направените чекори ќе биде сигурно помал од $\frac{3d}{2}+7$. Се смета дека предметот е најден, тогаш кога мудрецот ќе го здогледа. Докажи дека мудрецот ќе ја добие опкладата.

Решение. Да воведеме правоаголен координатен систем така што мудрецот ќе се наоѓа во координатниот почеток. Нека предметот се наоѓа во точката (x_0,y_0). Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $x_0\geq 0, y_0\geq 0$. Мудрецот може да го бара предметот на следниов начин:

1) Прво со најмногу 4 чекори го наоѓа квадрантот во кој се наоѓа предметот (поточно, квадрантот во кој предметот се наоѓа или од кој е оддалеченм помалку од $\frac{1}{2}$), цртеж десно.



2) Потоа се движи по оној дел на $x-$оската кој не граница на најдениот квадрант, се додека не почне да се оддалечува од предметот (на пример x чекори), па потоа ќе се врати еден чекор назад. Притоа важи $x-\frac{3}{2}\le x_0\le x-\frac{1}{2}$.

3) Потоа во воочениот квадрант се движи паралелно на $y-$оската (y чекори) се додека не го здогледа предметот. Притоа важи

$$y-1+\frac{\sqrt{3}}{2}\le y_0\le y+1.$$

Вкупниот број чекори е најмногу $A=4+x+1+y$, па имаме

$$A=5+x+y\le 5+x_0+\frac{3}{2}+y_0+1-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=x_0+y_0+7-\frac{1-\sqrt{3}}{2}<\sqrt{2}d+7<\frac{3}{2}d+7.$$

Во претпоследното неравенство го користевме тврдењето: Ако за позитивните броеви a и b важи $a^2+b^2<d^2$ и $\frac{a}{b}=\mathrm{tg}\alpha, 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, тогаш

$$a+b<d(\sin\alpha+\cos\alpha)=\sqrt{2}d\cos(\frac{\pi}{4}-\alpha)<\sqrt{2}d.$$

IV година

1. Иста како 4-тата задача од III година.

2. Ако p е непарен прост број и a е цел број кој не е делив со p, тогаш еден и само еден од броевите

$$A=a^{1+2+...+(p-1)}+1,\ B=a^{1+2+...+(p-1)}-1$$

е делив со p. Докажи!

Решение. Имаме

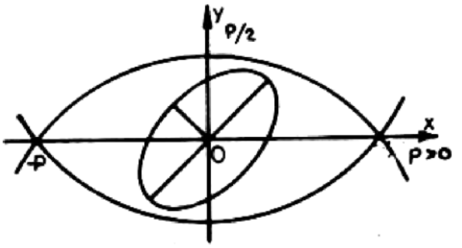
$$A-B=2 \text{ и } AB=(a^p)^{p-1}-1.$$

Бидејќи p е прост број поголем од 2, бројот $A-B$ не е делив со p, па затоа двата броја A и B не може да се деливи со p. Но, од малата теорема на Ферма следува дека бројот AB е делив со p, па затоа точно еден од броевите A и B е делив со p.

3. Во заедничкиот дел на внатрешните области на параболите

$$x^2=p^2+2py \text{ и } x^2=p^2-2py$$

впиши елипса со максимална плоштина.



Решение. Ако елипсата се наоѓа внатре во областа ограничена со параболите

$$x^2=p^2+2py \text{ и } x^2=p^2-2py,$$

каде, на пример, $p>0$, цртеж десно, тогаш со транслација на елипсата така што пресекот на оските ќе и се поклопи со координатниот почеток, а потоа со ротација околу координатниот почеток така што големата оска на елипсата ќе падне на $x-$оската, ќе се добие елипса која е внатре во споменатата област (Докажи!).

Равенката на бараната елипса со максимална плоштина има облик

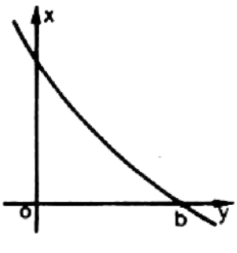
$$\frac{x^2}{\lambda^2b^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \tag{1}$$

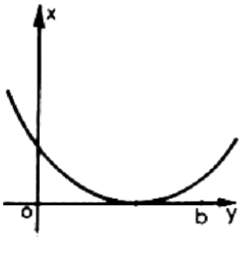
каде $0<b\leq\frac{p}{2}$. Елипсата (1) целосно се содржи во дадената област ако и само ако за секој $y\in(0,b]$ важи

$$x_p^2-x_e^2=p^2-2py-(\lambda^2b^2-\lambda^2y^2)\geq 0, \tag{2}$$

каде x_p и x_e се соодветно апцисите на точките на параболата и елипсата кои имаат иста ордината. Притоа, кај елипсата која има максимална плоштина за некој $y_0\in(0,b]$ важи $x_p^2-x_e^2=0$. Ако $y_0=b$, тогаш е $y_0=b=\frac{p}{2}$, а ординатата на темето на параболата

$$x=\lambda^2y^2-2py+p^2-\lambda^2b^2 \tag{3}$$





не е помала од b (цртеж десно). Значи,

$$y_T=\frac{p}{\lambda^2}\geq b=\frac{p}{2},$$

од каде следува $\lambda^2\leq 2$. Максималната плоштина е

$$P_1=\pi\lambda b^2=\frac{\pi p^2}{2\sqrt{2}}.$$

Ако $0<y_0<b$, тогаш координатите на темето на параболата (3) се

$$y_0 = \frac{p}{\lambda^2},\ x_0 = p^2 - \lambda^2 b^2 - \frac{p^2}{\lambda^2} = 0,$$

од каде имаме две можности за λ^2:

$$\lambda_1^2 = \frac{p^2}{2b^2}(p - \sqrt{p^2 - 4b^2}),\ \lambda_2^2 = \frac{p^2}{2b^2}(p + \sqrt{p^2 - 4b^2}).$$

Бидејќи $\frac{p}{\lambda_1^2} > b$ и $\frac{p}{\lambda_2^2} < b$, мора да е $\lambda = \lambda_2$. Плоштината на соодветна елипса е $P_2 = \pi\lambda b^2$, па следува

$$P_2^2 = \pi^2\lambda^2 b^4 = \frac{\pi^2 p^2}{2} b^2 (p + \sqrt{p^2 - 4b^2}).$$

Функцијата $f(b^2) = b^2(p + \sqrt{p^2 - 4b^2})$ достигнува максимум за $b^2 = \frac{2p^2}{9}$. Тогаш $\lambda^2 = 3$ и $P_2 = \frac{2\pi p^2}{3\sqrt{3}} > P_1$. Бараната елипса е

$$\frac{x^2}{\frac{2p^2}{3}} + \frac{y^2}{\frac{2p^2}{9}} = 1.$$

4. Ако a е реален параметар, определи ги сите реални решенија на системот равенки

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + ... + x_n = a, \\ &x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 = a^2, \\ &.............................. \\ &x_1^n + x_2^n + ... + x_n^n = a^n. \end{aligned}$$

Решение. Ако $a = 0$, тогаш системот има единствено решение

$$x_1 = x_2 = ... = x_n = 0.$$

Ако $a \neq 0$, тогаш аналогно како во задачата 2 за трета година докажуваме дека

$$(a,0,0,...,0,0),\ (0,a,0,...,0,0), ..., (0,0,0,...,0,a)$$

се сите решенија на дадениот систем.

Мала олимпијада 1969

1. Дадени се реални броеви $a_i, b_i\ (i = 1,2,...,n)$ такви што

$$\begin{aligned} &a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n > 0, \\ &b_1 \geq a_1, \\ &b_1 b_2 \geq a_1 a_2, \\ &........................ \\ &b_1 b_2 ... b_n \geq a_1 a_2 ... a_n \end{aligned}$$

Докажи дека

$$b_1+b_2+...+b_n \geq a_1+a_2+...+a_n.$$

Решение. Да означиме $\frac{b_i}{a_i}=\lambda_i$. Од условот на задачата следува $\lambda_i>0$, за $i=1,2,...,n$ и

$$\lambda_1 \geq 1,\ \lambda_1\lambda_2 \geq 1,..., \lambda_1\lambda_2...\lambda_n \geq 1, \qquad (1)$$

а, како $b_i-a_i=(\lambda_i-1)a_i$, треба да се докаже

$$\sum_{i=1}^{n}(\lambda_i-1)a_i \geq 0.$$

Од неравенствата (1) и неравенствата меѓу средините следува

$$\lambda_1 \geq 1,\ \lambda_1+\lambda_2 \geq 2,..., \lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_n \geq n.$$

Ако ги воведеме ознаките $\lambda_i-1=\mu_i$, $i=1,2,...,n$, тогаш имаме

$$a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n > 0,$$

$$\mu_1 \geq 0,\ \mu_1+\mu_2 \geq 0,..., \mu_1+\mu_2+...+\mu_n \geq 0,$$

а треба да се докаже

$$\mu_1a_1+\mu_2a_2+...+\mu_na_n \geq 0.$$

Последното неравенство следува од

$$\begin{aligned}\mu_1a_1+\mu_2a_2+...+\mu_na_n &= \mu_1(a_1-a_2)+(\mu_1+\mu_2)(a_2-a_3)+...\\ &+(\mu_1+\mu_2+...+\mu_{n-1})(a_{n-1}-a_n)+(\mu_1+\mu_2+...+\mu_n)a_n\\ &\geq 0.\end{aligned}$$

2. Нека $f(x)$ и $g(x)$ се полиноми со степен n, а $x_0,x_1,...,x_n$ се $n+1$ различни вредности на променливата x. Ако

$$f(x_0)=g(x_0), f'(x_1)=g'(x_1), f''(x_2)=g''(x_2),..., f^{(n)}(x_n)=g^{(n)}(x_n),$$

докажи дека $f(x)\equiv g(x)$.

Решение. Да означиме $h(x)=f(x)-g(x)$. Тогаш $h(x)$ е полином од степен помал или еднаков на n за кој

$$h(x_0)=h'(x_1)=h''(x_2)=...=h^{(n)}(x_n)=0, \qquad (1)$$

а треба да да докажеме дека $h(x)\equiv 0$. Сега, ако

$$h(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_nx^n,$$

каде коефициентите тогаш $a_i, i=0,1,2,...,n$ треба да ги определиме, тогаш од (1) следува системот

$$\begin{aligned}h(x_0) &= a_0+a_1x_0+a_2x_0^2+...+a_nx_0^n=0\\ h'(x_1) &= \qquad a_1+2a_2x_1+...+na_nx_1^{n-1}=0\\ h''(x_2) &= \qquad\qquad 2a_2+...+n(n-1)x_2^{n-2}=0\\ &...\end{aligned}$$

$$h^{(n-1)}(x_{n-1}) = \qquad (n-1)!a_{n-1}+n!a_n x_{n-1}=0$$
$$h^{(n)}(x_n) = \qquad n!a_n=0$$

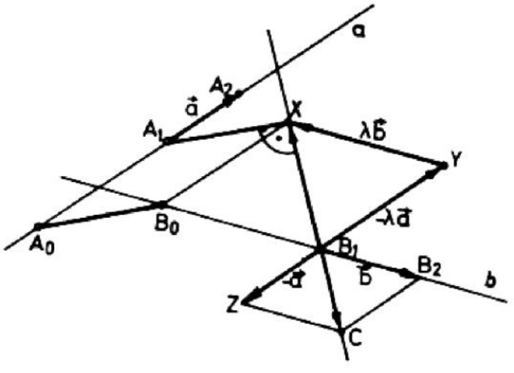
чие решение е $a_i=0, i=0,1,2,...,n$. Според тоа, сите коефициенти на полиномот $h(x)$ се еднакви на 0, па затоа $h(x)\equiv 0$.

3. Точките A и B се движат со константни брзини по правите a и b, а познати се и по две соодветни положби A_1, B_1 и A_2, B_2. Определи ја онаа положба на точките A и B за кои должината AB е најмала.

Решение. Векторите $\vec{a}=\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{B_1B_2}$ се соодветно вектори на брзините на точките A и B. За набљудувач од точката A точката B се движи со брзина која е определена со векторот $\vec{b}-\vec{a}$. Нека Z и C се точки определени со

$$\overrightarrow{B_1Z}=-\vec{a},\ \overrightarrow{B_1C}=\vec{b}-\vec{a}.$$

Минималното растојание меѓу точките A и B при движењето е еднакво на A_1X, каде X е пресекот на правата B_1C со нормалата на таа права која ја содржи точката A_1, цртеж десно. Нека $\overrightarrow{B_1X}=\lambda\overrightarrow{B_1C}=\lambda(\vec{b}-\vec{a})$ и нека A_0 и B_0 се точките определени со $\overrightarrow{A_1A_0}=\lambda\vec{a}$, $\overrightarrow{B_1B_0}=\lambda\vec{b}$. Јасно, точките A_0 и B_0 се соодветни положби на точките A и B при разгледуваното движење. Бидејќи



$$\overrightarrow{A_0B_0}=\overrightarrow{A_0A_1}+\overrightarrow{A_1X}+\overrightarrow{XB_1}+\overrightarrow{B_1B_0}$$
$$=-\lambda\vec{a}+\overrightarrow{A_1X}-\lambda(\vec{b}-\vec{a})+\lambda\vec{b}=\overrightarrow{A_1X}$$

заклучуваме дека A_0 и B_0 се положбите на точките A и B во моментот кога растојанието меѓу нив е минимално.

4. Нека a и b се природни броеви такви што $a<b$. Докажи дека во секое множество од b последователни природни броеви постојат два броја чиј производ е делив со ab.

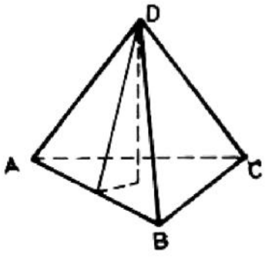
Решение. Нека $\{x_1,x_2,...,x_b\}$ е множество од b последователни природни броеви. Тогаш меѓу нив се наоѓа број x_i кој е делив со b, а како $a<b$, постои и број x_j кој е делив со a. Ако $i\neq j$, тогаш производот x_ix_j е делив со ab.

Да претпоставиме дека $i=j$. Со d да го означиме најголемиот заеднички делител на броевите a и b, а со s нивниот најмал заеднички содржател. Тогаш

$ds = ab$ и $s \mid x_i$. Ќе докажеме дека дека барем еден од броевите $x_i + d$ и $x_i - d$ (кои се деливи со d) припаѓаат на множеството $\{x_1, x_2, ..., x_b\}$. Ако тоа не е точно, тогаш $x_i + d > x_b$ и $x_i - d < x_1$, па затоа ќе важи $2d > x_b - x_1 + 1 = b$. Но, како $d \mid b$, тоа ќе значи дека $d = b > a$, па не може да е $d \mid a$, што противречи на дефиницијата на a.

Нека, на пример, $x_i + d \in \{x_1, x_2, ..., x_b\}$. Тогаш производот $x_i(x_i + d)$ е делив со $ds = ab$.

5. Производот на синусите на два спротивни диедри во тетраедарот е пропорционален со производот на рабовите на тие диедри. Докажи!



Решение. Ќе ја користиме ознаката $\sin(AB)$ за синусот на диедарот со раб AB кај тетраедарот $ABCD$, како и аналогните ознаки во случај со останатите диедри. Нека V е волуменот на тетраедарот. Тогаш

$$\begin{aligned} V &= \tfrac{1}{3} P_{ABC} \frac{2P_{ABD}}{AB} \sin(AB) \\ &= \tfrac{1}{3} P_{BCD} \frac{2P_{ACD}}{CD} \sin(CD) \end{aligned}$$

од каде добиваме

$$\frac{AB \cdot CD}{\sin(AB)\sin(CD)} = \frac{4P_{ABC}P_{ABD}P_{BCD}P_{ACD}}{9V^2}.$$

6. Нека E е множество од $n^2 + 1$ затворени интервали на реалната оска. Докажи дека постои негово подмножество од $n+1$ интервал кои се монотоно подредени во однос на релацијата инклузија или подмножество од $n+1$ интервал од кои ниту еден не содржи ниту еден друг интервал од тоа подмножество.

Решение. Нека A е еден од дадените интервали. Дефинираме карактеристика $r(A)$ на тој интервал на следниот начин: $r(A)$ е најголемиот природен број r, таков што множеството E содржи интервали $I_1, I_2, ..., I_{r-1}, I_r = A$ за кои важи

$$I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_{r-1} \subset I_r = A.$$

Да забележиме дека ако за два интервали A и B важи $r = r(A) = r(B)$, тогаш ниту еден од нив не е подмножество на другиот. Во спротивно, на пример, ако $A \subset B$ и освен тоа постојат интервали $I_1, I_2, ..., I_{r-1}$ сите различни од A и B и такви што важи

$$I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_{r-1} \subset A \subset B,$$

па оттука следува $r(B) \geq r + 1$, што е противречност.

Ако некој од интервалите има карактеристика поголема од n, тогаш тврдењето е докажано. Во спротивно, карактеристиката на секој интервал е број од множеството $\{1,2,...,n\}$. Но, множеството E има n^2+1 интервал, па од принципот на Дирихле следува дека барем $n+1$ од овие интервали имаат еднаква карактеристика. Тогаш ниту еден од овие $n+1$ интервали не е подмножество на некој друг интервал од истите $n+1$ интервали.

Сојузен натпревар 1970

II година

1. Определи три комплексни броја со модул 1 такви што и нивниот збир и нивниот производ е еднаков на 1.

Решение. Нека бараните броеви се z_1, z_2, z_3. Тогаш $z_1 + z_2 + z_3 = 1 = z_1 z_2 z_3$ и

$$z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = \frac{1}{z_3} + \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{\overline{z_3}}{|z_3|^2} + \frac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} + \frac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 1 .$$

Според тоа, од Виетовите формули следува дека бараните броеви се решенија на равенката

$$z^3 - z^2 + z - 1 = 0 ,$$

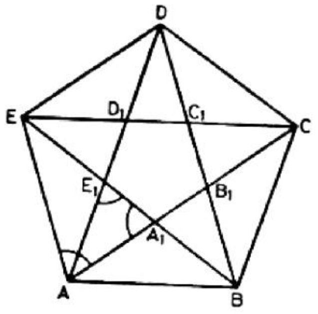
т.е. тоа се броевите $1, i$ и $-i$.

2. Даден е конвексен петаголник $ABCDE$. Дијагоналите на овој петаголник формираат петаголник $A_1B_1C_1D_1E_1$ и петкрака ѕвезда.

а) Определи го збирот на аглите на петкраката ѕвезда во темињата A, B, C, D и E.

б) Ако дадениот петаголник $ABCDE$ е правилен, определи го односот на плоштините на тој петаголник и петаголникот $A_1B_1C_1D_1E_1$.

Решение. а) Збирот на внатрешните агли на петаголникот $A_1B_1C_1D_1E_1$ е еднаков на $3 \cdot 180^\circ$, а збирот на внатрешните агли на десетаголникот AA_1B $B_1CC_1DD_1EE_1$ е еднаков на $8 \cdot 180^\circ$. Секој од аглите на петаголникот $A_1B_1C_1D_1E_1$ собран со соодветниот агол на десетаголникот дава 360° *цртеж десно). Затоа бараниот збир на аглите на ѕвездата, кој е еднаков на збирот на аглите на десетаголникот во темињата A, B, C, D и E, е



$$8 \cdot 180^\circ + 3 \cdot 180^\circ - 5 \cdot 580^\circ = 180^\circ .$$

Забелешка. Бараниот збир може да се пресмета ако од збирот на аглите на петаголникот $ABCDE$ кој е еднаков на $3 \cdot 180^\circ$ се одземе разликата на збирот на аглите на триаголниците $ABA_1, BCB_1, CDC_1, DED, EAA_1$ и збирот на аглите на петаголникот $A_1B_1C_1D_1E_1$ која е еднаква на $5 \cdot 180^\circ - 3 \cdot 180^\circ = 2 \cdot 180^\circ$. Конечно, бараниот збир е еднаков на $3 \cdot 180^\circ - 2 \cdot 180^\circ = 180^\circ$.

б) Ако петаголникот $ABCDE$ е правилен, тогаш е симетричен во однос на симетралата на секој од своите агли, па затоа $AA_1 = AE_1 = EE_1$, $AC \parallel ED$ и

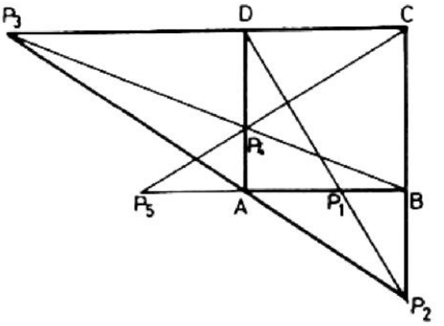
$\measuredangle AA_1E=\measuredangle A_1ED=\measuredangle CEA=\measuredangle EAA_1$. Според тоа, триаголникот AEA_1 е рамнокрак. Да означиме $AE=a$ и $A_1E_1=x$. Тогаш од сличноста на рамнокраките триаголници A_1AE_1 и A_1EA (еднакви агли на основата) добиваме $AA_1:A_1E_1=A_1E:AA_1$, т.е.

$$(a-x):x=a:(a-x).$$

Решавајќи ја последната равенка по x и земајќи предвид дека $x<a$ добиваме $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}a$. Петаголниците $ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ се слични, па затоа односот на нивните плоштини е

$$S:S_1=(\tfrac{a}{x})^2=(\tfrac{2}{3-\sqrt{5}})^2=(\tfrac{\sqrt{5}+3}{2})^2=\tfrac{7+3\sqrt{5}}{2}.$$

3. Даден е квадрат $ABCD$. Нека P_1 е произволна внатрешна точка на страната AB, P_2 е пресек на правите DP_1 и BC, P_3 епресек на правите AP_2 и CD, P_4 е пресек на правите BP_3 и DA, P_5 е пресек на правите CP_4 и AB, а точките $P_6,P_7,...,P_{13}$ понатаму се конструирани според истата постапка. Докажи дека $P_{13}=P_1$.



Решение. Прво ќе докажеме дека точката P_4 е меѓу точките D и A (цртеж десно).

Бидејќи точката P_1 е меѓу точките A и B, таа е меѓу паралелните прави AD и BC, па затоа е меѓу D и P_2. Понатаму, од $AB\parallel CD$ следува дека B е меѓу C и P_2, па затоа P_2 е од онаа страна на правата AB на која не е правата CD. Значи, A е меѓу P_2 и P_3. Од паралелните прави AD и BC следува дека D е меѓу P_3 и C, па добоиваме дека P_4 е меѓу P_3 и B. Значи, P_4 е меѓу правите AB и CD, па затоа е меѓу точките A и D.

Сега ќе докажеме дека $AP_1:P_1B=DP_4:P_4A$.

Од сличноста на триаголниците AP_1D и BP_1P_2 следува

$$AP_1:P_1B=DA:BP_2=CB:BP_2,$$

а од паралелноста на правите AD и P_2C следува

$$CB:BP_2=DP_4:P_4A.$$

Конечно, од горните две равенства следува $AP_1:P_1B=DP_4:P_4A$.

Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме дека точката P_7 е меѓу точките D и C и дека $CP_7:P_7D=AP_1:P_1B$, потоа дека точката P_{10} и меѓу точките C и B и дека $BP_{10}:P_{10}C=AP_1:P_1B$ и најпосле дека точката P_{13} е меѓу точките A и B и дека $AP_{13}:P_{13}B=AP_1:P_1B$. Последното е можно само ако $P_{13}=P_1$.

4. Нека се $a,a_1,a_2,...,a_m$ цели броеви, а n е природен број. Докажи дека:

а) $a(a^{2n}-1)$ е делив со 6,

б) збирот $S'=a_1^{2n+1}+a_2^{2n+1}+...+a_m^{2n+1}$ е делив со 6 ако и само ао збирот $S=a_1+a_2+...+a_m$ е делив со 6.

Решение. а) Од

$$a(a^{2n}-1)=a(a-1)(a+1)(a^{2n-2}+a^{2n-4}+...+1)$$

следува дека дадениот број е делив со производ на три последователни цели броја, па затоа е делив со 6.

б) Важи

$$S'-S=a_1(a_1^{2n}-1)+a_2(a_2^{2n}-1)+...+a_m(a_m^{2n}-1).$$

Според а) секој од собироците на десната страна е делив со 6, па затоа $S'-S$ е делив со 6, т.е. S' е делив со 6 ако и само ако S е делив со 6.

III година

1. Дадена е елипса $b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2=0$, која права p паралелна со оската Oy ја сече во точките M и N, при што M има позитивна, а N негативна ордината. Определи го геометриското место на пресечната точка P на правите AM и BN и пресечната точка Q на правите AN и BM, каде $A(-a,0)$ и $B(a,0)$ се темињата на елипсата, кога правата p се движи останувајќи паралелна со оската Oy.

Решение. Нека правата p има равенка $x=t,-a<t<a$. Тогаш точките M и N имаат координати $(t,\frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2})$ и $(t,-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2})$. Правите AM и BN имаат равенки

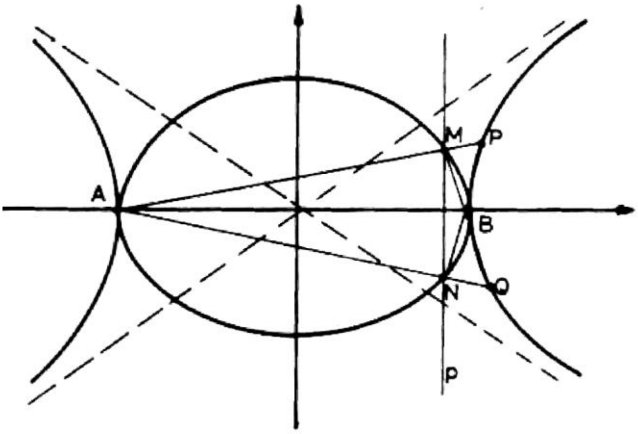
$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\,\frac{x+a}{t+a} \text{ и } y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-t^2}\,\frac{x-a}{a-t}.$$

Во нивната пресечна точка е $\frac{x+a}{t+a}=\frac{x-a}{a-t}$, од каде добиваме $x=\frac{a^2}{t}$ (случајот $t=0$ се исклучува, бидејќи правите AM и BN се паралелни). Значи, точката P има координати

$$x=\frac{a^2}{t},\ y=\frac{b}{t}\sqrt{a^2-t^2}, \qquad (-a<t<a,\ t\neq 0).$$

Со елиминација на параметарот t се добива

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1, \quad (xy>1),$$



т.е. точката P припаѓа на еден од лаците на оваа хипербола во првиот или третиот квадрант. Со обратната постапка се докажува дека секоја точка од ови лаци може да се добие на опишаниот начин.

Слично се докажува дека геометриското место на точките Q е унија на лаците на хиперболата во вториот и четвртиот квадрант.

2. Ако a,b,c е страните на триаголникот ABC, а α,β,γ се неговите агли, докажи го равенството

$$(\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{b})\cos\alpha+(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a})\cos\gamma+(\tfrac{a}{c}+\tfrac{c}{a})\cos\beta=3.$$

Решение. Од косинусната теорема имаме:

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \ \cos\beta=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}, \ \cos\lambda=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}(\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{b})\cos\alpha+(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a})\cos\gamma+(\tfrac{a}{c}+\tfrac{c}{a})\cos\beta&=\\ =(\tfrac{b}{c}+\tfrac{c}{b})\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+(\tfrac{a}{b}+\tfrac{b}{a})\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}+(\tfrac{a}{c}+\tfrac{c}{a})\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}&\\ =\frac{(b^2+c^2)(b^2+c^2-a^2)}{2b^2c^2}+\frac{(a^2+b^2)(a^2+b^2-c^2)}{2a^2b^2}+\frac{(c^2+a^2)(c^2+a^2-b^2)}{2c^2a^2}&=3\end{aligned}$$

3. Во координатната рамнина xOy нацртана е целобројна координатна мрежа. Отсечката (p) во таа рамнина е определна со

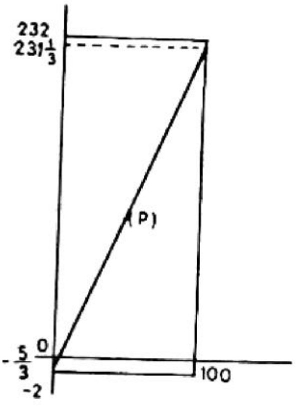
$$(p) \qquad\qquad 7x-3y-5=0, \quad 0\le x\le 100.$$

Определи го бројот на квадратите на оваа мрежа во кои има точки од отсечката (p).

Решение. Прво да го определиме бројот на јазлите низ кои минува дадената отсечка. За таа цел треба да ги определиме целобројните решенија на равенката

$7x-3y-5=0$ при услов $0\le x\le 100$. Сите решенија на дадената равенка се дадени со

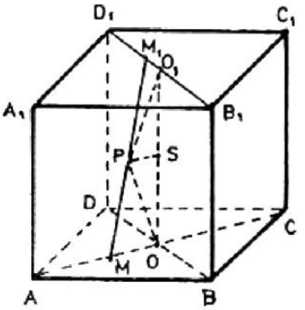
$$x=5+3t,\ y=10+7t,\ t\in\mathbb{Z}.$$



За да е $0\le x\le 100$ треба да важи $-1\le t\le 31$. Според тоа, отсечката (p) минува низ 33 јазли на координатната мрежа.

Гледано од лево на десно, при секое пресекување на некоја линија на координатната мрежа, отсечката (p) „влегува“ во нов квадрат. Единствено при „преминот“ низ јазол таа пресекува две линии, а „влегува“ во еден нов квадрат. Затоа бројот на бараните квадрати е еднаков на бројот на пресеците на отсечката со линиите на мрежата, намален за бројот на јазлите низ кои таа минува, т.е. на $100+234-33=301$.

4. Определи го геометриското место на средините на отсечките со дадена должина c, чии крајни точки се движат по разминувачките дијагонали на горната и долната основа на дадена коцка со раб a $(a<c<a\sqrt{2})$.



Решение. Дадената коцка да ја означиме со $ABCDA_1B_1C_1D_1$, правите определени со дијагоналите AC и B_1D_1 со p и p_1, средините на основите со O и O_1, а крајните точки на дадената отсечка со M и M_1, при што $M\in p$ и $M_1\in p_1$. Понатаму, нека S и P се средините на отсечките OO_1 и MM_1, цртеж десно. Правата p е нормална на рамнината на дијагоналниот пресек BB_1D_1D, па затоа е нормална и на правата OM_1 во таа рамнина. Затоа триаголникот MOM_1 е правоаголен, а P е средина на неговата хипотенуза MM_1, па е $OP=\frac{MM_1}{2}=\frac{c}{2}$. Слично се докажува дека $O_1P=\frac{c}{2}$. Значи, триаголникот OO_1P е рамнокрак, а S е средина на неговата основа, па е PS негова висина. Според тоа, средината на отсечката MM_1 припаѓа на кружницата која е во рамнината паралелна со основите, чиј центар е точката S, а радиусот е еднаков на $\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{2}$.

Ќе докажеме дека споменатата кружница е бараното геометриско место, т.е. дека секоја нејзина точка е средина на некоја отсечка со должина c и крајни точки на правите p и p_1. Нека P е произволна точка од оваа кружница. Нека рамнината определена со правата p и точката P ја сече правата p_1 во точка M_1, а рамнината определена со правата p_1 и точката P ја сече правата p во точка M (овие пресеци секогаш постојат). Првата од овие рамнини ја содржи нормалата p на дијагоналниот пресек BDD_1B_1 на дадената коцка, па затоа е нормална на тој пресек. Затоа триаголникот MOM_1 е правоаголен, а точката P е средина на неговата хипотенуза, бидејќи се наоѓа во рамнина во однос на која рамнините на основите на коцката се симетрични. Од правоаголниот триаголник PSO во кој катетите се $PS=\frac{\sqrt{c^2-a^2}}{2}$ и $SO=\frac{a}{2}$ се добива $OP=\frac{c}{2}$, па затоа $PM=PM_1=\frac{c}{2}$, што значи дека P е средина на отсечката MM_1 со должина c и крајни точки на правите p и p_1.

IV година

1. Определи кој број е поголем $\log_3 4$ или $\log_4 5$.

Решение. Од неравенството емѓу средините следува

$$\log_4 5\cdot\log_4 3\le(\frac{\log_4 5+\log_4 3}{2})^2=(\frac{\log_4 15}{2})^2<1,$$

па затоа

$$\log_4 5<\frac{1}{\log_4 3}]\log_3 4.$$

2. Членовите на аритметичката прогресија $1,1+2n,1+4n,...\,(n\in\mathbb{N})$ ги групираме редоследно во групи, така што во првата група го ставаме првиот член, во втората група ги ставаме следните $1+n$ членови, во третата група ги ставаме следните $1+2n$ членови итн. Докажи дека збирот на сите членови во секоја група е еднаков на третиот степен на бројот на членовите во таа група.

Решение. Групата која е $k-$та по ред има $1+(k-1)n$ членови. Првите k групи имаат вкупно

$$\sum_{i=1}^{k}(1+(i-1)n)=k+\frac{(k-1)k}{2}n$$

членови. Затоа првиот член на $(k+1)-$та група е

$$a=1+(k+\frac{(k-1)k}{2}n)\cdot 2n=1+2kn+(k-1)kn^2,$$

а нејзиниот последен член е

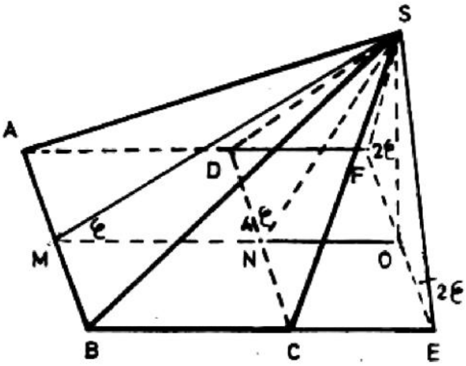
$$b=a+kn\cdot 2n=1+2kn+k(k+1)n^2.$$

Според тоа, збирот на сите членови на оваа група е еднаков на

$$(1+kn)\frac{a+b}{2}=(1+kn)(1+2kn+k^2n^2)=(1+kn)^3,$$

што и требаше да се докаже.

3. Основата на пирамидата е квадрат. Нагибните агли на бочните ѕидови на пирамидата спрема основата се однесуваат редоследно како $1:2:4:2$. Определи ги овие агли.



Решение. Нека $ABCD$ е основата, а S е врвот на пирамидата. Нагибните агли на бочните ѕидови SAB, SBC, SCD, SDA нека се $\varphi, 2\varphi, 4\varphi, 2\varphi$. Со a да ја означиме страната на основата, а ос H висината на пирамидата (цртеж десно). Прво да претпоставиме дека $\frac{\pi}{2}<4\varphi<\pi$ (покасно ќе докажеме дека не може да е $4\varphi\leq\frac{\pi}{2}$). Рамнината која го содржи врвот на пирамидата и е нормална на правите BC и DA ги сече овие прави надвор од отсечките BC и DA, тие пресеци да ги означиме со E и F. Пресеците на рамнината низ S нормална на AB и CD, со тие прави да ги означиме со M и N (овие точки припаѓаат на AB и CD, соодветно). Овие рамнини ја содржат висината на пирамидата чие подножје го означуваме со O. По претпоставка имаме

$$\measuredangle SMN=\varphi,\ \measuredangle SEF=\measuredangle SFE=2\varphi,\ \measuredangle SNM=4\varphi.$$

Од соодветните правоаголни триаголници добиваме

$$\operatorname{ctg}\varphi=\frac{OM}{H},\ \operatorname{ctg}2\varphi=\frac{OE}{H}=\frac{a}{2H},\ \operatorname{ctg}4\varphi=-\frac{ON}{H},$$

односно

$$\operatorname{ctg}\varphi+\operatorname{ctg}4\varphi=\frac{OM-ON}{H}=\frac{MN}{H}=\frac{a}{H}=2\operatorname{ctg}2\varphi.$$

Оваа равенка за $\frac{\pi}{8}<\varphi<\frac{\pi}{4}$ редоследно се трансформира во следните на неа еквивалентни равенки

$$\operatorname{ctg}4\varphi-\operatorname{ctg}2\varphi=\operatorname{ctg}2\varphi-\operatorname{ctg}\varphi,$$

$$\frac{\sin(4\varphi-2\varphi)}{\sin4\varphi\sin2\varphi}=\frac{\sin(2\varphi-\varphi)}{\sin2\varphi\sin\varphi},$$

$$\sin2\varphi=2\sin2\varphi\cos2\varphi,$$

па е $\varphi=\frac{\pi}{6}$. Значи, бараните агли се $\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{\pi}{3}$.

Ќе докажеме дека не може да е $4\varphi\leq\frac{\pi}{2}$. Навистина ако тоа е случај, со слична постапка како претходно се добива дека φ треба да ја задоволува равенката $\operatorname{ctg}\varphi+\operatorname{ctg}4\varphi=2\operatorname{ctg}2\varphi$, која нема решенија за кои $0<\varphi\leq\frac{\pi}{8}$.

4. Ако p е прост број, докажи дека $N=\frac{(2p)!}{(p!)^2}-2$ е делив со p^2.

Решение. За секој $x \in \mathbb{R}$ важи

$$(1+x)^p(1+x)^p = (1+x)^{2p}.$$

Ако изразите во горното равенство ги развиеме по биномната формула и ги изедначиме коефициентите пред x^p добиваме

$$1+\binom{p}{1}\binom{p}{p-1}+\binom{p}{2}\binom{p}{p-2}+...+\binom{p}{p-1}\binom{p}{1}+1=\binom{2p}{p},$$

односно

$$N=\frac{(2p)!}{(p!)^2}-2=\binom{2p}{p}-2=\sum_{i=1}^{p-1}\binom{p}{i}^2.$$

Бидејќи p е прост број, секој од броевите $\binom{p}{i}=\frac{p(p-1)...(p-i+1)}{i!}$ е делив со p, па затоа збирот на десната страна на последното равенство е делив со p^2, што значи $p^2 \mid N$.

Мала олимпијада 1970

1. Природните броеви a и b имаат во декаден запис по n цифри. Нека $\frac{n}{2}<m<n$ и нека секоја од првите m цифри на бројот a (сметајќи од лево кон десно) е еднаква на соодветните цифри на бројот b. Докажи дека $a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}}<\frac{1}{n}$.

Решение. Можеме да претпоставиме дека $n \geq 2$ и $a>b$ (останатите случаи се тривијални). Од условот на задачата непосредно следува

$$a-b<10^{\frac{n-1}{2}}.$$

Од друга страна, важи $a>b\geq 10^{n-1}$, па затоа $a^{\frac{1}{n}}>b^{\frac{1}{n}}\geq 10^{\frac{n-1}{n}}$. Затоа

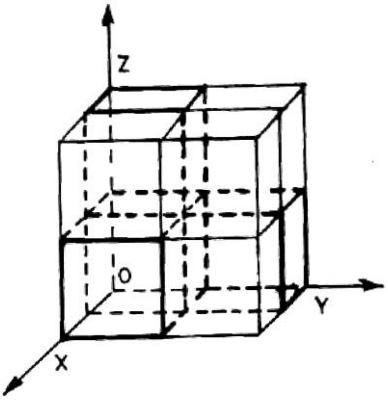
$$a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}}=\frac{a-b}{a^{\frac{n-1}{n}}+a^{\frac{n-2}{n}}b^{\frac{1}{n}}+...+b^{\frac{n-1}{n}}}<\frac{10^{\frac{n-1}{2}}}{n\cdot 10^{\frac{(n-1)^2}{n}}}=\frac{10^{-\frac{(n-1)(n-2)}{2n}}}{n}\leq\frac{1}{n}.$$

2. Во коцка или на нејзината површина размести темиња на триаголник, така што неговата најмала страна ќе биде што е можно поголема.

Решение. Нека должината на работ на коцката K е еднаква на 2. Воведуваме правоаголен координатен систем таков што точките $O(0,0,0)$, $X(2,0,0)$, $Y(0,2,0)$ и $Z(0,0,2)$ се темиња на коцката. Триаголникот XYZ се содржи во коцката и важи

$$XY=YZ=ZX=2\sqrt{2}.$$

Нека претпоставиме дека триаголникот ABC се содржи во дадената коцка K. Рамнините $x=1, y=1, z=1$ ја делат коцката на осум коцки со раб 1. Овие осум



коцки имаат заедничко теме $(1,1,1)$, некои од овие коцки имаат заеднички раб, а некои заеднички ѕид (цртеж десно). Да разгледаме две од овие коцки чија единствена заедничка точка е темето $(1,1,1)$. Секоја од останатите шест коцки има заеднички ѕид со една од овие две коцки. Оттука следува дека: Ако постојат две единечни коцки чија единствена заедничка точка е темето $(1,1,1)$, така што секоја од нив содржи барем едно теме на триаголникот ABC, тогаш некои две од единичните точки имаат заедничка страна и содржат барем две од темињата на триаголникот ABC, на пример, A и B. Тогаш

$$\min\{AB,BC,CA\}\le AB\le\sqrt{1^2+1^2+2^2}=\sqrt{6}<2\sqrt{2}\ .$$

Останува да го разгледаме случајот кога секој квадар кој е формиран од две единечни коцки со заедничка страна содржи најмногу едно теме на триаголникот ABC. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$A\in\{(1+x,y,z)\,|\,0\le x\le1,0\le y\le1,0\le z\le1\},$$
$$B\in\{(a,1+b,c)\,|\,0\le a\le1,0\le b\le1,0\le c\le1\},$$
$$C\in\{(p,q,1+r)\,|\,0\le p\le1,0\le q\le1,0\le r\le1\}.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}AB^2+BC^2+CA^2&=(1+x-a)^2+(y-1-b)^2+(z-c)^2\\&\quad+(a-p)^2+(1+b-q)^2+(c-1-r)^2\\&\quad+(p-1-x)^2+(q-y)^2+(1+r-z)^2\\&=S_1+S_2+S_3\end{aligned}$$

каде

$$S_1=(1+x-a)^2+(p-1-x)^2+(a-p)^2,$$
$$S_2=(y-1-b)^2+(1+b-q)^2+(q-y)^2,$$
$$S_3=(1+r-z)^2+(c-1-r)^2+(z-c)^2.$$

Бидејќи $x,a,p\in[0,1]$, важи $|x-a|\le1, |a-p|\le1, |p-x|\le1$, па затоа

$$\begin{aligned}S_1&=2+(x-a)^2+(a-p)^2+(p-x)^2+4x-2a-2p\\&\le2+|x-a|+|a-p|+|p-x|+4x-2a-2p.\end{aligned}$$

Нека $a\le p$ (аналогно се разгледува случајот $p\le a$). Ако $x\le a\le p$, тогаш

$$S_1\le2+(a-x)+(p-a)+(p-x)+4x-2a-2p=2+2x-2a\le4\,.$$

Ако $a<x\le p$, тогаш

$$S_1 \leq 2+(x-a)+(p-a)+(p-x)+4x-2a-2p=2+4x-4a\leq 6.$$

Ако $a \leq p < x$, тогаш

$$S_1 \leq 2+(x-a)+(p-a)+(x-p)+4x-2a-2p=2+6x-4a-2p\leq 8.$$

Во секој случај важи $S_1 \leq 8$ и аналогно $S_2 \leq 8, S_3 \leq 8$. Според тоа,

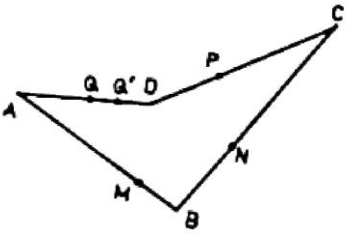
$$AB^2+BC^2+CA^2 \leq 24.$$

Затоа барем еден од броевите AB^2, BC^2, CA^2 е помал или еднаков на 8, па затоа

$$\min\{AB, BC, CA\} \leq 2\sqrt{2}.$$

Равенство се достигнува ако $x=1, a-p=0, b=1, y=q=0, r=1, z=c=0$, т.е. ако $A=X, B=Y, C=z$. Според тоа, максимумом M на множеството кое ги содржи сите броеви од видот $\min\{AB, BC, CA\}$, каде ABC е триаголник кој се содржи во коцката K е еднаков на $2\sqrt{2}$ единици должина.

3. Ако сите страни на просторниот четириаголник допираат сфера, тогаш сите четири допирни точки припаѓаат на една рамнина. Докажи!



Решение. Ако дадениот четириаголник е рамнински, тогаш тврдењето на задачата е тривијално. Нека претпоставиме дека четириаголникот не е рамнински.

Нека четириаголникот е $ABCD$, а допирните точки на четириаголникот со сферата се M, N, P, Q (цртеж десно). Нека α е рамнината определена со точките M, N и P. Јасно, таа не содржи ниту едно теме на дадениот четириаголник (ако, на пример, го содржи темето A, тогаш ќе ја содржи правата AM, па и точката B, а потоа, слично, точките C и D, па четириаголникот ќе биде рамнински). Точките A и B се на различни страни од таа рамнина, исто важи за точките B и C, како и за точките C и D. Затоа и точките D и A се на различни страни од рамнината α, што значи дека отсечката DA ја сече рамнината во некоја точка Q' (види цртеж). Ако со h_A, h_B, h_C, h_D ги означиме растојанијата од точките A, B, C, D до рамнината α, тогаш

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DQ'}{Q'A}=\frac{h_A}{h_B}\cdot\frac{h_B}{h_C}\cdot\frac{h_C}{h_D}\cdot\frac{h_D}{h_A}=1.$$

Од друга страна, отсечките AM и AQ се еднакви, како тангентни отсечки на дадената сфера. Исто така $BM=BN, CN=CP, DP=DQ$, па затоа

$$\frac{AM}{MB}\cdot\frac{BN}{NC}\cdot\frac{CP}{PD}\cdot\frac{DQ}{QA}=1.$$

Од добиените релации следува $\frac{DQ'}{Q'A}=\frac{DQ}{QA}$, што е можно само ако $Q \equiv Q'$. Со тоа е докажано дека точките M, N, P, Q припаѓаат на рамнината α.

Сојузен натпревар 1971

II година

1. Нека AD, BE, CF се тежишните линии, а T е тежиштето на триаголникот ABC. Ако се $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6$ и $r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6$ се редоследно радиусите на впишаните и опишаните кружници за триаголниците $BDT, DCT, CET, EAT, AFT,$ ABT докажи дека важат равенствата

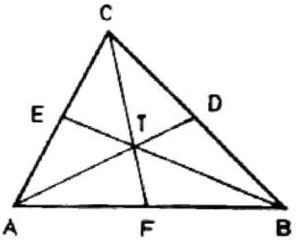
$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_3}+\frac{1}{\rho_5}=\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_4}+\frac{1}{\rho_6} \text{ и } r_1r_3r_5=r_2r_4r_6.$$

Решение. Ќе го користиме следново тврдење: Ако a,b,c се страни на триаголник, а P,r и ρ се соодветно неговата плоштина, радиус на опишана и радиус на впишана кружница, тогаш $P=\frac{a+b+c}{2}\rho=\frac{abc}{4r}$.

Нека плоштината на триаголникот $ABCD$ е еднаква на $6x$. Тогаш секој од триаголниците $BDT, DCT, CET, EAT, AFT, ABT$ има плоштина еднаква на x (цртеж десно). Користејќи ги наведените формули добиваме:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_3}+\frac{1}{\rho_5}&=\frac{BT+TD+DB}{2x}+\frac{CT+TE+EC}{2x}+\frac{AT+TF+FA}{2x}\\&=\frac{CT+TD+DC}{2x}+\frac{AT+TE+EA}{2x}+\frac{BT+TF+FB}{2x}\\&=\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_4}+\frac{1}{\rho_6},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_1r_3r_5&=\frac{BT\cdot TD\cdot DB}{4x}\cdot\frac{CT\cdot TE\cdot EC}{4x}\cdot\frac{AT\cdot TF\cdot FA}{4x}\\&=\frac{CT\cdot TD\cdot DC}{4x}\cdot\frac{AT\cdot TE\cdot EA}{4x}\cdot\frac{BT\cdot TF\cdot FB}{4x}=r_2r_4r_6.\end{aligned}$$



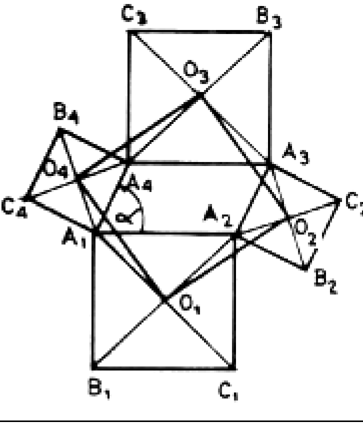
2. Над страните на паралелограмот $A_1A_2A_3A_4$ од надворешната страна се конструирани квадрати $A_1B_1C_1A_2, A_2B_2C_2A_3, A_3B_3C_3A_4, A_4B_4C_4A_1$. Докажи дека средините O_1, O_2, O_3, O_4 на овие квадрати се темиња на квадрат чија плоштина е еднаква на збирот на четвртините на плоштините на конструираните квадрати зголемен за плоштината на дадениот паралелограм.

Решение. Нека, на пример, $\measuredangle A_2A_1A_4 \le \frac{\pi}{2}$ (цртеж десно). Триаголниците

$$O_1O_2A_2, O_1O_4A_1, O_3O_2A_3, O_3O_4A_4$$

се складни, бидејќи

$$\begin{aligned}&O_1A_2=O_1A_1=O_3A_3=O_3A_4,\\&O_2A_2=O_4A_1=O_2A_3=O_4A_4,\\&\measuredangle O_1A_2O_2=\measuredangle O_1A_1O_4=\measuredangle O_3A_3O_2\\&\qquad=\measuredangle O_3A_4O_4=\tfrac{\pi}{2}+\alpha.\end{aligned}$$



Затоа $O_1O_2=O_2O_3=O_3O_4=O_4O_1$ и $\measuredangle O_1O_2A_2=\measuredangle O_3O_2A_3$, па понатаму следува

$$\measuredangle O_1O_2O_3=\measuredangle O_1O_2A_2+\measuredangle A_2O_2O_3=\measuredangle O_3O_2A_3+\measuredangle A_2O_2O_3=\measuredangle A_2O_2A_3=\tfrac{\pi}{2}.$$

Слично се докажува дека и останатите агли на четириаголникот $O_1O_2O_3O_4$ се прави, па како сите страни му се еднакви, овој четириаголник е квадрат. Понатаму, важи

$$\begin{aligned}P_{A_1A_2A_3A_4}+\tfrac{1}{4}(P_{A_1B_1C_1A_2}+P_{A_2B_2C_2A_3}+P_{A_3B_3C_3A_4}+P_{A_4B_4C_4A_1})&=\\ =P_{A_1A_2A_3A_4}+P_{A_1O_1A_2}+P_{A_2O_2A_3}+P_{A_3O_3A_4}+P_{A_4O_4A_1}&\\ =P_{O_1O_2O_3O_4}-P_{O_1O_2A_2}+P_{O_3O_2A_3}-P_{O_3O_4A_4}+P_{O_1O_4A_1}&\\ =P_{O_1O_2O_3O_4}.&\end{aligned}$$

3. Определи ги природните броеви p и q така што нулите на триномите

$$x^2-px+q \text{ и } x^2-qx+p$$

исто така ќе бидат природни броеви.

Решение. Нека се x_1,x_2 решенија на равенката $x^2-px+q=0$, а y_1,y_2 на равенката $x^2-qx+p=0$, такви што $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$x_1+x_2=p,\ x_1x_2=q,\ y_1+y_2=q,\ y_1y_2=p.$$

а) Нека еден од броевите x_1,x_2,y_1,y_2 е еднаков на 1, на пример $x_1=1$. Тогаш $1+x_2=p$, $x_2=q$, па следува

$$y_1+y_2-y_1y_2=q-p=-1, \text{ т.е. } (y_1-1)(y_2-)=2.$$

Понатаму, лесно се добива дека $\{y_1,y_2\}=\{2,3\}$, т.е. $q=5,p=6,x_2=5$.

Лесно се проверува дека за $p=6,q=5$ паровите $(1,5)$ и $(5,1)$ се репенија на равенката $x^2-6x+5=0$, а паровите $(2,3)$ и $(3,2)$ на равенката $x^2-5x+6=0$. Сличен резултат добиваме за $p=5,q=6$.

б) Нека $x_1\geq 2,x_2\geq 2,y_1\geq 2,y_2\geq 2$. Тогаш

$$p=x_1+x_2\leq x_1x_2=q=y_1+y_2\leq y_1y_2=p,$$

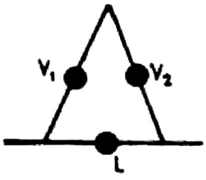
од каде добиваме $p=q=x_1+x_2=x_1x_2=y_1+y_2=y_1y_2$. Нека, на пример $x_1\leq x_2$. Тогаш од $x_1+x_2=x_1x_2\geq 2x_2$ следува $x_1\geq x_2$. Значи, $x_1=x_2$, па затоа $2x_1=x_1^2$, т.е. $x_1=x_2=2$. Според тоа, $p=q=x_1+x_2=4$. Парот $(2,2)$ навиостина е решение на равебката $x^2-4x+4=0$.

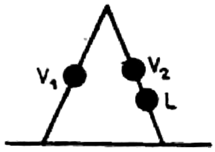
Конечно, паровите (p,q) се $(5,6),(6,5),(4,4)$.

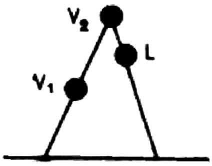
4. Скретниците A,B и обиколницата C се поврзани со железнички пруги AC,BC и со пругата AB со доволно долги продолжетоци AD и BE. На пругата

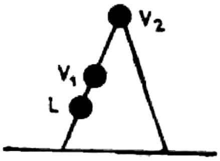
AC се наоѓа вагон V_1, на пругата BC вагон V_2, а на пругата AB локомотива L. На обиколницата може да дојде секој од двата вагони, но не и локомотивата. Служејќи се со обиколницата и скретниците со помош на локомотивата префрли го вагонот V_1 на местото на вагонот V_2, а вагонот V_2 на местото на вагонот V_1, така што на крајот локомотивата пак ќе биде на своето место.

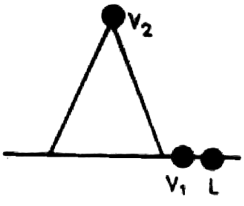
Решение. Еден начин на преместување на вагоните и враќање на локомотивата на своето место е прикажан на долните цртежи.

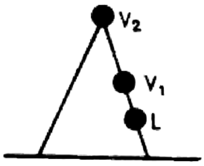


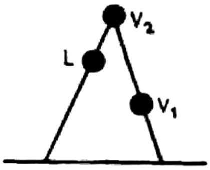


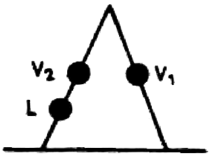


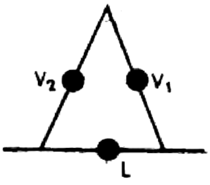












III година

1. Нека a, b, p, q, r, s се природни броеви такви што

$$qr - ps = 1 \text{ и } \tfrac{p}{q} < \tfrac{a}{b} < \tfrac{r}{s}.$$

Докажи дека $b \geq q + s$.

Решение. Од условот $\frac{p}{q} < \frac{a}{b} < \frac{r}{s}$ следува $aq - bp > 0, br - as > 0$ и $qr - ps > 0$, а како $aq - bp, br - as, qr - ps$ се цели броеви, добиваме

$$aq - bp \geq 1, br - as \geq 1.$$

Понатаму,

$$b(qr - ps) = q(br - as) + s(aq - bp) \geq q + s$$

и како $qr - ps = 1$, добиваме $b \geq q + s$.

2. Даден е триаголник ABC и реален број k. Нека точките P,Q,R се определени со релациите

$$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BQ}=k\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{CR}=k\overrightarrow{CA}.$$

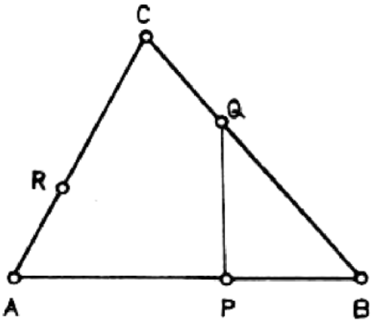
Докажи дека

$$AB^2+BC^2+CA^2=g(k)(PQ^2+QR^2+RS^2),$$

каде g е некоја функција од k. Определи ја и испитај ја оваа функција.

Решение. Нека $AB=c, BC=a, CA=b$. Тогаш (цртеж десно):

$$\begin{aligned}PQ^2&=(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ})(\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{BQ})\\&=(1-k)^2c^2+k^2a^2-2k(1-k)ac\cos B\\&=(1-k)^2c^2+k^2a^2-2k(k-1)ac\tfrac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\\&=(1-k)^2c^2+k^2a^2-k(k-1)(a^2+c^2-b^2).\end{aligned}$$



Аналогно се добива

$$QR^2=(1-k)^2a^2+k^2b^2-k(1-k)(a^2+b^2-c^2),$$

$$RP^2=(1-k)^2b^2+k^2c^2-k(1-k)(b^2+c^2-a^2),$$

па патаму лесно следува

$$\begin{aligned}PQ^2+QR^2+RP^2&=((1-k)^2+k^2-k(k-1))(a^2+b^2+c^2)\\&=(3k^2-3k+1)(a^2+b^2+c^2),\end{aligned}$$

$$AB^2+BC^2+CA^2=a^2+b^2+c^2=\tfrac{1}{3k^2-3k+1}(PQ^2+QR^2+RP^2).$$

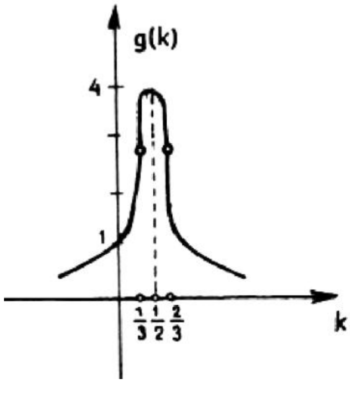
Според тоа,

$$g(k)=\tfrac{1}{3k^2-3k+1}=\tfrac{1}{(3(k-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{4})}>0\text{ , за секој }k\in\mathbb{R}.$$

Понатаму, $\lim\limits_{k\to\pm\infty}g(k)=0$,

$$g'(k)=\tfrac{3-6k}{(3k^2-3k+1)^2},\ g''(k)=\tfrac{-54k^2+54k-12}{(3k^2-3k+1)^3}.$$

Функцијата g строго монотоно расте на интервалот $(-\infty,\frac{1}{2})$, строго монотоно опаѓа на интервалот $(\frac{1}{2},+\infty)$ и има максимум $g(\frac{1}{2})=4$. Таа има превојни точки $(\frac{1}{3},3)$ и $(\frac{2}{3},3)$. Графикот на функцијата е прикажан на цртежот десно.



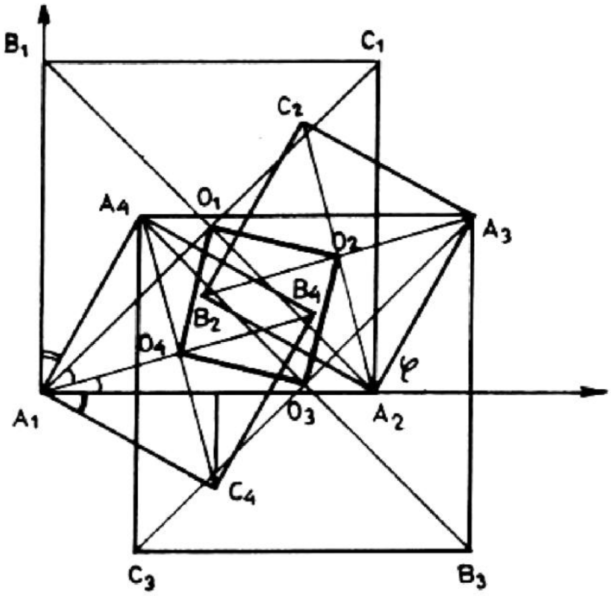
3. Над страните на паралелограмот $A_1A_2A_3A_4$ кон внатрешната страна се конструирани квадрати $A_1B_1C_1A_2, A_2B_2C_2A_3, A_3B_3C_3A_4, A_4B_4C_4A_1$. Докажи дека средините O_1,O_2,O_3,O_4 на овие квадрати се темиња на квадрат чија плоштина е еднаква на збирот на четвртините на плоштините на конструираните квадрати намален за плоштината на дадениот паралелограм.

Решение. Нека $\measuredangle A_2A_1A_4 = \varphi,\ A_1A_2 = a,\ A_1A_4 = b$. Воведуваме правоаголен координатен систем така што важи:

1) точката A_1 е координатен поочеток,

2) точката A_2 припаѓа на позитивниот дел од $x-$оската,

3) точките A_3 и A_4 имаат позитивни $y-$координати (вид цртеж).



Тогаш добиваме

$$A_1(0,0),\ A_2(a,0),\ A_3(a+b\cos\varphi, b\sin\varphi),\qquad A_4(b\cos\varphi, b\sin\varphi),$$

$$C_4(b\sin\varphi, -b\cos\varphi),\ B_3(a+b\cos\varphi, b\sin\varphi-a),\ O_1(\tfrac{a}{2},\tfrac{a}{2}),$$

$$O_3(\tfrac{a}{2}+b\cos\varphi, b\sin\varphi-\tfrac{a}{2}),\ \ O_4(\tfrac{b}{2}(\sin\varphi+\cos\varphi), \tfrac{b}{2}(\sin\varphi-\cos\varphi)),$$

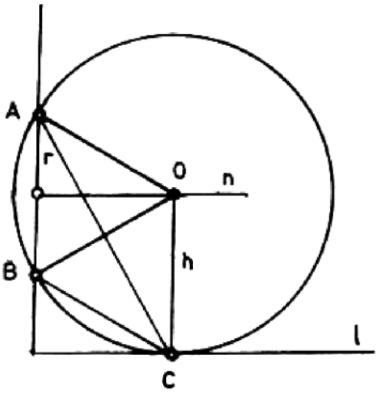
$$\begin{aligned} O_3O_4^2 &= (\tfrac{a}{2}+\tfrac{b(\cos\varphi-\sin\varphi)}{2})^2+(\tfrac{a}{2}-\tfrac{b(\sin\varphi+\cos\varphi)}{2})^2 \\ &= \tfrac{a^2}{2}-ab\sin\varphi+\tfrac{b^2}{2}, \\ O_1O_4^2 &= (\tfrac{b(\cos\varphi+\sin\varphi)}{2}-\tfrac{a}{2})^2+(\tfrac{b(\sin\varphi-\cos\varphi)}{2}-\tfrac{a}{2})^2 \\ &= \tfrac{a^2}{2}-ab\sin\varphi+\tfrac{b^2}{2}, \end{aligned}$$

$$O_1O_2^2 = (b\cos\varphi)^2+(b\sin\varphi-a)^2 = a^2-2ab\sin\varphi+b^2 = O_1O_4^2+O_3O_4^2.$$

Според тоа, аголот $O_1O_3O_4$ е прав. Аналогно се докажува дека и останатите агли на четириаголникот $O_1O_2O_3O_4$ се прави, а како $O_3O_4 = O_3O_4$, заклучуваме дека $O_1O_2O_3O_4$ е квадрат. Неговата плоштина е еднаква на

$$\tfrac{a^2}{2}-ab\sin\varphi+\tfrac{b^2}{2}=\tfrac{1}{4}(2a^2+2b^2)-ab\sin\varphi.$$

4. Летвичката AB на термометарот кој виси вертикално на ѕидот има должина $2r$. Окото на набљудувачот се наоѓа на права l која е нормална на рамнината на ѕидот и ја сече правата AB во точка чие растојание од средината на отсечката AB е еднакво на $h(h>r)$. На кое растојание од ѕидот треба да се наоѓа окото на набљудувачот за да аголот под кој набљудувачот ја гледа летвичката е најголем?



Решение. Нека k е кружницата која ги содржи точките A и B и точка $C\in l$ и нека O е центарот на таа кружница (цртеж десно). Од точката C набљудувачот ја гледа отсечката AB под агол $\measuredangle BCA=\frac{1}{2}\measuredangle BOA$. Овој агол е најголем ако растојанието на точката O (центар на кружницата која има заеднички точки со правата l) до правата AB е најмало можно. Лесно се докажува дека тоа се постигнува ако k ја допира правата l и во тој случај растојанието од точката C до правата AB е еднакво на $\sqrt{h^2-r^2}$ и тоа е бараното растојание.

IV година

1. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се реални броеви поголеми од 1, а m е природен број. Докажи дека

$$\sum_{j=1}^{n}(\log_{a_1a_2...a_{j-1}a_{j+1}...a_n} a_j)^{-m}\geq n(n-1)^m.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека $x_j=\log_{a_j}(a_1a_2...a_{j-1}a_{j+1}...a_n)$, $j\in\{1,2,...,n\}$. Тогаш броевите $x_i, i=1,2,...,n$ се позитивни, па од неравенството меѓу срединита од ред m и аритметичката средина и својствата на логаритмите добиваме

$$\sum_{j=1}^{n}(\log_{a_1a_2...a_{j-1}a_{j+1}...a_n} a_j)^{-m}=n\frac{x_1^m+x_2^m+...+x_n^m}{n}\geq n(\frac{x_1+x_2+..x_n}{n})^m=n(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\sum_{i\neq j}\log_{a_j} a_i)^m$$

$$=n(\frac{1}{n}\sum_{i\neq j}(\log_{a_j} a_i+\log_{a_i} a_j)^m\geq\frac{1}{n^{m-1}}(2\tbinom{n}{2}))^m=n(n-1)^m.$$

Во претпоследното неравенство го користевме неравенството

$$\log_{a_j} a_i+\log_{a_i} a_j=\log_{a_j} a_i+\frac{1}{\log_{a_j} a_i}\geq 2.$$

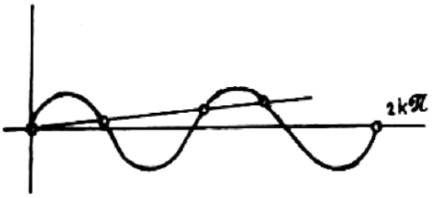
Знак за равенство важи ако и само ако $a_1 = a_2 = ... = a_n$.

2. Нека n е природен број. Колку решенија има равенката

$$\frac{x}{\sin x} = \frac{n\pi}{2}\ ?$$

Решение. Нека b_n е бројот на пресечните точки на правата $f(x) = \frac{2x}{n\pi}$ и синусоидата $g(x)\sin x$ за кои $x > 0$. Да забележиме дека ако $f(a) = g(a)$, тогаш $a = \frac{n\pi}{2}\sin a \leq \frac{n\pi}{2}$, т.е. позитивните нули на функцијата $f(x) - g(x)$ припашаат на интервалот $I_n = (0, \frac{n\pi}{2}]$.

а) Нека $n = 4k$. Тогаш $I_n = (0, 2k\pi]$. Ќе докажеме дека интервалот $(0, 2\pi]$ содржи една нула на функцијата $f(x) - g(x)$, а секој интервал $(2(j-1)\pi, 2j\pi]$, каде $j \in \{2, 3, ..., k\}$ содржи две нули на функцијата (цртеж десно). За $j = 1$ тоа лесно се проверува за интервалот $(0, 2\pi]$. За $k > 1$ и $j \in \{2, 3, ..., k\}$ добиваме



$$h(x) = f(x) - g(x) = \sin x - \frac{x}{2k\pi}, \qquad h(2(j-1)\pi) = -\frac{j-1}{k} < 0,$$
$$h(2(j-1)\pi + \tfrac{\pi}{2}) = \frac{4k-4j+3}{4k} > 0, \qquad h(2(j-1)\pi + \pi) = -\frac{2j-1}{2k} < 0.$$

Од непрекинатоста на фунцкијата h, конвексноста на синусот на интервалот

$$(2(j-1)\pi, 2(j-1)\pi + \pi], \ \ j \in \{2, 3, ..., k\}$$

и негативноста на синусот на интервалите $(\pi, 2\pi), (3\pi, 4\pi), ..., ((2k-1)\pi, 2k\pi)$ следува наведеното тврдење. Според тоа, $b_{4k}\, 2(k-1) + 1 = 2k - 1$.

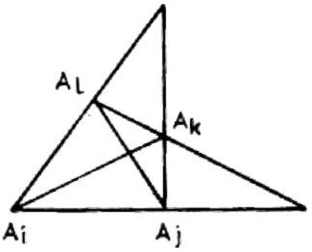
б) Нека $n = 4k + 1$. Тогаш $I \ = (0, (2k + \frac{1}{2})\pi]$. Интервалот $(0, 2k\pi)$ содржи точно $2k - 1$ нула на функцијата $h(x)$, а интервалот $(2k\pi, (2k + \frac{1}{2})\pi]$ уште две нули на оваа функција, при што десниот крај на интервалот, т.е. бројот $(2k + \frac{1}{2})\pi$ е една од тие нули. Затоа $b_{4k+1} = 2k + 1$.

в) Нека $n = 4k + 2$. Тогаш $I_n = (0, (2k+1)\pi]$ и $b_{4k+2} = b_{4k+1} = 2k + 1$, бидејќи интервалот $(0, 2k\pi]$ содржи $2k - 1$ нули на функцијата $h(x)$, а интервалот $(2k\pi, (2k+1)\pi]$ содржи две нули на оваа функција, што што првата и втората половина на овој интервал содржат по една нула.

г) Нека $n = 4k + 3$. Тогаш $I_n = (0, (2k + \frac{3}{2})\pi]$ и $b_{4k+3} = b_{4k+1} = 2k + 1$, бидејќи интервалот $(0, (2k + \frac{3}{2})\pi]$ содржи точно две нули на функцијата $h(x)$.

Според тоа, за секој n важи $b_n = 2[\frac{n-1}{4}]+1$. Конечно, ако гиземеме предвид и негативните нули на функцијата $h(x)$ добиваме дека батраниот број е $4[\frac{n-1}{4}]+2$.

3. Во рамнината се дадени точките $A_1, A_2, ..., A_n$ така што никои три од нив не се колинеарни. Нека p_{ij} е правата определена со точките A_i и A_j. Определи го максималниот број пресечни точки на правите p_{ij} и p_{kl}, при што i, j, k, l се различни елементи од множеството $\{1, 2, ..., n\}$.



Решение. Ќе го определиме бројот на пресечните точки кои се разликуваат од точките $A_1, A_2, ..., A_n$. Секоја 4-комбинација $\{A_i, A_j, A_k, A_l\}$ елементи на множеството $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$ определува најмногу три нови пресечни точки (цртеж десно). Бидејќи бројот на 4-комбинации на елементите на ова множество е $\binom{n}{4}$, добиваме дека бројот на пресечните точки кои се разликуваат од точките $A_1, A_2, ..., A_n$ е најмногу $3\binom{n}{4}$.

4. Дадени се функциите

$$f_n(x) = \frac{1-\cos x \cos 2x ... \cos nx}{x^2}, n \in \mathbb{N}.$$

а) Докажи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ постои $\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) = f_n$.

б) Определи ја врската меѓу f_n и f_{n-1}.

в) Пресметај го f_n.

Решение. а) Да забележиме дека $f_1(x) = \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2$ и дека за $n > 1$ важи

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{1-\cos x \cos 2x ... \cos nx}{x^2} = \frac{1-\cos nx + \cos nx - \cos x \cos 2x ... \cos nx}{x^2} \\ &= \frac{1-\cos nx}{x^2} + \frac{1-\cos x \cos 2x ... \cos(n-1)x}{x^2} \cos nx \\ &= \frac{n^2}{2}(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\frac{nx}{2}})^2 + f_{n-1}(x)\cos nx. \end{aligned}$$

Според тоа,

$$\lim_{x\to 0} f_1(x) = \frac{1}{2}(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}})^2 = \frac{1}{2} \text{ и}$$

$$\lim_{x\to 0} f_n(x) = \frac{n^2}{2} \lim_{x\to 0}(\frac{\sin\frac{nx}{2}}{\frac{nx}{2}})^2 + \lim_{x\to 0} f_{n-1}(x)\cos nx = \frac{n^2}{2} + \lim_{x\to 0} f_{n-1}(x),$$

па од принципот на математичка индукција следува дека за секој $n \in \mathbb{N}$ постои $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x) = f_n$.

b) Од решението под а) следува дека $f_n = \frac{n^2}{2} + f_{n-1}$, за $n > 1$.

c) Ако ги собереме равенствата

$$f_k = \frac{k^2}{2} + f_{k-1} \text{, за } k = 2,3,4,...,n$$

добиваме

$$f_n = f_1 + \frac{1}{2}(2^2 + 3^2 + ... + n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12} .$$

Сојузен натпревар 1972

II година

1. Нека $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ се реални броеви такви што

$$b_1b_2b_3 \neq 0,\ a_1b_1 + 2a_2b_2 + a_3b_3 = 0,\ a_1a_3 - a_2^2 > 0.$$

Докажи дека

$$b_1b_3 - b_2^2 < 0.$$

Решение. Ако $b_1b_3 < 0$, тогаш $b_1b_3 - b_2^2 < 0$. Ако $b_1b_3 > 0$, тогаш воведуваме ознаки $x = -a_2b_2,\ y = x - a_1b_1$ и добиваме

$$a_1b_1 = x - y,\ a_3b_3 = x + y,\ a_1 = \frac{x-y}{b_1},\ a_3 = \frac{x+y}{b_3}$$

и

$$0 < a_1a_3 - a_2^2 = \frac{x^2-y^2}{b_1b_3} - \frac{x^2}{b_2^2} = \frac{x^2(b_2^2 - b_1b_3) - y^2b_2^2}{b_2^2b_1b_3},$$

па затоа $b_2^2 - b_1b_3 > 0$, т.е. $b_1b_3 - b_2^2 < 0$.

2. Реши ја равенката

$$\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} = a,$$

каде a е релаен параметар.

Решение. Левата страна на дадената равенка може да се трансформира на следниов начин:

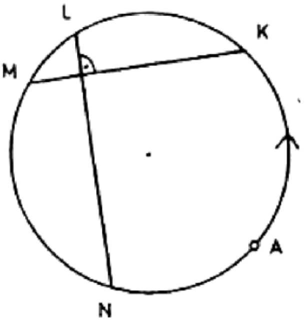
$$\begin{aligned}\sqrt{x + 2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x - 2\sqrt{x-1}} &= \sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2} + \sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}\\ &= \sqrt{x-1} + 1 + |\sqrt{x-1} - 1|\\ &= \begin{cases} 2\sqrt{x-1}, & x \geq 2,\\ 2, & 1 \leq x < 2.\end{cases}\end{aligned}$$

Оттука следува:

1) ако $a > 2$, тогаш равенката има единствено решение $x = 1 + \frac{a^2}{4}$,
2) ако $a = 2$, решенија на равенката се сите реални брови x такви што $1 \leq x < 2$,
3) ако $a < 2$, равенката нема решение.

3. а) Нека се A, K, L, M, N точки на една ориентирана кружница. Докажи дека тетивите KM и LN се нормални ако и само ако $AK + AM = AL + AN \pm \pi$, каде со XY е означена мерката на лакот XY изразена во радијани.

б) Нека A,B,C,D се произволни точки на една кружница., а K,L,M,N се средини на лаците AB,BC,CD,DA. Докажи дека тетивите KM и LN се нормални.

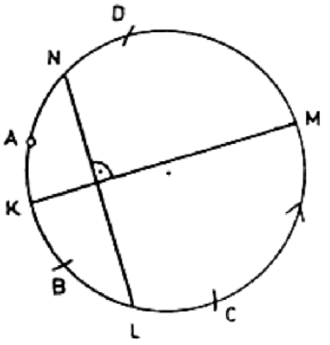


Решение. а) Заради определеност да претпоставиме дека кружницата е позитивно ориентирана. Во тој случај ќе докажеме дека тетивите KM и NL се заемно нормални ако и само ако важи

$$AK+AM=AL+AN-\pi. \qquad (1)$$

Случајот на негативно ориентирана кружница се разгледува аналогно.

Нека претпоставиме дека $KM\perp LN$. Бидејќи во ориентирана кружница аголот меѓу две тетиви е еднаков на полузбирот на мерките на лаците, изразени во радијани, кои ги отсекуваат тие тетиви, добиваме $\frac{\pi}{2}=\frac{KL+MN}{2}$, односно $KL+MN=\pi$. Меѓутоа, важи



$$KL=AL-AK,\ \ MN=AN-AM,$$

цртеж десно, па го добиваме равенството

$$AL-AK+AN-AM=\pi,$$

кое е еквивалентно на равенството (1).

Сега да претпоставиме дека важи (1). Имаме, $AL-AK=KL,\ \ AN-AM=MN$, па ако замениме во (1), добиваме $KL+MN=\pi$, од каде следува $\frac{\pi}{2}=\frac{KL+MN}{2}$, што значи дека $KM\perp LN$.

б) Дадената кружница ќе ја ориентираме позитивно, (цртеж десно). Тогаш

$$\begin{aligned}AK+AM-AL-AN&=\\&=\tfrac{1}{2}AB+(AB+BC+\tfrac{1}{2}CD)-(AB+\tfrac{1}{2}BC)-(AB+BC+CD+\tfrac{1}{2}DA)\\&=-\tfrac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)=-\pi,\end{aligned}$$

па од а) следува дека $KM\perp LN$.

4. а) Ако S е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC, а D е пресечната точка на правата AS и опишаната кружница на триаголникот ABC различна од A, тогаш $DB=DC=DS$. Докажи!

б) Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник. Докажи дека центрите A',B',C',D' на впишаните кружници во триаголниците BCD,CDA,DAB,ABC се темиња на правоаголник.

Решение. а) Стандардно да ги означиме аглите на триаголникот ABC со α,β и γ. Точката D е средина на лакот BC на опишаната кружница, па затоа

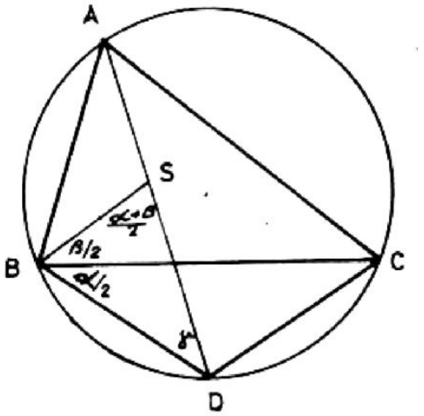
$DB = DC$ (цртеж десно). Понатаму,

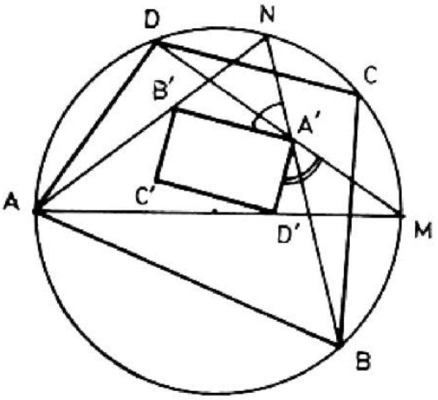
$$\measuredangle DBC = \measuredangle DAC = \tfrac{\alpha}{2}$$

и

$$\begin{aligned}\measuredangle DSB &= 180^\circ - (\measuredangle SBD + \measuredangle BDS)\\ &= 180^\circ - (\measuredangle SBC + \measuredangle CBD + \measuredangle BCA)\\ &= 180^\circ - (\tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\beta}{2} + \gamma)\\ &= \tfrac{\alpha}{2} + \tfrac{\beta}{2} = \measuredangle SBD.\end{aligned}$$

Затоа триаголникот SBD е рамнокрак и важи $DB = DS$.





б) Со $2\alpha, 2\beta, 2\gamma, 2\delta$ да ги означиме големините на централните агли кои соодветствуваат редоследно на лаците AB, BC, CD, DA, а средините на лаците BC и CD соодветно со M и N (види цртеж). Тогаш точките B' и D' припаѓаат соодветно на отсечките AN и AM , а A' е пресек на BN и DM . Од а) следува

$$NB' = ND = NC = NA',$$

па затоа триаголникот $B'A'N$ е рамнокрак и $\measuredangle B'A'N = \frac{180^\circ - \measuredangle ANB}{2} = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. Аналогно се добива $\measuredangle D'A'M = 90^\circ - \frac{\delta}{2}$. Бидејќи $\measuredangle BA'M = \measuredangle DA'N = \frac{\beta+\gamma}{2}$, добиваме

$$\begin{aligned}\measuredangle B'A'D' &= 180^\circ - \measuredangle B'A'N - (\measuredangle D'A'M - \measuredangle BA'M)\\ &= 180^\circ - (90^\circ - \tfrac{\alpha}{2}) - (90^\circ - \tfrac{\delta}{2}) + \tfrac{\gamma+\delta}{2} = 90^\circ.\end{aligned}$$

Аналогно се докажува дека и останатите агли на четириаголникот $A'B'C'D'$ се прави,што значи дека тој е правоаголник.

III година

1. Реши ја равенката

$$(a-1)\left(\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\cos x} + \frac{1}{\sin x \cos x}\right) = 2,$$

каде a е реален параметар.

Решение. Воведуваме смена $\sin x + \cos x = t, |t| \le \sqrt{2}$. Тогаш $2\sin x \cos x = t^2 - 1$ и дадената равенка се сведува на равенката

$$(a-1)(t+1) = t^2 - 1, \quad t^2 \ne 1.$$

Последното е можно само за $t=a$. Равенката $\sin x+\cos x=a$ има решенија ако $|a|\leq\sqrt{2}$ и тие ја задоволуваат почетната равенка ако $|a|\neq 1$. При наведените услови дадената равенка има решенија

$$x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^n\arcsin\frac{a}{\sqrt{2}}+n\pi,$$

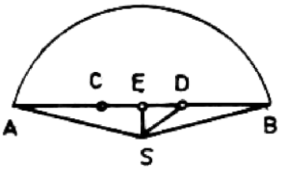
каде $n\in\mathbb{Z}$ ако $|a|<\sqrt{2}$ и $|a|\neq 1$, а $\frac{n}{2}\in\mathbb{Z}$ ако $|a|=\sqrt{2}$.

2. Кружниот лак AB со центар S има централен агол α, а точките C и D ја делат тетивата AB на три еднакви дела.

а) Ако $\measuredangle CSD=x$, докажи дека $\cos x=\frac{4+5\cos\alpha}{5+4\sin\alpha}$.

б) Пресметај ја разликата $\cos x-\cos\frac{\alpha}{3}$.

в) Определи го аголот α за да оваа разлика е еднаква на нула.



Решение. а) Случајот $\alpha=\pi$ е тривијален (тогаш и $x=\pi$). Во случај кога $0<\alpha<\pi$ со E да го означиме подножјето на нормалата од точката S на AB (цртеж десно). Од правоаголните триаголници SED и SEB добиваме $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{ED}{SE}$ и $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{EB}{SE}$, од каде следува $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. Затоа

$$\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\frac{1}{9}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\frac{1}{9}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{9-\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}{9+\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{4+5\cos\alpha}{5+4\sin\alpha},$$

бидејќи по претпоставка $1+\cos\alpha\neq 0$.

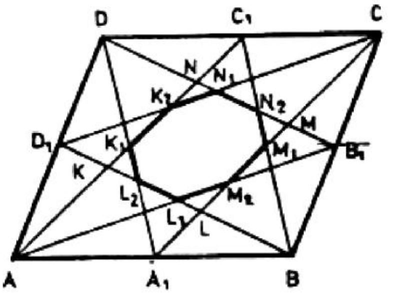
б) Да означиме $\cos\frac{\alpha}{3}=t$. Тогаш

$$\cos x-\cos\frac{\alpha}{3}=\frac{4+5\cos\alpha}{5+4\sin\alpha}-\cos\frac{\alpha}{3}=\frac{4+5(4t^3-3t)}{5+4(4t^3-3t)}-t=\frac{-4(t-1)^2(t1)(4t-1)}{16t^3-12t+5}.$$

в) Бидејќи според условте на задачата $0<\alpha\leq\pi$, односно $\frac{1}{2}\leq t<1$ еднствена можност да важи $\cos x-\cos\frac{\alpha}{3}=0$ е $4t-1=0$, односно $t=\frac{1}{4}$, од каде добиваме $\alpha=3\arccos\frac{1}{4}$.

3. Правите определени со темињата на паралелограмот и средините на несоседните страни, со своите пресеци определуваат осумаголник. Докажи дека плоштината на овој осумаголник е еднаква на шестината од плоштината на дадениот паралелограм.

Решение. Со A_1, B_1, C_1, D_1 да ги означиме средините на страните AB, BC, CD, DA на паралелограмот $ABCD$ со плоштина S, со K, K_1, K_2 да ги означиме пресечните точки на правата AC_1 соодветно со правите BD_1, DA_1, CD_1. Аналогно ги дефинираме точките L, L_1, L_2; точките M, M_1, M_2 и точките N, N_1, N_2 (цртеж десно).



Од $AA_1 \| CC_1$ и $AA_1 = CC_1 = \frac{AB}{2}$ следува дека четириаголникот AA_1CC_1 е паралелограм кој има иста висина и половина од основата на дадениот паралелограм, па затоа неговата плоштина е еднаква на $\frac{S}{2}$. Од $LM \| KN$ и $KL \| MN$ следува дека четириаголникот $KLMN$ исто така е паралелограм. Неговата висина е еднаква на висината на паралелограмот AA_1CC_1. Да ја пресметаме неговата основа KN. Отсечките D_1K, MB_1, C_1N се средни отсечки соодветно на триаголниците AND, CLB, DMC, па затоа важи

$$AK = KN = LM = MC = 2NC_1,$$

од каде следува $KN = \frac{2}{5}AC_1$. Затоа плоштината на паралелограмот $KLMN$ е еднаква на $\frac{S}{5}$.

Точката K_1 е пресек на дијагоналите на паралелограмот AA_1C_1D, па затоа $AK_1 = K_1C_1$. Точката K_2 е тежиште на триаголникот ACD (таа е пресек на неговите тежишни линии AC_1 и CD_1), па затоа $AK_2 = 2K_2C_1$. Од претходно изнесеното лесно следува дека $KK_1 = \frac{KN}{4}$ и $K_2N = \frac{KN}{3}$. На сличен начин се добива $KL_2 = \frac{KL}{3}$. Затоа

$$\begin{aligned} P_{KK_1L_2} &= \tfrac{1}{2}KK_1 \cdot KL_2 \sin\measuredangle K_1KL_2 = \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{4}KN \cdot \tfrac{1}{3}KL \sin\measuredangle NKL \\ &= \tfrac{1}{12}P_{NKL} = \tfrac{1}{24}P_{KLMN} = \tfrac{1}{120}S. \end{aligned}$$

Аналогно се докажува дека

$$P_{LL_1M_2} = P_{MM_1N_2} = P_{NK_1K_2} = \frac{S}{120}.$$

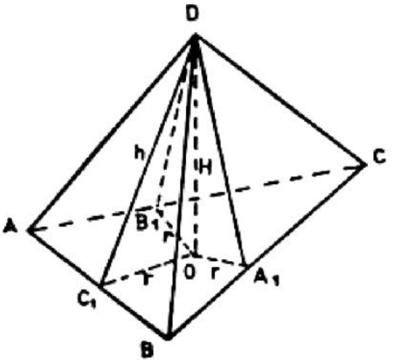
Конечно,

$$P_{K_1L_2L_1M_2M_1N_2N_1K_2} = \frac{S}{5} - 4\cdot\frac{S}{120} = \frac{S}{6}.$$

4. Определи го волуменот на тристрана пирамида чии ѕидови имаат плоштини S_0, S_1, S_2, S_3, а диедрите при ѕидот со плоштина S_0 се еднакви.

Решение. Нека ѕидот со плоштина S_0 е основата ABC на пирамидата $ABCD$. Со O да го означиме подножјето на висината на пирамидата и со A_1, B_1, C_1 да ги означиме соодветно подножјата на висините на бочните ѕидови BCD, CAD, ABD

повлечени од темето D. Тогаш, по претпоставка, аглите $\measuredangle DA_1O, \measuredangle DB_1O, \measuredangle DC_1O$ се еднакви, па затоа триаголниците $DA_1O, DB_1O,$ DC_1O се складни, види цртеж. Значи, точката O е центар на впишаната кружница во триаголникот ABC и со r да го означиме радиусот на оваа кружница. Понатаму, да означиме $DO=H$, $DA_1=DB_1=DC_1=h$, $BC=a$, $CA=b$, $AB=c$ и $S_1+S_2+S_3=S$.



Од триаголниците BCD, CAD, ABD добиваме $a=\frac{2S_1}{h}$, $b=\frac{2S_2}{h}$, $c=\frac{2S_3}{h}$, а за полупериметарот на триаголникот ABC имаме $s=\frac{a+b+c}{2}=\frac{S}{h}$. Оттука собиваме

$$S_0^2=s(s-a)(s-b)(s-c)=\frac{S(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}{h^4},$$

па затоа

$$h=\sqrt[4]{\frac{S(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}{S_0^2}}.$$

Понатаму,

$$r=\frac{S_0}{s}=\frac{S_0h}{S} \text{ и } H=\sqrt{h^2-r^2}=\frac{h}{S}\sqrt{S^2-S_0^2},$$

па затоа бараниот волумен е

$$V=\frac{1}{3}S_0H=\frac{1}{3}\sqrt{S_0(S^2-S_0^2)}\cdot\sqrt[4]{\frac{(S-2S_1)(S-2S_2)(S-2S_3)}{S^3}}.$$

IV година

1. За секој природен број n, бројот $n+3n^3+7n^7+9n^9$ е делив со 10. Докажи!

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}n+3n^3+7n^7+9n^9&=10n^9+(n-n^9)+10n^7-3(n^3-n^7)\\&=10(n^9+n^7)-n(n-1)(n+1)(1+n^2)(1+3n^2+n^4)\end{aligned}$$

Во последниот збир првиот собирок е делив со 10, а лесно се проверува дека за секој природен број n и вториот собирок е делив со 10.

2. Определи го максималниот број пермутации од n елементи такви што секои два елементи се соседни во најмногу една од пермутациите.

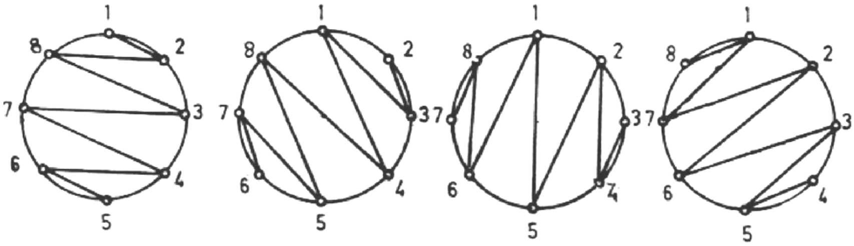
Решение. Нека S е множество од n елементи. Нека претпоставиме дека множеството P кое се состои од m пермутации на множеството S го има тоа својство да произволни два елементи на множеството S се соседни во најмногу една пермутација од P. Секоја пермутација на множеството S содржи $n-1$ пар соседни елементи, а множеството S содржи $\frac{n(n-1)}{2}$ двочлени подмножества. Затоа мора да важи

$$m(n-1) \leq \frac{n(n-1)}{2}.$$

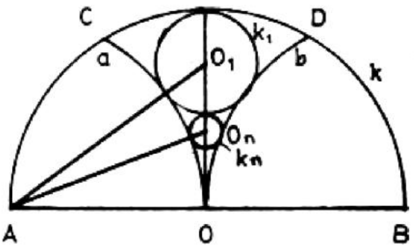
Според тоа,

$$m \leq [\tfrac{n}{2}].$$

Во последното неравенство секогаш се достигнува равенство. За $n=7$ тоа се гледа од следниот пример: 12837465, 23148576, 34251687, 81726354 (види цртеж). Сличен пример постои за произволен n.



3. Над отсечката AB со средина O конструирана е полукружница k. Кружниците $a(A,r)$ и $b(B,r)$, каде $r=\frac{AB}{2}$, ја сечат полукружницата k во точките C и D. Во фигурата ограничена со лаците OC, CD и OD впишана е низа кружници $k_1, k_2, k_3, \ldots$ со радиуси $r_1, r_2, r_3, \ldots$ така што првата од нив ги допира сите три лаци, а секоја следна ги допира лаците CO и OD и претходната кружница. Докажи дека за секој природен број k важи $r_k = \frac{r}{2k(k+1)}$.



Решение. Центрите на кружниците k_1, $k_2, \ldots$ редослено да ги означиме со $O_1, O_2, \ldots$ (цртеж десно). Од правоаголниот триаголник AOO_1 имаме

$$(r-r_1)^2 + r^2 = (r+r_1)^2,$$

од каде добиваме

$$r_1 = \frac{r}{4} = \frac{r}{2 \cdot 1 \cdot (1+1)},$$

па тврдењето важи за $i=1$.

Нека претпоставиме дека тврдењето $r_i = \frac{r}{2i(i+1)}$ важи за секои броеви i кои се помали од некој природен број n. Тогаш

$$\sum_{i=1}^{n-1} r_i = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{r}{2i(i+1)} = \frac{r}{2} \sum_{i=1}^{n1} (\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}) = \frac{r}{2}(1-\frac{1}{n}). \quad (1)$$

Ќе докажеме дека $r_n = \frac{r}{2n(n+1)}$. Од правоаголниот триаголник AOO_n добиваме

$$(r - 2\sum_{i=1}^{n-1} r_i - r_n)^2 + r^2 = (r + r_n)^2 ,$$

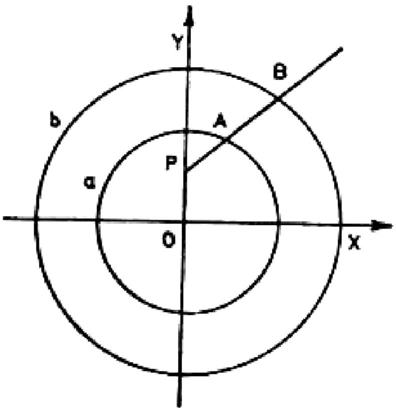
од каде ако се има предвид (1) добиваме

$$r_n = \frac{(r - 2\sum_{i=1}^{n-1} r_i)^2}{4(r - \sum_{i=1}^{n-1} r_i)} = \frac{r}{2n(n+1)} .$$

Коенчно, тврдењето следува од принципот на математичка индукција.

4. Дадени се концентрични кружници a и b со центар O и точка $P \neq o$ во внатрешноста на помалата кружница. Полуправата l со почеток во P ги сече кружниците во точките A и B. Докажи дека отсечката AB е најголема ако полуправата l е нормална на правата OP.

Решение. Поставуваме координатен систем така што точката O е координатен почеток, а точката P е на $y-$оската. Нека d е ординатата на точката P, r и R се радиусите на кружниците a и b и нека $r < R$ (цртеж десно). Равенката на полуправата l е $y = kx + d$, со тоа што x е со постојан знак, при што без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $x > 0$. Што се однесува до коефициентот k, дозволуваме формално тој да има вредност и ∞ (случајот кога l се поклопува со $y-$оската).



Ако A и B се пресечните точки на полуправата со кружницие a и b, тогаш нивните координати се:

$$x_A = \frac{-kd + \sqrt{(1+k^2)r^2 - d^2}}{1+k^2}, y_A = kx_A + d,$$

$$x_B = \frac{-kd + \sqrt{(1+k^2)R^2 - d^2}}{1+k^2}, y_A = kx_A + d,$$

па затоа растојанието меѓу нив е еднакво на

$$D(k) = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = (x_A - x_B)\sqrt{1+k^2}$$

$$= \sqrt{R^2 - \frac{d^2}{1+k^2}} - \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{1+k^2}} = \frac{R^2 - r^2}{\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{1+k^2}} + \sqrt{r^2 - \frac{d^2}{1+k^2}}} .$$

Последниот израз има најголема вредност $\sqrt{R^2-d^2}-\sqrt{r^2-d^2}$ за $k=0$, т.е. кога полуправата l е нормална на OP.

Мала олимпијада 1972

1. Дадени се ненулти реални броеви u,v,w,x,y,z. Колкав е можниот избор на предзнаците на овие броеви, ако важи

$$(u+ix)(v+iy)(w+iz)=i\ ? \qquad (1)$$

Решение. Да ги претставиме дадените комплексни броеви во тригонометриски облик:

$$u+ix=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1),$$
$$v+iy=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2),$$
$$w+iz=r_3(\cos\varphi_3+i\sin\varphi_3).$$

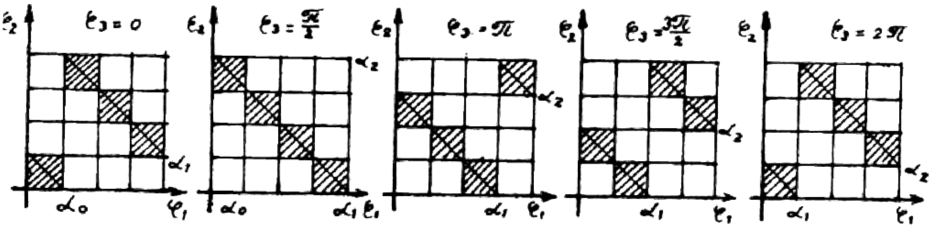
Притоа, според претпоставката, $0<\varphi_i<2\pi, \varphi_i\neq\frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$ за $i=1,2,3$. Равенството (1) го запишуваме во видот:

$$r_1r_2r_3(\cos(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3))=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$$

и при погоден избор на броевите r_1,r_2,r_3 важи ако и само ако

$$\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\{0,1,2\}.$$

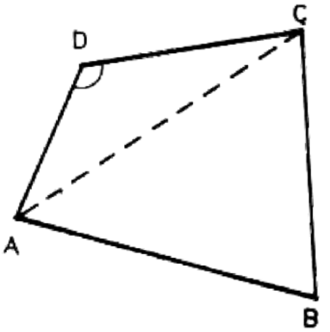
Сега задачата можеме да ја преформулираме на следниов начин:
Во просторен координатен систем, чии оски се означени со $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3$ дадена е коцка $0<\varphi_1<2\pi, 0<\varphi_2<2\pi, 0<\varphi_3<2\pi$, која со рамнинте $\varphi_i=l\frac{\pi}{2}$, ($i=1,2,3$, $l=1,2,3$) е поделена на 64 помали коцки. Треба да се определи бројот на оние помали коцки чија внатрешност има непразен пресек со некоја од рамнинуте α_k определени со $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\{0,1,2\}$.



Лесно се гледа дека рамнината α_0 чија равенка е $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=\frac{\pi}{2}$ја сече внатрешноста само на една коцка – онаа која е во долниот лев агол на големата коцка (види цртеж). Рамнината α_1 чија равенка е $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=\frac{\pi}{2}+2\pi$ ја сече внатрешноста на 7 коцки за кои $0<\varphi_3<\frac{\pi}{2}$, потоа 7 коцки кај кои $\frac{\pi}{2}<\varphi_3<\pi$, 5 коцки кај кои $\pi<\varphi_3<\frac{3\pi}{2}$ и 3 коцки кај кои $\frac{3\pi}{2}<\varphi_3<2\pi$, што значи вкупно 22 коцки. Рамнината α_2 чија равенка е $\varphi_1+\varphi_2+\varphi_3=\frac{\pi}{2}+4\pi$ не ја сече внатрешноста на ниту една коцка кај која $0<\varphi_3<\frac{\pi}{2}$, таа ја сеќе внатрешноста на една коцка кај која $\frac{\pi}{2}<\varphi_3<\pi$, потоа 3 коцки кај кои $\pi<\varphi_3<\frac{3\pi}{2}$ и на крајот 5 коцки кај кои $\frac{3\pi}{2}<\varphi_3<2\pi$, што значи вкупно 9 коцки.

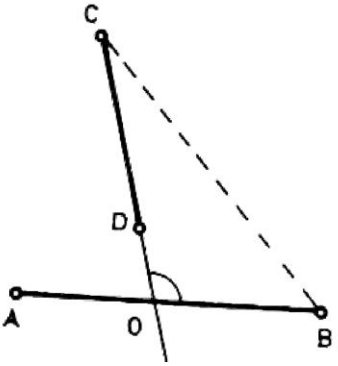
Значи, бараниот број коцки, а со самото тоа и бараните можности за избор на предзнаците е $1+22+9=32$.

2. Ако конвексното множество точки во рамнината има барем два дијаметри, да кажеме AB и CD, тогаш отсечките AB и CD имаат заедничка точка. Докажи!



Решение. Нека претпоставиме дека AB и CD се дисјунктни дијаметри на даденото конвексно множество. Можни се два случаја:

а) Ниту една од отсечките AB и CD не ја сече правата определена со другата отсечка. Во овој случај четириаголникот $ABCD$ (или $ABDC$) е конвексен (цртеж десно). Еден од аглите на тој четириаголник, на пример кај темето D не е помал од 90°. Но, тогаш $AC>CD$, што значи дека отсечката CD не е дијаметар, што противречи на условот на задачата.



б) Една од овие отсечки ја сече правата определена со другата отсечка. Во овој случај нека, да кажеме, отсечката AD ја сече правата определена со отсечката CD во точката O и нека точката D е меѓу точката C и O (цртеж лево). Тогаш еден од аглите AOC и BOC, на пример BOC не е помал од 90°. Но, тоа значи дека $BC>OC>CD$, па затоа CD не е дијаметар, што противречи на условот на задачата.

3. Познато е дека за броевите од таблицата

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{matrix}$$

важи неравенството

$$\sum_{j=1}^{n} | a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n | \leq M ,$$

за секој избор на броевите $x_j = \pm 1$. Докажи дека

$$| a_{11} | + | a_{22} | + ... + | a_{nn} | \leq M .$$

Решение. Со X да го означиме множеството од сите $n-$варијации $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ на множеството $\{-1,1\}$. Според претпоставката за секој $x \in X$ важи

$$\sum_{j=1}^{n} | a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n | \leq M ,$$

па бидејќи множеството X има 2^n елементи, добиваме

$$\sum_{x \in X} \sum_{j=1}^{n} | a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n | \leq 2^n M .$$

Последното неравенство можеме да го запишеме во видот

$$\sum_{j=1}^{n} (\frac{1}{2^n} \sum_{x \in X} | a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n |) \leq M .$$

За секој фиксиран $j \in \{1, 2, ..., n\}$ собирците на збирот

$$S_j = \sum_{x \in X} | a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + ... + a_{jn}x_n | ,$$

кои ги има 2^n, ги разбиваме на 2^{n-1} парови, така што варијациите x и x' кои соодветствуваат на собирците на еден пар се разликуваат само во елементот x_j (во една $x_j = 1$, а во друга $x_j^{'} = -1$). Тогаш збирот на двата собирци е од видот $| A + a_{jj} | + | A - a_{jj} |$, каде

$$A = a_{j1}x_1 + ... + a_{j,j-1}x_{j-1} + a_{j,j+1}x_{j+1} + ... + a_{jn}x_n .$$

Но,

$$| A + a_{jj} | + | A - a_{jj} | \geq | (A + a_{jj}) - (A - a_{jj}) | = 2 | a_{jj} | ,$$

па затоа $S_j \geq 2^{n-1} \cdot 2 | a_{jj} | = 2^n | a_{jj} |$, што значи

$$| a_{11} | + | a_{22} | + ... + | a_{nn} | = \sum_{j=1}^{n} (\frac{1}{2^n} 2^n | a_{jj} | \leq \sum_{j=1}^{n} (\frac{1}{2^n} S_j) \leq M .$$

4. Определи го најголемиот природен број $k(n)$ со следното својство: Постојат $k(n)$ различни подмножества на дадено множество со n елементи, такви што секои две од нив имаат непразен пресек.

Решение. Да го фиксираме елементот a_1 од множеството $X = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ и да ги разгледаме подмножествата на множеството X кои го содржат елементот

a_1. Вакви подмножества има колку што е бројот на подмножествата на множеството $\{a_2, a_3, ..., a_n\}$, што значи 2^{n-1}. Јасно, секои две од овие множества имаат непрезен пресек, па затоа $k(n) \geq 2^{n-1}$.

Нека претпоставиме дека се избрани повеќе од 2^{n-1} подмножества од множеството X. Да ги поделиме сите 2^n подмножества на X на 2^{n-1} парови, така што во еден пар припаѓаат множеството и неговиот коплемент. Од принципот на Дирихле следува дека барем две од избраните подмножества формираат еден таков пар, што значи дека нивниот пресек е празен. Значи, не може да е $k(n) > 2^{n-1}$.

Конечно, од претходните разгледувања следува $k(n) = 2^{n-1}$.

Сојузен натпревар 1973

I година

1. Во едно друштво на математичари секој од нив се занимава барем со една од следниве области на математиката: алгебра, анализа, геометрија или логика. Тој што се занимава со алгебра или логика, се занимава и со анализа. Тој што се занимава со геометрија се занимава и со логика. Тој што се занимава со анализа и геометрија, се занимава и со алгебра. Со која од овие области се занимаваат најмногу, а со која најмалку математичари?

Решение. Нека S_1, S_2, S_3 и S_4 се редоследно математичарите кои се занимаваат со алгебра, анализа, геометрија и логика. Од условот на задачата следува

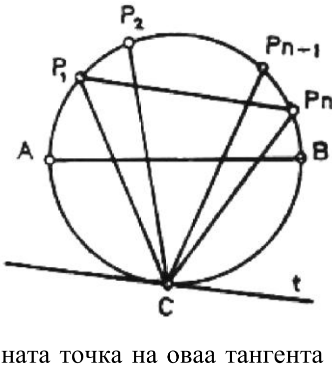
$$S_1 \cup S_4 \subset S_2,\ S_3 \subset S_4,\ S_2 \cap S_3 \subset S_1.$$

Од првиот и вториот услов добиваме

$$S_3 \subset S_2 \text{ и } S_1 \cup S_3 \cup S_4 \subset S_2,$$

т.е. најмногу математичари се занимаваат со анализа. Понатаму, $S_2 \cap S_3 = S_3$, па од третиот услов следува $S_3 \subset S_1$. Конечно, добиваме $S_3 \subset S_1 \cap S_2 \cap S_4$, т.е. најмалку математичари се занимаваат со геометрија.

2. Дадена се кружница k и нејзин дијаметар AB. На едната полукружница се избрани n точки $P_1, P_2, ..., P_n$ такви што P_1 е меѓу A и P_2, P_2 е меѓу P_1 и P_3,..., P_n е меѓу P_{n-1} и B. На другата полукружница определи точка C таква што збирот на плоштините на триаголниците $CP_1P_2, CP_2P_3, ..., CP_{n-1}P_n$ ќе биде најмал.



Решение. Збирот на плоштините на триаголниците $CP_1P_2, CP_2P_3, ..., CP_{n-1}P_n$ е еднаков на плоштината на многуаголникот $CP_1P_2...P_n$, т.е. на збирот на плоштината на $n-$аголникот $P_1P_2,...P_n$ и триаголникот CP_1P_n, па затоа има максимална вредност ако плоштината на триаголникот CP_1P_n е максимална. Нека t е тангентата на дадената кружница која е паралелна со правата P_1P_n и која се наоѓа на онаа страна од P_1P_n на која не е точката P_2 (цртеж десно). Допирната точка на оваа тангента и кружницата е бараната точка C, бидејќи од сите триаголници со основа AB и теме на лакот AB кој не ја содржи точката P_2 најголема висина има триаголникот ABC.

3. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$\sqrt{\underbrace{44...4}_{2n}+\underbrace{11...1}_{n+1}-\underbrace{66...6}_{n}}\,.$$

Решение. Имаме:

$$\sqrt{\underbrace{44...4}_{2n}+\underbrace{11...1}_{n+1}-\underbrace{66...6}_{n}}=\sqrt{4\cdot\frac{10^{2n}-1}{9}+\frac{10^{n+1}-1}{9}-6\cdot\frac{10^{n}-1}{9}}$$

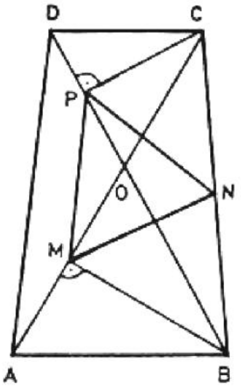
$$=\tfrac{1}{3}\sqrt{4\cdot 10^{2n}+4\cdot 10^{n}+1}$$

$$=\tfrac{1}{3}\sqrt{(2\cdot 10^{n}+1)^{2}}=\tfrac{1}{3}(2\cdot 10^{n}+1)$$

$$=\tfrac{1}{3}\cdot\underbrace{200...01}_{n+1}=\underbrace{66...67}_{n}.$$

4. Дијагоналите AC и BD на рамнокракиот трапез $ABCD$ со основа AB се сечат во точка O при што $\measuredangle AOB=60^\circ$. Докажи дека средините на отсечките OA, OD, BC се темиња на рамностран триаголник.

Решение. Триаголниците ABO и CDO се рамнокраки и како аголот во темето O им е еднаков на 60°, овие триаголници се рамнострани (цртеж десно). Од ова и од условот дека M и P се соодветно средини на отсечките AO и DO следува дека $BM\perp AO$ и $CP\perp DO$. Според тоа, триаголниците BMC и BPC се правоаголни со прави агли во темињата M и P. Центарот на опишаната кружница околу овие триаголници е средината на хипотенузата BC, односно точката N. Од последното, условот $AD=BC$ и фактот дека MP е средна линија на триаголникот ADO добиваме



$MP=\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}BC=NC=NP=NM$, т.е. $MN=NP=PM$.

5. а) Реши го системот равенки

$$|x|+|y-1|=1,\ x+2y=3.$$

б) Решението прикажи го графички во рамнина на правоаголен координатен систем.

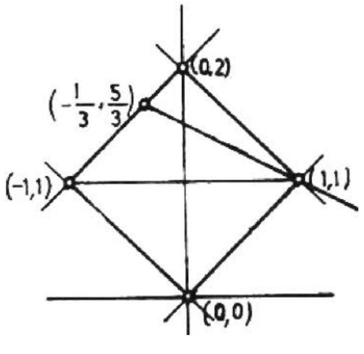
Решение. Ќе ги разгледаме следниве четири системи:

1) $x\ge 0, y\ge 1, x+y=2, x+2y=3$,

2) $x\ge 0, y<1, x-y=0, x+2y=3$,

3) $x<0, y\ge 1, y-x=2, x+2y=3$,

4) $x<0, y<1, x+y=0, x+2y=3$.



Системот 1) има решение $(1,1)$, системите 2) и

3) немаат решение, а системот 4) има решение $(-\frac{1}{3},\frac{5}{3})$. Решенијата на системот се прикажани на горниот цртеж. Имено, множеството точки (x,y) за кои важи $|x|+|y-1|=1$ е границата на квадратот со темиња $(0,0),(1,1),(0,2),(-1,1)$. Правата $x+2y=3$ ја сече оваа граница во точките $(1,1)$ и $(-\frac{1}{3},\frac{5}{3})$.

II година

1. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$\sqrt{2x-a}=x-b,$$

каде a и b се реални броеви.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на системот

$$2x-a=(x-b)^2,\ x\geq b,\ x\geq \frac{a}{2}.$$

Равенката $2x-a=(x-b)^2$ може да се запише во облик

$$x^2-2(b+1)x+a+b^2=0$$

и има решенија $x_1=b+1-\sqrt{2b-a+1}, x_2=b+1+\sqrt{2b-a+1}$.

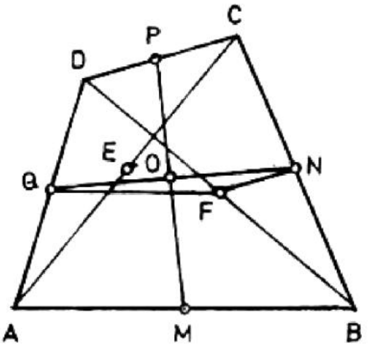
а) Ако $\frac{a}{2}<b$, тогаш $\frac{a}{2}<x_1<b<x_2$, па само x_2 е решение на дадената равенка.

б) Ако $2b\leq a<2b+1$, тогаш $b\leq\frac{a}{2}\leq x_1<x_2$, па x_1 и x_2 се решенија на дадената равенка.

в) Ако $a=2b+1$, тогаш $b<\frac{a}{2}<x_1=x_2$, па затоа бројот $b+1$ е единствено решение на дадената равенка

г) Ако $a>2b+1$, тогаш x_1 и x_2 не се реални броеви, т.е. дадената равенка нема реални решенија.

2. Ако збирот на отсечките определени со средишните парови на спротивните страни на четириаголникот е еднаков на неговиот полупериметар, тогаш тој четириаголник е паралелограм. Докажи!



Решение. Нека M,N,P,Q се редоследно средините на страните AB,BC,CD,DA на четириаголникот $ABCD$, E и F се соодветно средините на дијагоналите AC и BD и O е пресекот на отсечките MP и NQ (цртеж десно). Доволно е да докажеме дека точките E и F се совпаѓаат.

Бидејќи MF,NF,PF,QF се средни линии

на триаголниците ABD и BCD, важи

$$MF=\tfrac{AD}{2},\ NF=\tfrac{DC}{2},\ PF=\tfrac{BC}{2},\ QF=\tfrac{AB}{2},$$

па затоа

$$MF+PF+NF+QF=\tfrac{1}{2}(AB+BC+CD+DA).$$

Понатаму, според условот на задачата и

$$MP+QN=\tfrac{1}{2}(AB+BC+CD+DA),$$

добиваме

$$MF+PF+NF+QF=MP+QN. \tag{1}$$

Ако точката F не припаѓа барем на една од отсечките MP и QN, на пример $F\not\in MP$, тогаш $MF+PF>MP$ и $NF+QF\geq NQ$, па затоа

$$MF+PF+NF+QF>MP+QN,$$

што противречи на (1). Според тоа, $F\in MP$ и $F\in NQ$, па затоа $F\equiv O$. Аналогно се докажува дека $E\equiv O$. Конечно, $F\equiv O\equiv E$.

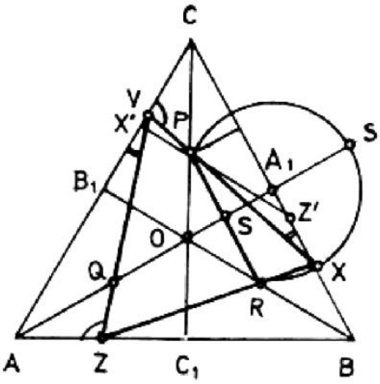
3. Даден е рамностран триаголник ABC со страна a, со центар O и точка P која припаѓа на отсечката OC. Конструирај рамностран триаголник XYZ вишан во триаголникот ABC, така што точките X,Y,Z припаѓаат редоследно на страните BC,CA,AB и страната XY ја содржи точката P. Кога задачата има решение?

Решение. *Анализа*. Нека XYZ е бараниот триаголник (цртеж десно). Тогаш $XY=YZ$,

$$\begin{aligned}\measuredangle YXC&=180^\circ-\measuredangle YCX-\measuredangle XYC\\&=180^\circ-60^\circ-\measuredangle XYC\\&=180^\circ-\measuredangle ZYX-\measuredangle XYC=\measuredangle ZYA,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\measuredangle XYC&=180^\circ-60^\circ-\measuredangle YXC\\&=180^\circ-60^\circ-\measuredangle ZYA=\measuredangle YZA,\end{aligned}$$

па затоа триаголниците CXY и AYZ се складни. Аналогно се докажува дека секој од овие триаголници е складен со триаголникот BZX. Понатаму имаме $XA_1=YB_1=ZC_1, OA_1=OB_1=OC_1$, па затоа правоаголните триаголници OA_1X, OB_1Y, OC_1Z се складни. Затоа $OX=OY=OZ$, т.е. точката O е центар на рамностраниот триаголник XYZ. Нека $Q=YZ\cap AO,\ R=ZX\cap BO$.



Ротацијата околу точката O за агол 120° (односно -120°) ја пресликува точката P во точката во точката R (односно во точката Q). Затоа $OP=OQ=OR$.

Конструкција. На отсечката OB конструираме точка R така што важи $OR=OP$. Потоа на онаа страна на отсечката PR на која е страната BC конструираме геометриско место на точки l од кои отсечката PR се гледа под агол

60°. Тоа е лак од кружница. Нека X е пресечната точка на лакот l и отсечката BC. На крајот се конструираат точки Y и Z редоследно како пресеци на правите XP и AC, односно XR и AB. Триаголникот XYZ е бараниот триаголник.

Доказ. По конструкција $P \in XY$ и $\measuredangle ZXY = 60^\circ$. За да докажеме дека триаголникот XYZ е рамностран доволно е да докажеме дека $XZ = XY$. Аналогно, како на почетокот, добиваме

$$\measuredangle YXC = \measuredangle XZB,\ \measuredangle XYC = \measuredangle ZXB.$$

Ротацијата за 120° околу точката O ги пресликува точките R, B, Z, X редоследно во точките $P, C, Z' \in BC, X' \in CA$. Тогаш $\triangle Z'CX' \cong \triangle ZBX$ и $\triangle Z'CX' \cong \triangle XCY$, па следува дека $\triangle Z'CX' \cong \triangle XCY$ и оттука

$$CX = CZ', CY = CX'.$$

Бидејќи $X', Y \in CA$ и $Z', X \in BC$, добиваме $X = Z'$ и $Y = X'$. Конечно,

$$XZ = X'Z' = YX.$$

Дискусија. Бидејќи лакот l и правата BC може да имаат две, една или ниедна пресечна тока, задачата има две, едно или ниедно решение. Нека $OP = x$, $AB = a$, $S = PR \cap AA_1$ и $S_1 = l \cap AA_1$. Тогаш

$$PS = \tfrac{x\sqrt{3}}{2}, OS = \tfrac{x}{2}, SA_1 = \tfrac{a\sqrt{3}}{6} - \tfrac{x}{2}, SS_1 = PS\sqrt{3} = \tfrac{3x}{2}.$$

Задачата има решение ако и само ако $SS_1 \geq SA_1$, т.е. ако и само ако

$$OP = x \geq \tfrac{a\sqrt{3}}{12} = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{2}{3} \tfrac{a\sqrt{3}}{2} = \tfrac{1}{4} OC.$$

4. Докажи го неравенството

$$\tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \tfrac{120}{121} > \tfrac{1}{11}.$$

Решение. Нека $x = \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{4}{5} \cdot \ldots \cdot \tfrac{120}{121}$ и $y = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \tfrac{119}{120}$. Бидејќи

$$\tfrac{2}{3} > \tfrac{1}{2}, \tfrac{4}{5} > \tfrac{3}{4}, \tfrac{6}{7} > \tfrac{5}{6}, \ldots, \tfrac{120}{121} > \tfrac{119}{120},$$

добиваме дека $x > y$ и $x^2 > xy = \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{3}{4} \cdot \ldots \cdot \tfrac{119}{120} \cdot \tfrac{120}{121} = \tfrac{1}{121}$, па затоа $x > \tfrac{1}{11}$.

III година

1. Во внатрешноста на тетраедарот $ABCD$ е дадена точка O. Докажи дека збирот на аглите под кои од точката O се гледаат рабовите на тетраедарот е поголем од 3π.

Решение. Ги воведуваме ознаките:

$O_1 = DO \cap ABC, A_1 = AO_1 \cap BC, B_1 = BO_1 \cap CA, C_1 = CO_1 \cap AB,$

$\alpha = \measuredangle AOD, \beta = \measuredangle BOD, \gamma = \measuredangle COD, \alpha_1 = \measuredangle BOC, \beta_1 = \measuredangle COA, \gamma_1 = \measuredangle AOB,$

$\alpha_2 = \measuredangle AOO_1, \beta_2 = \measuredangle BOO_1, \gamma_2 = \measuredangle COO_1,$

(цртеж десно). Тогаш

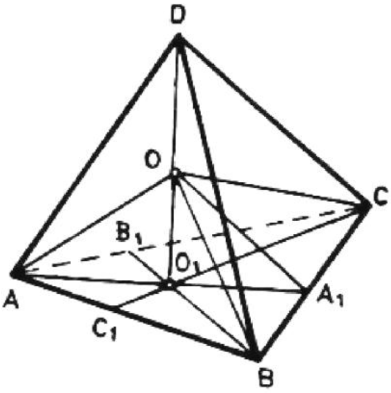
$$\alpha+\alpha_2=\pi, \beta+\beta_2=\pi, \gamma+\gamma_2=\pi,$$

па затоа

$$\alpha+\beta+\gamma+\alpha_2+\beta_2+\gamma_2=3\pi. \qquad (1)$$

Понатаму,

$$\begin{aligned}\alpha_1+\beta_1&=\measuredangle BOC+\measuredangle COA\\&=\measuredangle BOA_1+\measuredangle A_1OC+\measuredangle COA\\&>\measuredangle BOA_1+\measuredangle AOA_1\\&=\measuredangle BOA+\measuredangle A_1OO_1+\measuredangle AOO_1\\&>\measuredangle BOO_1+\measuredangle AOO_1=\alpha_2+\beta_2\end{aligned}$$



и аналогно

$$\beta_1+\gamma_1>\beta_2+\gamma_2, \alpha_1+\gamma_1>\alpha_2+\gamma_2,$$

па ако ги собереме овие неравенства добиваме

$$\alpha_1+\beta_1+\gamma_1>\alpha_2+\beta_2+\gamma_2. \qquad (2)$$

Конечно, од (1) и (2) добиваме

$$\alpha+\beta+\gamma+\alpha_1+\beta_1+\gamma_1=3\pi,$$

што и требаше да се докаже.

2. Во внатрешноста на правоаголникот $ABCD$ е дадена произволна точка O. Докажи дека

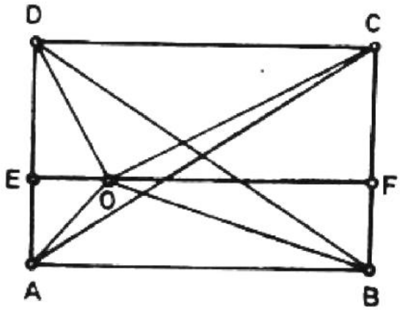
$$\frac{P_{OAC}}{P_{OBD}}=\frac{\text{tg}\measuredangle AOC}{\text{tg}\measuredangle BOD}.$$

Решение. Од формулата за плоштина на триаголник и косинусната теорема следува

$$\begin{aligned}P_{BOD}&=\tfrac{1}{2}OB\cdot OD\sin\measuredangle BOD\\&=\tfrac{1}{4}(OB^2+OD^2-BD^2)\,\text{tg}\measuredangle BOD\end{aligned}$$

и аналогно

$$P_{AOC}=\tfrac{1}{4}(OA^2+OC^2-AC^2)\,\text{tg}\measuredangle AOC,$$



(цртеж десно). Бидејќи $AC=BD$, доволно е уште да се докаже дека $OB^2+OD^2=OA^2+OC^2$. Нека E и F се подножјата на нормалите од точката O на правите AD и BC. Тогаш $EF \parallel AB$ и $AE=F$, па добиваме

$$\begin{aligned}OB^2+OD^2&=OD^2+BF^2+OE^2+DE^2=OF^2+AE^2+OE^2+CF^2\\&=(OE^2+AE^2)+(OF^2+CF^2)=OA^2+OC^2.\end{aligned}$$

3. Реши го системот равенки

$$x:y:z=(y-z):(z-x):(x-y),$$

каде x,y,z се различни комплексни броеви.

Решение. Нека

$$\frac{x}{y-z}=\frac{y}{z-x}=\frac{z}{x-y}=k\ .$$

Тогаш важи $k\neq 0, xyz\neq 0$ и $x=k(y-z), y=k(z-x), z=k(x-y)$. Од равенките $y=k(z-x), z=k(x-y)$ следува

$$y=\frac{k^2-k}{k^2+1}x,\ \ z=\frac{k^2+k}{k^2+1}x,$$

па со замена во $x=k(y-z)$ добиваме $(3k^2+1)x=0$. Но, $x\neq 0$, па од последната равенка следува $3k^2+1=0$, т.е. $k=\pm\frac{i}{\sqrt{3}}$. За $k=-\frac{i}{\sqrt{3}}$ добиваме $y=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x$, $z=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x$, а за $k=\frac{i}{\sqrt{3}}$ добиваме $y=-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x$, $z=\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x$. Лесно се проверува дека тројките

$$(x,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x,-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x) \text{ и } (x,-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}x,\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}x)\ ,$$

каде x е произволен комплексен број различен од нула, се решенија на дадениот систем.

4. Нека $S(a)$ е збирот на цифрите на бројот a запишан во декаден броен систем, а m е даден природен број. Докажи дека разликата $S(a^m)-S^m(a)$ е делива со 9 за секој природен број a.

Решение. Прво да забележиме дека, ако $n=\overline{c_n c_{n-1}...c_1 c_0}=\sum\limits_{k=0}^{n}10^k c_k$, тогаш

$$n-S(n)=\sum_{k=0}^{n}(10^k-1)c_k=9\sum_{k=0}^{n}c_k\cdot\underbrace{11...11}_{k},$$

т.е. за секој $n\in\mathbb{N}$ важи $9\,|\,n-S(n)$.

Сега, од равенството

$$\begin{aligned}S(a^m)-S^m(a)&=(S(a^m)-a^m)+a^m-S^m(a)\\&=(S(a^m)-a^m)+(a-S(a))(a^{m-1}+a^{m-2}S(a)+...+S^{m-1}(a))\end{aligned}$$

и докажаното тврдење следува дека за секој $a\in\mathbb{N}$ важи $9\,|\,S(a^m)-S^m(a)$.

IV година

1. Дадена е строго растечка низа природни броеви

$$a_0=1,a_1,a_2,... \qquad (1)$$

таква што за секој природен број n важи

$$1+\sum_{j=0}^{n-1} a_j \geq a_n. \tag{2}$$

Докажи дека секој природен број N може да се прикаже како збир на неколку различни членови на низата (1). Докажи дека овој приказ е еднозначен ако и само ако за секој природен број n во (2) важи знак за равенство.

Решение. Нека $A_n = a_0 + a_1 + ... + a_n$. Со индукција по n ќе го докажеме следново тврдење: Секој природен број M кој не е поголем од A_n може да се запише како збир на неколку различни елементи од множеството $\{a_0, a_1, ..., a_n\}$.

Од $a_0 = 1$ следува дека тврдењето е точно за $n = 1$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој природен број n. Нека $A_n < M \leq A_{n+1}$ и $d = A_{n+1} - M$. Ако $d = 0$, тогаш $M = A_{n+1} = a_0 + a_1 + ... + a_{n+1}$. Ако $d > 0$, тогаш од $M > A_n$ и условот (2) следува $d < a_{n+1} \leq 1 + A_n$, т.е. $d \leq A_n$. Од индуктивната претпоставка следува дека постојат броеви $j_1, j_2, ..., j_k$ такви што важи

$$0 \leq j_1 < j_2 < ... < j_k, \; d = a_{j_1} + a_{j_2} + ... + a_{j_k},$$

од каде следува

$$M = A_{n+1} - d = a_0 + a_1 + ... + a_{n+1} - (a_{j_1} + a_{j_2} + ... + a_{j_k}).$$

Според тоа, и бројот M може да се претстави како збир на неколку елементи од множеството $\{a_0, a_1, ..., a_{n+1}\}$, т.е. тврдењето важи и за $n+1$.

Да забележиме дека ако за некој n важи $1 + A_{n-1} > a_n$, тогаш бројот a_n може да се прикаже како збир на некои од броевите $a_0, a_1, ..., a_{n-1}$, а исто така и како $a_n = a_n$. Според тоа, условот

$$a_0 = 1, 1 + A_{n-1} = a_n, \text{ за секој } n \in \{1, 2, 3, ...\} \tag{3}$$

е потребен за секој природен број на единствен начин да може да се прикаже како збир на неколку различни членови на низата $\{a_n\}$.

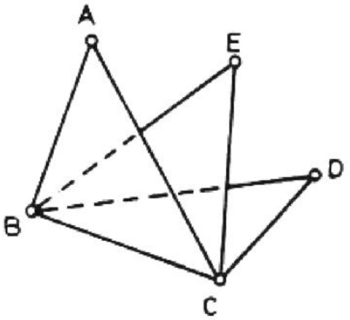
Ако важи условот (3), тогаш за секој $n \in \mathbb{N}$ важи

$$a_n = 1 + A_{n-1} = 1 + A_{n-1} + a_{n-1} = 2a_{n-1},$$

па од $a_0 = 1$ следува $a_n = 2^n$. Според тоа, секој природен број на единствен начин може да се прикаже како збир на членови на низата 1, 2, 4, 8, 16, ...

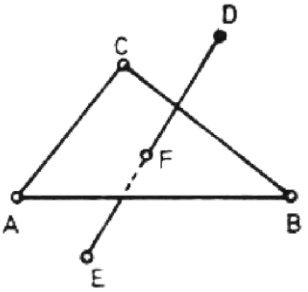
2. Во просторот се дадени пет точки такви што никои четири не се компланарни. Докажи дека од овие пет точки секогаш може да се изберат две точки такви што правата определена со тие две точки ја сече рамнината определена со другите три точки во некоја точка која се наоѓа во триаголникот чии темиња се тие три точки.

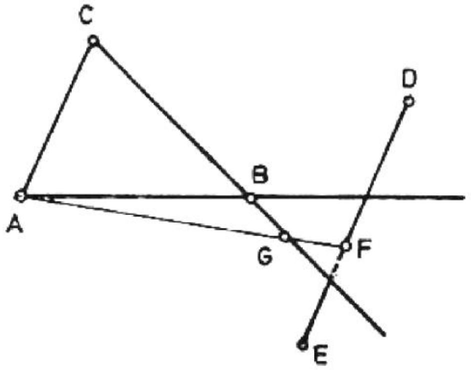
Решение. Нека A, B, C, D, E се точки од просторот такви што никои четири од нив се компланарни. Ќе докажеме дека меѓу овие точки постојат две, такви што тие се наоѓаат на различни страни на рамнината определена со другите три точки. Ако точките A и E се наоѓаат на иста страна од рамнината BCD, а точките D и E од иста страна на рамнината ABC, тогаш точката E се наоѓа во диедарот чии ѕидови се полурамнини со гранична права BC кои ги содржат точките A и D. Тоа значи дека точките A и D се на различни страни на рамнината BCE, цртеж десно.



Нека претпосатвиме дека точките D и E се на различни страни на рамнината α определена со точките A, B и C. Нека F е пресекот на правата DE со рамнината α. Ќе ги разгледаме следниве случаи:

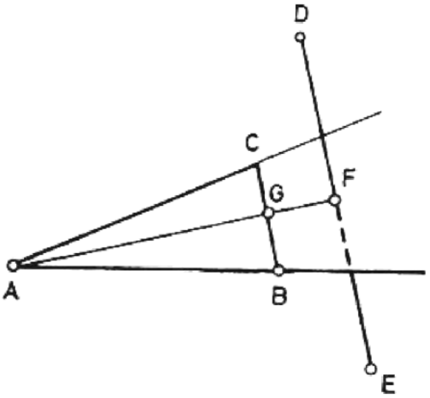
а) Точката F припаѓа на триаголникот ABC (цртеж десно). Во овој случај доказот на тврдењето на задачата е завршен.





б) Точката F припаѓа на аголот кој е накрсен на некој од аглите на триаголникот ABC, на пример на аголот ABC, цртеж лево. Нека G е пресекот на правите AF и BC. Тогаш точката G (пресекот на правата BC и рамнината определена со точките A, D и E) се наоѓа меѓу точките A и F, па затоа припаѓа на триаголникот ADE.

в) Точката E припаѓа на некој од аглите на триаголникот ABC (да кажеме на аголот BAC), но е надвор од триаголникот. Нека G е пресекот на правите BC и AF (цртеж десно). Тогаш точката G, која е пресек на правата BC и рамнината определена со точките A, D, E, се наоѓа меѓу точките A и F, па затоа припаѓа на триаголникот ADE.



3. Нека $\{x, y, z, t\} = \{12, 14, 37, 65\}$. Определи ги броевите x, y, z, t ако важи

$$xy - xz + yt = 182 .$$

Решение. Со непосредна проверка (24 можности) се добива дека единствено решение е $x=12, y=37, z=65, t=14$. На читателот му препуштаме самостојно да ја упрости постапката, на пример, разгледувајќи остатоци при делење со 2 и 3 на бројот 182 и производите по два од броевите 12, 14, 37 и 65.

4. Определи го множеството точки z во комплексната рамнина за кои постои реален број c таков што $z=\frac{c-i}{2c-i}$.

Решение. Нека $z=x+iy$. Имаме:

$$\begin{aligned} c&=\frac{zi-i}{2z-1}=\frac{-y+(x-1)i}{2x-1+2yi}\cdot\frac{2x-1-2yi}{2x-1-2yi}\\ &=\frac{(1-2x)y+(x-1)2y+[(x-1)(2x-1)+2y^2]i}{(2x-1)^2+4y^2}. \end{aligned}$$

Бараното множество е

$$\begin{aligned} S&=\{z=x+iy\,|\,(x-1)(2x-1)+2y^2=0, (x,y)\neq(\tfrac{1}{2},0)\}\\ &=\{z=x+iy\,|\,(x-\tfrac{3}{4})^2+y^2=\tfrac{1}{16}, (x,y)\neq(\tfrac{1}{2},0)\}. \end{aligned}$$

Мала олимпијада 1973

1. Должините на страните на еден правоаголник се непарни броеви. Докажи дека во овој правоаголник не постои точка чие растојание до секое теме е еднакво на природен број.

Решение. Нека непарните броеви a и b се должините на страните на дадениот правоаголник. Да претпоставиме дека во внатрешноста на правоаголникот постои точка T за која растојанието до секое теме на правоаголникот е еднакво на цел број. Нека x_1 и x_2 се растојанијата од точката T до страните со должина b, а y_1 и y_2 се растојанијата од точката T до страните со должини a. Тогап $a=x_1+x_2$, $b=y_1+y_2$, а броевите

$$d_{ij}=\sqrt{x_i^2+y_j^2}\;,\; i,j\in\{1,2\}$$

се цели. Ги воведуваме ознаките: $a_i=abx_i, b_j=aby_j$, каде $i,j\in\{1,2\}$ и

$$A_1=a_1-a_2, A_2=a_1+a_2, B_1=b_1-b_2, B_2=b_1+b_2.$$

Тогаш

$$\begin{aligned} A_1&=ab(x_1-x_2)=b(x_1^2-x_2^2)=b((x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_1^2)),\\ A_2&=ab(x_1+x_2)=a^2b,\\ B_1&=ab(y_1-y_2)=a(y_1^2-y_2^2)=a((x_1^2+y_1^2)-(x_2^2+y_2^2)),\\ B_2&=ab(y_1+y_2)=ab^2, \end{aligned}$$

па затоа A_1 и B_1 се цели, а A_2 и B_2 се непарни броеви.

Да претпоставиме дека секој од броевите a_1, a_2, b_1, b_2 е цел. Бидејќи A_2 и B_2 се непарни броеви, добиваме дека точно еден од броевите a_1, a_2 и точно еден од броевите b_1, b_2 е непарен. Нека, на пример a_1 и b_1 се непарни броеви. Тогаш

$$a_1^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,4),\ b_1^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\,4),$$
$$a_1^2 + b_1^2 \equiv a^2b^2(x_1^2 + y_1^2) = (d_{ij}ab)^2 \equiv 2(\mathrm{mod}\,4),$$

што е противречност. Според тоа, барем еден од броевите a_1, a_2, b_1, b_2 не е цел. Бидејќи

$$2a_1 = A_1 + A_2,\ 2a_2 = A_2 - A_1,\ 2b_1 = B_1 + B_2,\ 2b_2 = B_2 - B_1,$$

заклучуваме дека барем еден од броевите $2a_1, 2a_2, 2b_1, 2b_2$ е непарен. Нека, на пример, $2a_1$ е непарен број. Тогаш

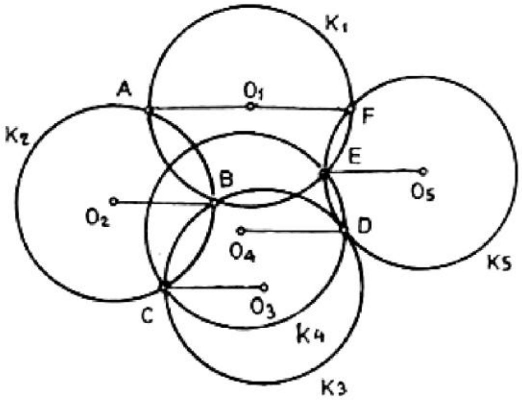
$$(2a_1)^2 + (2b_1)^2 = 4(a_1^2 + b_1^2) = 4a^2b^2(x_1^2 + y_1^2) = 4a^2b^2d_{11}^2,$$

т.е.

$$(2b_1)^2 = 4a^2b^2d_{11}^2 - (2a_1)^2 \equiv -1(\mathrm{mod}\,4),$$

што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

2. Со помош на даден диск, на пример монета, е нацртана кружница и на неа е избрана точка A. Користејќи го само истиот тој диск конструирај точка B на кружницата k таква што AB е дијаметар на кружницата. (Дозволен е избор на произволна точка на некоја од нацртаните кружници, а со помош на дискот може да се конструира било која од две кружници која содржат две точки кои се на растојание помало од дијаметарот на кружницата.)



Решение. Нека k_1 е дадената кружница со центар O_1 и радиус r и A е произволна точка на k_1 (цртеж десно). Конструираме кружница k_2 која ја содржи точката A и ја сече кружницата k_1 во уште една точка B. Со O_2 да го означиме центарот на кружницата k_2. Тогаш AO_2BO_1 е ромб со страна r, па следува $\overrightarrow{BO_2} = -\overrightarrow{AO_1}$. Конструираме кружница k_3 која ја содржи точката B и ја сече кружницата k_2 во уште една точка C. Потоа конструираме кружница k_4 која ја содржи точката C и ги сече кружниците k_1 и k_3 соодветно во точките D и E.

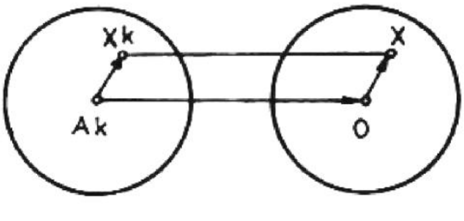
На крајот конструираме кружница k_5 која ги содржи точките D и E и е различна од k_4. Кружницата k_5 има заедничка точка E со кружницата k_1. Нека F е другата пресечна точка на тие две кружници (не е исклучена можноста $F \equiv E$). Со O_3, O_4, O_5 да ги означиме соодветно центрите на кружниците k_3, k_4, k_5. Аналогно како при разгледување на центрите на кружниците k_1 и k_2 и точките A и B на нивниот пресек добиваме

$$\overrightarrow{FO_1} = -\overrightarrow{EO_5} = \overrightarrow{DO_4} = -\overrightarrow{CO_3} = \overrightarrow{BO_2} = -\overrightarrow{AO_1}.$$

Според тоа, точката F на кружницата k_1 е дијаметрално спротивна на точката A.

3. На рамен бел лист хартија се означени неколку точки кои се на меѓусебно растојание поголемо од 2. Невнимателен ученик капнал капка мастило на листот и мастилото се распрскало по листот покривајќи површина со плоштина помала од π. Докажи дека постои вектор $\vec{v}$ таков што $|\vec{v}|<1$ и дека по транслација на означените точки за тој вектор ниту една точка не останува во испрсканиот дел од хартијата.

Решение. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ се означените точки и O е произволна точка во рамнината. Со $D_1, D_2, ..., D_n$, D да ги означиме круговите со центри $A_1, A_2, ..., A_n, O$ и радиус 1. Ги транслатираме круговите $D_1, D_2, ...,$ D_n редоследно за вектори $\overrightarrow{A_1O}, \overrightarrow{A_2O}, ..., \overrightarrow{A_nO}$. Бидејќи обоената плоштина е помала од π, постои внатрешна точка X на кругот D која по извршените транслации не е покриена со обоена површина. Ќе докажеме дека $\overrightarrow{OX}$ е вектор за кој важат условите на задачата. За произволен $k \in \{1, 2, ..., n\}$ со X_k да ја означиме точката определена со условот $\overrightarrow{A_kX_k} = \overrightarrow{OX}$. Тогаш X_k е внатрешна точка за кругот D_k и важи $\overrightarrow{A_kO} = \overrightarrow{X_kX}$. Точката X_k не припаѓа на обоената површина бидејќи со транслација на кругот D_k за вектор $\overrightarrow{A_kO}$ таа преминува во точката X (види цртеж).



Сојузен натпревар 1974

I година

1. Во координатната рамнина графички претстави го множеството точки кое го задоволува условот

$$||x|-1|+||y|-1|\leq 1.$$

Решение. Да означиме

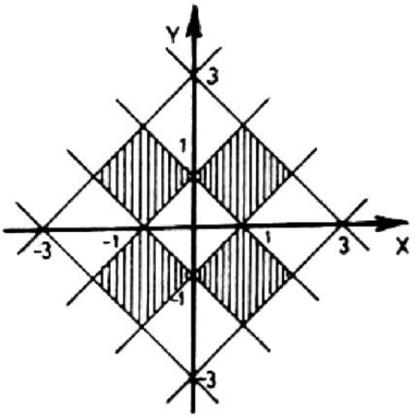
$$A=\{(x,y)|\ ||x|-1|+||y|-1|\leq 1\}.$$

Бидејќи за секои два реални броја x,y важи

$$(x,y)\in A\Rightarrow(-x,y)\in A,$$

$$(x,y)\in A\Rightarrow(x,-y)\in A,$$

множеството A е симетрично во однос на двете координатни оски. Затоа да го разгледаме неговиот дел во првиот координатен квадрант. Тогаш дадениот услов се сведува на $|x-1|+|y-1|\leq 1$, па тој определува квадрат ограничен со правите

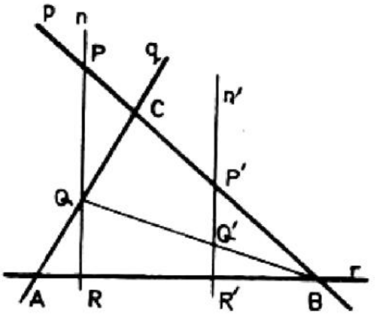


$$x+y=1, x+y=3, y=x+1, y=x-1.$$

Множеството A е штрафираниот дел на цртежот десно.

2. Дадени се три прави p,q,r кои се сечат во три различни точки. Конструирај права нормална на правата r таква што отсечките кои не неа ги отсекуваат правите p и q, односно q и r се еднакви (складни).

Решение. Нека претпоставиме дека правата n која ги задоволува условите на задачата е конструирана. Со P,Q,R да ги означиме редоследно нејзините пресечни точки со правите p,q,r. Понатаму, со A,B,C да ги означиме пресечните точки редоследно на правите q и r, r и p, p и q. Нека R' е произволна точка на правата r различна од B, а n' правата нормална на r која ја содржи R'. Со P' да го означиме пресекот на p и n', а со Q' пресекот на правите n' и BQ (тие пресеци постојат, цртеж десно). Од паралелноста на правите n и n' и $PQ=QR$ следува $P'Q'=Q'R'$.



Земајќи ги предвид заклуичоците од претходната анализа, конструкцијата ја реализираме на следниов начин: Избираме произволна точка R' на правата r, различна од B и конструираме нормала n' на r во точката R'. Правите n' и p не се поклопуваат (бидејќи n' не ја содржи B). Ако тие се сечат, го означуваме нивниот пресек со P' и ја определуваме средината Q' на отсечката $P'R'$. Правите BQ' и q не се совпаѓаат (бидејќи q не ја содржи B). Ако тие се сечат, да го означиме нивниот пресек со Q, а правата нормална на r која минува низ Q со n.

Ќе докажеме дека n е бараната права. По конструкција, таа е нормална на r. Бидејќи правата n' ја сече правата p, добиваме дека и на неа паралелната права n ја сече правата p и тој пресек да го означиме со P. Од паралелноста на n и n' и $P'Q'=Q'R'$ следува $PQ=QR$.

Од описот на конструкцијата следува дека задачата има едно или нема решение кога $p\perp q$ или $q\parallel BQ'$.

3. Определи шестцифрен број чии производи со броевите 2, 3, 4, 5, 6 во некој рдослед се шестцифрени броеви добиени од дадениот број со циклична замена на местата на цифрите.

Решение. Со N да го означиме бараниот број. Бидејќи $6N$ исто така е шестцифрен број, првата цифра на N е 1. Цифрата 1 е последна цифра на некој од броевите $2N, 3N, 4N, 5N$ и $6N$. Јасно, броевите $2N, 4N, 5N$ и $6N$ не може да имаат цифра на единиците 1, па затоа тоа е бројот $3N$. Бројот $3N$ има цифра на единиците 1, ако и само ако цифрата на единиците на бројот N е 7. Според тоа:

$$N=\ 1\_\,\_\,\_\,\_\,7$$
$$3N=\_\,\_\,\_\,\_\,71$$

Ако понатаму, го продолжиме ова множење: со множење на претпоследната цифра на бројот N со 3 треба да добиеме број кој завршува на 5 (за да со додавање на преносот 2 добиеме претпоследна цифра 7 на бројот $3N$) – тоа е можно само ако тоа е цифрата 5, па затоа цифрата 5 е третата цифра на бројот $3N$. Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме $N=142857$ и $3N=428571$. Ни останува уште да провериме дали навистина броевите $2N, 4N, 5N, 6N$ во овој случај се добиваат од бројот N со циклична замена на цифрите, што му го препуштаме на читателот.

4. На кружница се распоредени 1974 деца кои играат игра на испаѓање на следниов начин: првото дете останува на кружницатта, второто испаѓа, третото останува, четвртото испаѓа итн. додека на кружницата не остане само едно дете. Определи кое дете останува.

Решение. Во првиот круг отпаѓаат децата со парни редни броеви – остануваат само оние со броеви од видот $2k+1$, при што најмалиот од тие броеви е 1, а најголемиот е 1973. Во вториот круг остануваат децата со броеви. такви што разликата на соседните броеви е еднаква на 4; најмалиот од тие броеви е 1, а најголемиот е 1973. Продолжуваме со ваквото заклучување и ја добиваме табелата:

Круг	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Најмал бр.	1	1	5	13	13	45	109	109	365	877
Разлика	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024
Најголем бр.	1973	1973	1973	1965	1965	1965	1901	1901	1901	1901

Во последниот, единаесеттиот круг испаѓа детето со реден број 877 дете, а останува детете со реден број 1901.

II година

1. Нека m и n се позитивни броеви. Докажи дека со

$$x_1 = x_3 = x_5 = ... = x_{99} = m,$$
$$x_2 = x_4 = x_6 = ... = x_{100} = n,$$

е дадено единственото решение на системот равенки

$$nx_1 = x_2x_3 = x_4x_5 = ... = x_{98}x_{99} = mx_{100},$$
$$x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = x_5 + x_6 = ... = x_{99} + x_{100} = m + n$$

кај кое сите броеви $x_1, x_2, ..., x_{100}$ се позитивни.

Решение. Нека $(x_1, x_2, ..., x_{100})$ е произволно решение на дадениот систем кај кое сите броеви $x_1, x_2, ..., x_{100}$ се позитивни. Ќе докажеме дека $x_1 = m$.

Нека претпоставиме дека $x_1 > m$. Тогаш од $nx_1 = mx_{100}$ следува дека $x_{100} > n$, а од $x_1 + x_2 = m + n$ следува дека $x_2 < n$. Продолжувајќи со вакво заклучување добиваме $x_{99} > m$ и $x_{100} < n$, што противречи на веќе добиеното $x_{100} > n$. Според тоа, не може да биде $x_1 > m$.

На сличен начин се докажува дека не може да биде $0 < x_1 < m$. Значи, $x_1 = m$. Сега, од дадениот систем лесно се добива дека

$$x_1 = x_3 = x_5 = ... = x_{99} = m,$$
$$x_2 = x_4 = x_6 = ... = x_{100} = n,$$

Дека $(m, n, m, n..., m, n)$ е решение на системот се проверува непосредно.

2. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^2 + xy + y^2 = x^2y^2.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

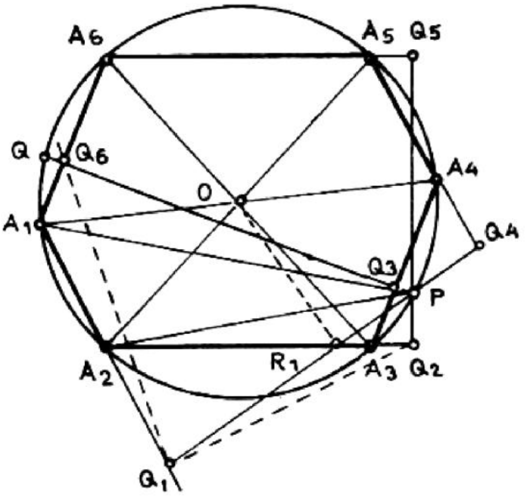
$$(x + y)^2 = xy(xy + 1).$$

Производ на два последователни цели броја е квадрат на цел броја као и само ако тие броеви се $-1, 0$ или $0, 1$. Значи, мора да важи $xy = -1$ или $xy = 0$ и во двата случаја $x+y=0$. Решавајќи ги соодветните системи лесно добиваме дека единствени можни решенија на дадената равенка се: $(0,0),(1,-1),(-1,1)$. Дека тоа навистина се решенија на равенката се уверуваме со непосредна проверка.

3. Темињата на конвексниот шестаголник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ се крајни точки на дијаметрите A_1A_4, A_2A_5, A_3A_6 на кружница k. Точката P припаѓа на k и не се совпаѓа со ниту едно теме на шестаголникот. Нека Q_1,Q_2,Q_3,Q_4,Q_5,Q_6 се нормалните проекции на точката P соодветно на правите $A_1A_2,A_2A_3,A_3A_4,A_4A_5,$ A_5A_6,A_6A_1.

а) Докажи дека правите определени со произволни две соседни страни на шестаголникот $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$ формираат прав агол.

б) Докажи дека точката P, центарот O на k и средините R_1,R_2,R_3 на отсечките Q_1Q_4,Q_2Q_5,Q_3Q_6 се концикилични.



Решение. а) Четириаголникот $A_1Q_1PQ_6$ има два спротивни прави агли (кај Q_1 и Q_6) па затоа е тетивен. Затоа важи $\measuredangle A_1Q_1Q_6 = \measuredangle A_1PQ_6$. Правата PQ_6 има заедничка точка P со кружницата k и не е нормална на радиусот OP, па затоа ја сече кружницата во уште една точка, да кажеме Q. Нека претпоставиме дека точката Q_6 е меѓу точките P и Q, цртеж десно, (останатите случаи се разгледуваат аналогно). Тогаш важи $\measuredangle A_1PQ = \measuredangle A_1Q_1Q_6$. Точките Q и A_1 се симетрични на точките P и A_3 во однос на симетралата на тетивата PQ на кружницата k, па затоа лакот A_3P на оваа кружница е складен на лакот A_1Q. Тоа значи дека $\measuredangle PA_2A_3 = \measuredangle A_1PQ = \measuredangle A_1Q_1Q_6$. Понатаму, четириаголникот $A_2Q_1Q_2P$ е тетивен (аглите A_2Q_1P и A_2Q_2P се прави), па затоа

$$\measuredangle PQ_1Q_2 = \measuredangle PA_2Q_2 = \measuredangle PA_2A_3 = \measuredangle A_1Q_1Q_6.$$

Од последното равенство и распоредот на полуправите $Q_1A_1,Q_1Q_6,Q_1P,Q_1Q_2$, кој следува од претпоставената распределба на точките Q,Q_6 и P, добиваме дека

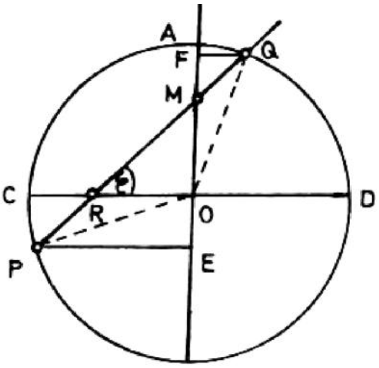
$$\measuredangle Q_6Q_1Q_2 = \measuredangle A_1Q_1P = 90^\circ.$$

На сличен начин се докажува нормалноста и на останатите парови прави определени со последователните страни на шестаголникот $Q_1Q_2Q_3Q_4Q_5Q_6$.

б) Средината R_1 на отсечката Q_1Q_4 е подножје на нормалата од точката O на правата Q_1Q_4, бидејќи правите A_1A_2 и A_5A_4, а со нив и точките Q_1 и Q_4 се симетрични во однос на таа нормала. Затоа $\measuredangle OR_1P$ е прав, па точката R_1 припаѓа на кружницата со дијаметар OP. СЛично важи и за точките R_2 и R_3.

4. Дадени се два заемно нормални дијаметри AB и CD на кружница со центар O и радиус r. На отсечката OA е избрана точка M таква што $OM=\frac{r}{\sqrt{3}}$. Права која минува низ M ги сече правата CD во точка R и дадената кружница во точките P и Q така што точките P и R се од иста страна на точката M. Докажи дека $\frac{1}{MQ}=\frac{1}{MP}+\frac{1}{MR}$.

Решение. Ако дадената права е нормална на правата CD, релацијата $\frac{1}{MQ}=\frac{1}{MP}+\frac{1}{MR}$ се проверува со непосредни пресметувања. Нека претпоставиме дека тоа не е случај и со φ да го означиме остриот агол меѓу тие прави, а со E и F нормалните проекции, соодветно, на точките P и Q на правата AB, цртеж десно. Тогаш



$$MR=\frac{r}{\sqrt{3}\sin\varphi},\ ME=MP\sin\varphi,\ MF=MQ\sin\varphi.$$

Со примена на Питагоровата теорема добиваме

$$\begin{aligned}MP^2&=ME^2+PE^2=ME^2+OP^2-OE^2\\&=ME^2+r^2-(ME-\tfrac{r}{\sqrt{3}})^2\\&=\tfrac{2}{3}r^2+\tfrac{2r}{\sqrt{3}}MP\sin\varphi.\end{aligned}$$

Едното решение на последната квадратна равенка е негативно, па затоа

$$MP=r(\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{2+\sin^2\varphi}{3}}).$$

На сличен начин се добива

$$MQ=r(-\frac{\sin\varphi}{\sqrt{3}}+\sqrt{\frac{2+\sin^2\varphi}{3}}).$$

Сега лесно се проверува дека $\frac{1}{MQ}=\frac{1}{MP}+\frac{1}{MR}$.

III година

1. Реши ја равенката

$$\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\tfrac{1}{x^2}}=\sqrt{x+3}\,.$$

Решение. Од дадената равенка со квадрирања следува равенката

$$(x-\tfrac{1}{x})^2+2\sqrt{(x^2+x)(1+\tfrac{1}{x^2})}=0\,.$$

Оттука следува $x-\frac{1}{x}=0$, односно $x=1$ или $x=-1$. Со непосредна проверка добиваме дека $x=1$ не е решение на почетната равенка, а $x=-1$ е нејзино решение.

2. Определи го аголот α ако

$$\operatorname{ctg}\alpha=2+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c},\ \operatorname{ctg}2\alpha=2+\sqrt{a}\,,$$

каде a,b,c се природни броеви кои не се деливи со 4, а $\sqrt{a},\sqrt{bc}$ се ирационални броеви.

Решение. Од дадените претпоставки следува

$$2+\sqrt{a}=\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{(2+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2-1}{2(2+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})}\,,$$

од каде по средувањето добиваме

$$4\sqrt{a}-2\sqrt{bc}=b+c-a-5\,.$$

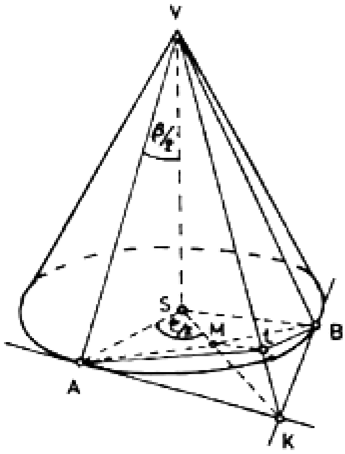
Десната страна на последната релација е цел број, да го означиме со d. Од $4\sqrt{a}-2\sqrt{bc}=d$ следува $4d\sqrt{bc}=4bc+d^2-16a$, па како по претпоставка бројот $\sqrt{bc}$ е ирационален, единствена можност е $d=0$. Понатаму, добиваме $4a=bc$ и $a+5=b+c$. Броевите b и c не се деливи со 4, па од $4a=bc$ следува дека $b=2b'$ и $c=2c'$, каде b',c' се непарни цели броеви. Сега добиваме $a=b'c'$ и $a+5=2(b'+c')$, од каде со елиминација на a добиваме $c'(b'-2)=2b'-5$. Но, b' е непарен, па затоа $b'\neq 2$ и од последното равенство следува $c'=2-\frac{1}{b'-2}$. За да c' е цел број потребно и доволно е $b'=1$ или $b'=3$. Лесно се проверува дека во овие случаи соодветните тројки се $a=3,b=6,c=2$, односно $a=3,b=2,c=6$, кои ги задоволуваат условите на задачата.

Во двата случаја $\operatorname{ctg}2\alpha=2+\sqrt{3}$, од каде се добива

$$\alpha=\tfrac{\pi}{24}+k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\,.$$

3. Даден е прав кружен конус со врв V, со средина на основата S и агол при врвот на оскиниот пресек β. Две тангентни рамнини на конусот го допираат конусот по изводниците VA и VB, каде точките A и B припаѓаат на основата. Ако аголот меѓу овие рамнини е еднаков на α определи го $\measuredangle ASB$.

Решение. Дадените тангентни рамнини на конусот ја сечат рамнината на основата по прави кои се тангенти на кружницата на основата во точките A и B. Со K да го означиме пресекот на овие тангенти. Триаголниците AKV и BKV имаат прави агли во A и B, соодветно, заедничка хипотенуза KV и еднакви катети AK и BK, па затоа се складни. Нека L е заедничкото подножје на висината која соодветствува на хипотенузата на тие триаголници. Тогаш $\measuredangle ALB = \alpha$ и $\measuredangle AVS = \frac{\beta}{2}$. Да означиме $\measuredangle ASB = \varphi$, радиусот на основата со r и средината на отсечката AB со M (види цртеж). Користејќи ги правоаголните триаголници ASM, AML, ASV, AKS добиваме:



$$AM = r\sin\frac{\varphi}{2},\ AL = \frac{r\sin\frac{\varphi}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}},\ AV = \frac{r}{\sin\frac{\beta}{2}},\ AK = r\,\mathrm{tg}\,\frac{\varphi}{2}.$$

Во правоаголниот триаголник AKV важи

$$AV \cdot AK = AL\sqrt{AK^2 + AV^2}\ ,$$

па со замена на претходните изрази добиваме равенка за определување на непознатиот агол φ, од каде по средувањето се добива

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta}{2}}.$$

4. Определи го максималниот производ на природните броеви чиј збир е еднаков на даден природен број n.

Решение. Бараниот максимален производ да го означиме со P. За $n=1$, очигледно $P=1$. Нека претпоставиме дека $n>1$. Јасно е дека ниту еден од множителите на производот P не е еднаков на 1. Ќе докажеме дека сите негови множители се помали или еднакви на 4. Навистина, ако некој негов множител е поголем или еднаков на 5, тогаш бидејќи $2(a-2)>a$ производот кој наместо a има множители 2 и $a-2$ ќе биде поголем од P, а соодветниот збир ќе биде еднаков на n. Понатаму, секоја четворка може да ја замениме со две двојки и во збирот и во производот, па заклучуваме дека производот е од видот $2^a 3^b$. Најпосле бидејќи $2^3 < 3^2$, а $2+2+2=3+3$, заклучуваме дека може да има најмногу две двојки.

Од претходно изнесеното следува дека:

$$P=\begin{cases}3^k, & n=3k, k\in\mathbb{N},\\ 2^2 3^{k-1}, & n=3k+1, k\in\mathbb{N},\\ 2\cdot 3^k, & n=3k+2, k\in\mathbb{N}\cup\{0\}.\end{cases}$$

IV година

1. Определи чиста периодична дропка, која е поголема од $\frac{1}{4}$ и помала од $\frac{1}{3}$, а збирот на цифрите на периодата е за 12 поголем од квадратот на бројот на тие цифри.

Решение. Со n да го означиме бројот на цифрите на периодот на бројот x. Од $\frac{1}{4}<x<\frac{1}{3}$ следува дека првата цифра на периодот е 2 или 3. Ако таа е 3, тогаш следната цифра не може да е поголема од 3. Но, тогаш, според условите на задачата, мора да важи

$$3+3+9(n-2)\geq n^2+12,$$

што лесно се гледа дека не е можно. Според тоа, првата цифра на периодот на бројот x е еднаква на 2. Сега, слично како погоре, мора да важи неравенството

$$2+9(n-1)\geq n^2+12.$$

Единствени природни броеви за кои ова неравенство важи се $n=4$ и $n=5$.

Во случајот $n=4$треба да определиме три декадни цифри чиј збир е еднаков на $4^2+12-2=26$. Тоа може да се само цифрите 9, 9 и 8 (земени во било кој редослед). Во случајот $n=5$ треба да определиме четири декадни цифри со збир $5^2+12-2=35$. Тоа се цифрите 9, 9, 9 и 8 (земени во било кој редослед). Броевите

0,(2998); 0,(2989); 0,(2899); 0,(29998); 0,(2,9989); 0,(29899), 0,(28999)

ги задоволуваат условите на здачата.

2. Определи ги сите природни броеви n такви што некои три последователни коефициенти на развојот $(a+b)^n$ формираат аритметичка прогресија.

Решение. Нека за природните броеви n и k, $k<n$ важи равенството

$$2\binom{n}{k}=\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k+1},$$

кое заради

$$\binom{n}{k-1}=\frac{k}{n-k+1}\binom{n}{k} \text{ и } \binom{n}{k+1}=\frac{n-k}{k+1}\binom{n}{k}$$

е еквивалентно со равенството

$$2=\frac{k}{n-k+1}+\frac{n-k}{k+1},$$

односно со равенството

$$(n-2k)^2 = n+2. \qquad (1)$$

Значи, бројот n мора да е од видот m^2-2 за некој природен број $m \geq 2$. За $m=2$ се добива $n=2$, што не е решение на задачата, бидејќи не важи

$$2\binom{2}{1} = \binom{2}{0} + \binom{2}{2}.$$

За $m>2$ и $n=m^2-2$ се добива $k=\frac{m(m-1)}{2}-1$. Овој број е природен и лесно се проверува дека е помал од n и го задоволува условот (1).

Конечно, бараните броеви се $n=m^2-2$, $m=3,4,5,...$.

3. Определи ја онаа тангента на елипсата $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ чиј отсечок меѓу оските на елипсата е најмал.

Решение. Бидејќи елипсата е симетрична во однос на координатните оски, доволно е да се определи тангентата која ја допира елипсата во точката (x_0,y_0) која припаѓа на првиот квадрант. Равенката на тангентата е

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1,$$

па сегментите кои таа ги отсекува на координатните оски се еднакви на $\frac{a^2}{x_0}$ и $\frac{b^2}{y_0}$, а квадратот на должината на делот на тангентата меѓу оските е еднаков на

$$\begin{aligned} d^2 &= \frac{a^4}{x_0^2}+\frac{b^4}{y_0^2} = \frac{a^4}{x_0^2}+\frac{a^2b^2}{a^2-x_0^2} \\ &= a^2+b^2+\frac{a^2(a^2-x_0^2)}{x_0^2}+\frac{b^2x_0^2}{a^2-x_0^2} \\ &\geq a^2+b^2+2\sqrt{\frac{a^2(a^2-x_0^2)}{x_0^2}\cdot\frac{b^2x_0^2}{a^2-x_0^2}} \\ &= (a+b)^2, \end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\frac{y_0}{x_0}=(\frac{b}{a})^{\frac{3}{2}}$. Значи, бараната тангента (во првиот квадрант) е таа чија допирна точка (x_0,y_0) го задоволува наведениот услов. Нејзината равенка е

$$y=-\sqrt{\frac{b}{a}}x+\sqrt{ab+b^2}.$$

4. На шаховска табла 8×8 на првиот и осмиот ред се наоѓаат 8 бели и 8 црни жетони соодветно. Белиот ја почнува играта. Играчите наизменично поместуваат по еден жетон за едно или повеќе полиња по неговата колона во било која насока, но најмногу до работ на таблата или до противничкиот жетон. Играта ја губи играчот кој не може да направи потез. Докажи дека црниот играч има победничка стратегија.

Решение. Да ја поделиме таблата на четири дела со по две колони во секој дел. Ќе докажеме дека црниот, на потез на белиот во еден дел, секогаш може да одговори со потез во истиот дел. Тоа значи дека ако црниот може да го оневозможи белиот да направи потез во било кој дел, тој може тоа да го направи и на целата табла, т.е. тој победува во играта. Значи, доволно е да се опише победничка стратегија на црниот под претпоставка дека играта се одвива во рамките на две фиксирани колони.

Таа стратегија е следнава: ако белиот го помести жетонот за k полиња напред, црниот ќе го помести својот жетон во другата колона исто така за k полиња напред; ако белиот (во некој потез) го помести својот жетон за k полиња назад, црниот ќе го помести својот жетон во истата колона за k полиња напред. Тогаш, по секој потез на двајцата, растојанијата на жетоните во колоните на тој дел ќе бидат меѓусебно еднакви. Тоа значи дека на секој потез на белиот црниот има одговор, па тој не може да изгуби. Меѓутоа, црниот стално игра напред, па затоа играта ќе заврши по конечен број потези. Последното, според опишаната стратегија, значи дека црниот победува.

Мала олимпијада 1974

1. Даден е ирационален број a.

а) Докажи дека за секој позитивен број ε постои барем еден цел број $q \neq 0$ таков што $aq-[aq]<\varepsilon$.

б) Докажи дека за секој $\varepsilon>0$ постојат бесконечно многу рационални броеви $\frac{p}{q}$ такви што $q>0$ и $|a-\frac{p}{q}|<\frac{\varepsilon}{q}$.

Решение. а) За даден позитивен број ε избираме природен број n таков што $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Интервалов $[0,1)$ го делиме на n интервали

$$[0,\tfrac{1}{n}),\ [\tfrac{1}{n},\tfrac{2}{n}),\ \ldots,\ [\tfrac{n-1}{n},1). \qquad (1)$$

Да разгледаме $n+1$ броеви од видот $aq-[aq], q=0,1,2,\ldots,n$, кои припаѓаат на интервалот $[0,1)$. Од принципот на Дирихле следува дека постојат два од овие броеви кои припаѓаат на еден ист од интервалите (1). Нека се тоа броевите $aq_1-[aq_1]$ и $aq_2-[aq_2]$ и нека на пример $aq_1-[aq_1] \geq aq_2-[aq_2]$. Тогаш важи

$$\varepsilon \geq \frac{1}{n} > (aq_1-[aq_1])-aq_2-[aq_2]=a(q_1-q_2)-([aq_1]-[aq_2]) \geq 0.$$

Понатаму, од својствата на функцијата цел дел следува дека

$$[aq_1]-[aq_2]=[a(q_1-q_2)],$$

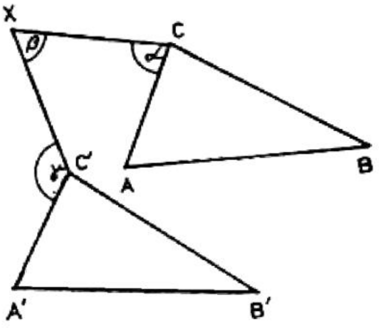
па ако земеме $q=q_1-q_2$, тогаш q е цел број различен од нула и притоа важи $aq-[aq]<\varepsilon$.

б) Бидејќи a е ирационален број, за секој цел број $q \neq 0$ важи $aq-[aq] \neq 0$. Да конструираме низа броеви од видот $aq_n-[aq_n], n=1,2,3,...$ на следниов начин: за даден $\varepsilon > 0$, според а) постои цел број $q_1 \neq 0$ таков што $0 < aq_1-[aq_1] < \varepsilon$; ако броевите $q_1, q_2,..., q_n$ се веќе избрани, земаме позитивен број ε_n кој е строго помал од сите броеви $aq_i-[aq_i], i=1,2,3,...,n$, а потоа повторно користејќи го а) избираме цел број $q_{n+1} \neq 0$ таков шѓто $0 < aq_{n+1}-[aq_{n+1}] < \varepsilon_n$. По конструкција добиените броеви $aq_n-[aq_n], n=1,2,3,...$ се сите различни меѓу себе и важи $0 < aq_n-[aq_n] < \varepsilon$. Ако означиме $p_n=[aq_n]$, од претходното неравенство добиваме

$$|a-\frac{p_n}{q_n}| < \frac{\varepsilon}{|q_n|}, \text{ за } n=1,2,3,...$$

Заменувајќи, во случај на потреба, p_n и q_n со $-p_n$ и $-q_n$ го добиваме бараниот резултат.

2. Во рамнината се дадени два директно складни триаголници ABC и $A'B'C'$ такви што кружниците (C,CA) и $(C',C'A')$ се сечат. Движењето кое триаголникот ABC го пресликува во триаголникот $A'B'C'$ прикажи го како композиција на најмногу три ротации, такви што триаголникот ABC со ротација околу некое свое теме преминува во триаголник $A_1B_1C_1$, овој триаголник со ротација околу некое свое теме преминува во триаголник $A_2B_2C_2$, а овој триаголник со ротација околу некое свое теме преминува во триаголникот $A'B'C'$.



Решение. Нека X е заедничка точка на кружницата со центар C и радиус CA и кружницата со центар C' и радиус $C'A'$, цртеж десно. Со ρ_α да ја означиме ротацијата околу точката C која точката A ја пресликува во точката X, со ρ_β ротацијата околу точката X која точката C ја пресликува во точката C' и со ρ_γ ротацијата околу точката C' која точката X ја пресликува во точката A'. (Такви ротации постојат бидејќи $CA=CX=XC'=C'A'$.) За пресликувањето $\rho=\rho_\gamma \circ \rho_\beta \circ \rho_\alpha$ важи

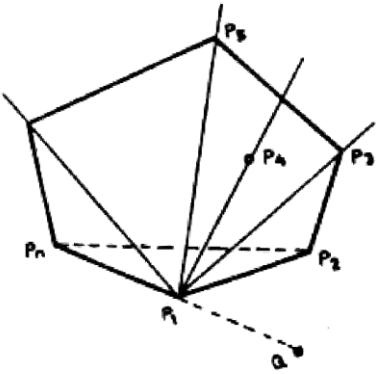
$$\rho(A)=\rho_\gamma(\rho_\beta(\rho_\alpha(A)))=\rho_\gamma(\rho_\beta(X))=\rho_\gamma(X)=A',$$

$$\rho(C)=\rho_\gamma(\rho_\beta(\rho_\alpha(C)))=\rho_\gamma(\rho_\beta(C))=\rho_\gamma(C')=C',$$

и како триаголониците ABC и $A'B'C'$ се директно складни важи $\rho(B)=B'$.

3. Нека S е произволно множество од n точки $P_1, P_2, ..., P_n$ во рамнината такви што никои три не се колинеарни и нека α е најмалиот од аглите $P_iP_jP_k$ каде $i \neq j \neq k \neq i$ и $i, j, k \in \{1, 2, ..., n\}$. Определи го $\max\limits_S \alpha$ и најди ги оние множества S за кои таа максимална вредност на аголот α се достигнува.

Решение. Со T ја означиме конвексната обвивка на дадените точки $P_1, P_2, ..., P_n$, т.е. најмалиот конвексен многуаголник, таков што сите точки се наоѓаат во него или на неговата граница. Може да претпоставиме дека дадените точки се нумерирани така што $\measuredangle P_nP_1P_2$ е агол на полигонот T и дека полуправите $P_1P_2, P_1P_3, ..., P_1P_n$ се распоредени во наведениот редослед, цртеж десно. Нека Q е произволна точка на правата P_1P_n таква што P_1 е меѓу P_n и Q. Тогаш



$$\begin{aligned}180^\circ &= \measuredangle QP_1P_2 + \measuredangle P_2P_1P_n \\ &= \measuredangle P_1P_2P_n + \measuredangle P_2P_nP_1 + \measuredangle P_2P_1P_3 + \measuredangle P_3P_1P_4 + ... + \measuredangle P_{n-1}P_1P_n\end{aligned}$$

Во последниот збир има точно n агли, па како ниту еден од нив не е помал од α, добиваме дека $n\alpha \leq 180^\circ$, т.е. $\alpha \leq \frac{180^\circ}{n}$. Затоа $\max\limits_S \alpha \leq \frac{180^\circ}{n}$.

Ќе докажеме дека $\max\limits_S \alpha = \frac{180^\circ}{n}$ и дека оваа вредност за α се достигнува ако и само ако точките $P_1, P_2, ..., P_n$ на множеството S се темиња на правилен $n-$аголник. Навистина, ако важи равенството $n\alpha = 180^\circ$, тогаш се исполнети следниве услови (и тоа во секое теме на полигонот T):

1) $\measuredangle P_1P_2P_n = \measuredangle P_2P_nP_1 = \alpha$, т.е. $P_1P_2 = P_nP_1$, што значи дека сите страни на полигонот T се еднакви.

2) $\measuredangle P_2P_1P_n = \measuredangle P_2P_1P_3 + \measuredangle P_3P_1P_4 + ... + \measuredangle P_{n-1}P_1P_n = (n-2)\alpha$, што значи дека сите агли на полигонот T се еднакви.

Значи, равенството $n\alpha = 180^\circ$ е можно само ако $P_1, P_2, ..., P_n$ се темиња на правилен многуаголник. Обратното тврдење е очигледно.

Сојузен натпревар 1975

I година

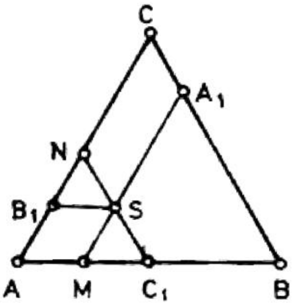
1. Докажи дека за секој $a \in [5,10]$ важи равенството

$$\sqrt{a+3-4\sqrt{a-1}}+\sqrt{a+8-6\sqrt{a-1}}=1.$$

Решение. Ако $5 \le a \le 10$, тогаш $2 \le \sqrt{a-1} \le 3$ и

$$\begin{aligned}\sqrt{a+3-4\sqrt{a-1}}+\sqrt{a+8-6\sqrt{a-1}} &= \sqrt{(\sqrt{a-1}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{a-1}-3)^2}\\ &= |\sqrt{a-1}-2|+|\sqrt{a-1}-3|\\ &= \sqrt{a-1}-2+3-\sqrt{a-1}=1.\end{aligned}$$

2. Во внатрешноста на некоја страна на рамностраниот триаголник ABC дадена е точка S, низ која се повлечени прави SA_1, SB_1, SC_1, соодветно паралелни на страните AC, AB, BC на триаголникот ABC така што $A_1.B_1.C_1$ припаѓаат соодветно на страните BC, AC, AB. Докажи дека збирот $SA_1+SB_1+SC_1$ има константна вредност која не зависи од изборот на точката S.



Решение. Нека S е внатрешна точка на триаголникот ABC, цртеж десно. Понатаму, нека M е пресекот на правите AB и SA_1, а N е пресекот на правите AC и SC_1. Триаголниците NB_1S и SMC_1 се рамнострани, а четириаголниците SA_1CN и SB_1AM се паралелограми. Затоа

$$\begin{aligned}SA_1+SB_1+SC_1 &= NC+B_1N+MS\\ &= NC+B_1N+AB_1=AC.\end{aligned}$$

Ако точката S припаѓа на некоја страна на триаголникот ABC, на пример на AC, тогаш $B_1=S,\ A_1=C$, а триаголникот SAC_1 е рамностран, па повторно имаме

$$SA_1+SB_1+SC_1=SC+AS=AC.$$

3. Два автомобили тргнуваат истовремено од местото A кон местото B. Првиот оди половина од времето со брзина u, а втората половина од времето со брзина v. Вториот оди половина од патот со брзина u, а втората половина од патот со брзина v. Кој автомобил побрзо ќе стигне на целта?

Решение. Нека должината на патот меѓу местата A и B е s. Нека T е времето за кое во местото B ќе пристигне автомобилот кој првата половина од патот ја минува со брзина u, а втората со брзина v. Овој автомобил првата половина од патот ја минал за време $\frac{s}{2u}$, а втората половина од патот за време $\frac{s}{2v}$. Затоа важи

$T=\frac{s}{2}(\frac{1}{u}+\frac{1}{v})$. Нека t е времето за кое во местото B ќе пристигне автомобилот кој првата половина од времето оди со брзина u, а втората со брзина v. Тогаш $s=\frac{t}{2}u+\frac{t}{2}v=\frac{t}{2}(u+v)$, односно $t=\frac{2s}{u+v}$. Понатаму, добиваме

$$\frac{T}{t}=\frac{s}{2}(\frac{1}{u}+\frac{1}{v})\frac{u+v}{2s}=\frac{(u+v)^2}{4uv}=1+\frac{(u-v)^2}{4uv}\geq 1.$$

Ако $u=v$, тогаш $T=t$, а ако $u\neq v$, тогаш $T>t$.

4. На кружница во произволен редослед се запишани пет нули и четири единици. Потоа меѓу еднаквите цифри се запишува нула, а меѓу различните се запишува единица, па почетните цифри се бришат. Докажи дека без разлика колку пати ќе ја повториме оваа постапка не може да се добијат девет нули.

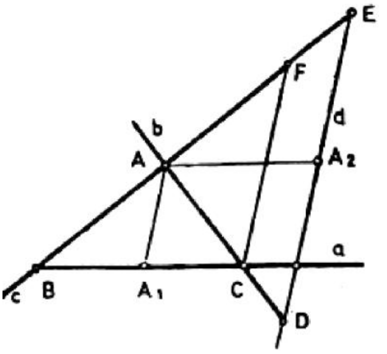
Решение. Нека го претпоставиме спротивното и нека по $n-$тото повторување на опишаната постапка прв пат се добиваат 9 нули. Тоа значи дека по $(n-1)-$виот чекор секои две соседни цифри биле еднакви и тоа еднакви на 1, бидејќи сите нули прв пат се појавуваат по $n-$тиот чекор. Понатаму, добиваме дека по $(n-2)-$риот чекор секои две соседни цифри мора да бидат различни. Ако местата на кои стојат цифрите ги нумерираме со броевите 1, 2, ..., 9, тогаш по $(n-2)-$риот чекор на непарните места биле еднакви цифри, а на парните места исто така еднакви цифри, но различни од оние на непарните места. На местата 1 и 9 кои се соседни стојат еднакви цифри, што противречи дека секои две соседни цифри мора да се различни. Од добиената противречност следува дека претпоставката не е точна, т.е. дека без разлика колку пати ќе ја повториме опишаната постапка не може да се добијат девет нули.

II година

1. Нека a,b,c се непарни цели броеви. Докажи дека равенката $ax^2+bx+c=0$ нема рационални корени.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека $b^2-4ac=k^2$, каде k е цел број. Бидејќи b е непарен број, добиваме дека k^2 и k се непарни броеви. Понатаму, $4ac=b^2-k^2$. Бројот $4ac$ е делив со 4, но не е делив со 8, бидејќи a и c се непарни броеви. Меѓутоа, бидејќи квадратите на непарните броеви при делење со 8 секогаш даваат остаток 1, добиваме дека бројот b^2-k^2 е делив со 8, што е противречност. Конечно од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

2. Во рамнината се дадени четири прави такви што никои две не се паралелни и никои три не минуваат низ иста точка. Ако четвртата права е паралелна со некоја тежишна линија на триаголникот кој го определуваат првите три прави, тогаш секоја од првите три прави е паралелна со некоја тежишна линија на триаголникот кој го определуваат преостанатите три прави. Докажи!



Решение. Нека ABC е триаголникот кој го формираат правите a,b,c и нека правата d е паралелна на тежишната линија AA_1 на триаголникот ABC, цртеж десно. Нека D и E се пресеците соодветно на правите b и c со правата d , F е пресекот на правата c со правата која минува низ точката C и е паралелна со AA_1, а A_2 е пресекот на правата d со правата која минува низ точката A и е паралелна на правата a. Бидејќи AA_1 е средна линија на триаголникот BCF, добиваме дека точката A е средина на отсечката BF. Затоа правата AA_2 ја полови CF, па сега лесно следува дека таа права ја полови и DE. Според тоа, AA_2 е тежишна линија на триаголникот ADE. Аналогно се разгледуваат и останатите случаи.

3. Сложувач на букви во печатница ги растурил цифрите 0, 2, 3, 4, 4, 7, 8, 8, 9 со кои е запишан број кој е шести степен на некој природен број. Кој е тој број?

Решение. Со n да го означиме бараниот број. Збирот на цифрите на бројот n^6 е еднаков на 45, па затоа тој е делив со 9, што значи дека бројот n е делив со 3. Бидејќи 21^6 е осумцифрен, а 33^6 е десетцифрен број, важи $n \in \{24, 27, 30\}$. Но, $n \neq 30$, бидејќи во записот на 30^6 има шест нули. Исто така $n \neq 24$, бидејќи цифрата на единиците на бројот 24^6 е 6, а цифрата 6 не се содржи во записот на бројот n^6. Конечно, од $27^6 = 387402489$, добиваме $n = 27$.

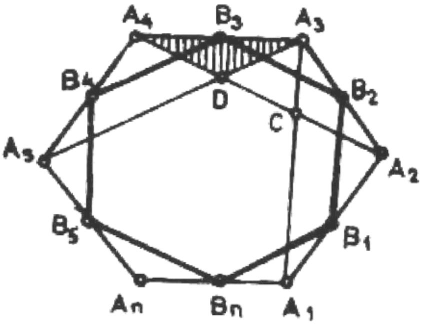
4. Во внатрешноста на квадрат се дадени n точки. Се поврзуваат по две точки меѓу себе, како и одделни точки со темињата на квадратот, но така што никои две отсечки не се сечат во внатрешна точка. Колку најмногу отсечки може да се конструираат на овој начин?

Решение. Со поврзување на точките на опишаниот начин квадратот се разбива на триаголници. Нека k е бројот на тие триаголници. Збирот на аглите на сите тие триаголници е еднаков на $k \cdot 180^\circ$. Овој збир е еднаков на $n \cdot 360^\circ + 4 \cdot 90^\circ$, бидејќи збирот на аглите чие заедничко теме е некоја од внатрешните точки е еднаков на 360°, додека збирот на аглите чие заедничко теме е некое од темињата на квадратот е 90°. Затоа $k \cdot 180^\circ = n \cdot 360^\circ + 4 \cdot 90^\circ$, т.е. $k = 2n + 2$. Бидејќи секоја конструирана отсечка е заедничка страна на два триаголници, а при броењето на страните на триаголниците ги броиме и четирите страни на квадратот, добиваме дека бројот на конструираните отсечки е

$$\frac{3(2n+2)-4}{2}=3n+1.$$

III година

1. Нека n е природен број поголем или еднаков на 4. Докажи дека $n-$аголникот кој е определен со средините на страните на даден конвексен $n-$аголник M има плоштина која не е помала ос половина од плоштината на многуаголникот M.



Решение. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ се темињата на многуаголникот M, а $B_1, B_2, ..., B_n$ се редоследно средините на отсечките $A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nA_1$, цртеж десно. Да забележиме дека, заради конвексноста на многуаголникот M, никои три од триаголниците

$$A_1A_2A_3, A_2A_3A_4, ..., A_{n-1}A_nA_1 \qquad (1)$$

немаат внатрешна заедничка точка. Затоа збирот на плоштините на овие триаголници е најмногу два пати поголем од плоштината P на многуаголникот M. Ако плоштината на многуаголникот $B_1B_2...B_n$ ја означиме со P_1, тогаш

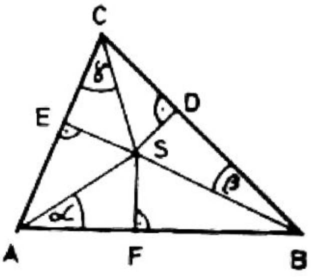
$$\begin{aligned} P-P_1 &= P_{B_nA_1B_1}+P_{B_1A_2B_2}+...+P_{B_{n-1}A_nB_n} \\ &= \tfrac{1}{4}(P_{A_nA_1A_2}+P_{A_1A_2A_3}+...+P_{A_{n-1}A_nA_1}) \\ &\leq \tfrac{2P}{4}=\tfrac{P}{2} \end{aligned}$$

од каде следува $P_1 \geq \frac{P}{2}$. Знак за равенство важи ако и само ако секоја точка на многуаголникот M припаѓа барем на два од триаголниците (1). Ако $n \geq 5$, со C и D да ги означиме редоследно пресеците на отсечката A_2A_4 со отсечките A_1A_3 и A_3A_5. Тогаш секоја внатрешна точка на триаголникот A_3CD се содржи во точно еден од триаголниците (1). Лесно се проверува дека за $n=4$ важи $P_1=\frac{P}{2}$. Според тоа, равенството $P_1=\frac{P}{2}$ важи ако и само ако M е четириаголник.

2. Нека S е произволна точка во внатрешноста на триаголникот ABC со страни a, b, c. Докажи дека

$$SA\cos\tfrac{A}{2}+SB\cos\tfrac{B}{2}+SC\cos\tfrac{C}{2} \geq \tfrac{a+b+c}{2}.$$

Кога важи знак за равенство?



Решение. Нека D,E,F се подножјата на нормалите повлечени од точката S соодветно на страните BC,CA,AB, цртеж десно. Да забележиме дека за $\varphi>0,\psi>0,\varphi+\psi<\pi$ важи

$$\cos\varphi+\cos\psi=2\cos\tfrac{\varphi+\psi}{2}\cos\tfrac{\varphi-\psi}{2}\le 2\cos\tfrac{\varphi+\psi}{2},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\varphi=\psi$. Користејќи го ова тврдење и ознаките

$$\alpha=\measuredangle SAF,\beta=\measuredangle SBD,\gamma=\measuredangle SCE,$$

добиваме

$$\begin{aligned}a+b+c&=(AE+AF)+(BD+BF)+(CD+CE)\\&=SA\cdot(\cos\alpha+\cos(A-\alpha))+SB\cdot(\cos\beta+\cos(B-\beta))+CS\cdot(\cos\gamma+\cos(C-\gamma))\\&\le 2(SA\cdot\cos\tfrac{A}{2}+SB\cdot\cos\tfrac{B}{2}+SC\cdot\cos\tfrac{C}{2}).\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $\alpha=\frac{1}{2}\measuredangle BAC,\beta=\frac{1}{2}\measuredangle CBA,\gamma=\frac{1}{2}\measuredangle ACB$, т.е. ако и само ако S е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC.

3. Реши ја равенката

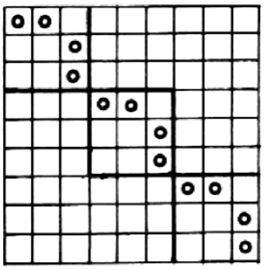
$$(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}+\sqrt{x^2-5x+6}})^x+(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}-\sqrt{x^2-5x+6}})^x=2^{\frac{x+4}{4}}.$$

Решение. Да означиме

$$A=(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}+\sqrt{x^2-5x+6}})^{\frac{x}{2}},$$
$$B=(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}-\sqrt{x^2-5x+6}})^{\frac{x}{2}}.$$

Тогаш $\frac{A+B}{2}=2^{\frac{x}{4}}$, $AB=2^{\frac{x}{2}}$. Бидејќи $A>0,B>0$ и $\frac{A+B}{2}=\sqrt{AB}$, добиваме $A=B$. Равенството $A=B$ е еквивалентно со $x=0$ или $\sqrt{x^2-5x+6}=0$. Конечно, решенија на почетната равенка се 0, 2 и 3.

4. Кој е најголемиот број топови кои може да се поставaт на шаховска табла $3n\times 3n$ така што секој топ биде нападнат најмногу од еден од преостанатите топови.



Решение. Да претпоставиме дека на шаховската $3n\times 3n$ табла се поставени неколку топови, така што секој од нив е нападнат најмногу од еден од преостанатите топови. Нека притоа се поставени $2x$ топови кои во парови се напаѓаат и y топови така што ниту еден од нив не напаѓа ниту еден од преостанатите топови. Секои два топа кои меѓусебно се напаѓаат го напаѓаат секое поле на вкупно 3 линии (две хоризонтални и една вертикална или две вертикални и една хоризонтална). Секој топ кој не ги напаѓа преостанатите топови го напаѓа секое поле од една хоризонтална и една вертикална линија. Според тоа, сите поставени топови напаѓаат вкупно $3x+2y$ линии, од кои некои се хоризонтални, а некои се вертикални. Бидејќи вкупниот број линии е $6n$, добиваме $3x+2y\le 6n$. Бројот на поставените топови е еднаков на $2x+y$ и важи

$$2x+y\le \tfrac{2}{3}(3x+2y)\le 4n.$$

За $n=3$ горниот цртеж е покажано како $4n$ топови може да се поставaт на $3n\times 3n$ табла така што се исполнети условите на задачата. Сличен пример може да се конструира за секој природен број n.

IV година

1. Дадена е парабола $y=x^2$. За $|x_0|>\sqrt{2}$ низ точката $A(x_0,x_0^2)$ на параболата минуваат две нејзини нормали чии подножја се B и C, различни од A. Докажи дека правата BC ја сече оската на параболата во фиксна точка која не зависи од x_0.

Решение. Нека $M(m,m^2)$ е произволна точка на параболата различна од A. Равенката на тангентата на параболата во точката M е $y-m^2=2m(x-m)$, а равенката на нормалата во таа точка е $y-m^2=-\frac{1}{2m}(x-m)$. Ако оваа нормала минува низ точката $A(x_0,x_0^2)$, тогаш $x_0^2-m^2=-\frac{1}{2m}(x_0-m)$, па користејќи го условот $x_0\ne m$ ($M\ne A$), добиваме

$$2m^2+2x_0m+1=0. \qquad (1)$$

Оваа квадратна равенка по m има две реални решенија бидејќи $D=4(x_0^2-2)>0$. Со x_1 и x_2 да ги означиме овие решенија. Нормалите на параболата во точките $B(x_1,x_1^2)$ и $C(x_2,x_2^2)$ ја содржат точката A, а равенката на правата BC е

$$y-x_1^2=\frac{x_2^2-x_1^2}{x_2-x_1}(x-x_1)\text{, т.е. } y=(x_2+x_1)x-x_1x_2.$$

Пресечната точка на правата BC со $y-$оската е $P(0,-x_1x_2)$, а како x_1 и x_2 се решенија по m на равенката (1), добиваме дека $x_1x_2=\frac{1}{2}$. Конечно, $P(0,-\frac{1}{2})$, т.е. координатите на точката P не зависат од точката A.

2. Реши ја равенката $1!+2!+...+x!=y^z$, каде x,y и z се природни броеви и $z>1$.

Решение. Прво да забележиме дека секоја тројка $(1,1,z), z\in\{2,3,...\}$ е решение на дадената равенка.

а) Нека $z=2$. Равенката го прима видот $1!+2!+...+x!=y^2$. Бројот y^2 при делење со 5 дава остатоци $-1,0$ и 1 и за $x\geq 4$ важи

$$1!+2!+3!+...+x!\equiv 1!+2!+3!+4!\equiv 3(\mathrm{mod}\,5).$$

Според тоа, ако тројката $(x,y,2)$ е решение на дадената равенка, тогаш $x\leq 3$. Со непосредна проверка добиваме дека за $x=2$ немаме решение, а за $x=3$ решение е тројката $(3,3,2)$.

б) Нека $z=3$. Равенката го прима видот $1!+2!+...+x!=y^3$. Бројот y^3 при делење со 7 дава остатоци $-1,0$ и 1 и за $x\geq 7$ важи

$$1!+2!+3!+...+x!\equiv 1!+2!+3!+4!+5!+6!\equiv 5(\mathrm{mod}\,7).$$

Според тоа, ако тројката $(x,y,3)$ е решение на дадената равенка, тогаш $x\leq 5$. Со непосредна проверка добиваме дека за $x\in\{2,3,4,5\}$ немаме решение на равенката.

в) Нека $z\geq 4$. Ако за природните броеви $x>1,y$ и $z\geq 4$ важи

$$1!+2!+...+x!=y^z,$$

тогаш $3|1!+2!+...+x!=3+3!+...+x!$, па затоа $3|y^z$, т.е. $3|y$, од каде заклучуваме дека $3^z|y^z$. Тоа значи дека бројот $1!+2!+...+x!$ е делив со $3^4=81$. Понатаму, бројот $1!+2!+...+8!=46233$ е делив со 9, но не е делив со 81. Бидејќи бројот $k!$ е делив со 81 за секој $k\geq 9$, заклучуваме дека $x\leq 7$. Со непосредна проверка добиваме дека ниту за еден $x\in\{2,3,4,5,6,7\}$ бројот $1!+2!+...+x!$ не е делив со 81. Значи, дадената равенка нема решенија кај кои $x>1$ и $z\geq 4$.

Конечно, единствени решенија на дадената равенка се $(1,1,z), z\in\{2,3,...\}$ и $(3,3,2)$.

3. Дадени се реални броеви $a_i, i=1,2,...,n$ такви што

$$|a_i|<M\ (i=1,2,...,n),\qquad a_1+a_2+...+a_n=0.$$

Докажи дека

$$a_1+2a_2+3a_3+...+na_n\leq\tfrac{n^2}{4}M.$$

Решение. Нека $S=a_1+2a_2+...+na_n$. Тогаш

$$S=(a_1+a_2+...+a_n)+(a_2+...+a_n)+...+(a_{n-1}+a_n)+a_n.$$

Понатаму,

$$a_1+a_2+...+a_n=0,$$

а за $k\in\{1,2,...,n-1\}$ добиваме

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i \le \left| \sum_{i=k+1}^{n} a_i \right| \le \sum_{i=k+1}^{n} |a_i| \le (n-k)M,$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i \le \left| \sum_{i=k+1}^{n} a_i \right| = \left| \sum_{i=1}^{k} a_i \right| \le \sum_{i=1}^{k} |a_i| \le kM,$$

па затоа

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i \le \min\{(n-k)M, kM\} = \begin{cases} kM, & k \le \frac{n}{2} \\ (n-k)M, & k > \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Ќе ги разгледаме посебно случаите кога n е парен, односно непарен број.

1) Ако $n = 2p$, тогаш

$$S \le M + 2M + ... + (p-1)M + pM + (p-1)M + ... + 2M + M$$
$$= 2\tfrac{p(p-1)}{2} M + pM = p^2 M = \tfrac{n^2}{4} M.$$

2) Ако $n = 2p + 1$, тогаш

$$S \le 2(M + 2M + ... + pM) = p(p+1)M = \tfrac{n^2-1}{4} M \le \tfrac{n^2}{4} M.$$

4. Во некое друштво секои два познаници немаат заеднички познаник, а секои двајца кои не се познаваат имаат точно два заеднички познаници. Докажи дека во ова друштво сите имаат еднаков број познаници.

Решение. а) Да претпоставиме дека A и B се познаваат. Нека $A_1, A_2, ..., A_n, B$ се сите познаници на лицето A. Тогаш никои двајца од $A_1, A_2, ..., A_n, B$ не се познаваат меѓу себе. Бидејќи A_1 и B не се познаваат, тогаш тие имаат двајца заеднички познаници A и B_1. Но, A и B_1 не се познаваат, па затоа A_1 и B се нивни единствени заеднички познаници. Според тоа, ниту еден од $A_2, A_3, ..., A_n$ не е познаник на B_1. Аналогно се докажува дека постои B_2 (различен од B_1) кој е заеднички познаник на A_2 и B итн. Според тоа, на лицата $A_1, A_2, ..., A_n$ можеме да им придружиме различни познаници на лицето B, при што ниту еден од нив не е A. Оттука следува дека B има не помалку познаници од A. Аналогно, A има не помалку познаници од B. Затоа A и B имаат еднаков број познаници.

б) Ако X и Y се познаваат, тогаш тие имаат заеднички познаник Z. Сега од а) следува дека тие имаат еднаков број познаници како и лицето Z.

Сојузен натпревар 1976

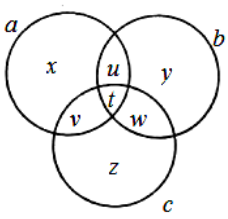
I година

1. Дадени се N објекти од кои N_a го имаат својството a, N_b својството b, N_c својството c, $N_{a,b}$ својствата a и b, $N_{a,c}$ својствата a и c и $N_{b,c}$ својствата b и c. Докажи дека

$$3N+N_{a,b}+N_{b,c}+N_{c,a}\geq 2N_a+2N_b+2N_c\,.$$

Решение. Со x,y,z редоследно да ги означиме бројот на објектите кои го имаат само својството a,b,c. Понатаму, нека u,v,w е редоследно бројот на објектите кои ги имаат исаклучиво својствата a и b, a и c, b и c, а со t бројот на објектите кои ги имаат сите три својства. Тогаш (види цртеж):

$$\begin{aligned}
N_a&=x+u+v+t,\\
N_b&=y+u+w+t,\\
N_c&=z+v+w+t,\\
N_{a,b}&=u+t,\\
N_{a,c}&=v+t,\\
N_{b,c}&=w+t,\\
N&=x+y+z+u+v+w+t.
\end{aligned}$$



Оттука следува неравенството

$$3N+N_{a,b}+N_{b,c}+N_{c,a}-2N_a-2N_b-2N_c=x+y+z\geq 0,$$

кое е еквивалентно со бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=0$, т.е. ако и само ако ниту еден од објектите нема само едно својство.

2. Докажи дека во круг со радиус 9 не може да се сместат 400 точки така што растојанието меѓу секои две точки ќе биде поголемо од 1.

Решение. Нека претпоставиме дека во круг со радиус 9 може да се сместат 400 точки така што растојанието меѓу секои две точки е поголемо од 1. Околу секоја точка да опишеме круг со радиус $\frac{1}{2}$. Овие кругови се дисјунктни и сите се содржани во кругот со радиус 9,5. Но, тогаш вкупната плоштина на овие кругови, која е $400\pi(\frac{1}{2})^2=100\pi$, мора да е помала од плоштината на кругот со радиус 9,5 која е еднаква на $9{,}5^2\pi=90{,}25\pi$, што не е точно. Од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

3. Докажи дека за три реални броја чиј производ е еднаков на 1 и чиј збир е строго поголем од збирот на нивните реципрочни вредности, важи:

Меѓу трите броја постои точно еден кој е поголем од 1.

Решение. Нека a,b,c се реални броеви такви што

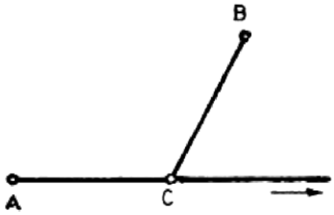
$$abc=1 \text{ и } a+b+c>\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c}.$$

Тогаш

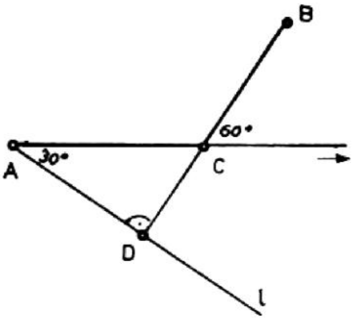
$$\begin{aligned}(a-1)(b-1)(c-1)&=abc-ab-bc-ca+a+b+c-1\\&=a+b+c-abc(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})\\&=a+b+c-(\tfrac{1}{a}+\tfrac{1}{b}+\tfrac{1}{c})>0.\end{aligned}$$

Бидејќи не е можно сите три броја $a-1,b-1,c-1$ да се позитивни (имено од $a>1$, $b>1,c>1$ ќе следува $abc>1$, што е спротивно на претпоставките), добиваме дека точно еден од овие броеви е позитиве, т.е. точно еден од броевите a,b,c е поголем од 1, што и требаше да се докаже.

4. На брегот на реката се наоѓа местото A, а низводно од него, подалеку од брегот, се наоѓа местото B. Определи на кое место треба да се направи пристаниште C за да транспортот од A до B, преку C, биде најефтин, ако се знае дека цената на транспортот по реката е два пати помала отколку копнениот транспорт. Се претпоставува дека текот на реката и патот од C во B се праволиниски (цртеж десно).



Решение. Нека C е бараната точка. Нека l е полуправа со почеток во a од онаа страна на правата AC (реката) од која не е точката B, која со правата AC формира агол од 30° и нека D е подножјето на нормалата повлечена од точката C на полуправата l (цртеж десно). Тогаш $AC=2CD$. Цената на транспортот на стоката е пропорционална со



$$AC+2CB=2CD+2CB=2(CD+CB),$$

што значи и со $CD+CB$, па ќе биде најмала ако точките B,C,D се колинеарни, односно ако правата CB формира со низводната насока на реката агол од 60°.

II година

1. Пресметај го збирот

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}.$$

Решение. Бидејќи за секој $n\in\mathbb{N}$ важи:

$$\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{(n+1)^2n-n^2(n+1)}=\frac{(n+1)\sqrt{n}-n\sqrt{n+1}}{n(n+1)}=\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}},$$

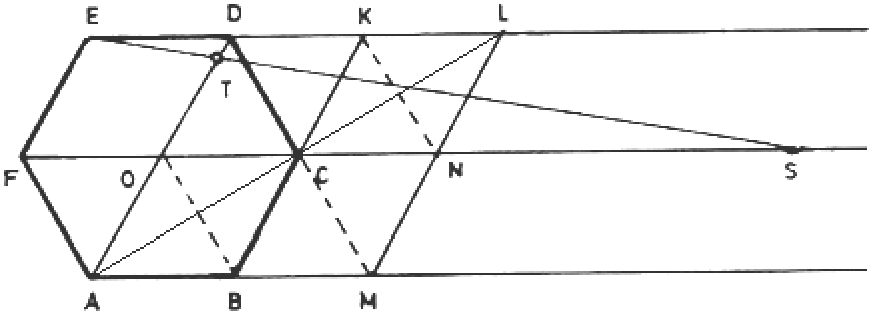
добиваме

$$\frac{1}{2\sqrt{1}+1\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}+...+\frac{1}{100\sqrt{99}+99\sqrt{100}}=(\frac{1}{\sqrt{1}}-\frac{1}{\sqrt{2}})+(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}})+...+(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}})$$

$$=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}.$$

2. Даден е правилен шестаголник со должина на страна a. Користејќи се само со линијар конструирај отсечка со должина $\frac{a}{n}$, за $n=2,3,4,...$.

Решение. Нека е даден правилен шестаголник $ABCDEF$ со страна a. Прво ги конструираме пресеците K и L на правата DE соодветно со правите BC и AC, потоа пресекот M на правите AB и CD и најпосле пресеците N и O на правата CF со правите ML и AD, соодветно (цртеж десно). Лесно се докажува дека шестаголникот $BMNKDO$ е правилен со страна a и дека $Fn=3FO=3a$. Продолжувајќи ја постапката можеме за даден природен број N на правата FO да определиме точка S таква што $FS=nFO=na$. Сега, ако T е пресекот на правите ES и OD, тогаш од сличноста на триаголниците FSE и OST следува дека $OT=\frac{n-1}{n}a$, односно $TD=\frac{1}{n}a$.



3. Даден е триаголник ABC со страни $a=BC, b=CA, c=AB$. Во внатрешноста на триаголникот определи точка P таква што вредноста на изразот $ax^2+by^2+cz^2$ ќе биде најмала, каде x,y,z се соодветно растојанијата од точката P до правите BC,CA,AB.

Решение. Со S да ја означиме плоштината на дадениот триаголник. Треба да определиме кога достигнува минимум изразот $L=ax^2+by^2+cz^2$, при услов да е $ax+by+cz=2S$. Ќе докажеме дека важи

$$\frac{ax^2+by^2+cz^2}{a+b+c}\geq(\frac{ax+by+cz}{a+b+c})^2, \qquad (1)$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$. Навистина, неравенството (1) еквивалентно со неравенството

$$(a+b+c)(ax^2+by^2+cz^2)\geq(ax+by+cz)^2,$$

т.е. со неравенството

$$ab(x-y)^2+bc(y-z)^2+ca(z-x)^2\geq 0,$$

кое е точно, при што знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$.

Докажаното неравенство можеме да го запишеме во видот $L\geq\frac{4S^2}{a+b+c}$. Според тоа, дадениот израз L има вредност која не е помала од $\frac{4S^2}{a+b+c}$, а е еднаква на овој број ако и само ако $x=y=z$, т.е. ако и само ако P е центарот на впишаната кружница на триаголникот ABC.

4. Определи го најголемиот број кој е делив со 11 и чии цифри се различни.

Решение. Ќе докажеме дека постојат десетцифрени броеви од видот $\overline{98765abcde}$ каде (a,b,c,d,e) е некоја пермутација на множеството $\{0,1,2,3,4\}$, кои се деливи со 11 и меѓу нив ќе го определиме најголемиот број. Тој број очигледно ќе биде и најголемиот десетцифрен број запишан со различни цифри кој е делив со 11.

За да број од наведениот вид е делив со 11, потребно и доволно е со 11 да е делив бројот

$$\begin{aligned}A&=9+7+5+b+d-(8+6+a+c+e)\\&=7+b+d-(10-(b+d))=2(b+d)-3.\end{aligned}$$

Од условот за b и d следува дека $1\leq b+d\leq 7$, односно дека $-1\leq A\leq 11$. Бидејќи A е непарен, единствена можност да е делив со 11 е $A=11$, односно $b+d=7$. Според тоа, (b,d) е некоја пермутација на множеството $\{3,4\}$, а (a,c,e) е некоја пермутација на множеството $\{0,1,2\}$. Најголемиот број од опишаниот вид кој ги задоволува последните услови е 9876524130.

III година

1. Ако $a>1, b>1, c>1$ или $0<a<1, 0<b<1, 0<c<1$ докажи дека важи неравенството

$$\frac{\log_b a^2}{a+b}+\frac{\log_c b^2}{b+c}+\frac{\log_a c^2}{c+a}\geq\frac{9}{a+b+c}.$$

Решение. Било да е

$$a>1, b>1, c>1 \text{ или } 0<a<1, 0<b<1, 0<c<1,$$

броевите $\log_b a, \log_c b, \log_a c$ ќе бидат позитивни.

Ако два пати го примениме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме:

$$\begin{aligned}\frac{\log_b a^2}{a+b}+\frac{\log_c b^2}{b+c}+\frac{\log_a c^2}{c+a} &= 2(\frac{\log_b a}{a+b}+\frac{\log_c b}{b+c}+\frac{\log_a c}{c+a})\\ &\geq 6\sqrt[3]{\frac{\log_b a\cdot\log_c b\cdot\log_a c}{(a+b)(b+c)(c+a)}}\\ &= \frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}}\\ &\geq \frac{18}{(a+b)+(b+c)+(c+a)}\\ &= \frac{9}{a+b+c},\end{aligned}$$

што и требаше да се докаже. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

2. Ако α,β,γ се агли на нетапоаголен триаголник, докажи дека

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\,. \qquad (1)$$

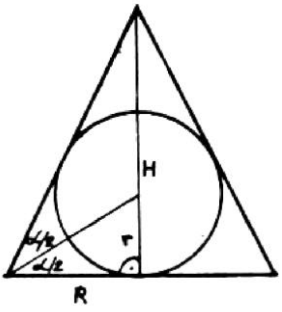
Решение. Бидејќи аглите на дадениот триаголник не се тапи, барем еден од нив, да кажеме γ го задоволува условот $\frac{\pi}{4}<\gamma\leq\frac{\pi}{2}$ и со самото тоа го задоволува неравенството $\sin\gamma>\cos\gamma$. Тогаш $\alpha+\beta\geq\frac{\pi}{2}$, $\frac{|\alpha-\beta|}{2}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}$, $0\leq\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{4}$, па затоа

$$\begin{aligned}&\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)=\\ &\qquad=(\sin\alpha+\sin\beta)-(\cos\alpha+\cos\beta)+(\sin\gamma-\cos\gamma)\\ &\qquad=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2})+(\sin\gamma-\cos\gamma)\\ &\qquad=2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4})+(\sin\gamma-\cos\gamma)>0,\end{aligned}$$

бидејќи $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}>0,\ \sin(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{4})>0,\ \sin\gamma-\cos\gamma>0$.

Според тоа, точно е неравенството (1).

3. Определи ја најголемата вредност на односот на волумените на топката и околу неа опишаниот конус.



Решение. Со r да го означиме тадиусот на топката, со R и H радиусот на основата и висината на конусот, соодветно, со α аголот на изводницата на конусот спрема рамнината на основата и $t=\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, цртеж десно. Тогаш

$$H=R\,\mathrm{tg}\,\alpha=\frac{2Rt}{1-t^2},\ r=R\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=Rt,$$

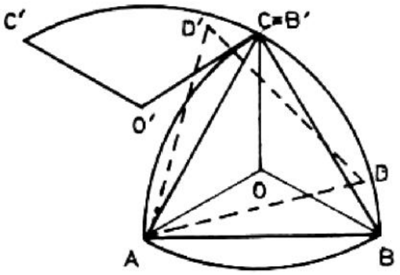
па затоа односнот на волуменот V на топката и волуменот V' на конусот е

$$V:V'=\frac{4}{3}\pi r^3:\frac{1}{3}\pi R^2H=2t^2(1-t)^2\leq 2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

при што знак за равенство се достигнува ако и само ако $t^2=\frac{1}{2}$.

Конечно, бараната максимална вредност на односот на волумените е $\frac{1}{2}$ и се достигнува кога наклонетиот агол е $\alpha=2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

4. Во рамнината е дадено множество S од n точки $(n>2)$ со својство: ако $A,B\in S$, тогаш постои $C\in S$ таква што триаголникот ABC е рамностран. Колку може да биде бројот n?



Решение. Да избереме точки $A,B\in S$ такви што растојанието AB е најголемо можно. Нека точката $C\in S$ е таква што триаголникот ABC е рамностран. Ќе докажеме дека множеството S не може да содржи повеќе од три точки, т.е. дека мора да е $n=3$.

Конструираме кружници со центри A, B и C, и радиуси еднакви на отсечката AB, цртеж десно. Заради начинот на избор на точките A и B можните точки на множеството S, различни од A,B,C, не може да се надвор од било која од овие кружници. Ќе докажеме дека не може да се ниту во нивната заедничка внатрешна област, ниту на лаците AB, BC,CA на овие кружници. Доволно е да докажеме дека ги нема во делот од таа област ограничен со отсечките OB и OC (O е центарот на триаголникот ABC), и лакот BC - овој дел од рамнината да го означиме со $\mathbb{F}$. Да претпоставиме дека во областа $\mathbb{F}$ постои точка $D\in S$, различна од B и C. Тогаш за некој $D'\in S$ триаголникот ADD' е рамностран, т.е. точката D' се добива со ротација на точката D околу точката A за агол 60° (во некоја насока). При оваа ротација една од точките B и C преминува во другата, нека на пример B преминува во $C=B'$. Лесно се докажува дека притоа отсечката BO преминува во отсечка $B'O'$ која припаѓа на тангентата на кружницата (B,AB) во точката C. Оттука следува дека целата област $\mathbb{F}$ освен самата точка B се пресликува во делот од рамнината за кој докажавме дека во него нема точки од множеството S. Но, тоа значи дека $D'=B'$ и $D=B$, што не е можно. Добиената противречност докажува дека множеството S не содржи други точки освен точките A,B,C.

IV година

1. Нека во рамнината е даден правоаголен координатен систем и S е множеството од сите точки со целобројни координати. Докажи дека за секој природен број n постои кружница со центар $(\sqrt{2},\frac{1}{3})$ која во својата внатрешност содржи точно n точки од множеството S.

Решение. Прво ќе докажеме дека не постои кружница со центар во точката $C(\sqrt{2},\frac{1}{3})$ која содржи две точки (x_1,y_1) и (x_2,y_2) со целобројни координати. Навистина, ако за некои $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbb{Z}$ такви што $x_1\neq x_2$ или $y_1\neq y_2$ важи

$$(x_1-\sqrt{2})^2+(y_1-\tfrac{1}{3})^2=(x_2-\sqrt{2})^2+(y_2-\tfrac{1}{3})^2,$$

тогаш ќе важи

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2-\sqrt{2})=(y_1-y_2)(y_1+y_2-\tfrac{2}{3}).$$

Но, во последното равенство за $x_1\neq x_2$ левата страна е ирационален број, а десната е рационален број. Ако $x_1=x_2$ и $y_1\neq y_2$, тогаш добиваме $y_1+y_2=\frac{2}{3}$, што не е можно.

Сега, сите точки на множеството S да ги подредиме во низа на следниов начин: со M_1 да ја означиме точката од S која е најблиску до точката C, па ако точките $M_1,M_2,...,M_n$ се веќе определени, со M_{n+1} да ја означиме точката од $S\setminus\{M_1,M_2,...,M_n\}$ која е најблиска до точката C. Претходно докажаното тврдење обезбедува дека опишаната конструкција е можна. Тогаш кружницата со центар во C и радиус R, каде $CM_n<R<CM_{n+1}$ во својата внатрешност содржи точно n точки од множеството S.

2. Затворени конвексни криви C_1',C_2' имаат периметри x_1,x_2, каде $x_1+x_2=d$ $=\text{const}$ и се слични на кривите C_1,C_2 кои имаат периметри O_1,O_2 и ограничуваат површини со плоштини P_1,P_2, соодветно. Определи ги x_1,x_2 така што збирот на плоштините на површините кои ги ограничуваат кривите C_1',C_2' е минимален.

Решение. Ако k_1, односно k го означиме коефициентот на сличност на кривите C_1' и C_1, односно C_2' и C_2, тогаш $x_1=k_1O_1$ и $x_2=k_2O_2$. Нека P_1',P_2' се плоштините на областите кои соодветно се ограничени со кривите C_1',C_2'. Тогаш $P_1'=k_1^2P_1,P_2'=k_2^2P_2$, па затоа збирот

$$P_1'+P_2'=k_1^2P_1+k_2^2P_2=\frac{P_1}{O_1^2}x_1^2+\frac{P_2}{O_2^2}x_2^2=(\frac{P_1}{O_1^2}+\frac{P_2}{O_2^2})x_1^2-\frac{2dP_2}{O_2^2}x_1+\frac{d^2P_2}{O_2^2}$$

е минимален за

$$x_1=\frac{P_2O_1^2}{P_2O_1^2+P_1O_2^2}d,\quad x_2=\frac{P_1O_2^2}{P_2O_1^2+P_1O_2^2}d.$$

3. Дадени се множествата цели броеви

$$A=\{a_1,a_2,...,a_n\},\quad B=\{b_1,b_2,...,b_n\}$$

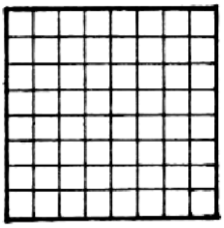
такви што постојат елементи $x\in A, y\in B$ за кои важи $x\equiv y(\text{mod}\,2n)$.

Дали секогаш постојат непразни множества $A' \subset A, B' \subset B$ такви што збирот на елементите од A' и елементите од B' е делив со $2n$?

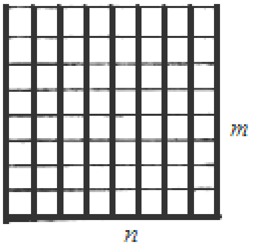
Решение. Не постојат секогаш. За произволен $n > 1$ да земеме, на пример,

$$a_1 \equiv a_2 \equiv \ldots \equiv a_n \equiv b_1 \equiv b_2 \equiv \ldots \equiv b_{n-1} \equiv 1 (\bmod 2n) \text{ и } b_n \equiv 0 (\bmod 2n).$$

Лесно се проверува дека за произволни непразни множества $A' \subset A, B' \subset B$ збирот на елементите од A' и елементите од B' не е делив со $2n$.



4. Градот има квадратна мрежа со m хоризонтални и n вертикални улици (цртеж десно). Колкава е најмалата должина на делот од мрежата кој треба да се асфалтира така што од секоја раскрсница до било која друга раскрсница може да се стигне по асфалтен пат?



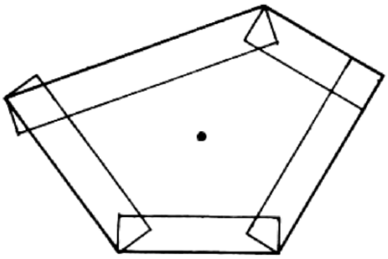
Решение. Во градот има mn раскрсници. Делот на улицата меѓу две соседни раскрсници да го наречеме сокак. За да тргнувајќи од една раскрсница, поминеме низ секоја од преостанатите $mn-1$ раскрсница движејќи се по асфалтиран дел од мрежата, мора да се асфалтирани најмалку $mn-1$ сокаци (до секоја следна раскрсница стигнуваме по нов сокак). На цртежот десно е прикажана мрежа во која се асфалтирани

$$n(m-1)+n-1 = mn-1$$

сокаци, во која секои две раскрсници се поврзани со асфалтиран пат.

Мала олимпијада 1976

1. Докажи дека за секој конвексен многуаголник со плоштина P и периметар S постои круг со радиус $\frac{P}{S}$ кој се содржи во многуаголникот.



Решение. Над секоја страна на дадениот многуаголник конструираме правоаголник со висина $\frac{P}{S}$ кој со многуаголникот има заеднички внатрешни точки, цртеж десно. Бидејќи секои два правоаголници конструирани на соседни страни исто така имаат заеднички внатрешни точки, заклучуваме дека вкупната плоштина кои тие ја покриваат е помала од P, т.е. од плоштината на многуаголникот. Затоа постои точка во внатрешноста на многуаголникот која не е покриена со ниту еден правоаголник. Јасно, кругот со центар во таа точка и радиус $\frac{P}{S}$ се содржи во многуаголникот.

2. Дадени се $2n+1$ цели броеви со својство: ако се оддели било кој од нив, тогаш преостанатите $2n$ броеви може да се поделат во две групи по n броеви, така што збирот на броевите од едната група е еднаков на збирот на броевите од другата група. Докажи дека сите броеви се меѓусебно еднакви.

Решение. Прво да забележиме дека ако броевите $a_i, i=1,2,...,2n+1$ го имаат наведеното својство, тогаш

1) за секој реален број k тоа својство го имаат броевите $a_i+k, i=1,2,...,2n+1$

2) за секој реален број k тоа својство го имаат броевите $ka_i, i=1,2,...,2n+1$.

Користејќи го 1) заклучуваме дека доволно е тврдењето да го докажеме при претпоставка дека еден од броевите, на пример бројот a_1, е еднаков на нула. Во овој случај лесно се добива дека сите дадени броеви се парни. Навистина, ако го одделиме бројот $a_1=0$ и преостанатите броеви ги поделиме во две групи со еднакви збирови, добиваме дека збирот на сите броеви е парен. Од друга страна, ако го одделиме било кој број a_i и преостанатите броеви ги поделиме во две групи со еднакви збирови, заклучуваме дека збирот на сите броеви освен a_i е парен. Затоа бројот a_i мора да е парен.

Бидејќи сите броеви $a_i, i=1,2,...,2n+1$ се парни, од 2) следува дека и целите броеви $\frac{1}{2}a_i, i=1,2,...,2n+1$ го имаат наведеното својство, при што еден од нив е еднаков на нула. Продолжувајќи ја понатаму оваа постапка добиваме дека за секој природен број j секој од дадените броеви е делив со 2^j, од што следува дека сите броеви се еднакви на нула. Со тоа тврдењето е докажано.

Забелешка. Тврдењето на задачата важи и ако $a_i, i=1,2,...,2n+1$ се произволни реални броеви за кои важи наведеното својство. Меѓутоа, во овој случај доказот е доста потежок.

3. Определи ги најмалата и најголемата вредност на функцијата

$$f(x,y,z,t)=\frac{ax^2+by^2}{ax+by}+\frac{az^2+bt^2}{az+bt}, (a>0, b>0),$$

при услови $x+z=y+t=1, x,y,z,t\geq 0$.

Решение. Од $0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1$ следува $x^2\leq x, y^2\leq y$, па затоа важи

$$ax^2+by^2\leq ax+by.$$

Слично се докажува дека

$$az^2+bt^2\leq az+bt,$$

па затоа

$$f(x,y,z,t)=\frac{ax^2+by^2}{ax+by}+\frac{az^2+bt^2}{az+bt}\leq 1+1=2.$$

Бидејќи $f(1,0,0,1)=2$, заклучуваме дека 2 е најголемата вредност на функцијата f при дадените услови.

Ќе докажеме дека при дадените услови важи

$$\frac{ax^2+by^2}{ax+by}\geq\frac{ax+by}{a+b}.$$

Навистина, последното неравенство е еквивалентно со неравенството

$$(ax^2+by^2)(a+b)\geq(ax+by)^2,$$

односно со неравенството

$$ab(x-y)^2\geq 0,$$

кое очигледно е точно. Затоа

$$f(x,y,z,t)=\frac{ax^2+by^2}{ax+by}+\frac{az^2+bt^2}{az+bt}\geq\frac{ax+by}{a+b}+\frac{az+bt}{a+b}=\frac{a(x+z)+b(y+t)}{a+b}=1.$$

Бидејќи $f(,\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})=1$, заклучуваме дека 1 е најмалата вредност на функцијата f при дадените услови.

Сојузен натпревар 1977

I година

1. Определи ги целобројните решенија на равенката $p(x+y)=xy$, каде p е даден прост број.

Решение. Да забележиме дека парот $(0,0)$ решение на задачата и дека парот (x,y) во кој точно еден од броевите е еднаков на 0 не е решение на задачата. Нека $p(x+y)=xy\neq 0$. Тогаш $p\,|\,xy$, па како p е прост број, важи $p\,|\,x$ или $p\,|\,y$. Нека, на пример, $x=mp$, каде m е цел број и $m\neq 0$. Лесно се гледа дека тогаш не може да е $m=1$. Понатаму, $p(mp+y)=mpy$, па затоа $y=\frac{mp}{m-1}$.

1) Ако $m-1=1$, тогаш $x=2p, y=2p$ е решение на дадената равенка.

2) Ако $m-1=-1$, тогаш $m=0$, што противречи на претпоставката.

3) Ако $m-1=p$, тогаш $x=p(p+1), y=p+1$ е решение на дадената равенка.

4) Ако $m-1=-p$, тогаш $x=p(1-p), y=p-1$ е решение на дадената равенка.

5) Ако $m-1\notin\{-1,1,-p,p\}$, тогаш $y=\frac{mp}{m-1}$ не е цел број.

Аналогно се разгледува случајот кога y е делив со p и во тој случај добиваме уште две решенија $x=p+1, y=p(p+1)$ и $x=p-1, y=p(1-p)$.

2. Нека a,b,c се природни броеви и $a^2+b^2=c^2$. Докажи дека бројот abc е делив со 60.

Решение. Бидејќи $60=2^2\cdot 3\cdot 5$, доволно е да се докаже дека барем еден од броевите a,b,c е делив со 4 или два се деливи со 2, дека барем еден е делив со 3 и барем еден е делив со 5.

а) Да забележиме дека броевите a и b не може и двата да се непарни, бидејќи во тој случај ќе важи $a^2+b^2\equiv 2(\bmod 4)$ и како квадрат на цел број при делење со 4 дава остаток 0 или 1, добиваме дека a^2+b^2 не може да биде еднаков на квадрат на цел број c. Ако двата броја a и b се парни, тогаш $4\,|\,abc$. Ако точно еден од броевите a и b е парен, тогаш c е непарен број. Нека, на пример, $a=2k$, $b=2n+1, c=2m+1$. Тогаш од $a^2+b^2=c^2$ следува $k^2=m(m+1)-n(n+1)$, па како $2\,|\,m(m+1)-n(n+1)$, добиваме $2\,|\,k^2$, т.е. $2\,|\,k$. Но, $a=2k$, па затоа $4\,|\,abc$.

б) Квадрат на цел број при делење со 3 дава остаток 0 или 1. Ако ниту еден од броевите a и b не е делив со 3, тогаш

$$a^2+b^2\equiv 2(\bmod 3) \text{ и } c^2\equiv 0 \text{ или } 1(\bmod 3),$$

што противречи на $a^2+b^2=c^2$. Значи, барем еден од броевите a и b е делив со 3.

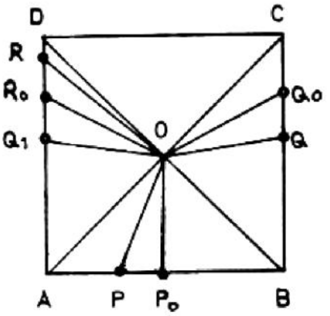
в) Квадрат на цел број при делење со 5 дава остаток 0, 1 или 4. Ако ниту еден од броевите a,b,c не е делив со 5, тогаш

$$a^2+b^2\equiv 0,2 \text{ или } 3(\mathrm{mod}\,5) \text{ и } c^2\equiv 1 \text{или} 4(\mathrm{mod}\,5),$$

што противречи на $a^2+b^2=c^2$. Значи, барем еден од броевите a,b,c е делив со 5.

3. На страните на квадратот $ABCD$ се наоѓаат точките P,Q и R кои неговиот периметар го делат на три еднакви дела. Нека O е центарот на квадратот. Докажи дека збирот $PO+QO+RO$ е најмал можен ако една од точките P,Q и R е средина на страната на која се наоѓа.

Решение. Нека точките P,Q,R го делат периметарот на квадратот $ABCD$ на три еднакви дела. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека ниру една од точките P,Q,R не е внатрешна точка на отсечката CD и дека на пример, $P\in AP_0$, $Q\in BC$ и $R\in AD$, каде P_0 е средина на отсечката AB. Понатаму, нека $Q_0\in BC$ и $R_0\in AD$ се точки кои заедно со точката P_0 го делат периметарот на квадратот три еднакви дела, а Q_1 е точка симетрична на точката Q во однос на правата OP_0, види цртеж. Тогаш

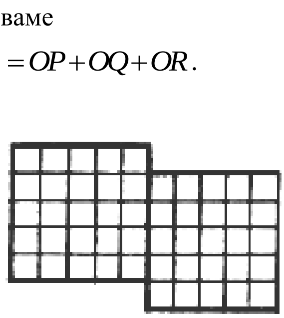


$$PP_0=QQ_0=RR_0,\ OQ=OQ_1,\ Q_1R_0=QQ_0=RR_0,\ OP_0\leq OP \text{ и } 2OR_0\leq OR+OQ_1,$$

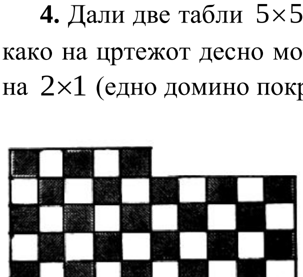
бидејќи OR_0 е тежишна линија на триаголникот ORQ_1, при што запишаните неравенства се строги ако $P\neq P_0$. Значи, за $P\neq P_0$ добиваме

$$OP_0+OQ_0+OR_0=OP_0+2OR_0<OP+OR+OQ_1=OP+OQ+OR.$$

4. Дали две табли 5×5 залепени една до до друга како на цртежот десно може да се покријат со домина 2×1 (едно домино покрива две соседни полиња)?



Решение. Да ја обоиме фигурата шаховски како што е прикажано на цртежот лево. Тогаш вкупно имаме 50 полиња, од кои 26 се црни и 24 се бели. Секое домино покрива едно црно и едно бело поле, па затоа со 25 домина не може да се покрие дадената фигура.



II година

1. Во множеството реални броеви реши ја равенката

$$x=\sqrt{x-\tfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\tfrac{1}{x}}\,.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со системот

$$(x-\sqrt{x-\tfrac{1}{x}})^2=x-\tfrac{1}{x},\;\; x\geq 1,$$

односно со ситемот

$$x^2-x-1=0,\;\; x\geq 1.$$

Единствено решение на последниот систем е $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

2. На страните AB, BC и CA на триаголникот ABC дадени се точки P, Q и R такви што

$$AP=\lambda AB, BQ=\lambda BC, CR=\lambda CA, (\tfrac{1}{2}\leq\lambda\leq 1)\,.$$

Докажи дека периметарот на триаголникот PQR не е поголем од периметарот на триаголникот ABC помножен со бројот λ.

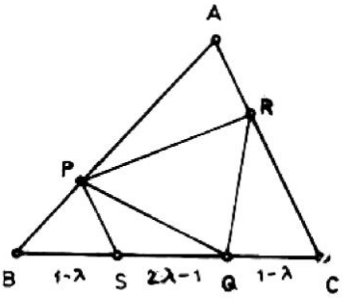
Решение. Нека S е пресекот на правата BC со правата која минува низ точката P и е паралелна со правата AC, цртеж десно. Тогаш

$$BS=(1-\lambda)BC,\;\; PS=(1-\lambda)AC\,.$$

Бидејќи $\frac{1}{2}\leq\lambda<1$, точката S припаѓа на отсечката BQ, па затоа

$$SQ=BQ-BS=\lambda BC-(1-\lambda)BC=(2\lambda-1)BC\,,$$

$$PQ\leq PS+SQ=(1-\lambda)AC+(2\lambda-1)BC\,.$$



Аналогно добиваме

$$QR\leq(1-\lambda)AB+(2\lambda-1)AC,\quad RP\leq(1-\lambda)BC+(2\lambda-1)AB\,,$$

па лесно се добива дека

$$PQ+QR+RP\leq\lambda(AB+BC+CA)\,.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $S=Q$ или $S=B$. Овој услов е еквивалентен со $2\lambda-1=0$ или $\lambda=1$, т.е. $\lambda\in\{\frac{1}{2},1\}$.

3. Дадени се 20 природни броеви $a_1, a_2, ..., a_{20}$ такви што

$$a_1<a_2<...<a_{20}<70\,.$$

Докажи дека меѓу разликите $a_j-a_k,\; j>k$ постојат барем четири меѓусебно еднакви.

Решение. Ќе докажеме дека меѓу броевите $a_{20}-a_{19}, a_{19}-a_{18}, ..., a_3-a_2, a_2-a_1$ има барем четири еднакви меѓу себе. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека меѓу нив има најмногу три броја кои се еднакви меѓу себе. Тогаш

$$\begin{aligned} a_{20} &= (a_{20}-a_{19})+(a_{19}-a_{18})+...(a_3-a_2)+(a_2-a_1)+a_1 \\ &\geq 1+3(1+2+3+4+5+6)+7=71, \end{aligned}$$

што противречи на претпоставката $a_{20}<70$.

4. Докажи дека за секој природен број $n>1$ важи неравенството

$$\sqrt{n} < \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n-2} < \sqrt{2n}. \qquad (1)$$

Решение. Нека означиме $P_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n-2}$. Бидејќи за $k>1$ важи

$$\frac{2k-1}{2k-2} > \sqrt{\frac{k}{k-1}}$$

добиваме

$$P_n > \sqrt{\frac{2}{1}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} \cdot \sqrt{\frac{4}{3}} \cdot ... \sqrt{\frac{n}{n-1}} = \sqrt{n}$$

т.е. точно е левото неравенство во (1).

Означуваме, $Q_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n}$. Од

$$\frac{2k-1}{2k} < \frac{2k}{2k+1},$$

за секој $k \in \mathbb{N}$ следува

$$Q_n < \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot ... \cdot \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{P_n} \frac{2n}{2n+1} = \frac{1}{2n+1} \frac{1}{Q_n} < \frac{1}{2nQ_n}$$

што значи $Q_n < \frac{1}{\sqrt{2n}}$. Конечно,

$$P_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n-2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot ... \cdot \frac{2n-1}{2n} \cdot 2n = 2nQ_n < \sqrt{2n}$$

со што го докажавме и десното неравенство.

III година

1. Нека k е природен број и $a_1, a_2, ..., a_{2k}$ се позитивни броеви помали од 1. Докажи го неравенството

$$\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2} + \sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2} + ... + \sqrt{a_{2k-1}^2+(1-a_{2k})^2} + \sqrt{a_{2k}^2+(1-a_1)^2} \geq k\sqrt{2}.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина непосредно следува

$$\begin{aligned} &\sqrt{a_1^2+(1-a_2)^2} + \sqrt{a_2^2+(1-a_3)^2} + ... + \sqrt{a_{2k-1}^2+(1-a_{2k})^2} + \sqrt{a_{2k}^2+(1-a_1)^2} \geq \\ &\geq \sqrt{2}\left(\frac{a_1+1-a_2}{2} + \frac{a_2+1-a_3}{2} + ... + \frac{a_{2k}+1-a_1}{2}\right) \\ &= \sqrt{2}\,\frac{2k}{2} = k\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако

$$a_1 = a_3 = ... = x,\; a_2 = a_4 = ... = y \text{ и } x + y = 1.$$

2. Определи го природниот број чиј квадрат е еднаков на петтиот степен на збирот на неговите цифри (во декаден запис).

Решение. Нека бројот n во декаден запис има k цифри и нека S е збирот на цифрите на бројот n. Тогаш $9^{k-1} < 10^{k-1} \leq n$ и $S \leq 9k$. Нека $n^2 = S^5$. Тогаш $(9^{k-1})^2 < (9k)^5$, т.е. $9^{2k-7} < k^5$. Лесно се проверува дека последното неравенство важи за $k \in \{1,2,3,4,5\}$. Со индукција ќе докажеме дека за $k \geq 6$ важи $9^{2k-7} \geq k^5$. За $k = 6$ имаме

$$9^{2\cdot 6-7} = 59049 > 776 \geq 6^5.$$

Нека претпоставиме дека за некој $k \geq 6$ важи $9^{2k-7} \geq k^5$. Тогаш

$$9^{2(k+1)-7} = 81\cdot 9^{2k-7} \geq 81k^5 > (2k)^5 > (k+1)^5,$$

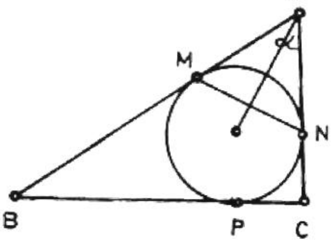
т.е. неравенството важи и за $k+1$.

Од претходно изнесеното следува дека $k \leq 5$ и $S \leq 45$. Од условот $n^2 = S^5$ следува $n = S^2\sqrt{S}$, па затоа S е точен квадрат. Според тоа, $S \in \{1,4,9,16,25,36\}$. Понатаму проверуваме:

$$\begin{array}{lll}
S = 1, & n = S^2\sqrt{S} = 1, & 1 = 1,\\
S = 4, & n = 32, & 3+2 \neq 4,\\
S = 9, & n = 243, & 2+4+3 = 9,\\
S = 16, & n = 1024, & 1+0+2+4 \neq 16,\\
S = 25, & n = 3125, & 3+1+2+5 \neq 25,\\
S = 36, & n = 46656, & 4+6+6+5+6 \neq 36.
\end{array}$$

Според тоа, бараните броеви се 1 и 243.

3. Кружницата впишана во правоаголен триаголник со хипотенуза c ги допира краците на острият агол во точките M и N. Докажи дека $MN \leq \frac{2c\sqrt{3}}{9}$.



Решение. Нека ABC е правоаголен триаголник со хипотенуза $AB = c$. Со M и N да ги означиме допирните точки на впишаната кружница соодветно со отсечките AB и AC, и $\alpha = \measuredangle BAC$, цртеж десно. Тогаш

$$AM = \frac{AB+AC-BC}{2}$$
$$= \frac{c}{2}(1+\cos\alpha-\sin\alpha).$$

Бидејќи симетралата на аголот α истовремено е и симетрала на отсечката MN, добиваме

$$\begin{aligned}
MN &= 2AM\sin\tfrac{\alpha}{2} = c\sin\tfrac{\alpha}{2}(1+\cos\alpha-\sin\alpha)\\
&= c\sin\tfrac{\alpha}{2}(2\cos^2\tfrac{\alpha}{2}-2\sin\tfrac{\alpha}{2}\cos\tfrac{\alpha}{2})\\
&= c\sin\alpha(\cos\tfrac{\alpha}{2}-\sin\tfrac{\alpha}{2})\\
&= c\sqrt{\sin^2\alpha(1-\sin\alpha)}\\
&= \tfrac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{\sin\alpha\sin\alpha(2-2\sin\alpha)}\\
&\le \tfrac{c}{\sqrt{2}}\sqrt{(\tfrac{\sin\alpha+\sin\alpha+2-2\sin\alpha}{3})^3}\\
&= \tfrac{2\sqrt{3}}{9}c,
\end{aligned}$$

при што го искористивме неравенството меѓу аритметичката и геометсикста средина.

4. Нека D е множеството дијагонали на правилен 100-аголник. Дали постои подмножество E на множеството D со следниве својства:

1) Никои две дијагонали од E немаат заедничка внатрешна точка.

2) Од секое теме на 100-аголникот излегува парен број дијагонали од множеството E.

3) Дијагоналите од E го делат 100-аголникот на триаголници.

Решение. Нека претпоставиме постои подмножество E на множеството D такво што дека $n-$аголникот е поделен со дијагоналите од E на триаголници, така што никои две дијагонали од E немаат заедничка внатрешна точка и од секое теме на $n-$аголникот излегува парен број дијагонали. Тогаш добиените триаголници може да се обојат во сина и црвена боја така што секои два триаголника кои имаат заедничка страна се обоени во различна боја. (Тоа може да се постигне ако на почетокот многуаголникот се обои во една боја, а потоа се конструираат дијагоналите една по друга и по секое конструирање на дијагонала сите обоени површини на едната страна од таа дијагонала се пребојуваат во друга боја.) За вака обоените триаголници важи:

а) Секоја дијагонала е страна на еден син и еден црвен триаголник.

б) Сите триаголници кај кои една страна е истовремено и страна на $n-$аголникот се обоени со иста боја, да кажеме сина. (Ова следува од фактот дека од секое теме на $n-$аголникот излегуваат парен број дијагонали од E, т.е. секое теме на $n-$аголникот е заедничко теме на непарен број триаголници на кои $n-$аголникот е поделен.)

Ако p е бројот на сините, а c на црвените триаголници, тогаш $n+3c=3p$, бидејќи секоја дијагонала од E е страна на еден син и еден црвен триаголник, а секоја страна на $n-$аголникот е страна на само еден син триаголник. Според тоа, бројот n е делив со 3, што значи дека 100-аголник не може да биде поделен така што ќе бидат исполнети дадените услови.

IV година

1. Нека $n\ge 2$ и $a_j=n!+j$, за $j\in\{1,2,...,n\}$. Докажи дека за секој $k\in\{1,2,...,n\}$ постои барем еден прост број p таков што бројот a_k е делив со p, а ниту еден од броевите $a_1,a_2,...,a_{k-1},a_{k+1},...,a_n$ не е делив со p.

Решение. Прво да забележиме: Ако $p\ge n$ е прост број, тогаш најмногу еден од броевите $a_1,a_2,...,a_n$ е делив со p. Навистина, ако $p\,|\,a_i$ и $p\,|\,a_j$, $1\le i<j\le n$, тогаш $p\,|\,a_j-a_i=j-i$, при што $1\le j-i\le n-1$, што не е можно. Ќе ги разгледаме следниве случаи.

а) k е прост број и $2k\le n$. Тогаш бројот $n!$ е делив со k^2, а бројот $\frac{n!}{k}$ е делив со секој прост број кој не е поголем од n. Затоа бројот $\frac{n!}{k}+1$ нема прости делители помали или еднакви на n (во спротивно бројот 1 би бил делив со таков прост делител). Според тоа, бројот $a_k=k(\frac{n!}{k}+1)$ има прост делител p кој е поголем од p. Ниту еден од броевите $a_j,\ j\ne k$ не е делив со p.

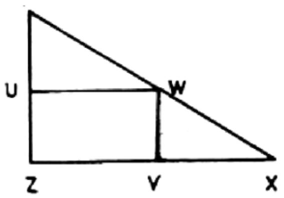
б) k е прост број и $k\le n<2k$. Тогаш $k\,|\,a_k$ и ниту еден од броевите j (па со тоа и ниту еден од броевите a_j) каде $j\in\{1,2,...,n\}\setminus\{k\}$ не е делив со k.

в) k е сложен број и $k\ne 4$. Ако $k=ab$, каде a и b се природни броеви и $1<a<b$, тогаш во производот $n!$ се појавуваат броевите a,b и k. Ако $k=a^2$, каде $a\ge 3$, тогаш во производот $n!$ се појавуваат броевите $a,2a$ и k. Во секој случај бројот $\frac{n!}{k}$ е делив со k, па како под а) добиваме дека a_k има прост делител поголем од n.

г) $k=4$. Ако $n\ge 6$, тогаш бројот $\frac{n!}{4}$ е делив со 4, па аналогно како во случаите а) и в) следува дека бројот a_k има прост делител поголем од n. За $n=4$ бројот $a_4=4!+4=28$ е делив со $p=7>4$, а за $n=5$ бројот $a_4=5!+4=124$ е делив со простиот број $p=31>5$.

2. Докажи дека плоштината на квадратот кој исцело лежи внатре во даден триаголник не е поголема од половината на плоштината на триаголникот.

Решение. Ќе го докажеме следново помошно тврдење: Нека XYZ е правоаголен триаголник со хипотенуза XY, W е произвона точка на отсечката XY и U и V се подножјата на нормалите повлечени од W соодветно на YZ и ZX, цртеж десно. Ако плоштината на триаголникот XYZ е p_0, а плоштината на пра-

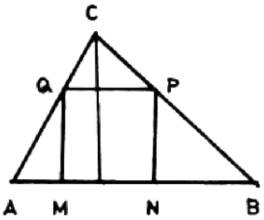


воаголникот $UZVW$ е p_1, тогаш $p_1 \le \frac{p_0}{2}$.

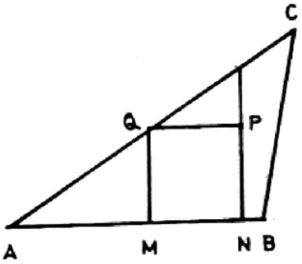
Доказ. Нека $YW = kXY$ и $XW = (1-k)XY$, каде $0 < k < 1$. Тогаш

$$\begin{aligned} p_0 - p_1 &= P_{UWY} + P_{XWV} = k^2 p_0 + (1-k)^2 p_0 = (2k^2 - 2k + 1)p_0 \\ &= 2(k-\tfrac{1}{2})^2 p_0 + \tfrac{p_0}{2} \ge \tfrac{p_0}{2}, \end{aligned}$$

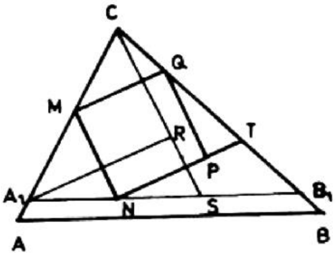
од каде добиваме $p_1 \le \frac{p_0}{2}$. ■



а)



б)



в)

Нека квадратот $MNPQ$ се наоѓа внатре во триаголникот ABC (цртежи а), б) и в)). На читателот му препуштаме да докаже дека триаголникот ABC може да се подели на неколку правоаголни триаголници (и евентуално на уште неколку триаголници и четириаголници) така што секој правоаголен триаголник содржи правоаголник исечен од квадратот $MNPQ$, при што едно теме на таквиот правоаголник се поклопува со темето на правиот агол на триаголникот и потоа да го примени претходно докажаното помошно тврдење.

3. На колку начини бројот $6k$ $(k \in \mathbb{N})$ може да се запише како збир на три природни броја? Записите кои се разликуваат само во редоследот на собирците ги сметаме за исти.

Решение. Нека $6k = x_1 + x_2 + x_3$, каде x_1, x_2, x_3 се природни броеви такви што $x_1 \le x_2 \le x_3$. Ако $x_1 = 2l - 1$, каде $1 \le l \le k$, тогаш x_2 може да биде еднаков на еден од броевите

$$2l-1, 2l, 2l+1, ..., [\tfrac{6k-2l+1}{2}] = 3k - l$$

и за секоја од овие $3k - 3l + 2$ можности бројот x_3 е еднаков на $6k - x_1 - x_2$. Ако $x_1 = 2l$, каде $1 \le l \le k$, тогаш x_2 е еднаков на некој од броевите

$$2l, 2l+1, ..., 3k - l$$

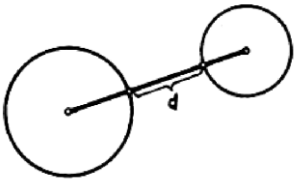
и за секоја од овие можности бројот x_3 еднозначно се определува. Затоа бараниот број е еднаков на

$$\sum_{l=1}^{k}(3k-3l+2)+\sum_{l=1}^{k}(3k-3l+1)=\sum_{l=1}^{k}(6k-6l+3)=k(6k+3)-6\frac{k(k+1)}{2}=3k^2.$$

4. Во рамнината е дадено множество S од 100 точки. Докажи дека постои конечно множество кругови за кои важи:

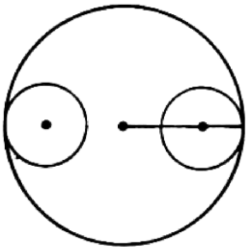
1) Секоја точка од S се содржи во внатрешноста на некој круг.

2) Круговите се дисјунктни и растојанието меѓу секои два круга е строго поголемо од 1. (Растојанието d меѓу два дисјунктни круга k_1 и k_2 е прикажано на цртежот десно.)



3) Збирот на дијаметрите на тие кругови и строго помал од 100.

Решение. Нека S_{100} е множеството кое ги содржи круговите со центри во дадените точки и радиус $r=\frac{1}{201}$. Збирот на дијаметрите на овие кругови е $D_{100}=200r<1$. Ако растојанието меѓу секои два круга од S_{100} е поголемо од 1, тогаш за множеството S_{100} се исполнети условите 1), 2) и 3). Ако меѓу круговите од S_{100} има такви што растојанието меѓу нив не е поголемо од 1, тогаш произволни два такви круга ќе ги замениме со најмалиот круг кој ги содржи (цртеж десно). Добиваме множество S_{99} (составено од 99 кругови), така што внатре во тие кругови се сите дадени точки, а притоа збирот на радиусите на сите тие кругови е $D_{99}\le 200r+1<2$. Ако растојанието меѓу секои два круга од S_{99} е поголемо од 1, тогаш за множеството S_{99} важат сите услови на задачата. Во спротивно два круга од S_{99} чие растојание не е поголемо од 1 ќе ги замениме со најмалиот круг кој ги содржи. Ќе добиеме множество S_{98} и понатаму аналогно ја продолжуваме постапката. На крајот добиваме множество S_n, каде $1\le n\le 100$, такво што тоа содржи n кругови, во внатрешноста на тие кругови се содржат сите дадени точки и збирот на радиусите на сите кругови од S_n е



$$D_n\le 200r+(100-n)\le 200r+99<100.$$

Мала олимпијада 1977

1. Определи го множеството од сите реални броеви α со следново својство: За секој позитивен број c постои дропка $\frac{m}{n}$ ($m\in\mathbb{Z}, n\in\mathbb{N}$) различна од α таква што

$$|\alpha-\tfrac{m}{n}|<\tfrac{c}{n}.$$

Решение. Ќе докажеме дека бараното множество е еднакво на множеството ирационални броеви.

Нека претпоставиме дека α е ирационален број. Во задачата 1 од Малата олимпијада во 1974 година е докажано дека тогаш за секој позитивен број c постојат (дури бесконечно многу) рационални броеви $\frac{m}{n}$ (јасно различни од α), такви што $|\alpha-\frac{m}{n}|<\frac{c}{n}$. Значи, ирационалните броеви го имаат наведеното својство.

Сега ќе докажеме дека рационалните броеви го немаат наведеното својство. Со други зборови ќе докажеме дека за секој рационален број α постои позитивен број c таков што за секој рационален број $\frac{m}{n}\neq\alpha$ важи $|\alpha-\frac{m}{n}|\geq\frac{c}{n}$.

Навистина, нека $\alpha=\frac{p}{q}, q\geq1$. Тогаш од $\frac{p}{q}\neq\frac{m}{n}$ следува $pn-mq\neq0$, па затоа $|pn-mq|\geq1$. Оттука следува

$$|\alpha-\frac{m}{n}|=|\frac{p}{q}-\frac{m}{n}|=\frac{|pn-mq|}{qn}\geq\frac{1}{qn}=\frac{\frac{1}{q}}{n},$$

т.е. може да се земе $c=\frac{1}{q}$.

2. Определи ги сите шесторки (p,q,r,x,y,z) такви што p,q,r се прости броеви, x,y,z се природни броеви и важи

$$p^{2x}=q^yr^z+1. \qquad (1)$$

Решение. Во следните разгледувања p,q,r секогаш ќе означуваат прости броеви, а x,y,z природни броеви. Прво ќе докажеме четири леми.

Лема 1. Единствено решение на равенката $2^x-1=3^y$ е $x=2, y=1$.

Доказ. Нека за природните броеви x и y важи $2^x-1=3^y$. Тогаш

$$2^{x-1}+2^{x-2}+...+2+1=3^y,$$

од каде лесно следува дека $2|x$. Нека $x=2l, l\in\mathbb{N}$. Тогаш $(2^l-1)(2^l+1)=3^y$. Бидејќи броевите 2^l-1 и 2^l+1 се заемно прости (тие се непарни и се разликуваат за 2), од последното равенство лесно следува дека $l=1$, $x=2$ и $y=1$. ■

Лема 2. Равенката $2^x+1=3^y$ има точно две решенија: $x=y=1$ и $z=3, y=2$.

Доказ. Лесно се гледа дека $x=y=1$ е решение на равенката $2^x+1=3^y$. Нека $y>1$. Тогаш од равенката

$$2^x=3^y-1=2(3^{y-1}+3^{y-2}+...+3+1)$$

следува $y=2l, l\in\mathbb{N}$, па понатаму добиваме

$$2^x = (3^t - 1)(3^t + 1),$$

а оттука лесно следува дека $l = 1, y = 2, x = 3$. ■

Лема 3. Равенката $p^x - 1 = 2^y$, каде $p > 3$ и $x > 1$ нема решенија.

Доказ. Бидејќи p е непарен број, од равенката

$$(p-1)(p^{x-1} + p^{x-2} + ... + p + 1) = 2^y$$

следува $x = 2l, l \in \mathbb{N}$. Сега равенката го добива видот

$$(p^l - 1)(p^l + 1) = 2^y$$

и има решение $p = 3, l = 1, y = 3$, бидејќи единствени два степени на бројот 2 кои се разликуваат за 2 се $p^l - 1 = 2^1$ и $p^l + 1 = 2^2$. ■

Лема 4. Равенката $p^x + 1 = 2^y$, каде $p > 3$ и $x > 1$ нема решенија.

Доказ. Нека $p > 3$ и $x > 1$. Ќе ги разгледаме следниве случаи.

Случај 1. $y = 2k, k \in \mathbb{N}$. Тогаш бројот $2^y - 1 = 2^{2k} - 1 = 4^k - 1$ е делив со 3, што е противречност бидејќи тој е еднаков на p^x, па единствен негов прост делител е бројот $p > 3$.

Случај 2. $x = 2k + 1, k \in \mathbb{N}$. Тогаш

$$p^x + 1 = (p+1)(p^{x-1} + p^{x-2} + ... + 1p + 1) = (p+1)A = 2^y.$$

Притоа бројот A е непарен и е степен на бројот 2. Затоа $A = 1$, па е $x = 1$, што е противречност.

Случај 3. $y = 2k + 1, x = 2l, k, l \in \mathbb{N}$. Бројот p е од облик $p = 4m \pm 1$, каде $m \in \mathbb{N}$. Затоа

$$p^x + 1 = 1 + (1 \pm 4m)^{2l} = 2 \pm \cdot 4m + \binom{2l}{2}(4m)^2 \pm ... \equiv 2(\mathrm{mod}\, 8),$$

$$2^y = 2^{2k+1} \equiv 0(\mathrm{mod}\, 8),$$

што е противречност. ■

Сега ќе ги определиме решенијата на дадената равенка.

а) Нека $p = 2$. Равенката го добива видот:

$$(2^x - 1)(2^x + 1) = q^y r^z.$$

Броевите $2^x - 1$ и $2^x + 1$ се заемно прости и еден е делив со 3. Од условот дека бројот $(2^x - 1)(2^x + 1)$ има точно два различни прости делители следува дека еден од броевите $2^x - 1$ и $2^x + 1$ е степен на бројот 3, Користејќи од лемите 1 и 2 ги добиваме следните решенија на дадената равенка:

$$(2,3,5,2,1,1),\quad (2,5,3,2,1,1),\quad (2,3,7,3,2,1),\quad (2,7,3,3,1,2). \qquad (2)$$

б) Нека $p = 3$. Равенката го добива видот

$$(3^x-1)(3^x+1)=q^yr^z .$$

Броевите 3^x-1 и 3^x+1 се последователни парни броеви, па затоа нивниот најголем заеднички делител е еднаков на 2. Од условот дека производот на овие два броја има најмногу два различни прости делители следува дека едниот од нив е степен на бројот 2. Сега, користејќи ги лемите 1 и 2 лесно добиваме дека единствени решенија на дадената равенка кај кои $p=3$ се:

$$(3,2,2,1,1,2),\ (3,2,2,1,2,1),\ (3,2,5,2,4,1),\ (3,5,2,2,1,4) . \qquad (3)$$

в) Нека $p>3$ и $(p^x-1)(p^x+1)=q^yr^z$. Еден од броевите p^x-1 и p^x+1 е делив со 3, а секој од нив е парен број. Затоа еден од овие два броја е степен на бројот 2, а еден е од видот $2\cdot 3^z$. Од лемите 3 и 4 следува $x=1$.

Ако $p-1=2^{y-1},\ p+1=2\cdot 3^z$, тогаш $2^{y-2}+1=3^z$. Користејќи ја лема 2 добиваме $y=3,z=1,p=5$ или $y=5,z=2,p=17$, а решенијата на дадената равенка во овие случаи се:

$$(5,2,3,1,3,1),\ (5,3,2,1,1,3),\ (17,2,3,1,5,2),\ (17,3,2,1,2,5) . \qquad (4)$$

Ако $p+1=2^{y-1},\ p-1=2\cdot 3^z$, тогаш $2^{y-2}-1=3^z$. Користејќи ја лема 1 добиваме $y=4,z=1,p=7$ и во овој случај решенијата на дадената равенка се

$$(7,2,3,1,4,1),\ (7,3,2,1,1,4) . \qquad (5)$$

Според тоа, равенката (1) има 14 решенија (p,q,r,x,y,z) кои се дадени со (2), (3), (4) и (5).

3. Во триаголникот ABC важи релацијата $2BC=AB+AC$. Докажи дека:

а) Темето A, средините M и N на страните AB и AC, центарот S на вписаната кружница и центарот O на опишаната кружница припаѓаат на иста кружница k. .

б) Правата TS , каде T е тежиштето на триаголникот ABC е тангента на кружницата k .

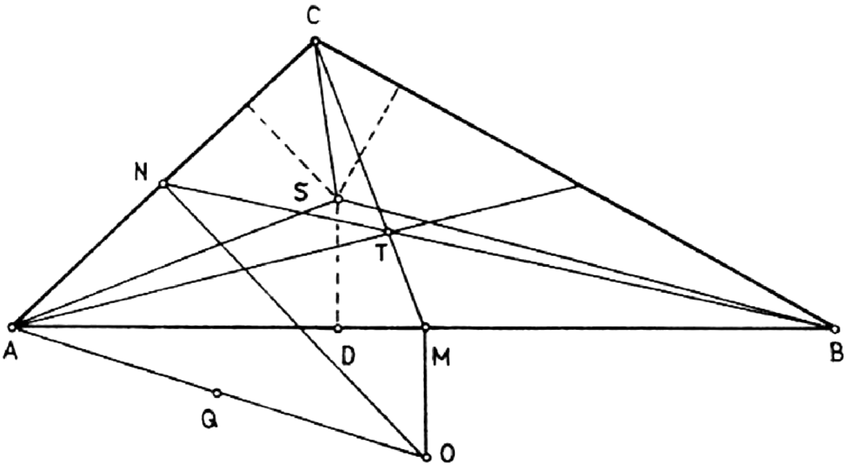
Решение. Ги воведуваме ознаките: $a=BC, b=CA, c=AB, P$ е плоштината на триаголникот BAC, R и r се соодветно радиусите на опишаната и впишаната кружница на триаголникот ABC, D е допирната точка на впишаната кружница и страната AB, Q е средината на отсечката AO (види цртеж) и

$$s=\tfrac{a+b+c}{2},\ k=\sqrt{3(3b-c)(3c-b)}=\sqrt{30bc-9b^2-9c^2} .$$

Според условот на задачата важи $2a=b+c$. Побнатаму, добиваме

$$P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\tfrac{b+c}{16}k,\qquad R=\tfrac{abc}{4P}=\tfrac{2bc}{k},\qquad r=\tfrac{2P}{a+b+c}=\tfrac{k}{12},$$

$$AD=\tfrac{b+c-a}{2}=\tfrac{b+c}{4},\qquad OM^2=R^2-\tfrac{c^2}{4}=(\tfrac{c(5b-3c)}{2k})^2.$$



Да забележи дека, ако $5b=3c$, тогаш $b=\frac{3}{5}c, a=\frac{4}{5}c$, па следува $c^2=a^2+b^2$, т.е. $\measuredangle BCA=90^\circ$. Ако $5b>3c$, тогаш $b>\frac{3}{5}c, a>\frac{4}{5}c$, па следува $c^2<a^2+b^2$, т.е. $\measuredangle BCA<90^\circ$, а точките C и O се од иста страна на правата AB. Ако $5b<3c$, тогаш точките O и C се од различни страни на правата AB.

Да воведеме правоаголен координатен систем таков што $A(0,0), B(c,0)$ и $y_C>0$, каде со y_C е означена $y-$координатата на точката C. Понатаму, лесно добиваме:

$$C(\tfrac{3b^2+3c^2-2bc}{8c},\tfrac{b+c}{8c}k),\quad M(\tfrac{c}{2},0),\quad D(\tfrac{b+c}{4},0),\quad S(\tfrac{b+c}{4},\tfrac{k}{12}),$$

$$O(\tfrac{c}{2},\tfrac{5b-3c}{2k}c),\quad Q(\tfrac{c}{4},\tfrac{5b-3c}{4k}c),\quad T(\tfrac{3b^2+11c^2-2bc}{24c},\tfrac{b+c}{24c}k).$$

а) Бидејќи $ON\perp AN$ и $OM\perp AM$, заклучуваме дека точките M и N припаѓаат на кружницата K со дијаметар AO. Бидејќи

$$\begin{aligned}SA^2+SO^2-OA^2&=x_S^2+y_S^2+(x_S-x_O)^2+(y_S-y_O)^2-x_O^2-y_O^2\\&=2x_S(x_S-x_O)+2y_S(y_S-y_O)\\&=\tfrac{b+c}{2}(\tfrac{b+c}{4}-\tfrac{c}{2})+\tfrac{k}{6}(\tfrac{k}{12}-\tfrac{5b-3c}{2k}c)\\&=\tfrac{b^2-c^2}{8}+\tfrac{k^2}{72}+\tfrac{3c^2-5bc}{12}\\&=\tfrac{1}{72}(9b^2-9c^2+30bc-9b^2-9c^2+18c^2-30bc)=0,\end{aligned}$$

заклучуваме дека точката S припаѓа на кружницата K.

б) Центарот на кружницата K е точката Q. Бидејќи

$$\begin{aligned}ST^2+SQ^2-TQ^2=(x_T-x_S)^2+(y_T-y_S)^2+(x_Q-x_S)^2+(y_Q-y_S)^2-\\-(x_Q-x_T)^2-(y_Q-y_T)^2\\=2(x_S-x_Q)(x_S-x_T)+2(y_S-y_Q)(y_S-y_T)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&=\frac{b}{2}\left(\frac{b+c}{4}+\frac{2bc-3b^2-11c^2}{24c}\right)+2\left(\frac{k}{12}+\frac{3c^2-5bc}{4k}\right)\left(\frac{k}{12}-\frac{k}{12}\frac{b+c}{2c}\right)\\
&=\frac{b(8bc-3b^2-11c^2)}{48c}+\frac{k}{12}\frac{c-b}{c}\left(\frac{k}{12}+\frac{3c^2-5bc}{4k}\right)\\
&=\frac{b(b-c)(5c-3b)}{48c}+\frac{k^2(c-b)}{144c}+\frac{(c-b)(3c^2-5bc)}{48c}\\
&=\frac{b(b-c)(5c-3b)}{48c}+\frac{(c-b)(15bc-9b^2)}{144c}\\
&=\frac{b(b-c)(5c-3b)}{48c}-\frac{3b(b-c)(5c-3b)}{144c}=0,
\end{aligned}
$$

па затоа $TS \perp SQ$, т.е. правата TS е тангента на кружницата K.

Сојузен натпревар 1978

I година

1. Определи ја вредноста на изразот

$$S=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}$$

ако за реалните броеви x,y,z важи $xyz=1$.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{1+x+xy}+\frac{1}{1+y+yz}+\frac{1}{1+z+zx}\\&=\frac{z}{z+xz+xyz}+\frac{xz}{xz+xyz+xyz^2}+\frac{1}{1+z+zx}\\&=\frac{z}{1+z+xz}+\frac{xz}{1+z+xz}+\frac{1}{1+z+zx}=1,\end{aligned}$$

доколку изразот S е определен.

2. Определи ги сите природни броеви кои се 33 пати поголеми од збирот на своите цифри.

Решение. Нека бараниот број е $\overline{a_{n-1}a_{n-2}...a_1a_0}$, каде $a_i\in\{0,1,2,...,9\}$ за $i=0,1,$ $...,n-1$. Условот

$$a_{n-1}\cdot 10^{n-1}+10a_1+a_0=33(a_{n-1}+...+a_1+a_0)$$

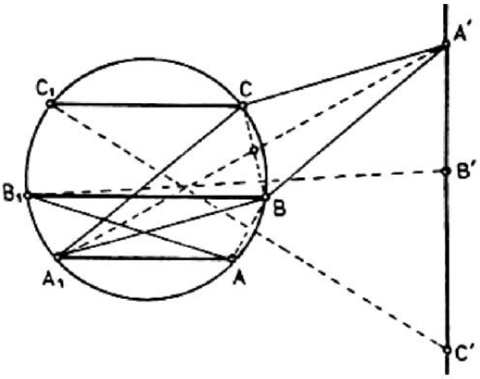
може да се запише во обликот

$$a_{n-1}(10^{n-1}-33)+...+a_2(10^2-33)=23a_1+32a_0\,.$$

Левата страна во последното равенство не е помала од $10^{n-1}-33$, а десната не е поголема од 495, па затоа ова равенство е можно единствено за $n\le 3$. Лесно се проверува дека не постојат едноцифрени и двоцифрени броеви кои го задоволуваат дадениот услов. За $n=3$ добиваме $100x+10y+z=33(x+y+z)$. Тоа значи дека бараниот број мора да е делив со 3. Но, тоа значи дека десната страна е делива со 9, па затоа бројот е делив со 9. Значи, $9\,|\,x+y+z$, што е можно само ако $x+y+z\in\{9,18,27\}$. Со непосредна проверка се покажува дека само за $x+y+z=18$ се добива бројот 594 кој ги задоволува условите на задачата.

3. Нека AA_1,BB_1,CC_1 се паралелни тетиви на некоја кружница. Точките $A',B',$ C' се редоследно симетрични на точките A_1,B_1,C_1 во однос на средините на отсечките BA,CA,AB. Докажи дека точките A',B',C' се колинеарни.

Решение. Според претпоставките дијагоналите на четириаголникот $A_1BA'C$ се половат, па затоа овој четириаголник е паралелограм, т.е. $CA'\,||\,A_1B$ и $CA'=A_1B$, цртеж долу десно.



Слично, $CB' \| B_1A$ и $CB'=B_1A$. Оттука следува дека триаголникот $A'B'C$ е рамнокрак и $A'B' \perp A_1A$. На сличен начин се докажува дека $B'C' \perp C_1C$. Но, $AA_1 \| CC_1$, па од претходно изнесеното следува дека точките A',B',C' се колинеарни.

4. Табела 9×10 прво е покриена со домина 2×1, а потоа домината се измешани. Докажи дека табелата не може повторно да се покрие со тие домина така што секое домино кое во првото покривање било во хоризонтална положба во второто покривање ќе биде во вертикална положба.

Решение. Нека претпоставиме дека табелата е поставена така што има 10 редови и 9 колони. Вертикалните домина на првата колона покриваат парен број полиња, па затоа и бројот на полињата кои ги покриваат хоризонталните домина е парен. Овие домина значи покриваат парен број полиња на втората колона. Бидејќи вертикалните домина во оваа колона исто така покриваат парен број полиња, остануваат парен број полиња на втората колона кои се покриени од домина кои „преминуваат“ и во третата колона. Продолжувајќи ја постапката заклучуваме дека вкупниот број хоризонтални домина е парен. Но, бројот на домината е 45, па значи дека вкупниот број вертикални домина е непарен.

Меѓутоа, истиот заклучок важи и за второто покривање на табелата, па затоа не може да се исполнети условите на здачата.

II година

1. Дали постојат реални броеви a,b,c,d такви што:

1) равенката $ax^2+bdx+c=0$ има различни реални решенија x_1 и x_2 .

2) равенката $bx^2+cdx+a=0$ има различни реални решенија x_2 и x_3.

1) равенката $cx^2+adx+b=0$ има различни реални решенија x_3 и x_1.

Решение. Ако такви броеви a,b,c,d постојат, тогаш $abc\neq0$. Од Виетовите правила следува $x_1x_2=\frac{c}{a}, x_2x_3=\frac{a}{b}, x_3x_1=\frac{b}{c}$, па затоа $x_1^2x_2^2x_3^2=1$, т.е. $x_1x_2x_3=\varepsilon$, каде $\varepsilon=1$ или $\varepsilon=-1$. Понатаму, $x_3=\varepsilon\frac{a}{c}, x_1=\varepsilon\frac{b}{a}, x_2=\varepsilon\frac{c}{b}$, па со замена во дадените равенки добиваме

$$b^2(1+d\varepsilon)=-ac, \quad c^2(1+d\varepsilon)=-ba, \quad a^2(1+d\varepsilon)=-bc\,.$$

Бидејќи $abc\neq0$, од последните релации следува дека $1+d\varepsilon\neq0$, па со делење на соодветните релации добиваме

$$\frac{b^2}{c^2}=\frac{c}{b},\ \frac{c^2}{a^2}=\frac{a}{c},\ \frac{a^2}{b^2}=\frac{b}{a},$$

од каде следува $a^3=b^3=c^3$, т.е. $a=b=c$. Но, тоа значи дека сите три равенки се совпаѓаат, што противречи на претпоставката $x_1\neq x_2\neq x_3\neq x_1$. Според тоа, не постојат броеви a,b,c,d кои го задоволуваат условот на задачата.

2. Нека S е подмножество од множеството реални броеви такво што:

а) $\mathbb{Z}\subset S$,

б) $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in S$,

в) од $x,y\in S$ следува $x+y\in S,\ xy\in S$.

Докажи дека $\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\in S$.

Решение. Да означиме $a=\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Тогаш

$$a^2=5+2\sqrt{6},$$

$$(a^2-5)^2=24,$$

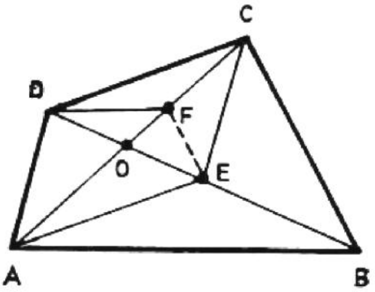
$$a^4-10a^2+1=0,$$

$$a(10a-a^3)=1\ ,$$

$$\frac{1}{a}=10a-a^3.$$

Сега, $10\in S, a\in S$, па затоа $10a\in S$ и како $-1\in S, a\in S$, добиваме $-a^3\in S$. Конечно, $\frac{1}{a}=10a-a^3\in S$.

3. Даден е четириаголник $ABCD$. Нека E е точка на правата DB таква што $AE\,||\,DC$, а F е точка на правата AC таква што $DF\,||\,AB$. Докажи дека $EF\,||\,BC$.



Решение. Со O да го означиме пресекот на правите AC и BD, цртеж десно (тој може да биде и надвор од четириаголникот $ABCD$). Од сличноста на триаголниците AOB и FOD добиваме $AO:OB=FO:OD$, а од сличноста на триаголниците AOE и COD добиваме $AO:OE=CO:OD$. Со делење на овие релации се добива $OE:OB=FO:CO$, а оттука следува сличноста на триаголниците FOE и COB, па затоа $EF\,||\,BC$.

4. Нека $A_1,A_2,...,A_n$ се точки од една права такви што најголемото од растојанијата $A_iA_j\ (i\neq j)$ е еднакво на 1, а најмалото d. Докажи дека $d<\frac{2}{\sqrt{n-1}}$.

Решение. Околу секоја од дадените точки да опишеме круг со радиус $\frac{d}{2}$. Бидејќи најмалото растојание A_iA_j $(i \neq j)$ е еднакво на d овие кругови немаат заеднички внатрешни точки. Понатаму, да опишеме круг со радиус $1+\frac{d}{2}$ и центар во која било од дадените точки. Бидејќи на него концентричниот круг со радиус 1 ги содржи (на работ или во внатрешноста) сите дадени точки, заклучуваме дека поголемиот круг ги покрива сите претходно конструирани помали кругови. Затоа неговата плоштина е поголема од збирот на плоштините на сите мали кругови, т.е. $\pi(1+\frac{d}{2})^2 > n\pi(\frac{d}{2})^2$, од каде по средувањето се добива бараното неравенство.

III година

1. Определи ги сите природни броеви n за кои постои полином $P_n(x)$ од $n-$ти степен со целобројни коефициенти, таков што во n различни целобројни вредности е еднаков на n, а во нулата е еднаков на нула.

Решение. Полиномот $Q_n(x) = n - P_n(x)$ исто така е од $n-$ти степен, но таков што во n различни целобројни точки е еднаков на нула, а во нулата е еднаков на n. Според тоа,

$$Q_n(x) = a(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n),$$

каде $x_1, x_2, ..., x_n$ се нулите на полиномот $Q_n(x)$. Од Виетовите формули следува

$$n = Q_n(0) = (-1)^n ax_1x_2...x_n \qquad (1)$$

и како меѓу корените $x_1, x_2, ..., x_n$ најмногу два се еднакви на 1 или -1 од равенството (1) следува

$$|(-1)^n ax_1x_2...x_n| \geq 2^{n-2}. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $n \geq 2^{n-2}$. Последното неравенство е исполнето за $n \leq 4$ (со индукција може да се докаже дека за $n > 4$ важи $2^{n-2} > n$). Значи, за $n = 0,1,2,3,4$ може да постојат бараните полиноми. На пример, тоа се полиномите

$$Q_0(x) = 0 = P_0(x),$$
$$Q_1(x) = x+1, \; P_1(x) = -x$$
$$Q_2(x) = (x-1)(x-2), \; P_2(x) = 3x - x^2$$
$$Q_3(x) = (x-1)(x+1)(x-3), \; P_3(x) = x + 3x^2 - x^3$$
$$Q_4(x) = (x-1)(x+1)(x-2)(x+2), \; P_4(x) = 5x^2 - x^4.$$

2. Докажи дека целиот број $r > 2$ е сложен ако и само ако е точно барем едно од следниве две тврдења:

а) $r=2^s$ за некој $s\in\{2,3,...\}$,

б) $r=\frac{u}{2}(2v-u+1)$ за некои $u,v\in\{3,4,...\},(u\leq v)$.

Решение. Да претпоставиме дека $r>2$ е сложен број. Ако единствен негов прост множител е 2, тогаш важи тврдењето а). Нека претпоставиме дека тоа не е случај. Ќе докажеме дека тогаш важи тврдењето б).

Нека $r=ab$, каде $a>1,b>1$ и a е непарен број. Тогаш важи или $b\leq\frac{a-1}{2}$ или $b>\frac{a-1}{2}$. Ако $b\leq\frac{a-1}{2}$, земаме $u=2b, v=b+\frac{a-1}{2}$. Тогаш $u\geq 4, v\geq 3,$ $v-u=\frac{a-1}{2}-b$ ≥ 0 и $\frac{u}{2}(2v-u+1)=ab=r$. Ако $b>\frac{a-1}{2}$, земаме $u=a, v=b+\frac{a-1}{2}$. Тогаш $u\geq 3,$ $v\geq 3,$ $v-u=b-\frac{a-1}{2}-1\geq 0$ ($b-\frac{a-1}{2}$ е цел број поголем од 0) и $\frac{u}{2}(2v-u+1)=ab=r$.

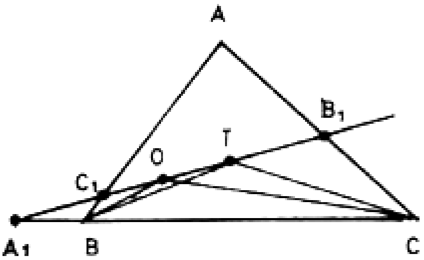
Обратно, ако важи а) тогаш очигледно r е сложен број. Затоа да претпоставиме дека важи тврдењето б), т.е. дека за некои $u,v\in\{3,4,...\},(u\leq v)$ важи $r=\frac{u}{2}(2v-u+1)$. Ако u е парен број, $u=2q$, тогаш $r=q(2v-2q+1)$, при што $q>1$ и $2v-2q+1>1$ (бидејќи $v>2q$), па затоа r е сложен број. Ако u е непарен број, $u=2q+1$, тогаш $r=(2q+1)(v-q)$, при што $2q+1>1$ и $v-q>1$ (бидејќи $v\geq 2q+1$), па повторно r е сложен број. Со тоа е докажано тврдењето на задачата.

3. Нека T е тежиште и O е произволна точка во триаголникот ABC. Ако A_1,B_1,C_1 се пресечните точки на правата OT соодветно со правите BC,CA, AB, докажи дека

$$OA_1\cdot OB_1\cdot OC_1\leq TA_1\cdot TB_1\cdot TC_1.$$

Решение. Триаголниците OBC и TBC имаат заедничка основа BC, а висините им се пропорционални на отсечките OA_1 и TA_1, цртеж десно. Затоа важи

$$\frac{OA_1}{TA_1}=\frac{P_{OBC}}{P_{TBC}}=3\frac{P_{OBC}}{P_{ABC}}.$$



Користејќи слични изрази за $\frac{OB_1}{TB_1}$ и $\frac{OC_1}{TC_1}$, и неравенството меѓу срединиите добиваме

$$\frac{OA_1}{TA_1}\cdot\frac{OB_1}{TB_1}\cdot\frac{OC_1}{TC_1}=27\frac{P_{OBC}}{P_{ABC}}\cdot\frac{P_{OCA}}{P_{ABC}}\cdot\frac{P_{OAB}}{P_{ABC}}\leq(\frac{P_{OBC}}{P_{ABC}}+\frac{P_{OCA}}{P_{ABC}}+\frac{P_{OAB}}{P_{ABC}})^3=1.$$

4. Во рамнината се дадени n точки $A_1, A_2, ..., A_n$. Ако $A_iA_j \geq 1$, за секои $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$, каде $i \neq j$, докажи дека бројот на отсечките A_iA_j кои се подолги од 1 не е поголем од $3n$.

Решение. Нека A произволна од дадените точки. На кругот со центар во A и радиус 1 може да му припаѓаат најмногу 6 од дадените точки, бидејќи нивното меѓусебно растојание не може да е помало од 1. Значи, секоја од дадените точки може да биде крајна на најмногу 6 отсечки со должина 1. Бидејќи има n точки, а на овој начин секоја отсечка ја сметаме два пати, добиваме дека вкупниот број отсечки со должина е не е поголем од $\frac{6n}{2} = 3n$.

IV година

1. Нека n е природен број. Со p_k да го означиме бројот на ненегативните целобројни решенија на равенката $kx + (k+1)y = n - k + 1$. Определи го збирот $p_1 + p_2 + ... + p_{n+1}$.

Решение. Дадената равенка можеме да ја запишеме во обликот

$$k(x + y + 1) + y = n + 1,$$

односно $ka + b = n + 1$, при што $0 \leq b = y < x + y + 1 = a$. Обратно, на секое решение на равенката $ka + b = n + 1$, при дадените услови, соодветствува точно едно решение на почетната равенка. Значи, треба да го определиме вкупниот број тројки (k, a, b), каде a и b се ненегативни, а k е позитивен цел број, $k \leq n + 1$, за кои важи $ka + b = n + 1$ и $b < a$. Бидејќи на секој $k \in \{1, 2, ..., n+1\}$ му соодветствува едно пртставување на бројот $n + 1$ во наведениот облик (теорема за делење со остаток), добиваме дека бараниот збир е еднаков на $n + 1$.

2. Нека $a + (n-1)d, n = 1, 2, 3, ...$ е аритметичка низа со разлика $d > 0$. Докажи дека $\frac{a}{d}$ е рационален број ако и само ако од дадената низа може да се оддели геометриска подниза.

Решение. Нека претпоставиме дека дадената аритметичка низа содржи геометриска подниза. Нека $a + kd, a + ld$ и $a + md$ се било кои три последователни членови на геометриската подниза. Тогаш важи $(a + ld)^2 = (a + kd)(a + md)$, па како $d \neq 0$ следува $a(2l - k - m) = d(km - l^2)$. Ако $2l - k - m = 0$, ќе следува

$$km - l^2 = km - (\tfrac{k+m}{2})^2 = -(\tfrac{k+m}{2})^2 < 0,$$

па претходното равенство не може да важи. Затоа $2l - k - m \neq 0$, па добиваме

$$\frac{a}{d} = \frac{km - l^2}{2l - k - m},$$

што значи дека $\frac{a}{d}$ е рационален број.

Нека претпоставиме дека $\frac{a}{d}=\frac{p}{q}$ е рационален број ($p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}$). Тогаш

$$a_n=a+(n-1)d=\frac{p}{q}d+(n-1)d=\frac{p+(n-1)q}{q}d\,.$$

Ќе определиме природен број x таков што количникот

$$\frac{a_{n+x}}{a_n}=\frac{p+(n+x-1)q}{p+(n-1)q}=\alpha$$

е број кој не зависи од n. Мора да е $x=\frac{(\alpha-1)(p+qn-q)}{q}$, т.е. $q\,|\,\alpha-1$. Ако ставиме $\alpha=q+1$, добиваме $x=p-q+nq$ и важи

$$a_{p-q+n(q+1)}=(q+1)a_n\,,$$

каде претпоставуваме дека n е доволно голем така што $p-q+n(q+1)$ е природен број. Сега да избереме растечка низа природни броеви (n_k) на следниов начин: бројот n_1 се избира произволно, така што $p-q+n_1(q+1)$ е природен број и $a_{n_1}\neq 0$; ако броевите $n_1,n_2,...,n_{k-1}$ се избрани, избираме $n_k=p-q+n_{k-1}(q+1)$. Поднизата (a_{n_k}) на дадената низа ќе биде геометриска. Навистина, важи

$$\frac{a_{n_k}}{a_{n_{k-1}}}=\frac{a_{p-q+n_{k-1}(q+1)}}{a_{n_{k-1}}}=\frac{(q+1)a_{n_{k-1}}}{a_{n_{k-1}}}=q+1,\text{ за } k=2,3,...\,.$$

3. Нека множеството $P\subset\mathbb{N}$ е такво што

(1) $a\in P, b\in P\ \Rightarrow\ a+b\in P$,

(2) $(\forall q\in\mathbb{N})\,q>1\Rightarrow(\exists c\in P)\,c\not\equiv 0(\operatorname{mod} q)$.

Докажи дека множеството $\mathbb{N}\setminus P$ е конечно.

Решение. Прво да забележиме дека од својството (1) следува дека важи

$$a\in P, k\in\mathbb{N}\ \Rightarrow\ ka\in P\,. \tag{3}$$

Ќе докажеме дека P содржи два заемно прости броја. Од (2) следува дека P е непразно множество. Нека $a\in P$ и нека $a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_r^{\alpha_r}$ е неговото канонично разложување. Од (2) следува дека за секој $j=1,2,...,r$ постои $c_j\in P$ таков што p_j не е делител на c_j. Нека

$$b=\frac{ac_1}{p_1^{\alpha_1}}+\frac{ac_2}{p_2^{\alpha_2}}+...+\frac{ac_r}{p_r^{\alpha_r}}\,.$$

Овој број е природен и не е делив со ниту еден од простите множители p_j на бројот a (во дадениот збир сите собирци освен еден се деливи со p_j), па затоа a

и b се заемно прости. Од (3) и $c_j \in P$ следува $\frac{ac_j}{p_j^{\alpha_j}} \in P$, па од (1) следува дека $b \in P$. Со тоа докажавме дека P содржи два заемно прости броја.

Сега ќе го докажеме тврдењето на задачата, со тоа што ќе докажеме дека множеството P ги содржи сите природни броеви n за кои $n > ab$. Навистина, ако n е таков број, тогаш заради $(a,b)=1$, еден од природните броеви $n-a, n-2a, ..., n-ba$ е делив со b, па постојат природни броеви k и l такви што $n = ka + lb$. Сега, од (3) и (1) следува дека $n \in P$, со што тврдењето на задачата е докажано.

4. Нека $a \geq 3$ и нека $P_n(x)$ е полином од $n-$ти степен со реални коефициенти. Докажи дека

$$\max_{0\leq i\leq n+1} |a^i - P_n(i)| \geq 1.$$

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. За $n=0$, полиномот $P_0(x)$ е константа: $P_0(x)=c$. Ако тврдењето не важи, треба да е $|1-c|<1$ и $|a-c|<1$, од каде ќе следува $|a-1| \leq |a-c|+|c-1| < 1+1 = 2$, што противречи на претпоставката дека $a \geq 3$.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за сите природни броеви кои се помали или еднакви на $n-1$. Нека $P_n(x)$ е произволен полином од $n-$ти степен. Степенот на полиномот $Q(x) = \frac{P_n(x+1)-P_n(x)}{a-1}$ е помал од n, па од претпоставката следува дека за него тврдењето важи. За секој $i = 0,1,2,...,n$ имаме

$$\begin{aligned} |a^i - Q(i)| &= \frac{|a^{i+1}-a^i-P_n(i+1)+P_n(i)|}{a-1} \\ &\leq \frac{|a^{i+1}-P_n(i+1)|}{a-1} + \frac{|a^i-P_n(i)|}{a-1} \\ &\leq \frac{2}{a-1} \max_{0\leq i\leq n+1} |a^i - P_n(i)| \\ &\leq \max_{0\leq i\leq n+1} |a^i - P_n(i)|. \end{aligned}$$

Бидејќи за некој i важи $|a^i - Q(i)| \geq 1$, добиваме дека

$$\max_{0\leq i\leq n+1} |a^i - P_n(i)| \geq 1,$$

што и требаше да се докаже.

Мала олимпијада 1978

1. Определи ги сите цели броеви x, y, z такви што

$$x^2(x^2+y) = y^{z+1}$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна со равенката

$$(2x^2+y)^2=y^2+4y^{z+1}.$$

Лесно се проверува дека таа нема решенија за кои $z\le -1$. За $z=0$ десната страна е еднаква на $y^2+4y=(y+2)^2-4$, па може да е квадрат на цел број само за $y=0$ и $y=-4$. Првиот случај дава решеение $(0,0,0)$, а во вториот случај немаме решение.

Да претпоставиме дека $z\ge 1$. Дадената равенка да ја запишеме во видот

$$(2x^2+y)^2=y^2(1+4y^{z-1}),$$

од каде следува дека $1+4y^{z-1}$ мора да е квадрат на цел број. Тој број мора да е непарен, па затоа $1+4y^{z-1}=(1+2v)^2, (v\ge 0)$, од каде добиваме $y^{z-1}=v(v+1)$. Последното е можно за $v=0$, што дава решение $x=0, y=0$, како и за $z=2$ и $y=v(v+1)$. Со замена во равенката добиваме $x^2=v^2(v+1)$, па затоа мора да е $v=t^2-1,\ t\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$, (вредностите $-1,0,1$ ги исклучивме бидејќи повторно го добиваме тривијалното решение $x=0$). Со непосредна проверка се добива дека $x=t^3-t, y=t^4-t^2$ за $z=2$ се решенија на дадената равенка.

Според тоа, сите тројки (x,y,z) цели броеви кои се решенија на дадената равенка се $(0,0,z), z\ge 0$ и $(t^3-t,t^4-t^2,2),\ t\in\mathbb{Z}\setminus\{-1,0,1\}$.

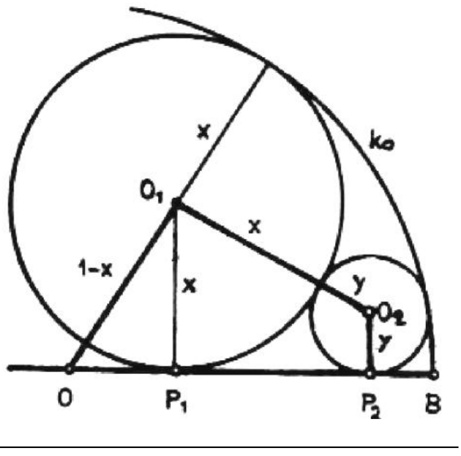
2. Нека k_0 е единечна полукружница над дијаметарот AB, а k_1 е кружница со радиус $r_1=\frac{1}{2}$ која ги допира k_0 и AB. Кружницата k_{n+1} со радиус r_{n+1} ги допира k_n,k_0 и AB. Докажи:

а) За секој $n\in\{2,3,...\}$ важи $\frac{1}{r_{n+1}}+\frac{1}{r_{n-1}}=\frac{6}{r_n}-4$.

б) $\frac{1}{r_n}$ е или квадрат на парен природен број или двократен квадрат на непарен природен број.

Решение. Нека O е центар на дадената единична полукружница k_0, O_1 и O_2 се центри на две кружници кои ја допираат полукружницата k_0, ја допираат отсечката AB во точките P_1 и P_2 и се допираат меѓу себе, а радиусите им се x и y, цртеж десно. Тогаш

$$P_1P_2^2=(x+y)^2-(x-y)^2=4xy,$$



$$OP_1^2 = OO_1^2 - O_1P_1^2 = 1-2x,$$
$$OP_2^2 = OO_2^2 - O_2P_2^2 = 1-2y,$$

па е $2\sqrt{xy} = P_1P_2 = OP_2 - OP_1 = \sqrt{1-2y} - \sqrt{1-2x}$. Оттука, по двократно квадрирање и средување , добиваме

$$x^2 + y^2 + 4x^2y^2 - 6xy + 4x^2y + 4xy^2 = 0,$$

или, ако ставиме $\frac{1}{x} = a, \frac{1}{y} = b$, добиваме

$$a^2 + b^2 + 4 - 6ab + 4a + 4b = 0. \qquad (1)$$

Ако $a = \frac{1}{r_n}$, тогаш добиената квадратна равенка по b има решенија $\frac{1}{r_{n+1}}$ и $\frac{1}{r_{n-1}}$, па од Виетовите формули следува

$$\frac{1}{r_{n+1}} + \frac{1}{r_{n-1}} = \frac{6}{r_n} - 4, \text{ за } n = 2,3,..., \qquad (2)$$

$$\frac{1}{r_{n+1}} \cdot \frac{1}{r_{n-1}} = (\frac{1}{r_n} + 2)^2, \text{ за } n = 2,3,.... \qquad (2')$$

Од релацијата (1) се добива $r_2 = \frac{1}{4}$. Оттука и од (2) и (2') со индукција следува дека $\frac{1}{r_{2k}}$ е квадрат на парен природен број, а $\frac{1}{r_{2k+1}}$ е двократен квадрат на непарен природен број.

3. Нека $\mathbb{F}$ е фамилија подмножества на множество од n елементи, таква што ниту еден нејзин член не е подмножество на друг нејзин член. Докажи дека фамилијата $\mathbb{F}$ може да има најмногу $\binom{n}{[n/2]}$ елементи.

Решение. Нека $\mathbb{F}$ е фамилија со опишаните својства која има најголем можен број членови. Потоа нека k е најмалиот број елементи кои ги има некој член на фамилијата $\mathbb{F}$ и l е бројот на членовите кои имаат по k елементи. Ќе докажеме дека $k \geq \frac{n-1}{2}$.

Нека претпоставиме дека $k < \frac{n-1}{2}$. Со $\mathbb{F}_1$ да ја означиме фамилијата подмножества на даденото множество која ја добиваме кога од фамилијата $\mathbb{F}$ ќе ги отстраниме сите l членови кои имаат по k елементи, а на нивно место ќе ги ставиме сите нивни надмножества кои имаат по $k+1$ елемент (ниту едно од нив не е член на фамилијата $\mathbb{F}$). На овој начин сме добиле барем $\frac{l(n-k)}{k+1}$ нови членови, бидејќи секој исфрлен член има $n-k$ надмножества, а секој додаден се појавува најмногу $k+1$ пати. Од $k < \frac{n-1}{2}$ следува $\frac{n-k}{k+1} l > l$, па следува дека фамилијата $\mathbb{F}_1$ има повеќе членови од фамилијата $\mathbb{F}$. Лесно се проверува дека фамилијата $\mathbb{F}_1$ го има својството ниту еден нејзин член да не е подмножество на некој друг нејзин член. Последното противречи на претпоставката за максималноста на фамилијата $\mathbb{F}$. Значи, најмалиот број елементи на некој член на фамилијата $\mathbb{F}$ е $k \geq \frac{n-1}{2}$.

На сличен начин се докажува дека најголемиот број елементи на некој член на фамилијата $\mathbb{F}$ е помал или еднаков на $\frac{n+1}{2}$. Според тоа, фамилијата $\mathbb{F}$ може да има само подмножества на n елементно множество кои имаат $\frac{n-1}{2}, \frac{n}{2}, \frac{n+1}{2}$ елементи.

Сега да го разгледаме случајот на парен и непарен n. Ако $n = 2m$, од претходно изнесеното следува дека $\mathbb{F}$ може да содржи само членови со $m = \frac{n}{2}$ елементи. Од друга страна, фамилијата од сите $m-$членi подмножества на дадено множество очигледно ги задоволува условите на задачата, па затоа во овој случај навистина бараниот максимален број членови на фамилијата $\mathbb{F}$ е еднаков на $\binom{n}{m} = \binom{n}{[n/2]}$. Ако $n = 2m+1$, на фамилијата $\mathbb{F}$ може да и припаѓаат само подмножества на даденото множество кои имаат m или $m+1$ елементи. Ако таа се состои од сите $m-$члени подмножества (или од сите $(m+1)-$члени подмножества), тогаш бројот на нејзините елементи е $\binom{n}{m} = \binom{n}{m+1} = \binom{n}{[n/2]}$. Како во првиот дел од задачата се докажува дека фамилија која содржи $m-$члени и $(m+1)-$члени подмножества, а ги задоволува условите на задачата, не може да има повеќе од наведениот број елементи.

Сојузен натпревар 1979

I година

1. Определи ги реалните броеви x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 за кои важи

$$x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5,$$

ако се познати збировите $S_1, S_2, ..., S_{10}$ на два по два од овие броеви при што важи

$$S_1 < S_2 < ... < S_{10}.$$

Решение. Од $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$ и $S_1 < S_2 < ... < S_{10}$, следува

$$S_1 = x_1 + x_2,\ S_2 = x_1 + x_3, ...,\ S_9 = x_3 + x_5,\ S_{10} = x_4 + x_5,$$

$$S_1 + S_2 + ... + S_{10} = 4(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5).$$

Според тоа, $S_1 + S_{10} = x_1 + x_2 + x_4 + x_5$, па затоа

$$x_3 = \frac{S_1+S_2+...+S_{10}}{4} - S_1 - S_{10},$$

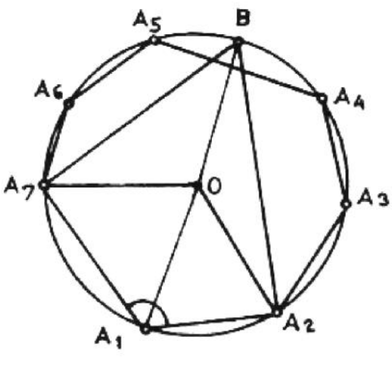
$$x_1 = S_2 - x_3 = S_1 + S_2 + S_{10} - \frac{S_1+S_2+...+S_{10}}{4},$$

$$x_2 = S_1 - x_1 = -S_2 - S_{10} + \frac{S_1+S_2+...+S_{10}}{4},$$

$$x_5 = S_9 - x_3 = S_1 + S_9 + S_{10} - \frac{S_1+S_2+...+S_{10}}{4},$$

$$x_4 = S_{10} - x_5 = -S_1 - S_9 + \frac{S_1+S_2+...+S_{10}}{4}.$$

2. Во кружница е впишан седумаголник чии три агли се еднакви на 120°. Докажи дека барем две страни на овој седумаголник се еднакви.



Решение. Да претпоставиме дека никои два соседни агли на дадениот седумаголник не се еднакви на 120° и нека на пример

$$\measuredangle A_7A_1A_2 = \measuredangle A_2A_3A_4 = \measuredangle A_4A_5A_6 = 120^\circ,$$

а B е точката дијаметрално спротивно на точката A_1, цртеж десно. Тогаш

$$\measuredangle A_1A_2B = \measuredangle A_1A_7B = 90^\circ,$$

па добиваме

$$\measuredangle A_2BA_7 = 360^\circ - 120^\circ - 2 \cdot 90^\circ = 60^\circ.$$

Затоа $\measuredangle A_2OA_7 = 120^\circ$. Аналогно докажуваме $\measuredangle A_2OA_4 = \measuredangle A_4OA_6 = 120^\circ$, па оттука следува $\measuredangle A_6OA_7 = 0^\circ$, што е противречност. Значи, два соседни агли на дадениот осумаголник се еднакви на 120°. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\measuredangle A_7A_1A_2 = \measuredangle A_1A_2A_3 = 120^\circ$. Тогаш отсечките A_2A_3 и A_1A_7 се симетрилни во однос на симетралата на отсечката A_1A_2, па затоа $A_2A_3 = A_1A_7$,што и требаше да се докаже.

3. Дали во круг со радиус 1 може да се сместат определен број кругови така што никои два од нив немаат заедничка внатрешна точка и збирот на нивнте радиуси да е еднаков на 1979?

Решение. Во дадениот круг да сместиме квадрат со страна 1. Овој квадрат со страна 1 да го поделиме на n^2 еднакви квадрати со страна $\frac{1}{n}$ и во секој од нив да впишеме круг. Збирот на радиусите на впишаните кружови ќе биде $\frac{n^2}{2n}$ и е еднаков на 1979 ако $n = 2 \cdot 1979$.

4. За кои природни броеви n збирот на цифрите на бројот $n!$ е еднаков на 9?

Решение. Нека x_n е збирот на цифрите на бројот $n!$. Бројот $n!$ е делив со 9 ако и само ако $n \geq 6$. Понатаму имаме

$$6! = 720, \quad x_6 = 9, \qquad 7! = 5040, \quad x_7 = 9,$$
$$8! = 40320, \quad x_8 = 9, \qquad 9! = 362880, \quad x_9 = x_{10} > 9.$$

Нека $n \geq 11$, $n! = \overline{a_k a_{k-1} ... a_2 a_1 a_0}$. Да претпоставиме дека

$$a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{k-1} + a_k = 9. \qquad (1)$$

Бидејќи $n \geq 11$ бројот $n!$ е делив со 11, па затоа

$$a_0 - a_1 + a_2 - ... + (-1)^{k-1} a_{k-1} + (-1)^k a_k = 11m. \qquad (2)$$

каде m е цел број. Бидејќи

$$-9 = -(a_0 + a_1 + ... + a_k) \leq a_0 - a_1 + a_2 - ... + (-1)^k a_k = 11m \leq a_0 + a_1 + ... + a_k = 9,$$

добиваме $m = 0$. Ако ги собереме равенствата (1) и (2) добиваме

$$2(a_0 + a_2 + a_4 + ...) = 9,$$

што е противречност. Според тоа, бараните бреови се 6, 7 и 8.

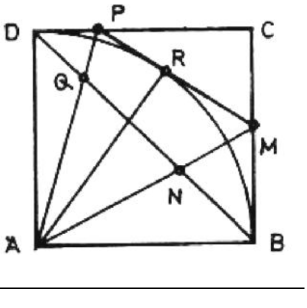
II година

1. Нека P и M се точки на страните DC и BC на кавадратот $ABCD$ такви што PM е тангента на кружницата со центар A и радиус AB. Понатаму, нека Q и N се пресечните точки на правите PA и MA со дијаметарот BD. Докажи дека точките P, Q, M, N, C се конциклични.

Решение. Нека R е допирната точка на тангентата MP и дадената кружница, цртеж десно. За триаголниците AMB и AMR важи

$$MB = MR, AB = AR \text{ и } AM = AM,$$

па затоа тие се складни. Според тоа,



$$\measuredangle RAM = \measuredangle BAM = \tfrac{1}{2}\measuredangle BAR.$$

Аналогно добиваме $\measuredangle PAR = \tfrac{1}{2}\measuredangle RAD$, па следува

$$\measuredangle PAN = \measuredangle PAM = \measuredangle PAR + \measuredangle RAM = \tfrac{1}{2}\measuredangle RAD + \tfrac{1}{2}\measuredangle BAR = 45^\circ.$$

Бидејќи $\measuredangle PDN = 45^\circ = \measuredangle PAN$ и $\measuredangle PDA = 90^\circ$, точките N,P,D,A припаѓаат на кружница со дијаметар AP, па затоа $\measuredangle PNA = 90^\circ$. Понатаму добиваме дека $\measuredangle PNM = 90^\circ$. Аналогно докажуваме дека $\measuredangle MQP = 90^\circ$, а важи и $\measuredangle PCM = 90^\circ$. Според тоа, точките M,C,P,Q,N припаѓаат на кружница со дијаметар PM.

2. Ако $x > y \geq 0$, докажи дека

$$x + \frac{4}{(x-y)(y+1)^2} \geq 3.$$

Решение. За $x \geq 3$ неравенството е очигледно, а за $x < 3$ истото е еквивалентно со неравенството

$$(x-y)(y+1)^2(3-x) \leq 4$$

кое е точно, бидејќи од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, при $0 \leq y < x < 3$ имаме

$$\begin{aligned}(x-y)(y+1)^2(3-x) &= \tfrac{1}{4}(y+1)(y+1)(2x-2y)(6-2x)\\ &\leq \tfrac{1}{4}[\tfrac{1}{4}(y+1+y+1+2x-2y+6-2x)]^4 = 4.\end{aligned}$$

3. Определи ги сите разложувања на бројот 2001 во вид на збир на 1979 квадрати на природни броеви.

Решение. Нека $x_1, x_2, ..., x_{1979}$ се природни броеви за кои важи

$$x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_{1979} \text{ и } x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{1979}^2 = 2001.$$

Не е можно сите овие броеви да се поголеми од 1, бидејќи тогаш ќе важи

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{1979}^2 \geq 1979 \cdot 2^2 > 2001.$$

Нека $x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_k > 1 = x_{k+1} = ... = x_{1979}$. Тогаш важи

$$kx_k^2 \leq x_1^2 + x_2^2 + ... + x_k^2 = 2001 - 1979 + k = k + 22,$$

односно $4 \leq x_k^2 \leq 1 + \frac{22}{k}$, од каде добиваме $k \leq 7$. Бидејќи $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_7^2 = 29$, добиваме $x_1, x_2, ..., x_7 \in \{1,2,3,4\}$, (Во спротивно $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_7^2 \geq 5^2 + 6 = 31$.) Нека меѓу броевите $x_1, x_2, ..., x_7$ има редоследно a,b,c,d единици, двојки, тројки,четворки. Тогаш

$$a + b + c + d = 7, \ a + 4b + 9c + 16d = 29,$$

па следува

$$22=a+4b+9c+16d-(a+b+c+d)=3b+8c+15d\,,$$

$c\leq 2$ и $3\,|\,22-8c$. Ова е можно само за $c=2$. Во овој случја $15d+3b=6$, па затоа $d=0$ и $b=2$. Значи, $a=7-(b+c+d)=3$. Лесно се проверува дека

$$2001=2\cdot 3^2+2\cdot 2^2+1975\cdot 1^2\,,$$

што значи дека имаме само едно разложувања на бројот 2001 за кое се исполнети дадените услови.

4. Нека е дадена низа од $m+n$ топчиња, каде m и n се заемно прости броеви. Првите m топчиња од оваа низа ги преместуваме во истиот редослед по преостанатите n топчиња, па постапката ја повторуваме со така добиената низа. Докажи дека по неколку чекори првото топче може да се доведе на било кое (однапред определено) место во низата.

Решение. Прво да забележиме дека, бидејќи броевите m и n се заемно прости, при делењето на броевите $n,2n,3n,...,mn$ се добиваат сите можни остатоци $0,1,2,...,m-1$. Нека $l\in\{1,2,...,m\}$ е бројот за кој при делење на nl со бројот m се добива количник s и остаток $k-1\in\{0,1,2,...,m-1\}$, т.е. $nl=sm+k-1$. Тогаш

$$(l+s)m+k=1+l(m+n)\,. \qquad (1)$$

Нека е дадена низа места нумерирани со броевите $1,2,3,...$ и нека топчињата се наоѓаат на местата означени со броевите $1,2,...,m+n$. Во првиот чекор топшињата кои се наоѓаат на местата $1,2,...,m$ се преместуваат редоследно на местата $m+n+1,m+n+2,...,2m+n$. Во вториот чекор топчињата кои се наоѓаат на местата $m+1,m+2,...,2m$ се преместуваат редоследно на местата $2m+n+1$, $2m+n+2,...,3m+n$ итн. Топчето кое било на првото место се појавува на местата

$$1,1+m+n,1+2(m+n),1+3(m+n),...,$$

а почетокот на низата топчиња е на местата $1,1+m,1+2m,1+3m,...$. Од равенството (1) добиваме дека по $l+s$ чекори почетокот на низата топчиња се наоѓа на местото $(l+s)m+1$, а топчето кое на почетокот било на местото 1 се наоѓа на местото со реден број $(l+s)m+k$, т.е. на $k-$тото место во низата топќиња.

III година

1. Дадени се полиноми со комплексни коефициенти

$$P(x)=x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n\,,\text{ со нули } x_1,x_2,...,x_n$$

$$Q(x)=x^n+b_1x^{n-1}+...+b_n\,,\text{ со нули } x_1^2,x_2^2,...,x_n^2\,.$$

Ако $a_1+a_3+a_5+...$ и $a_2+a_4+a_6+...$ се реални броеви, докажи дека и $b_1+b_2+...+b_n$ е реален број.

Решение. Бидејќи $P(1)=1+a_1+a_2+...+a_n$, $P(-1)=(-1)^n+(-1)^{n-1}a_1+...+a_n$ и $a_1+a_3+a_5+...$ и $a_2+a_4+a_6+...$ се реални броеви добиваме дека $P(1)$ и $P(-1)$ се реални броеви. Понатаму,

$$P(x)=(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n) \text{ и } Q(x)=(x-x_1^2)(x-x_2^2)...(x-x_n^2)$$

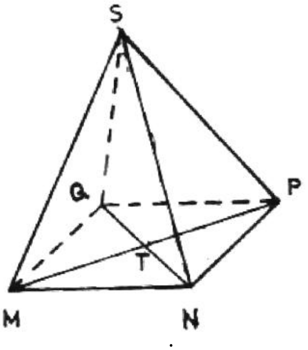
па затоа

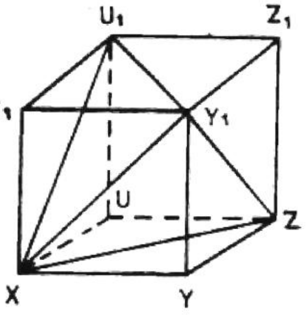
$$\begin{aligned}1+b_1+b_2+...+b_n &= Q(1)=(1-x_1^2)(1-x_2^2)...(1-x_n^2)\\ &=(1-x_1)(1-x_2)...(1-x_n)(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n)\\ &=(-1)^n P(1)P(-1).\end{aligned}$$

Значи $Q(1)$ е реален број, па затоа $b_1+b_2+...+b_n=Q(1)-1$ е реален број.

2. Дадени се правилен тетраедар со раб a и правилна четиристрана пирамида со раб a (основата е квадрат и сите рабови се еднакви). Расечи ги овие тела и од добиените делови состави коцка.

Решение. Нека $ABCD$ е правилен тетраедар со раб a, $SMNPQ$ правилна пирамида со врв S и раб a, цртеж лево, и нека $XYZUX_1Y_1Z_1U_1$ е коцка со раб $\frac{a}{\sqrt{2}}$, цртеж десно.





Нека T е пресекот на дијагоналите на квадратот $MNPQ$. Тогаш

$$MN=NT=PT=QT=\frac{a}{\sqrt{2}},\ ST=\sqrt{SM^2-MT^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Според тоа, рамнините SMP и SQN ја делат пирамидата $SMNPQ$ на четири тристрани пирамиди, секоја од кои има три прави рабни агли во едно теме и сите рабови кои минуваат низ ова теме се еднакви на $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Доволно е да забележиме дека рамнинте $XY_1Z, XY_1U_1, XZU_1, ZY_1U_1$ ја делат коцката на правилен тетраедар XZY_1U_1 со раб a и пирмиди $YXZY_1, X_1XY_1U_1, UXZU_1, Z_1ZU_1Y_1$ (првото означено теме е врв), кај кои сите рабни агли при врвот се прави, а сите рабови кои минуваат низ врвот се еднакви на $\frac{a}{\sqrt{2}}$.

3. Нека $z_1, z_2, ..., z_n$ се комплексни броеви. Докажи дека може да се изберат природни броеви $i_1, i_2, ..., i_k$ такви што $1 \le i_1 < i_2 < ... < i_k \le n$ и

$$|z_{i_1} + z_{i_2} + ... + z_{i_k}| \ge \frac{1}{4\sqrt{2}}(|z_1| + |z_2| + ... + |z_n|).$$

Решение. Нека $z_j = x_j + iy_j$, $x_j, y_j \in \mathbf{R}$, $j = 1, ..., n$. Да означиме

$$S_1 = \{j \,|\, x_j \ge 0, y_j \ge 0\}, S_2 = \{j \,|\, x_j < 0, y_j \ge 0\},$$

$$S_3 = \{j \,|\, x_j < 0, y_j < 0\}, S_4 = \{j \,|\, x_j \ge 0, y_j < 0\}.$$

Тогаш,

$$\sum_{j=1}^{n} |z_j| = \sum_{j=1}^{4} \sum_{j \in S_k} |z_j|$$

па од принципот на Дирихле следува дека за некој $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ важи неравенството

$$\sum_{j \in S_k} |z_j| \ge \frac{1}{4} \sum_{j=1}^{n} |z_j|.$$

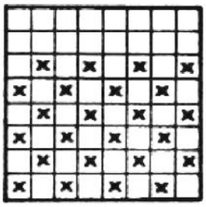
За тој број k добиваме

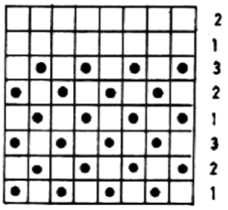
$$\frac{1}{4\sqrt{2}} \sum_{j=1}^{n} |z_j| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in S_k} |z_j| = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in S_k} |x_j + iy_j| \le \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j \in S_k} (|x_j| + |y_j|)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\sum_{j \in S_k} x_j| + |\sum_{j \in S_k} y_j|)$$

$$\le \frac{2}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{1}{2}(|\sum_{j \in S_k} x_j|^2 + |\sum_{j \in S_k} y_j|^2)} = |\sum_{j \in S_k} z_j|.$$

4. На сите црни полиња на првите шест реда на шаховска табла се наоѓаат пешаци (цртеж десно). Во секој потез пешак прескокнува еден од пешаците кои му се соседни по дијагонала и со тоа се поместува за две полиња по дијагонала доаѓајќи на слободно поле, а прескокнатиот пешак се отстранува од таблата. Дали може да се игра така што по определн број потези на таблата ќе остане само еден пешак?





Решение. Редовите на шаховската табла ги делиме на три класи, така што во првата класа се првиот , четвртиот и седмиот ред, во втората класа се вториот, петтиот и осмиот ред, во третата класа се третиот и шестиот ред (види цртеж). На почетокот во секоја калса има по осум пешаци. Да забележиме дека по секој потез се менува парноста на пешаците во секоја класа. Навистина, во секој потез се менува за еден бројот на пешаците во секои три соседни реда (од првиот и вториот од тие редови се отстранува по еден пешак, а во третиот ред се додава еден пешак), а три соседни реда припаѓаат на три различни класи. Освен тоа, по секој потез вкупниот број пешаци се намалува за еден. Според тоа, по 22 одиграни потези (ако е тоа можно) на таблата ќе останат точно два пешаци и бидејќи броевите на пешаците во различните класи се со иста парност, и двата пешаци ќе бидат во иста класа. Тоа значи дека следниот потез не е можен (пешаците не се во соседни редови), т.е. на таблата не може да остане еден пешак.

IV година

1. Докажи дека не постојат природни броеви n и $p>5$ такви што важи

$$(p-1)!+1=p^n. \qquad (1)$$

Решение. Нека пртпоставиме дека за природните броеви $p>5$ и n важи равенството (1). Тогаш p и $(p-1)!$ сезаемно прости броеви, од каде што следува дека p е прост број. Понатаму

$$(p-2)!=\frac{(p-1)!}{p-1}=\frac{p^n-1}{p-1}=p^{n-1}+p^{n-2}+...+p+1.$$

Бидејќи за $p>5$ важи $2<\frac{p-1}{2}\le p-2$, а $\frac{p-1}{2}$ е цел број, бидејќи p е непарен прост број, заклучуваме дека броевите 2 и $\frac{p-1}{2}$ се делители на бројот $(p-2)!$. Според тоа, и бројот $2\cdot\frac{p-1}{2}=p-1$ е делител на бројот $(p-2)!$. Бидејќи

$$\begin{aligned}(p-2)!&=p^{n-1}+p^{n-2}+...+p+1\\ &=(p-1+1)^{n-1}+(p-1+1)^{n-2}+...+(p-1+1)+1\\ &\equiv n(\operatorname{mod} p-1),\end{aligned}$$

заклучуваме дека и бројот n е делив со $p-1$. Затоа $p-1\le n$, т.е. $p-2\le n-1$, па понатаму добиваме дека

$$(p-1)!+1<p^{p-2}+1\le p^{n-1}+1<p^n,$$

што противречи на претпоставката.

2. Дали постојат броеви $a,b>0$ такви што

а) $a,b\notin\mathbb{Q}$ и $a^b\in\mathbb{Q}$?

б) $a,b,a^b\notin\mathbb{Q}$?

в) $a\in\mathbb{Q}$ и $b,a^b\notin\mathbb{Q}$?

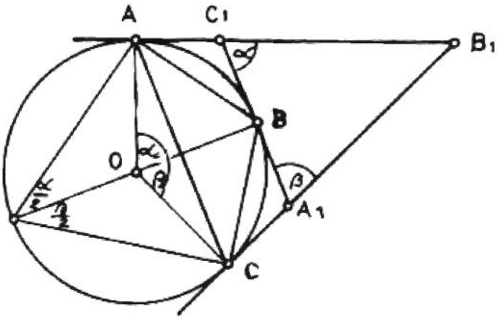
Решение. Одговорот е потврден во сите три случаи. Во доказот ќе користиме дека бројот e е ирационален и трансцедентен,т.е.не е нула на ниту еден полином со целобројни коефициенти. Прво ќе докажеме дека $\ln 2\notin\mathbb{Q}$. Нека претпоставиме дека $\ln 2=\frac{p}{q}$, каде p и q се природни броеви. Тогаш $e^{\frac{p}{q}}=2$, односно $e^{p}=2^{q}$, што не е можно, бидејќи e е трансцедентен број. Сега следуваат примерите:

а) $a=e\notin\mathbb{Q}$, $b=\ln 2\notin\mathbb{Q}$, $a^{b}=e^{\ln 2}=2\in\mathbb{Q}$,

б) $a=e\notin\mathbb{Q}$, $b=\frac{1}{2}\ln 2\notin\mathbb{Q}$, $a^{b}=e^{\ln\sqrt{2}}=\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$,

в) $a=2\in\mathbb{Q}$, $b=\log_2 e=\frac{1}{\ln 2}\notin\mathbb{Q}$, $a^{b}=e\notin\mathbb{Q}$.

3. Нека A,B,C се три различни точки на кружница, P е плоштината на триаголникот ABC и P_1 е плоштината на триаголникот определен со тангентите на кружницата во точките A,B,C. Определи ја граничната вредност на односот $P_1:P$, кога точката A е фиксирана, а B и C тежат кон A по кружницата така што секогаш важи $B\neq C$.



Решение. Нека $A_1B_1C_1$ е триаголникот определен со тангентите на кружницата во точките A, B,C, нека B е на пократкиот лак AC, O е центарот на дадената кружница и $r=OA, \alpha=\measuredangle AOB$, $\beta=\measuredangle BOC$, цртеж десно. Тогаш

$$C_1A=C_1B=r\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} \text{ и}$$

$$A_1C=A_1B=r\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2},$$

па следува

$$A_1C_1=A_1B+BC_1=r(\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}+\mathrm{tg}\frac{\beta}{2})=r\frac{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}}.$$

Бидејќи $AB=2r\sin\frac{\alpha}{2}$, $BC=2r\sin\frac{\beta}{2}$ и $\measuredangle ABC=\pi-\frac{\alpha+\beta}{2}$, добиваме

$$P=\frac{1}{2}AB\cdot BC\sin\measuredangle ABC=2r^{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Понатаму, $\measuredangle A_1C_1B_1=\measuredangle BOA=\alpha$ и $\measuredangle C_1A_1B_1=\measuredangle BOC=\beta$ (како агли со нормални краци) и $\measuredangle A_1B_1C_1=\pi-\alpha-\beta$, па затоа

$$A_1B_1=A_1C_1\frac{\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)},\quad B_1C_1=A_1C_1\frac{\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)},$$

$$P_1=\frac{1}{2}A_1B_1\cdot B_1C_1\sin\measuredangle A_1B_1C_1=r^{2}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}\,\mathrm{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Конечно, добиваме

$$\frac{P_1}{P}=\frac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}.$$

Ако $B \to A$ и $C \to A$,тогаш $\alpha \to 0, \beta \to 0$, па затоа $\frac{P_1}{P} = \frac{1}{2}$.

4. Иста како 3. задача за 3. година.

Мала олимпијада 1979

1. Докажи дека за различни природни броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ важи

$$(a_1 + a_2 + ... + a_n)^2 \le a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 .$$

Решение. Природните броеви $a_1, a_2, ..., a_n$ се различни, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1 < a_2 < ... < a_n$. Да означиме

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \text{ и } A_n = a_1^3 + a_2^3 + ... + a_n^3 .$$

При вака воведените ознаки, даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$S_n^2 \le A_n , \qquad (1)$$

кое ќе го докажеме со индукција по n .

За $n = 1$ имаме $S_1^2 = a_1^2 \le a_1^3 = A_1$, т.е. неравенството (1) е точно.

Нека претпоставиме дека $S_k^2 \le A_k$, т.е. дека (1) важи за $n = k$.

За $n = k + 1$, од $1 \le a_1 < a_2 < ... < a_k < a_{k+1}$ следува

$$2S_k = 2(a_1 + a_2 + ... + a_k) \le 2[1 + 2 + 3 + ... + a_k + (a_k + 1) + ... + (a_{k+1} - 2) + (a_{k+1} - 1)]$$
$$= 2\frac{a_{k+1}(a_{k+1} - 1)}{2} = a_{k+1}^2 - a_{k+1}$$

т.е.

$$2S_k a_{k+1} + a_{k+1}^2 \le a_{k+1}^3 ,$$

што значи

$$S_{k+1}^2 = (S_k + a_{k+1})^2 = S_k^2 + 2S_k a_{k+1} + a_{k+1}^2 \le A_k + a_{k+1}^3 = A_{k+1} .$$

Според тоа, неравенството (1) важи за $n = k + 1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n \in \mathbb{N}$.

Јасно, знак за равенство $S_n^2 = A_n$ важи ако и само ако $a_1 = 1$ и за секој $k \in \{1, 2, 3, ..., n\}$ важи $a_k + 1 = a_{k+1}$, т.е. ако и само ако $a_i = i$, за $i = 1, 2, ..., n$.

2. Определи ги сите природни броеви n, каде $1 < n < 1979$, кои го задоволуваат условот: Ако m е природен број, $1 < m < n$ и $(m, n) = 1$, тогаш m е прост број.

Решение. Нека S е множеството од сите природни броеви за кои важи наведениот услов. Ако $n \in S$ и $p^2 < n$, каде p е прост број, тогаш n и p^2 не се заемно прости броеви, бидејќи p^2 не е прост број. Според тоа, $p \mid n$. Ако $n > 49$

и $n \in S$, тогаш секој од броевите 2, 3, 5 и 7 е делител на бројот n. Затоа $n \geq 2\cdot3\cdot5\cdot7=210>11^2$, па и $11|n$. Понатаму, следува $n \geq 210\cdot11=2310>1979$, а тоа е противречност. Затоа $S \subset \{2,3,4,...,49\}$.

а) Нека $n>25$. Тогаш $n \in S$ ако и само ако n е делив со $2\cdot3\cdot5=30$. Таков е само бројот 30.

б) Нека $9<n\leq25$. Тогаш $n \in S$, ако и само ако бројот n е делив со $2\cdot3=6$. Тоа важи за броевите 12, 18 и 24.

в) Нека $4<n\leq9$. Тогаш $n \in S$, ако и само ако бројот n е парен. Тоа се броевите 6 и 8.

г) Лесно се проверува дека секој од броевите 2, 3 и 4 припаѓа на множеството S.

Според тоа, $S=\{2,3,4,6,8,12,18,24,30\}$.

3. Дадени се две кружници со периметар 1979. На првата се означени 1979 точки, а на втората неколку лаци така што збирот на должините на сите тие лаци е помал од 1. Докажи дека првата кружница може да се постави на втората така што ниту една од означените точки нема да падне во означен лак.

Решение. Да ја фиксираме втората кружница, потоа на неа да ја поставиме првата кружница и да ја ротираме околу центарот. Да претпоставиме дека фиксирана точка A од првата кружница *запишува траг* на втората кружница, ако било која од означените точки припаѓа на било кој од означените лаци. По ротацијата на на првата кружница за 360° вкупната должина на трагите ќе биде помала од $1979\cdot1=1979$. Според то, на втората кружница постои точка X која не припаѓа на трагата. Во моментот на шоклопување на точките A и X нту една од означените точки не припаѓа на ниту еден од означените лаци.

Сојузен натпревар 1980

I година

1. Цената на еден молив е цел број евроценти. Вкупната цена на 9 моливи е поголема од 11, а е помала од 12 евра, додека вкупната цена на 13 моливи е поголема од 15, а помала од 16 евра. Колку чини еден молив?

Решение. Нека x е цената на моливот во евроценти. Тогаш од

$$1100<9x<1200\ ,$$

следува $122<x\leq 133$, а од

$$1500<13x<1600$$

следува $115<x\leq 123$. Но, x е цел број, па од $122<x\leq 133$ и $115<x\leq 123$ следува $x=123$ евроценти.

2. Дадени се броевите 1, 12, 123, ..., 1234567890, 12345678901, ... Секој број се добива од претходниот така што му се допишува следната цифра, при што по 0 следува 1, по 1 следува 2, ..., по 9 следува 0. Докажи дека барем еден од овие броеви е делив со 1981.

Решение. Ги разгледуваме броевите од даденото множество кои се од видот

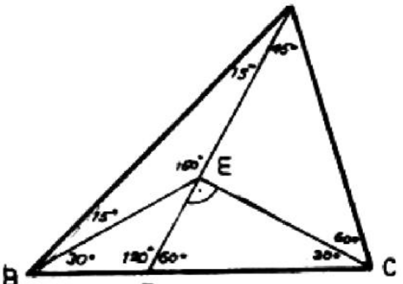
$$12...9012...90...12...90\,.$$

Вакви броеви има бесконечно многу, а имаме конечно многу остатоци при делење со 1981. Зтоа постојат два броја од наведениот вид кои при делење со 1981 даваат ист остаток. Разликата на овие два броја е делива со 1981. Но, разликата на двата броја е број од видот

$$12...9012...9000...00,$$

т.е. таа е број A од наведениот вид помножен со степен на бројот 10. Бидејќи $(1981,10)=1$, заклучуваме дека бројот A е делив со 1981.

3. Нека D е точка на страната BC на триаголникот ABC, таква што $DC=2BD$. Определи ги останатите агли на триаголникот ABC ако $\measuredangle ABC=45^{\circ}$ и $\measuredangle ADC=60^{\circ}$.



Решение. Со E да го означиме подножјето на нормалата повлечена од C на правата AD (цртеж десно). Тогаш $2ED=DC$, па од $2BD=DC$ следува $ED=BD$. Во рамнокракиот триаголник EBD аголот при врвот е еднаков на 120°, па затоа

$$\measuredangle EBD=\measuredangle DEB=30^{\circ},\ \measuredangle ABE=15^{\circ}\,.$$

Во триаголникот EBC аглите во темињата B и C се еднакви на 30°, па затоа $EB=$

CE. Во триаголниот ABE аглите во темињата A и B се еднакви на 15°, па затоа $BE=EA$. Значи, $CE=EA$, од што следува дека триаголникот CEA рамнокрак и како тој е правоаголен, заклучуваме дека неговите остри агли се по 45°. Оттука следува $\measuredangle BCA=75^\circ$ и $\measuredangle CAB=60^\circ$.

4. Град има 1980 раскрсници, а во секоја од нив се среќаваат по три улици. Постои кружна автобуска линија, која минува низ секоја раскрсница точно еднаш. Одлучено е во секоја улица да се засадат стебла само на една од овие видови дрвја: костен, бреза и липа. Докажи дека тоа може да се направи така што во секоја раскрсница се среќаваат три дрвореди од различни видови.

Решение. Да тргнеме од произволна раскрсница по трасата на автобуската линија. Во првата улица да засадиме еден вид дрва (на пример костен), по минувањето низ раскрсницата во втората улица да засадиме друг вид дрва (на пример бреза), потоа повторно костен и така наизменично. Бидејќи 1980 е парен број, во последната улица пред враќањето на почената станица ќе биде засадена бреза. Сега, во сите улици во кои не минува автобусот ќе се засади преостанатиот вид дрва (значи липа). Јасно, вака засадените дрва го задоволуваат условот на задачата.

II година

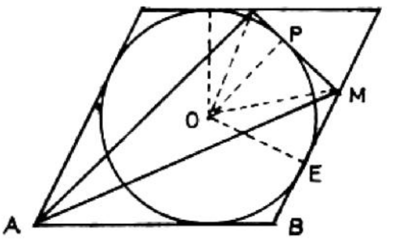
1. Определи ги сите цели броеви x така што $x^2+3x+24$ е точен квадрат.

Решение. Во множеството цели броеви $\mathbb{Z}$ треба да ја решиме равенката $x^2+3x+24=y^2$. Оваа равенка е еквивалентна на равенката $(2x+3)^2+87=4y^2$, односно на равенката

$$(2y+2x+3)(2y-2x-3)=3\cdot 89.$$

Од последната равенка ги добиваме можностите $2x+2y+3=\pm1,\pm3,\pm29,\pm87$ и на нив соодветните вредности на $2y-2x-3$. Со решавање на овие системи равенки добиваме $x\in\{-23,-8,5,20\}$. Со непосредна проверка гледаме дека ие навистина ги задоволуваат условите на задачата.

2. Во даден ромб $ABCD$ е впишана кружница. Нека тангента на оваа кружница ги сече страните BC и CD во точките M и N. Докажи дека плоштината на триаголникот AMN е константна.



Решение. Нека O е центарот на кружницата вписана во дадениот ромб, E и F се точките во кои таа кружница редоследно ги допира страните BC и CD, а P е точката во која кружницата ја допираа правата MN, цртеж десно. Јасно, триаголниците ONF и ONP се складни. Од друга страна, триаголниците ONF и ANF имаат заедничка основа NF и првиот има два пати помала висина. Затоа

$$P_{ANF} = 2P_{ONF} = P_{OPNF}.$$

Слично се докажува дека

$$P_{AEM} = 2P_{OEM} = P_{OEMP}.$$

Затоа:

$$P_{AMN} = P_{AEMNF} - P_{AEM} - P_{ANF} = P_{AEMNF} - P_{OENP} - P_{OPNF} = P_{AEOF},$$

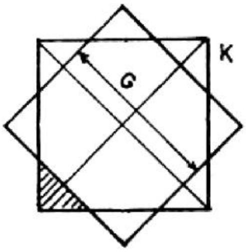
а последната плоштина очигледно не зависи од тангентата MN.

3. Страната на квадратот K има должина 7. Дали може овој квадрат да се покрие со 8 квадрати чии страни имаат должина 3,

а) при услов страните на тие квадрати да се паралелни со соодветни страни на квадратот K,

б) без условот под а).

Решение. а) Да ги воочиме следните девет точки: темињата на квадратот K, средините на неговите страни и пресекот на дијагоналите. Јасно, не постои квадрат со страна 3 чии страни се паралелни со соодветните страни на дадениот квадрат и кој покрива две од дадените точки. Затоа за вакво покривање на квадратот се потребни најмалку 9 мали квадрати.



б) Да поставиме квадрат со должина на страна 6 така што центарот му се совпаѓа со центарот на квадратот K, а страните се паралелни со неговите дијагонали, цртеж десно. Лесно се докажува дека страните на секој од рамнокраките правоаголни триаголници кои не се покриени од овој квадрат се еднакви на $7-3\sqrt{2}$, т.е. помали од 3, па секој д овие триаголници може да се покрие со еден од преостанатите четири квадрати со должина на страна 3.

4. За природните броеви $a_1, a_3, ..., a_{19}, b_1, b_2, ..., b_{21}$ важи

$$1 \le a_1 < a_3 < ... < a_{19} \le 200, \quad 1 \le b_1 < b_2 < ... < b_{21} \le 200.$$

Докажи дека меѓу нив може да се изберат броеви a_i, a_j, b_p, b_q такви што важи

$$a_i < a_j, b_p < b_q \text{ и } a_j - a_i = b_q - b_p.$$

Решение. Да формираме $19 \cdot 21 = 399$ разлики од видот $a_i - b_p$, $i = 1,2,...,19$, $p = 1,2,...,21$. Во интервалот $[-199,199]$ имаме 399 цели броеви. Можни се два случаја.

1) Сите разлики се различни меѓу себе. Тогаш за некои $i, j \in \{1,2,...,19\}$ и некои $p, q \in \{1,2,...,21\}$ важи $a_i - b_p = -199$, $a_j - b_q = 199$. Тоа значи дека

$$a_i = b_q = 1 \text{ и } a_j = b_p = 200.$$

Јасно, притоа важи

$$a_i < a_j,\ b_q < b_p \quad \text{и} \quad a_j - a_i = b_p - b_q$$

2) Некои две од овие разлики се еднакви: $a_i - b_p = a_j - b_q$. Тогаш

$$a_j - a_i = b_q - b_p,$$

при што или $a_i < a_j$, $b_p < b_q$ или $a_j < a_i$, $b_q < b_p$.

III година

1. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^{5-x} = (6-x)^{1-x}.$$

Решение. Со непосредна проверка се добива дека од броевите 1, 2, ...,6 само 1 и 5 ја задоволуваат дадената равенка. Нека претпоставиме дека некој природен број $x > 6$ е решение на равенката. Јасно, x е непарен број, т.е. $x = 2k+1, k \geq 3$. Со замена во равенката ја добиваме равенката $(2k+1)^{4-2k} = (5-2k)^{-2k}$, која е еквивалентна на равенката

$$(1+\tfrac{6}{2k-5})^{k-2} = (2k-5)^2.$$

Според тоа, $\frac{6}{2k-5}$ мора да е цел број, т.е. мора да е $2k-5 \in \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6\}$. Вредностите ± 2 и ± 6 е парни, па затоа отпаѓаат, а за вредностите -1 и -3 се добива $2k+1 < 7$. Останува уште $2k+1 = 7$ и $2k+1 = 9$. Со непосредна проверка се добива дека во првиот случај немаме решение, а во вториот случја имаме решение $x = 9$.

Конечно, решенија на дадената равенка се $x = 1, x = 5, x = 9$.

2. Дадени се 18 отсечки за чии должини $x_1, x_2, ..., x_{18}$ важи

$$1 \leq x_1 \leq x_2 \leq ... \leq x_{18} \leq 1980.$$

Докажи дека меѓу дадените отсечки постојат три кои може да се страни на триаголник.

Решение. Да препоставиме дека меѓу дадените отсечки не постојат три од кои може да се формира триаголник. Тогаш за секој $i = 1, 2, ..., 16$ важи $x_i + x_{i+1} \leq x_{i+2}$. Оттука следува:

$$\begin{aligned} x_{18} &\geq x_{17} + x_{16} \geq (x_{16} + x_{15}) + x_{16} = 2x_{16} + x_{15} \\ &\geq 2(x_{15} + x_{14}) + x_{15} = 3x_{15} + 2x_{14} \\ &\geq 3(x_{14} + x_{13}) + 2x_{14} = 5x_{14} + 3x_{13} \\ &\geq 5(x_{13} + x_{12}) + 3x_{13} = 8x_{13} + 5x_{12} \\ &\geq ... \geq 1597x_2 + 987x_1 \geq 2584, \end{aligned}$$

што противречи на претпоставката $x_{18} \leq 1980$.

3. Нека S е пресекот на дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$. Ако

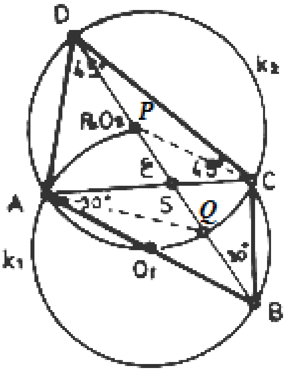
$$\measuredangle SAB = \measuredangle SBC = 30^\circ \text{ и } \measuredangle SCD = \measuredangle SDA = 45^\circ,$$

определи го аголот меѓу дијагоналите на тој четириаголник.

Решение. Заради определеност да претпоставиме дека $\measuredangle ASD = \varphi$ е остар, цртеж десно. Случајот кога овој агол не е остар се разгледува аналогно. Овој агол е надворешен за триаголниците SCD и SAB, па лесно се добива

$$\varphi = \measuredangle CDA = \measuredangle ABC.$$

Значи, точките B и D припаѓаат на лаци на кружници k_1 и k_2 со еднакви радиуси (да кажеме r) кои се геометриски места на точки од кои отсечката AC се гледа под агол φ. Центрите на овие кружници да ги означиме со O_1 и O_2, а пресеците на отсечката BD (различни од B и D) со кружниците k_1 и k_2 редоследно со P и Q (види цртеж).



Бидејќи $\measuredangle AQD = \measuredangle ACD = 45^\circ$ и $\measuredangle QDA = 45^\circ$, заклучуваме дека триаголникот AQD е рамнокрак правоаголен и центарот O_2 на опишаната кружница околу него k_2 е средина на хипотенузата DQ. Понатаму, важи $\measuredangle BPC = \measuredangle BAC = 30^\circ$ и $\measuredangle PBC = 30^\circ$, па затоа триаголникот BCP е рамнокрак и $\measuredangle BCP = 120^\circ$, што значи $BC = CP = r$. Сега, бидејќи $CP = CO_2$ и $O_2 \in BD$, важи $P = O_2$. Понатаму, $\measuredangle CO_2A = 120^\circ$ и $\measuredangle CDA = 60^\circ$, па затоа $\varphi = 60^\circ$.

4. Определи ги сите полиноми од видот $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$, каде $a_j \in \{-1, 1\}$, $j = 0, 1, 2, ..., n$, кои имаат само реални нули.

Решение. Да ги најдеме полиномите со наведеното својство за кои $a_n = 1$. Останатите полиноми ги добиваме ако најдените ги помножиме со -1.

За $n = 1$ такви полиноми се $x - 1$ и $x + 1$.

Нека претпоставиме дека $n \geq 2$ и $x_i, i = 1, 2, ..., n$ се реалните нули на бараниот полином. Од Виетовите формули следува

$$(x_1 x_2 ... x_n)^2 = a_0^2 = 1$$

и

$$0 \le \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2 - 2\sum_{i \ne k} x_i x_k = a_{n-1}^2 - 2a_{n-2} = 1 - 2a_{n-2}.$$

Но, $a_{n-2} \in \{1,-1\}$, па затоа $a_{n-2} = -1$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 3$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$\frac{3}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \ge (x_1^2 x_2^2 ... x_n^2)^{1/n} = 1,$$

па затоа $n \le 3$. Лесно се добива дека за $n = 2$ бараните полиноми се

$$\pm(x^2 + x - 1) \text{ и } \pm(x^2 - x - 1).$$

За $n = 3$ само полиномите

$$\pm(x^3 + x^2 - x - 1) \text{ и } \pm(x^3 - x^2 - x + 1)$$

имаат реални нули, а додека другите полиноми од бараниот вид имаат комплексни нули.

Конечно, бараните полиноми се:

$$\pm(x-1),\ \pm(x+1),\ \pm(x^2 + x - 1),\ \pm(x^2 - x - 1),$$

$$\pm(x^3 + x^2 - x - 1) \text{ и } \pm(x^3 - x^2 - x + 1).$$

IV година

1. Дадена е елипса со параметарски равенки

$$x = a\cos t,\ y = b\sin t,\ a \ne b.$$

Докажи дека точките чии параметри се t_1, t_2, t_3, t_4 припаѓаат на една кружница ако и само ако постои цел број k таков што $t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 2k\pi$.

Решение. Да претпоставиме дека точките на елипсата кои соодветствуваат на параметрите t_1, t_2, t_3, t_4 припаѓаат на некоја кружница. Нека

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

е равенката на таа кружница, каде A, B, C се реални броеви и $A^2 + B^2 - 4AC > 0$. Заменуваме $x = a\cos t,\ y = b\sin t$ и ставаме $u = \mathrm{tg}\frac{t}{2}$, со што по средувањето равенката ја трансформираме во видот:

$$(a^2 - aA + C)u^4 + 2bBu^3 + (2C - 2a^2 + 4b^2)u^2 + 2bBu + (a^2 + aA + C) = 0, \quad (1)$$

при што за решенијата u_1, u_2, u_3, u_4 на добиената равенка важи $u_i = \mathrm{tg}\frac{t_i}{2}$, $i = 1,2,3,4$. Да означиме

$$D_1 = u_1 + u_2 + u_3 + u_4,$$

$$D_2 = u_1u_2 + u_1u_3 + u_1u_4 + u_2u_3 + u_2u_4 + u_3u_4,$$

$$D_3 = u_1u_2u_3 + u_1u_2u_4 + u_1u_3u_4 + u_2u_3u_4,$$
$$D_4 = u_1u_2u_3u_4.$$

Бидејќи равенката (1) пред u^3 и u има еднакви коефициенти, од Виетовите правила следува дека $D_1 = D_3$. Сега, применувајќи ги адиционите формули добиваме

$$\operatorname{tg}\frac{t_1+t_2+t_3+t_4}{2} = \frac{D_1-D_3}{1-D_2+D_4} = 0,$$

од каде следува

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4 = 2k\pi, \tag{2}$$

за некој $k \in \mathbb{Z}$.

Да претпоставиме дека за некој $k \in \mathbb{Z}$ важи (2), при што можеме да претпоставиме дека $t_i \in [0, 2\pi)$ за $i = 1,2,3,4$. Нека кружницата определена со параметрите t_1, t_2, t_3 ја сече елипсата во точка која соодветствува на параметар $t_4^{'} \in [0, 2\pi)$. Тогаш од претходно докажаното следува

$$t_1 + t_2 + t_3 + t_4^{'} = 2k'\pi, \tag{3}$$

за некој $k' \in \mathbb{Z}$. Од (2) и (3) следува $t_4^{'} - t_4 = 2(k' - k)\pi$, па како $t_4, t_4^{'} \in [0, 2\pi)$, добиваме $k = k'$ и $t_4^{'} = t_4$. Според тоа, точките на елипсата кои соодветствуваат на параметрите t_1, t_2, t_3, t_4 припаѓаат на иста кружница.

2. Нека S е множество кое се состои од n реални броеви и T е множеството збирови од по k различни броеви од S, каде $n \geq k$. Докажи дека множеството T содржи најмалку $k(n-k)+1$ елемент.

Решение. Елементите на даденото множество да ги означиме со $x_1, x_2, ..., x_n$ и нека $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Ќе докажеме дека постојат $k(n-k)+1$ елементи $y_i \in T$, $i = 0,1,2,..., k(n-k)$ кои формираат строго растечка низа, со што ќе биде докажано тврдењето на задачата.

Прво да ставиме $y_0 = x_1 + x_2 + ... + x_k$, а потоа

$$y_1 = y_0 + x_{k+1} - x_k > y_0,$$
$$y_2 = y_1 + x_k - x_{k-1} > y_1,$$
$$......................................$$
$$y_k = y_{k-1} + x_2 - x_1 > y_{k-1},$$
$$y_{k+1} = y_k + x_{k+2} - x_{k+1} > y_k,$$
$$y_{k+2} = y_{k+1} + x_{k+1} - x_k > y_{k+1},$$
$$..$$
$$y_{2k} = y_{2k-1} + x_3 - x_2 > y_{2k-1},$$

итн. Последниот елемент во $(n-k)-$тата група ќе биде

$$y_{(n-k)k}=y_{(n-k)k-1}+x_{n-k+1}-x_{n-k}>y_{(n-k)k-1}.$$

3. Даден е природен број a. Низата (a_n) е определена со $a_0=a$, ако

$$a_n=c_0+10c_1+...+10^k c_k,$$

каде $c_0,c_1,...,c_k\in\{0,1,2,...,9\}$, тогаш

$$a_{n+1}=2c_0+c_1+10c_2+...+10^{k-1}c_k.$$

Кои броеви во низата (a_n) се појавуваат бесконечно многу пати?

Решение. За произволен n нека $a_n=10A+c_0$. Тогаш според дефиницијата $a_{n+1}=A+2c_0$. Оттука следува $2a_n-a_{n+1}=19A$, па затоа:

1) $19\,|\,a_n$ акои само ако $19\}a_{n+1}$.

Исто така важи $a_n-a_{n+1}=9A-c_0$. Затоа за $A\geq 1$, $a_n-a_{n+1}\geq 0$, при што важи знак за равенство ако и само ако $A=1$ и $c_0=9$. Со други зборови:

2) Ако $a_n\geq 10$ и $a_n\neq 19$, тогаш $a_n>a_{n+1}$.

Од 2) следува дека низата (a_n) строго опаѓа, додека некој нејзин член не стане помал од 20. Ако овој член е еднаков на 19 (а тоа според 1) се случува ако и само ако $19\,|\,a_0$), тогаш и сите следни членови ќе бидат едакви на 19. Ако овој член е помал од 19, тогаш низата станува периодична со период 18 во кој се појавуваат сите броеви од множеството $\{1,2,...,18\}$. (Провери!)

4. Дадена е функција $f:[0,1]\to[0,1]$ таква што $0,1\in f([0,1])$ и за секои $x,y\in[0,1]$ важи

$$|f(x)-f(y)|\leq\tfrac{|x-f(x)|+|y-f(y)|}{2}. \qquad (1)$$

Докажи дека постои точно еден број $x\in[0,1]$ таков што $f(x)=x$.

Решение. Од $0,1\in f([0,1])$ следува дека постојат $a,b\in[0,1]$ такви што $f(a)=0$ и $f(b)=1$. Со замена во (1) добиваме

$$2=2|f(a)-f(b)|\leq|a-0|+|b-1|\leq 2,$$

па затоа $a=1$ и $b=0$.

Ќе докажеме дека $f(\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}$. Ако $f(\tfrac{1}{2})>\tfrac{1}{2}$, тогаш за $x=\tfrac{1}{2}$ и $y=1$ добиваме

$$\begin{aligned}2f(\tfrac{1}{2})&=2|f(\tfrac{1}{2})-f(1)|\\&\leq|\tfrac{1}{2}-f(\tfrac{1}{2})|+|1-f(1)|\\&=f(\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{2}+1=f(\tfrac{1}{2})+\tfrac{1}{2}\end{aligned},$$

т.е. $f(\tfrac{1}{2})\leq\tfrac{1}{2}$, што е противречност. Ако $f(\tfrac{1}{2})<\tfrac{1}{2}$, тогаш $x=\tfrac{1}{2}$ и $y=0$ добиваме

$$\begin{aligned}2(1-f(\tfrac{1}{2}))&=2|\,f(\tfrac{1}{2})-f(0)|\\&\leq|\tfrac{1}{2}-f(\tfrac{1}{2})|+|0-f(0)|\\&=\tfrac{1}{2}-f(\tfrac{1}{2})+1=\tfrac{3}{2}-f(\tfrac{1}{2}),\end{aligned}$$

т.е. $f(\frac{1}{2})\geq\frac{1}{2}$, што е противречност. Според тоа, $f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$. Ќе докажеме дека не постои точка $x\neq\frac{1}{2}$ таква што $f(x)=x$. Навистина, ако за некој $x\neq\frac{1}{2}$ важи $f(x)=x$, тогаш

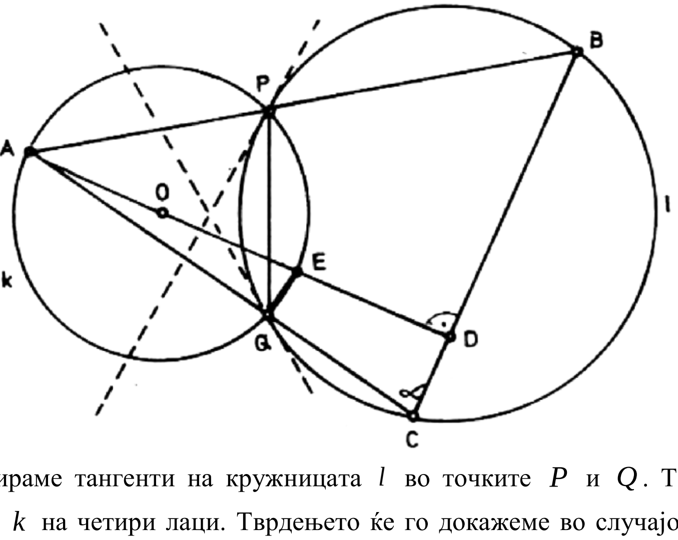
$$0<2|\,x-\tfrac{1}{2}|=2|\,f(x)-f(\tfrac{1}{2})|\leq|\,x-f(x)|+|\,f(\tfrac{1}{2})-\tfrac{1}{2}|=0+0=0,$$

што е противречност.

Мала олимпијада 1980

1. Кружниците k и l се сечат во точките P и Q. Нека A е произволна точка на кружницата k, различна од P и Q и нека правите AP и AQ ја сечат кружницата l, соодветно уште во точките B и C. Докажи дека правата определена со висината од темето A во триаголникот ABC минува низ фиксна точка која не зависи од точката A.

Решение. Ќе докажеме дека секоја права определена со висина на некој триаголник ABC го содржи центарот O на кружницата k.



Конструираме тангенти на кружницата l во точките P и Q. Тие ја делат кружницата k на четири лаци. Тврдењето ќе го докажеме во случајот кога точката A припаѓа на лакот кој е прикажан на горниот цртеж, а доказот на останатите случаи го препуштаме на читателот за вежба.

Нека D е подножјето на висината повлечена од темето A на триаголникот ABC и E е втората пресечна точка на правата AD и кружницата k. Да означиме

$\measuredangle QCB=\alpha$. Од тетивниот четириаголник $PQCB$ добиваме $\measuredangle BPQ=180^\circ-\alpha$, па затоа $\measuredangle AEQ=\measuredangle APQ=\alpha$. Од друга страна $\measuredangle QAE=\measuredangle CAD=90^\circ-\alpha$, што значи дека триаголникот AEQ е правоаголен со прав агол во темето Q. Последното значи дека правата AE, односно правата AD го содржи центарот O на кружницата k, што и требаше да се докаже.

2. Нека a,b,c се цели броеви и m е природен број поголем од 1. Ако

$$a^n+bn+c\equiv 0(\text{mod}\, m)$$

за секој природен број n, докажи дека

$$b^2\equiv 0(\text{mod}\, m).$$

Дали мора да е $b\equiv 0(\text{mod}\, m)$?

Решение. Од претпоставката за $n=1, n=2$ и $n=3$ добиваме редоследно:

$$a+b+c\equiv 0(\text{mod}\, m),\quad a^2+2b+c\equiv 0(\text{mod}\, m),\quad a^3+3b+c\equiv 0(\text{mod}\, m).$$

Од првите две релации следува

$$a^2-a+b\equiv 0(\text{mod}\, m), \tag{1}$$

а од последните две следува

$$a^3-a^2+b\equiv 0(\text{mod}\, m). \tag{2}$$

Понатаму, од (1) и (2) добиваме

$$a^3-2a^2+a=a(a-1)^2\equiv 0(\text{mod}\, m),$$
$$b^2\equiv (a(a-1))^2\equiv a(a(a-1)^2)(\text{mod}\, m),$$

од каде следува $b^2\equiv 0(\text{mod}\, m)$.

За да докажеме дека нека не мора да е $b\equiv 0(\text{mod}\, m)$, доволно е да земеме $m=4, a=3, b=2, c=3$.

3. Низата (a_n) е определена со

$$a_1=a,\ a_2=b,\ a_{n+1}=\tfrac{a_n^2+c}{a_{n-1}},\ \text{за}\ n=2,3,...,$$

каде $a,b,c\in\mathbb{R}$, $ab\neq 0$ и $c>0$. Докажи дека $a_n\in\mathbb{Z}$ за $n=1,2,3,...$ ако и само ако $a,b,\frac{a^2+b^2+c}{ab}\in\mathbb{Z}$.

Решение. Рекурентната релација можеме да ја запишеме во обликот $a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2=c$, за $n\geq 2$. Оттука имаме $a_{n+2}a_n-a_{n+1}^2=c$, па затоа

$$a_{n+2}a_n-a_{n+1}^2=a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2,\ \text{т.е.}\ a_n(a_n+a_{n+2})=a_{n+1}(a_{n-1}+a_{n+1}),$$

од каде добиваме

$$\tfrac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}=\tfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n}=k,\ \text{за}\ n\geq 2.$$

Според тоа,

$$a_{n+1}=ka_n-a_{n-1}, n\geq 2, \qquad (1)$$

каде

$$k=\frac{a_1+a_3}{a_2}=\frac{a_1+\frac{a_2^2+c}{a_1}}{a_2}=\frac{a^2+b^2+c}{ab}.$$

Сега, ако $a,b,\frac{a^2+b^2+c}{ab}\in\mathbb{Z}$, тогаш $a_1=a$ и $a_2=b$ се цели броеви и од (1) следува дека $a_n\in\mathbb{Z}$ за $n=1,2,3,\dots$.

Обратно, нека $a_n\in\mathbb{Z}$ за $n=1,2,3,\dots$. Тогаш $a_1=a$ и $a_2=b$ се цели броеви и нека $k=\frac{a_1+a_3}{a_2}$ е рационален број, при што $k=\frac{p}{q}$, каде p и $q>0$ се заемно прости броеви. Да претпоставиме дека $q>1$. Од $pa_2=qa_1+qa_3$ следува $q\,|\,a_2$. Аналогно од $pa_n=qa_{n-1}+qa_{n+1}$ по индукција следува дека $q\,|\,a_n$ за $n\geq 2$. Од последното равенство следува дека за $n\geq 3$, q^2 го дели a_n, за $n\geq 4$, q^3 го дели a_n итн. за $n\geq s+1$, q^s го дели a_n. Од друга страна од равенството

$$a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2=c,$$

кое важи за секој $n\geq 2$ следува дека c е цел број и дека q^s е делител на c за секој природен број s, што е противречност. Според тоа, $q=1$ и $k=\frac{a_1+a_3}{a_2}=\frac{a^2+b^2+c}{ab}$ е цел број.

Забелешка. На натпреварот требаше да се докаже само првата импликација.

Сојузен натпревар 1981

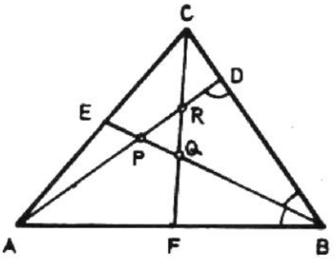
I година

1. Природните броеви a,b,c се такви што $a+c$ и $b+c$ се квадрати на последователни природни броеви. Докажи дека $ab+c$ и $ab+a+b+c$ се исто така квадрати на последователни природни броеви.

Решение. Нека $a+c=k^2$ и $b+c=(k+1)^2$, каде k е природен број. Тогаш $a=k^2-c$ и $b=(k+1)^2-c$, па лесно се добива дека

$$ab+c=(k^2-c)((k+1)^2-c)+c=(k(k+1)-c)^2,$$
$$ab+a+b+c=(k(k+1)-c+1)^2.$$

2. Од едно теме на остроаголен триаголник е конструирана висината, од друго симетралата на аголот и од третото тежишната линија. Нивните пресечни точки се темиња на нов триаголник. Докажи дека овој триаголник не може да е рамностран.



Решение. Нека AD е висина, BE симетралата на $\measuredangle ABC$ и CF тежишна линија на триаголникот ABC и нека P,Q,R се редоследно пресеците на отсечките AD и BE, BE и CF, CF и AD, цртеж десно. Нека претпоставиме дека триаголникот PQR е рамностран. Тогаш $\measuredangle BPD=60^\circ$, па затоа $\measuredangle PBD=\measuredangle PBA=30^\circ$ и $\measuredangle ABC=60^\circ$. Бидејќи $\measuredangle BQF=\measuredangle PQR=60^\circ$, добиваме

$$\measuredangle QFB=180^\circ-\measuredangle BQF-\measuredangle QBF=90^\circ.$$

Според тоа, $CF\perp AB$, т.е. тежишната линија CF воедно е и висина на триаголникот ABC. Сега од $CF=CF, FA=FB$ и $\measuredangle CFA=\measuredangle CFB=90^\circ$ следува дека триаголниците CFA и CFB се складни. Затоа $\measuredangle BAC=\measuredangle ABC=60^\circ$, па добиваме $\measuredangle ACB=180^\circ-(60^\circ+60^\circ)=60^\circ$. Според тоа триаголникот ABC е рамностран, па отсечките AD,BE и CF се сечат во една точка, што противречи на условот на задачата.

3. Првите четири члена на една низа се 1, 9, 8, 1. Секој следен член на низата е еднаков на последната цифра на збирот на претходните четири члена.

а) Дали во низата се појавува четворката 1, 2, 3, 4?

б) Дали во низата некогаш се повторува почетната четворка?

Решение. Нека $a_1, a_2, a_3, ...$ е дадената низа броеви. Користејќи ги првите четири члена и правилото за добивање на следните членови на низата заклучуваме дека a_n е парен ако и само ако $n \equiv 3(\mathrm{mod}\,5)$.

а) Од претходно изнесеното следува дека од произволни четири поседователни членови на низата најмногу еден е парен. Затоа во низата не се појавува четворката 1, 2, 3, 4.

б) Нека $x_1 = (a_1, a_2, a_3, a_4)$, $x_2 = (a_2, a_3, a_4, a_5)$, $x_3 = (a_3, a_4, a_5, a_6)$, ... Бидејќи четворки чии елементи се 0, 1, 2, ..., 9 има 10^4, заклучуваме дека во низата $x_1, x_2, x_3, ...$ има еднакви членови. Нека k е најмалиот индекс за кој постои природен број $n > k$ таков што важи $x_k = x_n$, т.е.

$$a_k = a_n, a_{k+1} = a_{n+1}, a_{k+2} = a_{n+2}, a_{k+3} = a_{n+3}.$$

Нека претпоставиме дека $k > 1$. Бидејќи

$$a_{k-1} + a_k + a_{k+1} + a_{k+2} \equiv a_{k+3}(\mathrm{mod}\,10),$$

$$a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + a_{n+2} \equiv a_{n+3}(\mathrm{mod}\,10),$$

добиваме $a_{k-1} \equiv a_{n-1}(\mathrm{mod}\,10)$, и како $a_{k-1}, a_{n-1} \in \{0,1,2,...,9\}$ следува $a_{k-1} = a_{n-1}$. Затоа $x_{k-1} = x_{n-1}$, што е противречност. Според тоа, $k = 1$, т.е. првата четворка која се повоторува во низата е $x_1 = (1,9,8,1)$.

4. Еден глушец грицка парче сирење во форма на коцка со раб 3. Коцката сирење е поделена на 27 мали коцки со раб 1. Глешецот го грицка сирењето така што почнува со мала коцка во едно од темињата. Откако ќе ја изеде целата мала коцка, преминува на соседната, која со тукуштo изедената мала коцка има заеднички ѕид. Дали глушецот може да го изеде целото парче сирење така што последната мала коцка е таа што е во центарот на големата коцка?

Решение. Секоја од малите коцки да ја означиме со броевите 0 и 1 така што аголните коцки се означени со 0, а секои коцки кои имаат заеднички ѕид се означени со различни броеви. Тогаш централната коцка е означена со 1. Глушецот ги јаде коцките кои редоследно се означени со броевите 0, 1, 0, 1, 0, 1, ... Дваесет и седмиот член во оваа низа е 0, па затоа централната коцка не може да биде последна изедена.

II година

1. Нека a, b, c, $a > 0$ се цели броеви, такви што равенката $ax^2 + bx + c = 0$ има две различни решенија во интервалот $(0,1)$. Докажи дека $a \geq 5$ и најди пример на таква равенка за $a = 5$.

Решение. Нека x_1 и x_2 се нули на квадратниот трином $f(x) = ax^2 + bx + c$, такви што $0 < x_1 < x_2 < 1$. Тогаш $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, $f(0) > 0$ и $f(1) > 0$.

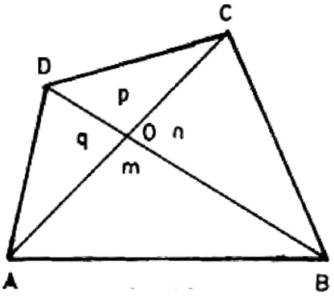
Бидејќи $f(0)$ и $f(1)$ се природни броеви, а броевите x_1 и x_2 се различни меѓу себе, добиваме

$$1\leq f(0)f(1)=a^2 x_1x_2(1-x_1)(1-x_2)<a^2(\tfrac{x_1+x_2+1-x_1+1-x_2}{4})^4=\tfrac{a^2}{16},$$

т.е. $a^2>16$. Но, a е природен број, па од последното неравенство следува $a\geq 5$. Понатаму, $f(0)f(1)<\frac{25}{16}$, па следува $f(0)=f(1)=1$, т.е. $c=a+b+c=1$. Ако $a=5$, тогаш $c=1, b=-5$.

Лесно се проверува дека квадратниот трином $f(x)=5x^2-5x+1$ има две различни реални нули кои припаѓаат на интервалот $(0,1)$.

2. Еден конвексен четириаголник е поделен со дијагоналите на четири триаголници, чии плоштини се изразуваат со природни броеви. Докажи дека производот на тие четири броја е точен квадрат.



Решение. Нека O е пресекот на дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$ и нека m,n,p,q се редоследно плоштините на триаголниците ABO, BCO, CDO, DAO. Бидејќи триаголниците ABO и BCO имаат заеднчка висина од темето B, а триаголниците CDO и DAO имаат заедничка висина од темето D, добиваме

$$\frac{m}{n}=\frac{AO}{CO}=\frac{q}{p}.$$

Затоа $mp=nq$, односно $mnpq=(nq)^2$.

3. Во множеството цели броеви реши ја равенката:

$$y^4-x(x+1)(x+2)(x+3)=1.$$

Решение. Дадената равенка последователни е еквивалентна на равенките:

$$(x^2+3x+1)^2-y^4=0,$$
$$16(x^2+3x+1-y^2)(x^2+3x+1+y^2)=0,$$
$$((2x+3)^2-(2y)^2-5)((2x+3)+(2y)^2-5)=0,$$
$$(2x+3-2y)(2x+3+2y)-5)((2x+3)+(2y)^2-5)=0.$$

Подредениот пар (x,y) цели броеви е решение на последната равенка ако и само ако е исполнет еден од следниве осум случаи:

1) $2x+2y+3=1, 2x-2y+3=5$,

2) $2x+2y+3=5, 2x-2y+3=1$,

3) $2x+2y+3=-1, 2x-2y+3=-5$,

4) $2x+2y+3=-5, 2x-2y+3=-1$,

5) $2x+3=1, 2y=2$,

6) $2x+3=1, 2y=-2$,

7) $2x+3=-1, 2y=2$,

8) $2x+3=-1, 2y=-2$.

Решавајќи ги овие осум системи равенки ги добиваме следниве решенија на дадената равенка:

$$(0,-1), (0,1), (-3,1), (-3,-1), (-1,1), (-1,-1), (-2,1), (-2,-1).$$

4. Множеството $\{1,2,...,100\}$ е поделено на седум меѓусебно дисјунктни подмножества. Докажи дека постојат броеви a,b,c,d кои припаѓаат на исто подмножество, меѓу кои има најмалку три различни броја и за кои важи $a+b=c+d$.

Решение. Нека $\{1,2,...,100\}=A_1\cup A_2\cup...\cup A_7$, каде $A_1,A_2,...,A_7$ се заемно дисјунктни множества. Од $7\cdot 14<100$, следува дека барем едно од множествата $A_1,A_2,...,A_7$ содржи барем 15 елементи. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a_1,a_2,...,a_{15}\in A_1$ и $a_1<a_2<...<a_{15}$. Нека

$$x_1=a_2-a_1, x_2=a_3-a_2,..., x_{14}=a_{15}-a_{14}.$$

Да претпоставиме дека меѓу природните броеви $x_1, x_2,..., x_{14}$ нема еднакви. Тогаш

$$a_5-a_1=x_1+x_2+...+x_{14}\geq 1+2+...+14=105, \text{ т.е. } a_5\geq 105+a_1\geq 106,$$

што е противречност. Според тоа, барем два од броевите $x_1, x_2,..., x_{14}$ се еднакви меѓу себе. Нека $x_k=x_n$, каде $1\leq k<n\leq 14$. Тогаш $a_{k+1}-a_k=a_{n+1}-a_n$, односно

$$a_{k+1}+a_n=a_{n+1}+a_k, \text{ каде } 1\leq k<k+1\leq n<n+1\leq 15.$$

Сега може да земеме $a=a_{k+1}, b=a_n, c=a_{n+1}, d=a_k$.

III година

1. Докажи дека за секој природен број n, бројот $\mathrm{tg}^{2n}15^\circ+\mathrm{ctg}^{2n}15^\circ$ може да се запише како збир на квадрати на три последователни природни броја.

Решение. Прво да забележиме дека $\mathrm{tg}15^\circ=2-\sqrt{3}$ и $\mathrm{ctg}15^\circ=2+\sqrt{3}$. Нека $a_n=\mathrm{tg}^{2n}15^\circ+\mathrm{ctg}^{2n}15^\circ$. Тогаш

$$\begin{aligned}a_n-2&=(\mathrm{ctg}^n 15^\circ-\mathrm{tg}^n 15^\circ)^2=((2+\sqrt{3})^n-(2-\sqrt{3})^n)^2\\&=\{2\sqrt{3}[\tbinom{n}{1}2^{n-1}+\tbinom{n}{3}2^{n-3}\cdot 3+\tbinom{n}{5}2^{n-5}3^2+...]\}^2=3m^2,\end{aligned}$$

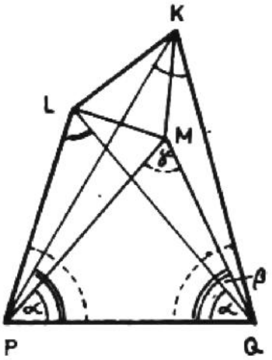
каде m е природен број. Затоа

$$a_n=3m^2+2=(m-1)^2+m^2+(m+1)^2.$$

2. Од иста страна на отсечката PQ конструирани се три триаголници KPQ, QLP и PQM такви што

$$\measuredangle QPM = \measuredangle PQL = \alpha,\ \measuredangle PQM = \measuredangle QPK = \beta,\ \measuredangle PQK = \measuredangle QPL = \gamma\ ,$$

при што важи $\alpha < \beta < \gamma$. Докажи дека триаголникот KLM е сличен со првите три.



Решение. Лесно се добива дека $\measuredangle KPL = \measuredangle KQM = \gamma - \beta$ и

$$\frac{PL}{QM} = \frac{PL}{PQ}\frac{PQ}{QM} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} = \frac{PK}{QK}\ .$$

Оттука следува дека триаголниците PKL и QKM се слични, па затоа

$$\frac{KL}{KM} = \frac{PK}{QK} = \frac{\sin\gamma}{\sin\beta}\ ,$$

т.е. $\frac{KL}{\sin\gamma} = \frac{KM}{\sin\beta}$. Аналогно се докажува $\frac{KL}{\sin\gamma} = \frac{LM}{\sin\alpha}$, па добиваме

$$\frac{MK}{\sin\beta} = \frac{KL}{\sin\gamma} = \frac{LM}{\sin\alpha}\ ,$$

од каде што следува дека триаголниците LMK и PQM се слични.

3. Нека S_1 е низата природни броеви 1, 2, 3, 4, 5, ... Дефинираме низа S_{n+1} ($n = 1, 2, ...$) со помош на низата S_n, зголемувајќи ги за 1 оние членови на низата S_n кои се деливи со n. Така, на пример S_2 е низата 2, 3, 4, 5, 6, ..., S_3 е низата 3, 3, 5, 5, 7, 7, ... Докажи дека во низата S_n точно првите $n-1$ членови се еднакви на n ако и само ако n е прост број.

Решение. Нека $S_n(k)$ е $k-$тиот член на низата S_n. Од условот на задачата следува дека за секој природен број n важи $S_n(1) \leq S_n(2) \leq S_n(3) \leq ...$ (бидејќи ако во некој чекор некој член на низата се зголеми за 1, тогаш се зголемуваат и сите членови кои се еднакви на него).

Нека n е прост број. Тогаш

$$S_n(1) = n = S_2(n-1) = S_3(n-1) = ... = S_{n-1}(n-1) = S_n(n-1)\,.$$

Бидејќи $S_2(n) = n+1$, добиваме дека $S_n(n) \geq n+1$. Сега, бидејќи низата $S_n(k)$ е монотоно растечка, добиваме

$$S_n(1) = S_n(2) = ... = S_n(n-1) = n < S_n(n)\ .$$

Нека n не е прост број и нека p е неговиот најмал прост делител. Тогаш

$$S_2(n-1) = S_p(n-1) = n < n+1 = S_{p+1}(n-1) \leq S_n(n-1)\,,$$

т.е. $(n-1)-$виот член на низата S_n е поголем од n.

4. Нека $A_1, A_2, ..., A_{1066}$ се подмножества на конечното множество M такви што $|A_j| > \frac{1}{2}|M|$ за $1 \le j \le 1066$. Докажи дека постојат елементи $x_1, x_2, ..., x_{10}$ од M такви што секој A_j содржи барем еден од елементите $x_1, x_2, ..., x_{10}$. (Со $|S|$ е означен бројот на елементите на множеството S.)

Решение. Бидејќи $|A_j| > \frac{1}{2}|M|$ за $1 \le j \le 1066$, добиваме

$$\sum_{j=1}^{1066} |A_j| > 533|M|.$$

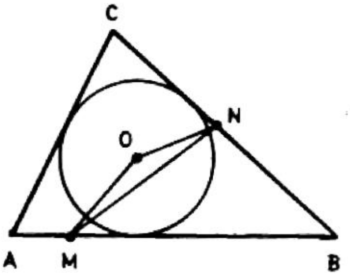
Од принципот на Дирихле следува дека постои елемент $x_1 \in M$ кој се содржи најмалку во 534 од множествата $A_1, A_2, ..., A_{1066}$. Овие 534 множества да ги означиме со $B_{533}, B_{534}, ..., B_{1066}$. Аналогно добиваме дека постојат елементи $x_2, x_3, ..., x_{10}$ такви што

$$x_2 \in B_{266} \cap B_{267} \cap ... \cap B_{532}, \qquad x_3 \in B_{133} \cap B_{134} \cap ... \cap B_{265},$$
$$x_4 \in B_{66} \cap B_{67} \cap ... \cap B_{132}, \qquad x_5 \in B_{33} \cap B_{34} \cap ... \cap B_{65},$$
$$x_6 \in B_{16} \cap B_{17} \cap ... \cap B_{32}, \qquad x_7 \in B_8 \cap B_9 \cap ... \cap B_{15},$$
$$x_8 \in B_4 \cap B_5 \cap B_6 \cap B_7, \qquad x_9 \in B_2 \cap B_3, \quad x_{10} \in B_1,$$

каде $(B_1, B_2, ..., B_{1066})$ е некоја пермутација на множеството $\{A_1, A_2, ..., A_{1066}\}$. Тогаш секое од множествата $A_1, A_2, ..., A_{1066}$ сдржи барем еден од елементите $x_1, x_2, ..., x_{10}$.

IV година

1. Права дели триаголник на два дела со еднакви плоштини и периметри. Докажи дека таа права минува низ центарот на впишаната кружница во тој триаголник.



Решение. Нека правата p ги сече страните AB и BC соодветно во точките M и N, при што триаголникот MBN и четириаголниот $AMNC$ имаат еднакви плоштини и периметри. Нека претпоставиме дека центарот O на впишаната кружница не припаѓа на правата MN. Да го разгледаме случајот кога точката O припаѓа на внатрешноста на четириаголникот $AMNC$. Нека r е радиусот на впишаната кружница. Тогаш

$$P_{AMONC} = \frac{1}{2}(MA + AC + CN)r = \frac{1}{2}(NB + BM) = P_{MONB},$$

а како $P_{AMONC} + P_{MON} = P_{AMNC} = P_{MBN} = P_{MONB} - P_{MON}$, добиваме $P_{MON} = 0$, што е противречност. Аналогно се разгледува случајот кога точката O припаѓа на внатрешноста на триаголникот BMN.

Да забележиме дека истиот доказ важи и кога $A=M$.

2. Нека a и b се позитивни реални броеви. Определи го минимумот на изразот $|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}|$, ако x и y се комплексни броеви такви што $|x|=a$ и $|y|=b$.

Решение. Имаме:

$$|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}|^2=\frac{x+y}{1+x\overline{y}}\frac{\overline{x}+\overline{y}}{1+\overline{x}y}=\frac{|x|^2+|y|^2+2\operatorname{Re}(x\overline{y})}{1+|x\overline{y}|^2+2\operatorname{Re}(x\overline{y})}$$

$$=1+\frac{|x|^2+|y|^2-1-|x\overline{y}|^2}{1+|x\overline{y}|^2+2\operatorname{Re}(x\overline{y})}=1+\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{1+|x\overline{y}|^2+2\operatorname{Re}(x\overline{y})},$$

при што

$$\min\{\operatorname{Re}(x\overline{y}):|x|=a,|y|=b\}=-ab,$$

$$\max\{\operatorname{Re}(x\overline{y}):|x|=a,|y|=b\}=ab.$$

Ако барем еден од броевите a и b е еднаков на 1,тогаш

$$\min_{|x|=a,\,|y|=b}|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}|=1.$$

Ако двата броеви a и b се помали или двата се поголеми од 1, тогаш

$$\min_{|x|=a,\,|y|=b}|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}|=[1-\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{1+a^2b^2-2ab}]^{\frac{1}{2}}=|\frac{a-b}{1-ab}|.$$

Ако еден од броевите a и b е помал од 1, а другиот е поголем од 1, тогаш

$$\min_{|x|=a,\,|y|=b}|\frac{x+y}{1+x\overline{y}}|=[1-\frac{(a^2-1)(b^2-1)}{1+a^2b^2+2ab}]^{\frac{1}{2}}=\frac{a+b}{1+ab}.$$

3. Нека $F_n=a^n\sin nA+b^n\sin nB+c^n\sin nC$, каде a,b,c,A,B,C се реални броеви, а $A+B+C=k\pi$, за некој $k\in\mathbb{Z}$. Докажи дека од $F_0=F_1=0$ следува дека за секој природен број n важи $F_n=0$.

Решение. Нека

$$z_1=a(\cos A+i\sin A),$$
$$z_2=b(\cos B+i\sin B),$$
$$z_3=c(\cos C+i\sin C),$$
$$E_n=a^n\cos nA+b^n\cos nB+c^n\cos nC,$$
$$G_n=E_n+iF_n.$$

Од Моавровата формула следува

$$G_n=a^n(\cos nA+i\sin nA)+b^n(\cos nB+i\sin nB)+c^n(\cos nC+i\sin nC)$$
$$=z_1^n+z_2^n+z_3^n.$$

Да забележиме дека $G_0=3$ и дека според условот на задачата G_1 и G_2 се реални броеви. Понатаму,

$$\begin{aligned}G_n &= (z_1+z_2+z_3)(z_1^{n-1}+z_2^{n-1}+z_3^{n-1})-z_1(z_2^{n-1}+z_3^{n-1})\\ &\quad -z_2(z_3^{n-1}+z_1^{n-1})-z_3(z_1^{n-1}+z_2^{n-1})\\ &= G_1G_{n-1}-(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)(z_1^{n-2}+z_2^{n-2}+z_3^{n-2})+z_1z_2z_3(z_1^{n-3}+z_2^{n-3}+z_3^{n-3})\\ &= G_1G_{n-1}+\tfrac{(G_2-G_1^2)G_{n-2}}{2}+abcG_{n-3}(\cos(A+B+C)+i\sin(A+B+C)).\end{aligned}$$

Ако претпоставиме дека за некој $n\geq 3$ броевите $G_{n-3}, G_{n-2}, G_{n-1}$ се реални, тогаш бидејќи $\sin(A+B+C)=0$ од горната рекурзија следува дека и G_n е реален број. Сега, од принципот на математичка индукција следува дека сите членови на низата (G_n) се реални, па затоа за секој природен број n важи $F_n=0$.

4. Множеството $S=\{1,2,...,n\}$ прво е разбиено на m, а потоа на $m+k$ непразни подмножества, при што $k>0$. Докажи дека најмалку $k+1$ елемент на множеството S првиот пат се наоѓале во побројно подмножество отколку вториот пат.

Решение. Нека $\{A_1, A_2,..., A_m\}$ и $\{B_1, B_2,..., B_{m+k}\}$ се разбивања на множеството S. За секој $i\in S$ со x_i да го означиме бројот на елементите на оној од блоковите $A_1, A_2,..., A_m$ кој го содржи бројот i, а со y_i бројот на елементите на оној од блоковите $B_1, B_2,..., B_{m+k}$ кој го содржи бројот i.

Да претпоставиме дека броевите $|A_1|,|A_2|,...,|A_m|$ се меѓусебно различни. Тогаш меѓу броевите $x_1, x_2,..., x_n$ има точно $|A_j|$ кои се еднакви на $|A_j|$, каде $j\in\{1,2,...,m\}$. Затоа

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=m.$$

Лесно се покажува дека ова равенство важи и во случај кога меѓу броевите $|A_1|,|A_2|,...,|A_m|$ има еднакви. Аналогно се докажува дека

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{y_i}=m+k.$$

Според тоа,

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{y_i}-\frac{1}{x_i}\right)=k.$$

Бидејќи сите собирци $\frac{1}{y_i}-\frac{1}{x_i}$, $i=1,2,...,n$ се помали од 1, добиваме дека најмалку $k+1$ од овие собироци се позитивни броеви. Доволно е да забележиме дека бројот $\frac{1}{y_i}-\frac{1}{x_i}$ е позитивен ако и само ако $x_i>y_i$, т.е. ако и само ако елементот i првиот пат се наоѓал во поброен блок отколку вториот пат.

Мала олимпијада 1981

1. Даден е природен број $n\geq 3$. За n-членото множество реални броеви S со $A(S)$ да го онзачиме множеството од сите строго растечки трочлени аритметички низи составени од елементите на S. Колку најмногу елементи може да има множеството $A(S)$?

Решение. Нека $S=\{a_1,a_2,...,a_n\}$ и $a_1<a_2<...<a_n$. Бројот на трочлени аритметики низи на елементи од множеството S чиј среден елемент е еднаков на членот a_k не е поголем од $\min\{k-1,n-k\}$, бидејќи првиот член на тие низи може да биде некој од елементите $a_1,a_2,...,a_{k-1}$, а последниот некој од елементите $a_{k+1},...,a_n$. Затоа множеството $A(S)$ има најмногу

$$\sum_{k=1}^{n}\min\{k-1,n-k\}=x_n$$

елементи. Ако $n=2m$, тогаш

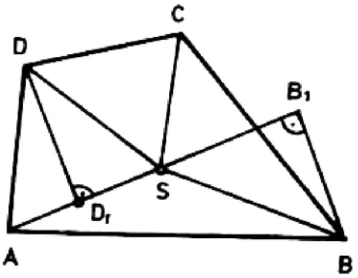
$$x_n=x_{2m}=2(1+2+...+(m-1))=m(m-1)=[\tfrac{n-1}{2}][\tfrac{n}{2}].$$

Ако $n=2m+1$, тогаш

$$x_n=x_{2m+1}=2(1+2+...+(m-1))+m=m^2=[\tfrac{n-1}{2}][\tfrac{n}{2}].$$

Притоа, ако $S=\{1,2,...,n\}$, тогаш множеството $A(S)$ има точно x_n елементи.

2. Во внатрешноста на четириаголникот $ABCD$ постои точка S таква што отсечките SA,SB,SC,SD го делат четириаголникот на четири дела со еднакви плоштини. Докажи дека една од дијагоналите на овој четириаголник ја полови другата.



Решение. Триаголниците ASD и ASB имаат еднакви плоштини и заедничка страна AS, па затоа висините DD_1 и BB_1 на овие триаголници се еднакви, цртеж десно. Затоа средината на дијагоналата BD припаѓа на правата AS. На сличен начин се докажува дека средината на дијагоналата BD припаѓа на правата CS, а правите BS и DS ја содржат средината на отсечката AC. Ако правите AS и CS се совпаѓаат, тогаш дијагоналата AC ја полови дијагоналата BD. Ако S е единствена заедничка точка на правите AS и CS, тогаш S е средина на дијагоналата BD, правите BS и DS не се совпаѓаат, па дјагоналата BD ја полови дијагоналата AC.

3. Нека a и b се ненегативни цели броеви. Докажи дека $5a \geq 7b$ ако и само ако постојат ненегативни цели броеви x, y, z, t такви што

$$x + 2y + 3z + 7t = a,$$
$$y + 2z + 5t = b.$$

Решение. Нека (x, y, z, t) е решение на дадениот систем во множеството ненегативни броеви. Тогаш

$$5a - 7b = 5(x + 2y + 3z + 7t) - 7(y + 2z + 5t) = 5x + 3y + z \geq 0.$$

Нека $5a \geq 7b$ и $b = 5k + r$, каде $k \geq 0$, $r \in \{0,1,2,3,4\}$. Едно решение (x, y, z, t) во множеството ненегативни цели броеви е:

$(a - 7k, 0, 0, k)$, ако $r = 0$;

$(a - 7k - 2, 1, 0, k)$, ако $r = 1$,

$(a - 7k - 3, 0, 1, k)$ ако $r = 2$,

$(a - 7k - 5, 1, 1, k)$ ако $r = 3$,

$(a - 7k - 6, 0, 2, k)$ ако $r = 4$.

Лесно се проверува дека секоја од наведените четворки е решение на системот. Ненегативноста на x координатата, на пример во случајот $r = 3$, ја докажуваме на следниов начин: Од условот $5a \geq 7b$ следува $5a \geq 35k + 21$. Бидејќи a е природен број следува $5a \geq 35k + 25$, па затоа $a \geq 7k + 5$, т.е. $a - 7k - 5 \geq 0$. Слично се постапува и во останатите случаи.

Сојузен натпревар 1982

I година

1. Ако за природните броеви a,b,c,d важи $(a+b)^2+a=(c+d)^2+c$, докажи дека $a=c$ и $b=d$.

Решение. Ако $a=c$, тогаш од даденото равенство лесно следува дека $b=d$. Нека претпоставиме дека $a\neq c$, на пример, $a<c$. Тогаш даденото равенство можеме да го запишеме во видот

$$(a+b+c+d)(a+b-c-d)=c-a. \qquad (1)$$

Бидејќи $c-a>0$, од (1) добиваме $a+b-c-d>0$. Но дадените броеви се природни, па затоа мора да важи $a+b-c-d\geq 1$. Сега, од (1) следува $c-a\geq a+b+c+d$, односно $2a+b+d\leq 0$, што не е можно, бидејќи дадените броеви се природни. Значи, мора да важи $a=c$, па затоа и $b=d$.

2. Дадени се n сијалици $(n>13)$ од кои секоја има свој прекинувач. Дозволено е истовремено да се промени состојбата на точно 13 сијалици. На почетокот некои сијалици се запалени, а некои не се запалени.

а) Дали е можно да се изгаснат сите сијалици?

б) Кој е најмалиот број чекори за гасење на сите сијалици ако $n=111$ и ако сите сијалици на почетокот се запалени?

Решение. а) Можно е. Ако на почетокот бројот на запалените сијалици е поголем од 13, тогаш гаснејќи по 13 сијалици секогаш можеме да дојдеме до состојба кога имаме помалку од 13 запалени сијалици. Јасно, во овој случај доволно е задачата да ја решиме при претпоставка дека $n=14$. Прво нека претпоставиме дека свети само една сијалица. Тогаш можеме да постапиме на начин како што е прикажано во табелата:

запалени	1	12	3	10	5	8	7	6	9	4	11	2	13	0
угасени	13	2	11	4	9	6	7	8	5	10	3	12	1	14

Јасно, ако бројот на запалените сијалици на почетокот бил било кој друг број меѓу 2 и 12 треба ба соодветното место да се приклучиме во постапката која ја опишува табелата.

б) Заради $8\cdot 13<111$, добиваме дека осум чекори не се доволни сите сијалици да се угасат. Ќе докажеме дека се доволни девет чекори. Во првите седум чекори гасиме по 13 сијалици и преостануваат 20 запалени. Во осмиот чекор гасиме 10 и палиме 3 сијалици и во деветтиот чекор ги гасиме преостанатите 13 запалени сијалици.

3. Во рамнината се дадени шест кругови, такви што центарот на ниту еден од нив не е содржан во унијата на преостанатите пет. Докажи дека пресекот на овие шест кругови е празно множество.

Решение. Нека претпоставиме дека дадените кругови имаат заедничка точка P. Да ја поврземе точката P со центрите $S_1, S_2, ..., S_6$ на дадените кругови. Барем еден од аглите S_iPS_j ќе биде помал или еднаков на 60°. Тогаш во триаголникот S_iPS_j еден од преостанатите два агли, на пример $\measuredangle S_jS_iP$, е поголем или еднаков на 60°, т.е. е поголем или еднаков на $\measuredangle S_iPS_j$. Затоа $PS_j \geq S_iS_j$. Но, точката P припаѓа на кругот со центар S_j, па следува дека и точката S_i припаѓа на тој круг, што противречи на претпоставката.

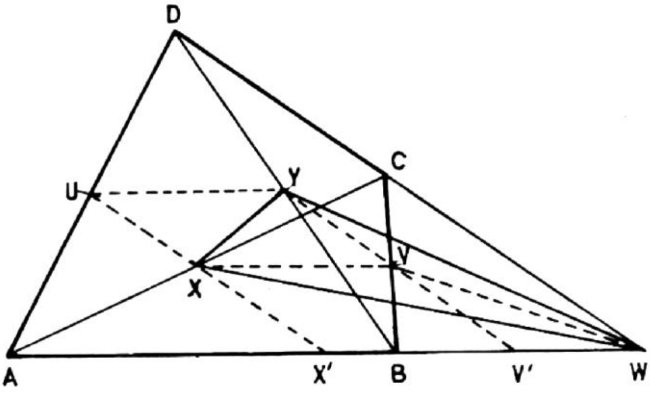
4. Нека правите определени со спротивните страни AB и CD на конвексниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката W и нека X и Y се средините на дијагоналите AC и BD. Докажи дека $P_{ABCD} = 4P_{XYW}$.

Решение. Нека, заради определеност, правите AB и CD се сечат на онаа страна од точката A на која е точката B. Нека U и V се соодветно средините на страните AD и BC на четириаголникот $ABCD$, види цртеж. Отсечката XV е средна отсечка на триаголникот ABC, па затоа таа е паралелна и е еднаква на половина од отсечката AB. Точките C и W се еднакво оддалечени од правата XV, па затоа

$$P_{XWV} = P_{XVC} = \tfrac{1}{4} P_{ABC}. \qquad (1)$$

Аналогно се добива

$$P_{YVW} = P_{YBV} = \tfrac{1}{4} P_{DBC}. \qquad (2)$$



Останува уште да ја определиме плоштината на триаголникот XVY. Отсечките XV и YU се средни отсечки на триаголниците ABC и ABD, кои имаат заедничка основа AB, па затоа четириаголникот $XVYU$ е паралелограм и важи $P_{XVY} = \frac{1}{2} P_{XVYU}$. Нека X' и V' се точките во кои правите UX и YV соодветно ја сечат правата AB. Паралелограмот $X'V'YU$ има основа еднаква на половина од основата на триаголникот ABD и висина еднаква на половина од неговата висина, па затоа $P_{X'V'YU}=\frac{1}{2}P_{ABD}$. Слично, $P_{X'V'VX}=\frac{1}{2}P_{ABC}$. Затоа,

$$P_{XVY}=\frac{1}{2}P_{XVYU}=\frac{1}{2}(P_{X'V'YU}-P_{X'V'VX})=\frac{1}{4}(P_{ABD}-P_{ABC}). \qquad (3)$$

Сега од равенствата (1), (2) и (3), добиваме

$$P_{XWY}=P_{XWV}+P_{YVW}+P_{XVY}=\frac{1}{4}(P_{ABC}+P_{DBC}+P_{ABD}-P_{ABC})=\frac{1}{4}P_{ABCD},$$

што и требаше да се докаже.

II година

1. Определи го множеството S со најмал број елементи за кое се исполнети следниве услови:

а) $S\subset\{0,1,2,3,...\}$,

б) $1981\in S$,

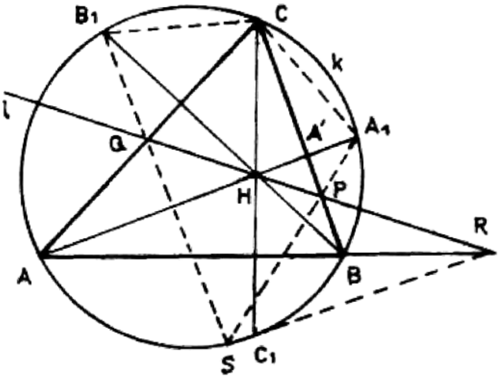
в) Ако $x,y,z\in S$, тогаш остатокот од делењето на $x+y+z$ со 1982 исто така припаѓа на S.

Решение. Ќе докажеме дека сите непарни броеви 1, 3, ..., 1981 припаѓаат на множеството S. Последното следува од б) и в) врз основа на следниве конгруенции:

$$3\cdot 1981\equiv 1979\ (\mathrm{mod}\,1982),$$
$$2\cdot 1981+1979\equiv 1977\ (\mathrm{mod}\,1982),$$
$$2\cdot 1981+1977\equiv 1975\ (\mathrm{mod}\,1982),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$2\cdot 1981+3\equiv 1\ (\mathrm{mod}\,1982).$$

Бидејќи множеството $S=\{1,3,...,1981\}$ ги задоволува сите услови на задачата, тоа воедно е и множеството со најмал број елементи кое ги има наведените својства.

2. Низ ортоцентарот на триаголникот ABC е повлечена права l. Докажи дека правите кои на неа се симетрични во однос на страните на триаголникот се сечат на опишаната кружница околу триаголницата ABC.



Решение. Нека H е ортоцентарот на триаголникот ABC, A_1, B_1, C_1 се точките во кои висините AH,BH,CH ја сечат неговата опишана кружница k и P,Q,R се соодветно точките во кои дадената права l ги сече правите BC,CA, AB, ако тие пресеци постојат, (цртеж десно). Лесно се докажува дека точките H и A_1 се симетрични во однос на правата BC. Навистина, важи $\measuredangle A_1CB=\measuredangle A_1AB$ (перифериски агли на еднакви лаци) и $\measuredangle HCB=\measuredangle A_1AB$ (агли со нормални краци), па ако со A' го означиме подножјето на висината AH имаме $\measuredangle A_1CA'=\measuredangle HCA'$, што значи дека правоаголните триаголници A_1CA' и HCA' се складни. Оттука следува $A'A_1=A'H$. Слично, точките H и B_1 се симетрични во однос на правата CA. Затоа правите , симетрични на правата l во однос на правите BC и CA ги содржат соодветно точките A_1 и B_1. Со S да го означиме пресекот на овие прави. Во четириаголникот A_1CB_1S важи

$$\measuredangle SA_1C+\measuredangle CB_1S=\measuredangle PHC+\measuredangle CHQ=180^\circ,$$

па затоа тој е тетивен, т.е. точката точката S припаѓа на опишаната кружница k околу него.

Слично се докажува дека и правата симетрична на правата l во однос на правата AB ја содржи точката S, т.е. сите три прави се сечат на кружницата k.

3. Нека k,n и $a_1,a_2,...,a_k$ се природни броеви за кои важи

$$a_1<a_2<...<a_k\le n \text{ и } k>[\tfrac{n+1}{2}].$$

Докажи дека постојат броеви i и r такви што $a_i+a_1=a_r$.

Решение. Да ги разгледаме $2k-1>n$ целите броеви

$$a_1,a_2,...,a_k,a_2-a_1,a_3-a_1,...,a_k-a_1$$

кои припаѓаат на интервалот $[1,n]$. Од принципот на Дирихле следува дека некои два од овие броеви се еднакви меѓу себе. Но, $a_i\ne a_j$ за $i\ne j$, па затоа постојат $i,r\in\{1,2,...,k\}$ такви што важи $a_i=a_r-a_1$.

4. Определи реални броеви a и b такви што за произволни реални броеви u и v важи:

$$\max_{0\le x\le 1}|x^2-ux-v|\ge\max_{0\le x\le 1}|x^2-ax-b|.$$

Решение. Лесно се докажува дека $\max\limits_{0\le x\le 1}|x^2-x+\frac{1}{8}|=\frac{1}{8}$. Ќе докажеме дека за произволни реални броеви u и v важи $\max\limits_{0\le x\le 1}|x^2-ux-v|\ge\frac{1}{8}$. Нека претпоставиме дека за некои броеви u и v максимумот на функцијата $f(x)=|x^2-ux-v|$ на интервалот $[0,1]$ е помал од $\frac{1}{8}$, т.е. дека $f(x)<\frac{1}{8}$ за секој $x\in[0,1]$. Тогаш

$$|v|=f(0)<\tfrac{1}{8},\ |\tfrac{1}{4}-\tfrac{u}{2}-v|=f(\tfrac{1}{2})<\tfrac{1}{8},\ |1-u-v|=f(1)<\tfrac{1}{8},$$

од каде што следува

$$\tfrac{1}{2}=|(1-u-v)-2(\tfrac{1}{4}-\tfrac{u}{2}-v)-v|\leq|1-u-v|+2|\tfrac{1}{4}-\tfrac{u}{2}-v|+|v|<\tfrac{1}{8}+2\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{8}=\tfrac{1}{2},$$

што е противречност. Значи, бараните броеви се $a=1, b=-\frac{1}{8}$.

III и IV година

1. Определи ги сите полиноми со целобројни коефициенти $p(x)$, такви што за секој реален број x важи

$$16p(x^2)=[p(2x)]^2.$$

Решение. Нека $p(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0,\ a_n\neq 0$ е бараниот полином. Ако во даденото равенство ставиме $x=0$ добиваме $16a_0=a_0^2$, од што следува $a_0=0$ или $a_0=16$. Од друга страна, ако ги изедначиме коефициентите пред x^{2n} во даденото равенство, тогаш ја добиваме равенката $16a_n=2^{2n}a_n^2$ и како $a_n\neq 0$, добиваме $a_n=\frac{16}{4^n}$. Но, a_n е цел број, па затоа $n=0$ или $n=1$ или $n=2$.

За $n=0$ полиномите се $p(x)=0$ и $p(x)=16$.

За $n=1$ можни полиноми се $p(x)=4x$ и $p(x)=4x+16$. Притоа, само $p(x)=4x$ ги задоволува условите на задачата.

За $n=2$ можни полиноми се $p(x)=x^2+a_1x$ и $p(x)=x^2+a_1x+16$. Со непосредна проверка добиваме $a_1=0$ и само $p(x)=x^2$ ги задоволува условите на задачата.

2. Докажи дека

$$\sqrt[44]{\operatorname{tg}1^\circ\operatorname{tg}2^\circ...\operatorname{tg}44^\circ}<\operatorname{tg}22^\circ30'<\tfrac{1}{44}(\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}2^\circ+...+\operatorname{tg}44^\circ). \qquad (*)$$

Решение. Да означиме $x=22^\circ30'$. Тогаш $\operatorname{tg}x=\sqrt{2}-1$ и $\operatorname{tg}^2x=1-2\operatorname{tg}x$. Од последните две равенства лесно се добива дека за $0^\circ<\alpha<45^\circ$ $(\alpha\neq x)$ важи

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)-2\operatorname{tg}x=\operatorname{tg}\alpha+\tfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}-2\operatorname{tg}x=\tfrac{(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}x)^2}{1+\operatorname{tg}\alpha}>0. \qquad (1)$$

Ако во неравенството (1) последователно ставиме $\alpha=1^\circ,2^\circ,...,22^\circ$ и ги собереме добиените неравенства, го добиваме десното неравенство во (*). Од (1) следува дека за $0^\circ<\alpha<x$ важи

$$1=\operatorname{tg}45^\circ=\tfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}>\tfrac{2\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)}=\tfrac{1-\operatorname{tg}^2x}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)},$$

т.е.

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(45^\circ-\alpha)<\operatorname{tg}^2 x\,.$$

Ако во последното неравенство последователно ставиме $\alpha=1^\circ,2^\circ,...,22^\circ$ и ги помножиме добиените неравенства го добиваме левото неравенство во (*).

3. Нека M е множеството од сите точки во рамнината со целобројни координати и S е некое негово подмножество. За пресликувањето $f:S\to S$ велиме дека е „*соседно*“, ако f е биекција и за секој $P\in S$ точките P и $f(P)$ се соседни. Ако постои „*соседно*“ пресликување $f:S\to S$, докажи дека постои и „*соседно*“ пресликување $g:S\to S$ кое го задоволува условот $g(g(P))=P$ за секој $P\in S$.

Решение. Нека S_1 е подмножеството точки од S кај кои збирот на координатите е парен број, а $S_2=S\setminus S_1$. Тогаш, сите точки на множеството S, кои се соседни на некоја точка $P_1\in S_1$ се во мноижеството S_2, и обратно, сите точки на множеството S кои се соседни на некоја точка $P_2\in S_2$ се во множеството S_1. Затоа рестрикцијата на „*соседно*“ пресликување $f:S\to S$ на множеството S_1 е бикеција во множеството S_2 и рестрикцијата на множеството S_2 е бикеција во множеството S_1. Инверзното пресликување f^{-1} исто така е биекција, па затоа пресликувањето $g:S\to S$ определено со

$$g(P)=\begin{cases} f(P), & P\in S_1,\\ f^{-1}(P), & P\in S_2,\end{cases}$$

е соседно и важи $g(g(P))=P$ за секој $P\in S$.

4. Докажи дека постои точно една четворка (x,y,z,t) природни броеви со следниве својства:

а) $1<x<y<z<t$,

б) производот на било кои три од тие броеви зголемен за 1 е делив со четвртиот број.

Решение. Од условот на задачата следува

$$xyz+1=at,\quad xyt+1=bz,\quad xzt+1=cy,\quad yzt+1=dx,$$

за некои природни броеви a,b,c,d . Оттука непосредно следува дека броевите x,y,z,t се по парови замено прости. Ако ги помножиме овие равенства добиваме дека бројот $xyz+xyt+xzt+yzt+1$ е делив со $xyzt$. Затоа

$$S=\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z}+\tfrac{1}{t}+\tfrac{1}{xyzt}$$

е природен број. Според условот на здачата $x\geq 2, y\geq 3, z\geq 4, t\geq 5$, од каде следува

$$0<S\leq\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{120}=\frac{155}{120},$$

па затоа $S=1$. Ако $x\geq 3$, тогаш $y\geq 4, z\geq 5, t\geq 6$ и

$$1=S\leq\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{360}=\frac{343}{360},$$

што е противречност. Значи, $x=2$ и

$$1=\frac{2}{y}+\frac{2}{z}+\frac{2}{t}+\frac{1}{yzt}.$$

Броевите y,z,t се непарни бидејќи се заемно прости со 2. Ако $y>3$, тогаш $y\geq 5$, $z\geq 7, t\geq 9$ и

$$1\leq\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{9}+\frac{1}{315}=\frac{287}{315},$$

што е противречност. Значи, $y=3$ и

$$1=\frac{6}{z}+\frac{6}{t}+\frac{1}{zt},$$

од каде добиваме $z=6+\frac{37}{t-6}$. Бидејќи $z<t$ од последната равенка лесно следува дека $z=7$ и $t=43$.

Непосредно се проверува дека четворката $(2,3,7,43)$ ги задоволува условите на задачата.

Мала олимпијада 1982

1. Нека p е прост број поголем од 2. За $k=1,2,...,p-1$ со a_k да го означиме остатокот од делењето на бројот k^p со p^2. Докажи дека

$$a_1+a_2+...+a_{p-1}=\frac{p^3-p^2}{2}. \qquad (1)$$

Решение. Имаме:

$$a_1+a_2+\ldots+a_{p-1}=(a_1+a_{p-1})+(a_2+a_{p-2})+\ldots+(a_{\frac{p-1}{2}}+a_{\frac{p+1}{2}}).$$

За $k\in\{1,2,...,p-1\}$ изразот $k^p+(p-k)^p$ го развиваме по биномната формула и добиваме дека истиот е делив со p^2. Бидејќи $a_k<p^2$ и $a_{p-k}<p^2$, заклучуваме дека $a_k+a_{p-k}=p^2$, односно важи (1).

2. Определи ги сите полиноми $P_n(x)$ од видот

$$P_n(x)=n!x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+(-1)^n n(n+1)$$

со целобројни коефициенти за чии корени $x_i, i=1,2,...,n$ важи

$$x_i\in[i,i+1],\ \text{за}\ i=1,2,...,n.$$

Решение. За $n=1$ единствен полином од бараниот облик е $P_1(x)=x-2$ и тој ги задоволува условите на задачата.

За $n=2$ треба да најдеме цел број a_1 таков да

$$P_2(x)=2x^2+a_1x+6$$

ги задоволува условите на задачата. Тогаш за корените на овој полином важи

$$1\le x_1\le 2\le x_2\le 3,\quad x_1+x_2=-\tfrac{a_1}{2},\ x_1x_2=3.$$

Од овие неравенства добиваме $0\le x_2-x_1\le 2$, па затоа

$$0\le (x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=\tfrac{1}{4}a_1^2-12\le 4\text{, т.е. }48\le a_1^2\le 64$$

и исто така и $a_1<0$. Но, a_1 е цел број, па од последните неравенства следува $a_1=-7$ или $a_1=-8$. Лесно се проверува дека за најдените вредности на a_1 условите на задачата се исполнети.

Ќе докажеме дека за $n\ge 3$ не постои полином за кој се исполнети условите на задачата. Нека е

$$\begin{aligned}P_n(x)&=n!x^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+(-1)^n n(n+1)\\&=n!(x-x_1)(x-x_2)...(x-x_n).\end{aligned}$$

Тогаш

$$(-1)^n n(n+1)=n!(-1)^n x_1x_2...x_n,$$

па од $x_i\in[i,i+1]$, за $i=1,2,...,n$ следува

$$n!\le x_1x_2...x_n=\tfrac{(n+1)!}{(n-1)!}\le \tfrac{n+1}{2}<n<n!,$$

што е противречност.

Значи, бараните полиноми се $x-2$, $2x^2-7x+6$ и $2x^2-8x+6$.

3. Дадени се реални броеви $x_k>1, k=1,2,...,2n$. Докажи дека интервалот $[0,2]$ содржи најмногу $\binom{2n}{n}$ збирови од видот $\sum_{k=1}^{2n}a_kx_k$, каде $a_k\in\{-1,1\}$, за секој $k=1,2,...,2n$.

Решение. Да забележиме дека на секој збир $\sum_{k=1}^{2n}a_kx_k$ соодветствува разбивање $S\cup T$ на множеството $\{1,2,...,2n\}$ определено со $k\in S\Leftrightarrow a_k=-1, k\in T\Leftrightarrow a_k=1$. Нека

$$\sigma_1=\sum_{k=1}^{2n}a_kx_k\ ,\ \sigma_2=\sum_{k=1}^{2n}b_kx_k$$

се два такви збира, $a_k,b_k\in\{-1,1\}$ и нека се $S_1\cup T_1$ и $S_2\cup T_2$ соодветните разбивања на множеството $\{1,2,...,2n\}$. Нека претпоставиме дека едното од множествата S_1 и S_2 го содржи другото, на пример $S_1\subset S_2$. Тогаш збировите σ_1 и σ_2 се разликуваат за двократниот збир на неколку броеви x_i, што значи за повеќе од два, па затоа не може и двата да припаѓаат на интервалот $[0,2]$. Значи, ако $\sigma_1, \sigma_2, ... \sigma_m$ се сите збирови од дадениот вид кои припаѓаат на интервалот $[0,2]$ и $S_1 \cup T_1, S_2 \cup T_2, ..., S_m \cup T_m$ се соодветните разбивања на множеството $\{1,2,...,2n\}$, тогаш множествата $S_1, S_2, ..., S_n$ се неспоредливи во однос на инклузијата, т.е. ниту едно од нив не се содржи во некое друго како подмножество. Конечно, ако се искористи третата задача од Малата олимпијада во 1978 заклучуваме дека $m \le \binom{2n}{n}$.

Сојузен натпревар 1983

I година

1. Определи ги сите природни броеви n такви што користејќи ја точно еднаш секоја од цифрите 0, 1, 2, 3, ..., 9 може да се запишат броевите n^3 и n^4.

Решение. Ако n е едноцифрен број, тогаш $n^3 \le 9^3 = 729$, $n^4 \le 9^4 = 6561$, т.е. во записите на броевите n^3 и n^4 има помалку од 7 цифри. Ако во записот на n има повеќе од две цифри, тогаш $n^3 \ge 100^3 = 10^6$, $n^4 \ge 100^4 = 10^8$, па во записите на броевите n^3 и n^4 има повеќе од $7+9=16$ цифри. Нека во записите на броевите n^3 и n^4 секоја од цифрите 0, 1, 2, ..., 9 се појавува точно еднаш. Од претходно изнесеното следува дека бројот n е двоцифрен. Понатаму, лесно следува дека n^3 е четирицифрен, а n^4 е шестцифрен број. Од условот $1000 \le n^3 \le 9999$ следува $10 \le n \le 21$, а од условот $100000 \le n^4 \le 999999$ следува $18 \le n \le 31$. Според тоа, $n \in \{18, 19, 20, 21\}$. Секој од броевите 20^3 и 20^4 завршува на 0, а секој од броевите 21^3 и 21^4 завршува на 1. Понатаму, во бројот $19^4 = 130321$ има повторување на цифрите, па затоа останува уште да провериме дали $n=18$ е решение на задачата. Имаме. $18^3 = 5832$ и $18^4 = 104876$, т.е. бројот 18 ги задоволува условите на задачата и тоа е нејзиното единствено решение.

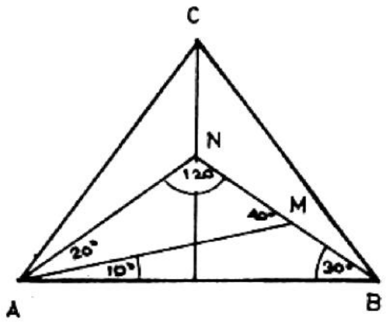
2. Табела од 1983 реда се формира на следниов начин: Во првиот ред се запишуваат редоследно броевите 1, 9, 8, 3; потоа под секој број се запишува збирот на преостанатите броеви од неговиот ред, намален за тој број. Кој број се наоѓа на првото место во 1983-тиот ред?

Решение. Со a, b, c, d да ги означиме броевите кои се наоѓаат во $k-$тиот ред, а со s збирот на тие броеви. Тогаш во $(k+1)-$от ред се наоѓаат броевите $s-2a,$ $s-2b, s-2c, s-2d$. Првиот број во $(k+2)-$от ред е еднаков на

$$(s-2b)+(s-2c)+(s-2d)-(s-2a) = 2(s-(b+c+d))+2a = 4a,$$

а останатите броеви се $4b, 4c, 4d$. Според тоа, првите броеви во првиот, вториот, третиот, ..., 1983 ред се еднакви редоследно на $1, 4, 4^2, ..., 4^{991}$. Значи, бараниот број е 2^{1982}.

3. Даден е триаголник ABC во кој $CA = CB$ и $\measuredangle ACB = 80^\circ$. Нека M е точка во внатрешноста на триаголникот ABC таква што $\measuredangle MBA = 30^\circ$ и $\measuredangle MAB = 10^\circ$. Определи го $\measuredangle AMC$.

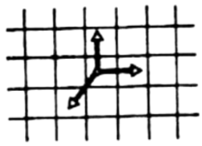


Решение. Нека N е пресек на правата BM и висината од темето C на триаголникот ABC, цртеж десно. Триаголникот ABN е рамнокрак со основа AB и агол при врвот

$$\measuredangle ANB = 180^\circ - 2\cdot 30^\circ = 120^\circ .$$

Понатаму, $\measuredangle ANC = \measuredangle BNC = 120^\circ$. Бидејќи $AN = AN$, $\measuredangle ACN = \measuredangle AMN = 40^\circ$ и $\measuredangle ANC = \measuredangle ANM$, заклучуваме дека триаголниците ANC и ANM се складни. Затоа важи $AC = AM$, т.е. триаголникот ACM е рамнокрак со основа CM. Конечно,

$$\measuredangle AMC = \tfrac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle CAM) = \tfrac{1}{2}(180^\circ - 40^\circ) = 70^\circ .$$



4. Ќе ја наречеме *делфин* фигурата која на шаховската табла се движи едно поле нагоре или едно поле надесно или едно поле дијагонално лево долу (цртеж десно). Дали може делфинот тргнувајќи од долното лево аголно поле да помине точно по еднаш на секое поле и да се врати на почетното поле?

1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1

Решение. Полињата на шаховската 8×8 табла да ги означиме со броевите 0, 1 и 2, како на цртежот десно. На движењето на делфинот по таблата да му ја придружиме низата броеви со кои редоследно се означени полињата на кои делфинот застанува. Да забележиме дека при произволно движење добиваме низа 0, 1, 2, 0, 1, 2, ... Според тоа, по секој потез чиј реден број при делење со 3 дава остаток 1, делфинот се наоѓа на поле кое е означено со бројот 1. Според тоа, по 64 потези делфинот ќе се најде на поле означено со бројот 1, т.е. тој не може да е на почетното поле, бидејќи истото е означено со бројот 0.

II година

1. Ако x, y, z се позитивни броеви такви што $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1$, докажи дека

$$(x-1)(y-1)(z-1)\geq 8 .$$

Решение. Од условот на задачата следува $xy+yz+zx=xyz$. Понатаму, од условот на задачата и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$x+y+z=(x+y+z)(\tfrac{1}{x}+\tfrac{1}{y}+\tfrac{1}{z})\geq 3(xyz)^{\frac{1}{3}}\cdot 3(\tfrac{1}{xyz})^{\frac{1}{3}}=9 .$$

Според тоа,

$$(x-1)(y-1)(z-1)=xyz-xy-yz-zx+x+y+z-1\geq 8\,.$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=3$.

2. Докажи дека за секој реален број $x\geq\frac{1}{2}$ постои цел број n таков што

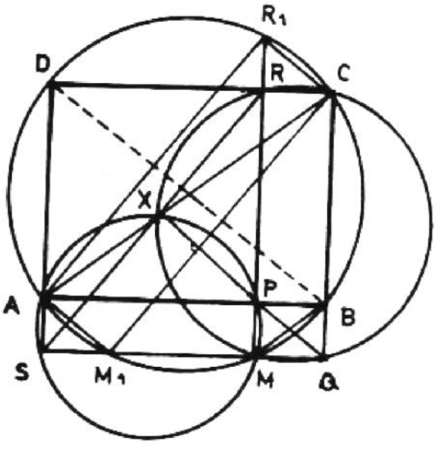
$$|\,x^2-n\,|\leq\sqrt{x-\tfrac{1}{4}}\,.$$

Решение. Нека $a_n=\frac{(n-1)^2+n^2}{2}$, $n\in\mathbb{N}$. Тогаш $a_1=\frac{1}{2}$, низата (a_n) е монотоно растечка и тежи кон бескрајност. За секој $x\geq\frac{1}{2}$ постои природен број n таков што $a_{n-1}\leq x\leq a_n$. Последните неравенства важат ако и само ако

$$f(x)=(x-a_{n-1})(x-a_n)=x^2-(2n^2+1)x+(n^4+\tfrac{1}{4})=(x-n^2)^2-(x-\tfrac{1}{4})\leq 0\,,$$

од каде следува $|\,x^2-n\,|\leq\sqrt{x-\frac{1}{4}}$.

3. Даден е правоаголник $ABCD$. На помалиот лак AB на кружницата опишана околу $ABCD$ избрана е произволна точка M и низ неа се повлечени две прави паралелни со страните на правоаголникот. Едната од тие прави ги сече отсечките AB и CD соодветно во точките P и R, а другата ги сече правите BC и DA соодветно во точките Q и S. Докажи дека правите PQ и RS се заемно нормални и се сечат на дијагоналата на правоаголникот $ABCD$.



Решение. Нека M_1 е втората пресечна точка на правата QS и кружницата k опишана околу правоаголникот $ABCD$, R_1 е втората пресечна точка на кружницата k и правата MR, а X е пресечната точка на правите PQ и RS, цртеж десно. Бидејќи $\measuredangle M_1MR_1=90^\circ$ следува дека M_1R_1 е дијаметар на кружницата k. (Да забележиме дека M_1R_1 е дијаметар на k и кога $M_1\equiv M$.) Бидејќи AC е дијаметар на k, заклучуваме дека AM_1CR_1 е правоаголник, па затоа $M_1C\perp R_1C$. Триаголниците R_1RC и MPB се симетрични во однос на симетралата на отсечката BC, а триаголниците ASM_1 и BQM се симетрични во однос на симетралата на отсечката AB. Затоа $RC=PB=MQ=SM_1$, а како $RC\parallel SM_1$, добиваме дека SM_1CR е паралелограм, па следува $RS\parallel CM_1$.

Понатаму важи $PR_1 = PR + RR_1 = PR + PM = BC + QB = QC$ и како $PR_1 \parallel QC$, добиваме дека $PQCR_1$ е паралелограм и оттука следува $PQ \parallel R_1C$. Бидејќи $PQ \parallel R_1C$, $RS \parallel CM_1$ и $CM_1 \perp R_1C$, добиваме $PQ \perp RS$.

Аналогно се докажува дека $PS \perp QR$.

б) Од условот на задачата и претходно докажаното следува дека аглите QMR, QXR и QCR се прави. Според тоа, точките Q, C, R, X, M се конциклични. Аглите SAP, SXP и SMP се исто така прави, па и точките S, M, P, X, A се конциклични. Затоа

$$\measuredangle RXC = \measuredangle RQC = \measuredangle APS = \measuredangle AXS,$$

(во првото равенство имаме агли над ист лак, во второто агли со нормални краци и во третото агли над ист лак), па како точката X припаѓа на правата SR, таа припаѓа и на правата AC. Според тоа, пресекот на правите PQ и SR припаѓа на дијагоналата AC.

4. Правоаголник со димензии $1 \times n$ и составен од n единечни квадрати ($n \geq 4$), редоследно нумерирани со $1, 2, ..., n$. На полињата $n-2, n-1, n$ се наоѓа по еден жетон. Двајца играчи ја играат следнава игра: наизменично префрлаат по еден жетон на произволно слободно поле со помал реден број. Играта ја губи играчот кој е на ред, а не може да направи потез. Докажи дека првиот играч може да игра така што сигурно победува, без разлика како игра вториот играч.

Решение. Стратегијата на првиот играч е следната: Ако n е непарен број, тогаш тој во првиот потез го преместува жетонот од полето $n-2$ на полето 1. Тогаш меѓу жетонот на полето 1 и жетоните на полињата $n-1$ и n се наоѓаат парен број полиња (поточно $n-3$ полиња). Ако n е парен број, тогаш првиот играч во првиот потез го преместува жетонот од полето n на полето 1, при што меѓу жетонот на полето 1 и жетоните на полињата $n-2$ и $n-1$ останува парен број полиња (поточно $n-4$ полиња). Во натамошниот тек на играта по секој потез на вториот играч првиот играч го преместува последниот жетон на поле кое е соседно на полето на кое стои другиот жетон, пред или зад него, така што бројот на празните полиња меѓу првиот и другите два жетони останува парен. (Ако вториот играч го помести последниот жетон за две полиња напред, па двата жетони и понатаму се соседни, тогаш и првиот играч повторува таков потез и притоа по два такви потези бројот на слободните полиња меѓу првиот и другите два жетона се намалува за два.) По конечен број потези, при што последниот потез го игра првиот играч, бројот на слободните полиња меѓу жетонот на полето 1 и другите два жетони е еднаков на нула. Според тоа, опишаната стратегија на првиот играч е победничка.

III и IV година

1. Нека p и q се комплексни броеви. Решенијата на равенката $x^2+px+q=0$ се по модул еднакви на 1, ако и само ако $|p|\leq 2, |q|=1$ и $\frac{p^2}{q}$ е ненегативен реален број. Докажи!

Решение. Нека x_1 x_2 се решенија на равенката $x^2+px+q=0$.

Да претпоставиме дека $|x_1|=|x_2|=1$. Тогаш

$$\begin{aligned}
&|p|=|x_1+x_2|\leq|x_1|+|x_2|=2,\\
&|q|=|x_1x_2|=|x_1||x_2|=1,\\
&\frac{p^2}{q}=\frac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2}=2+\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_2}=2+x_1\overline{x_2}+\overline{x_1}x_2\\
&\quad=2+2\operatorname{Re}(x_1\overline{x_2})\geq 2+2(-1)=0.
\end{aligned}$$

Да претпоставиме дека $|p|\leq 2, |q|=1$ и $\frac{p^2}{q}$ е ненегативен реален број. Нека r е комплексен број таков што $r^2=q$. Тогаш $|r|=1$. Да означиме $k=\frac{p}{r}$. Бидејќи $\frac{p^2}{q}=\frac{p^2}{r^2}=k^2$ е ненегативен број, добиваме дека k е реален број и важи

$$|k|=|\tfrac{p}{r}|=|p|\leq 2, k^2\leq 4.$$

Понатаму,

$$\begin{aligned}
&x_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}=\frac{-kr\pm\sqrt{k^2r^2-4r^2}}{2}=\frac{-k\pm i\sqrt{4-k^2}}{2}r,\\
&|x_1|=|x_2|=\frac{|r|}{2}\sqrt{k^2+(4-k^2)}=1.
\end{aligned}$$

2. Функцијата f е определена на множеството цели броеви и го задоволува условот

$$f(x)=\begin{cases} x-10, & x>100,\\ f(f(x+11)), & x\leq 100.\end{cases}$$

Докажи дека $f(x)=91$ за $x\leq 100$.

Решение. Да забележиме дека важи

$$f(100)=f(f(100+11))=f(f(111))=f(101)=101-10=91.$$

Да претпоставиме дека $f(x)=91$, за секој $x\in\{k+1,k+2,...,100\}$, каде k е цел број помал од 100. Ако $90<k<100$, тогаш

$$f(k)=f(f(k+11))=f(91)=91,$$

а ако $k\leq 90$, тогаш

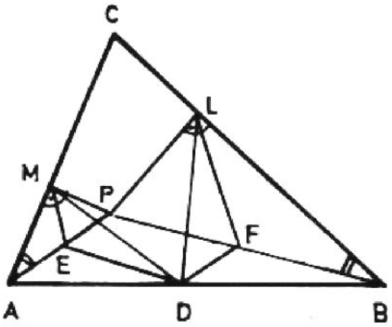
$$f(k)=f(f(k+11))=f(91)=91.$$

Од принципот на математичка индукција добиваме дека за секој цел број $k\le 100$ важи $f(k)=91$.

3. Нека P е точка во внатрешноста на триаголникот ABC таква што $\measuredangle PAC=\measuredangle PBC$ и нека M и L се подножјата на нормалите повлечени од P соодветно на правите AC и BC. Ако D е средина на страната AB, докажи дека $DL=DM$.

Решение. Нека E и F се соодветно средините на отсечките PA и PB, цртеж десно. Бидејќиу отсечките DE и DF се средни линии на триаголникот ABP, четириаголникот $EDFP$ е паралелограм, а како отсечките AP и BP се хипотенузи на правоаголните триаголници AMP и BLP, добиваме $ME=EP=DF$, $DE=FP=LF$,

$$\measuredangle MED=\measuredangle MEP+\measuredangle PED=2\measuredangle PAC+\measuredangle DFP$$
$$=2\measuredangle PBC+\measuredangle DFP=\measuredangle DFL.$$



Затоа триаголниците MED и DFL се складни, па важи $DM=DL$.

4. Низата природни броеви (x_n) е определена со

$$a_1=2,\quad a_{n+1}=[\tfrac{3}{2}a_n],\ (n=1,2,3,...).$$

Докажи дека низата (a_n) има бесконечно многу непарни и бесконечно многу парни членови.

Решение. а) Да претпоставиме дека во низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има конечно многу непарни броеви. Тогаш постои индекс m, таков што a_n е парен број за секој $n\ge m$. Нека $a_m=2k_0, k_0\in\mathbb{N}$. Тогаш, $a_{m+1}=[\tfrac{3}{2}a_m]=[\tfrac{3}{2}2k_0]=3k_0$. Бидејќи a_{m+1} е парен број, добиваме $k_0=2k_1, k_1\in\mathbb{N}$. Понатаму $a_{m+2}=[\tfrac{3}{2}a_{m+1}]=[\tfrac{3}{2}3k_0]=3^2k_1$. Бидејќи a_{m+2} е парен број, добиваме $k_1=2k_2, k_2\in\mathbb{N}$ и $k_0=2^2k_2$. Продолжувајќи ја опишаната постапка добиваме дека за секој $s\in\mathbb{N}$ постои $k_s\in\mathbb{N}$, таков што $k_0=2^s k_s$. Ова противречи на фактот дека степенот на бројот 2 во каноничниот запис на k_0 е конечен број.

б) Да претпоставиме дека во низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ има конечно многу парни броеви. Тогаш постои индекс m, таков што a_n е непарен број за секој $n\ge m$. Нека $a_m=2k_0+1, k_0\in\mathbb{N}$. Тогаш $a_{m+1}=[\tfrac{3}{2}a_m]=[\tfrac{3}{2}(2k_0+1)]=3k_0+1$. Бидејќи a_{m+1} е непарен број, добиваме $k_0=2k_1,\ k_1\in\mathbb{N}$. Понатаму, како и во случајот под а), претпоставката доведува до противречност.

Сојузен натпревар 1984

I година

1. Бројот a е добиен така што броевите од 1 до 101 се запишани еден по друг. Докажи дека a е сложен број. Дали a е квадрат на природен број?

Решение. Во броевите од 1 до 99 секоја цифра освен нулата се појавува по 20 пати, па затоа збирот на цифрите на бројот a еднаков на

$$20(1+2+...+9)+1+1+1=903.$$

Според тоа, бројот a е делив со 3, но не е делив со 9. Значи, а е сложен број и не е квадрат на природен број.

2. Нека a,b,c се три меѓусебно различни реални броеви кои го задоволуваат равенството

$$\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b}=0.$$

Докажи дека

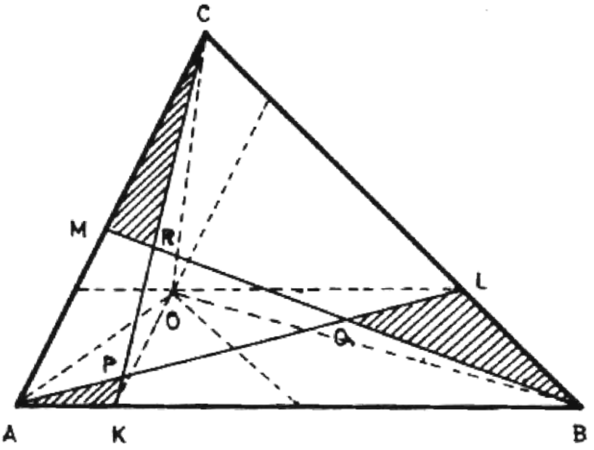
$$\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}=0.$$

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned}0&=(\frac{a}{b-c}+\frac{b}{c-a}+\frac{c}{a-b})(\frac{1}{b-c}+\frac{1}{c-a}+\frac{1}{a-b})\\&=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}+\frac{(a+b)(a-b)+(b+c)(b-c)+(c+a)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}\\&=\frac{a}{(b-c)^2}+\frac{b}{(c-a)^2}+\frac{c}{(a-b)^2}.\end{aligned}$$

3. Нека O е внатрешна точка на триаголникот ABC. Нека K,L,M се точки во кои правите кои минуваат низ O, а се паралелни со страните CA,AB,BC ги сечат редоследно страните AB,BC,CA. Понатаму, нека P,Q,R се точките во кои редоследно се сечат правите CK и AL, AL и BM, BM и CK. Докажи дека збирот на плоштините на триаголниците AKP, BLQ и CMR е еднаков на плоштината на триаголникот PQR.

Решение. Триаголниците ABL и ABO имаат заедничка основа и еднакви висини, па затоа $P_{ABL}=P_{ABO}$, види цр-



теж. Слично важи $P_{BCM}=P_{BCO}$ и $P_{CAK}=P_{CAO}$. Затоа

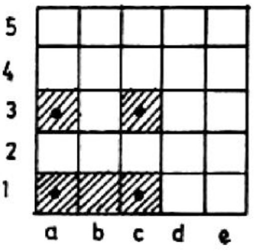
$$P_{ABC}=P_{ABO}+P_{BCO}+P_{CAO}=P_{ABL}+P_{BCM}+P_{CAK}.$$

Според тоа,

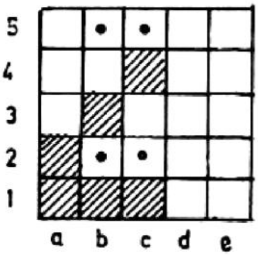
$$\begin{aligned}P_{PQR}&=P_{ABC}-(P_{ABL}+P_{BCM}+P_{CAK})+P_{AKP}+P_{BLQ}+P_{CMR}\\&=P_{AKP}+P_{BLQ}+P_{CMR}.\end{aligned}$$

4. Квадрат со страна 5 е поделен на 25 единечни квадрати и секој од нив е обоен со една од две бои. Докажи дека постојат четири истобојни единечни квадрати чии центри се темиња на правоаголник со страни паралелни на страните на квадратот. Докажи дека тврдењето на важи за квадрат со страна 4.

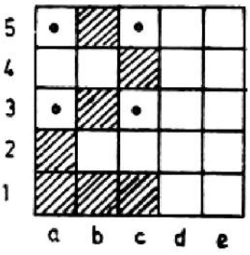
Решение. Редовите на дадената табела да ги означиме со 1, 2, 3, 4, 5, а колоните со a,b,c,d,e, аналогно како вообичаените ознаки на шаховската табла (цртежи а), б) и в)). Нека боите споменати во задачата се сина (сините полиња се штрафираните) и црвени. Во првата редица најмалку три полиња се истобојни и заради определеност да претпоставиме дека тоа се полињата $a1,b1,c1$ кои се сини. Ако во било која редица од 2 до 5 во првите три колони има две сини полиња (на пример како на цртежот а), полињата $a3$ и $b3$), тогаш бараниот правоаголник е определен.



а)



б)

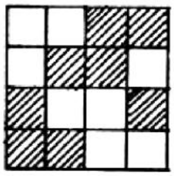


в)

Затоа да претпоставиме дека во секоја од следниве четири тројки

$$(a2,b2,c2),\quad (a3,b3,c3),\quad (a4,b4,c4),\quad (a5,b5,c5)$$

барем по две полиња се црвени. Ако во една од тие тројки сите полиња се црвени (на цртежот б) тоа е тројката $(a5,b5,c5)$), тогаш еднобоен правоаголник лесно се определува. Ако во секоја од тие четири тројки има точно по две црвени полиња, тогаш имаме три можни распореди на црвените полиња, па од принципот на Дирихле следува барем во две од нив тие полиња се исто распоредени, што повторно го дава бараниот правоаголник. На цртежот в) тоа е правоаголникот $a3,c3,a5,c5$.



Дека тврдењето не важи за квадрат со страна 4 покажува цртежот десно.

II година

1. Нека p_n е $n-$тиот прост број и нека $\pi(n)$ е бројот на простите броеви кои не се поголеми од n. Ако

$$A=\{n+p_n \mid n\in\mathbb{N}\} \text{ и } B=\{n+\pi(n)+1 \mid n\in\mathbb{N}\}$$

докажи дека $A\cap B=\varnothing$ и $A\cup B=\mathbb{N}\setminus\{1\}$.

Решение. Од дефиницијата на функцијата π следува:

i) $\pi(p_k)=k$ за секој $k\in\mathbb{N}$,

ii) $\pi(n)\leq\pi(n+1)$, за секој $n\in\mathbb{N}$,

iii) $\pi(n)<\pi(n+1)$, ако $n+1$ е прост број.

Нека претпоставиме дека за некои m и n важи

iv) $m+p_m=n+\pi(n)+1$.

Можни се два случаи: $p_m\leq n$ и $p_m>n$. Ако $p_m\leq n$, тогаш ако се земе предвид дека $m=\pi(p_m)\leq\pi(n)$ добиваме

$$m+p_m\leq n+\pi(n)<n+\pi(n)+1,$$

што противречи на *iv*). Ако $p_m>n$, тогаш од $m=\pi(p_m)>\pi(n)$ следува $m\geq\pi(n)+1$ и $m+p_m>n+\pi(n)+1$ што противречи на *iv*). Според тоа $A\cap B=\varnothing$.

Ќе докажеме дека $A\cup B=\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Јасно, $1\notin A,B$ и $2\in B$. Нека $n>2$ е произволен природен број кој не припаѓа на множеството A. Ќе докажеме дека $n\in B$. Бидејќи постои $m\in\mathbb{N}$ т.ш. $m+p_m<n<m+1+p_{m+1}$, т.е. p, добиваме дека $\pi(n-m-1)=m$, па значи

$$n=\pi(n-m-1)+(n-m-1)+1\in B.$$

2. Ако реалните броеви x,y,z ги задоволуваат равенствата

$$x+y+z=2 \text{ и } xy+yz+zx=1,$$

докажи дека тие припаѓаат на интервалот $[0,\frac{4}{3}]$.

Решение. Од $x+y+z=2$ следува $x+y=2-z$, а од $xy+yz+zx=1$ следува

$$xy=1-z(x+y)=1-z(2-z)=(1-z)^2.$$

Затоа реалните броеви x и y се решенија на квадратната равенка по t:

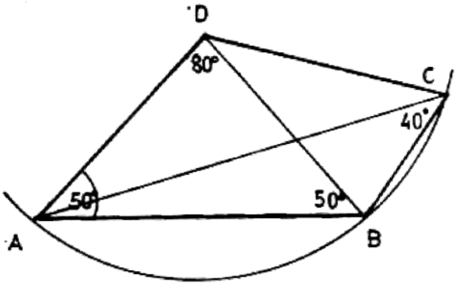
$$t^2+(z-2)t+(1-z)^2=0,$$

што значи дека таа има ненегативна дискриминанта, т.е. $(z-2)^2-4(1-z)^2\geq 0$. Отука следува $z(4-3z)\geq 0$, што е еквивалентно со $z\in[0,\frac{4}{3}]$. Аналогно се докажува дека броевите x и y припаѓаат на интервалот $[0,\frac{4}{3}]$.

3. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$ таков што

$$\measuredangle ABD=50^\circ, \measuredangle ADB=80^\circ, \ \measuredangle ACB=40^\circ, \measuredangle DBC=\measuredangle BDC+30^\circ.$$

Пресметај го $\measuredangle DBC$.



Решение. Бидејќи во триаголникот ABD важи $\measuredangle ABD=50^\circ$ и $\measuredangle ADB=80^\circ$, добиваме $\measuredangle DAB=50^\circ$. Затоа $DA=DB$ (цртеж десно). Сега, бидејќи

$$\measuredangle ADB=80^\circ=2\measuredangle BCA$$

и точките C и D се од иста страна на правата AB, заклучуваме дека точката C припаѓа на кружницата со центар D и радиус $DA=DB$. Затоа триаголникот BCD е рамнокрак, па од

$$\measuredangle BDC+2\measuredangle DBC=180^\circ \text{ и } \measuredangle DBC=\measuredangle BDC+30^\circ$$

следува дека $\measuredangle DBC=70^\circ$.

4. Во некоја држава меѓу секои два града постои еднонасочна авионска линија. Докажи дека постои град од кој во секој друг град може да се стигне со најмногу едно преседнување.

Решение. Тврдењето на задачата ќе го докажеме со математичка индукција. Не е тешко да се провери дека тврдењето важи за држава со најмногу три града. Ќе претпоставиме дека тврдењето важи за држава со n градови и ќе докажеме дека тоа важи за произволна држава со $n+1$ град.

Градовите да ги означиме со $A_1,A_2,...,A_{n+1}$. Според индуктивната претпоставка во делот од државата кој ги содржќи само градовите $A_1,A_2,...,A_n$ постои град (нека тоа е, на пример, градод A_n) од кој во секој друг град $A_i, i=1,2,...,n-1$ може да се стигне со најмногу едно преседнување. Во натамошните разгледувања $A_i \to A_j$ ќе значи дека авионска линија води од градот A_i во градот A_j.

Ако важи $A_n \to A_{n+1}$, тогаш A_n е градот со саканото својство. Нека претпоставикме дека важи $A_{n+1} \to A_n$. Јасно, од градот A_n тргнува барем една авионска линија. Градовите $A_1,A_2,...,A_{n-1}$ ги нумерираме така што да важи $A_n \to A_i$ за $i=1,2,...,k$ и $A_i \to A_n$ за $i=k+1,...,n-1$, каде $k \in \{1,2,...,n-1\}$. Ако за некој $i \in \{1,2,...,k\}$ важи $A_i \to A_{n+1}$, тогаш повторно A_n е град со саканото својство. Ако $A_{n+1} \to A_i$ за секој $i \in \{1,2,...,k\}$, тогаш градот A_{n+1} е таков што од него до секој друг град може да се стигне со најмногу едно преседнување. Навистина, за да од него стигнеме во некој од градовите A_j, $j=k+1,...,n-1$, можеме наместо маршрутата $A_n \to A_i \to A_j$, која според индуктивната претпоставка постои за некој $i \in \{1,2,...,k\}$, да ја користиме маршрутата $A_{n+1} \to A_i \to A_j$.

III и IV година

1. Определи низа (a_n) која го задоволува условот

$$1+\sum_{d|n}(-1)^{\frac{n}{d}}a_d=0,\ n=1,2,3,\dots.$$

Решение. Лесно се проверува дека важи

$$a_1=1, a_2=2, a_3=0, a_4=4, a_5=0, a_6=0, a_7=0, a_8=8, a_9=0.$$

Ќе докажеме дека

$$a_n=\begin{cases} n, & n=2^k, \text{ за некој } k\in\mathbb{N}_0, \\ 0, & n\neq 2^k, \text{ за секој } k\in\mathbb{N}_0. \end{cases}$$

За $n=1$ тврдењето е точно. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за сите природни броеви помали или еднакви на некој $n\in\mathbb{N}$. Нека $n+1=2^r s$, каде s е непарен број. Можни се два случаи.

а) $s=1$, т.е. $n+1=2^r$. Тогаш условот на задачата, со користење на индуктивната претпоставка, се сведува на

$$1+(1+2+4+...+2^{r-1})-a_{n+1}=0,$$

од каде што следува $a_{n+1}=2^r=n+1$.

б) $s>1$. Сега од условот на задачата следува

$$1+(1+2+4+...+2^{r-1})-2^r-a_{n+1}=0,$$

од каде што следува $a_{n+1}=2^r-2^r=0$.

Со тоа наведеното тврдење е индуктивно докажано.

2. Докажи дека за секој природен број n равенката

$$(\tfrac{\sqrt{5}-1}{2})^n x+(\tfrac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1} y=1$$

има точно едно целобројно решение.

Решение. Да означиме $t=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Имаме $t^2+t+1=0$. Лесно се докажува дека за ниту еден природен број n дадената равенка не може да има повеќе од едно целобројно решение. Навистина, ако за два пара (x,y) и (x',y') цели броеви важи

$$t^n x+t^{n+1}y=1 \text{ и } t^n x'+t^{n+1}y'=1,$$

тогаш важи $t^n(x-x')+t^{n+1}(y-y')=0$, од каде добиваме $x-x'+t(y-y')=0$, од што бидејќи t е ирационален број ќе следува $x=x'$ и $y=y'$.

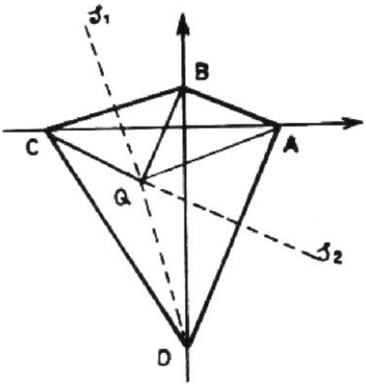
Сега, со индуквија ќе докажеме дека за секој природен број n дадената равенка има целобројно решение. За $n=1$ тоа решение е $x=1, y=1$. Нека претпоставиме дека $t^{n-1}x_{n-1}+t^n y_{n-1}=1$ за целите броеви x_{n-1} и y_{n-1}. Тогаш за $x_n = x_{n-1}+y_{n-1}$ и $y_n = x_{n-1}$ важи

$$\begin{aligned} t^n x_n + t^{n+1} y_n &= t\cdot t^{n-1}x_{n-1}+t^n y_{n-1}+t^2 t^{n-1}x_{n-1} \\ &= (t+t^2)t^{n-1}x_{n-1}+t^n y_{n-1} \\ &= t^{n-1}x_{n-1}+t^n y_{n-1}=1, \end{aligned}$$

па затоа парот (x_n, y_n) цели броеви е решение на равенката $t^n x + t^{n+1} y = 1$, со што доказот е завршен.

Забелешка. Од решението на задачата следува дека $(x_n, y_n) = (f_{n+1}, f_n)$, каде $f_i, i=1,2,3,,...$ е низата Фибоначиеви броеви.

3. Даден е четириаголник $ABCD$. Докажи го тврдењето: Ако постои точка P таква што триаголниците ABP и CDP се еднакво ориентирани рамнокраки правоаголни триаголници со прави агли во темето P, тогаш постои точка Q таква што триаголниците BCQ и DAQ се рамнокраки правоаголни триаголници со прави агли во темето Q.



Решение. Од условот на задачата следува дека ротацијата околу точката P за 90° ја пресликува точката A во точката B, а точката C во точката D, што значи отсечката AC се пресликува во во отсечката BD, па затоа $AC=BD$ и $AC \perp BD$. Воведуваме координатен систем чиј почеток е пресекот O на правите AC и BD, така што точката A припаѓа на позитивниот дел на $x-$оската, а точката B на позитивниот дел на $y-$оската (цртеж десно). Без ограничување на општоста можеме да земеме $AC=BD=1$. Нека точките A и B имаат соодветно координати $(a,0)$ и $(0,b)$. Тогаш точките C и D имаат координати соодветно $(a-1,0)$ и $(0,b-1)$. Правата BC има коефициент на правец $\frac{b}{1-a}$, па симетралата s_1 на отсечката BC која ја содржи средината $(\frac{a-1}{2},\frac{b}{2})$ на оваа отсечка има равенка

$$y-\frac{b}{2}=\frac{a-1}{b}(x-\frac{a-1}{2}).$$

Слично се добива дека симетралата s_2 на отсечката DA има равенка

$$y-\frac{b-1}{2}=\frac{a}{b-1}(x-\frac{a}{2}).$$

Правите s_1 и s_2 се сечат во точката $Q(\frac{a+b-1}{2},\frac{a+b-1}{2})$. Со непосредна проверка се докажува дека $BQ\perp CQ$ и $DQ\perp AQ$, т.е. точката Q ги задоволува условите на здачата.

4. Нека S е множество од n елементи. Определи го најголемиот број m за кој постои фамилија $\{S_1,S_2,...,S_m\}$ од различни непразни подмножества на множеството S таква што пресекот на секои три множества од оваа фамилија е празното множество.

Решение. Нека $\{S_1,S_2,...,S_m\}$ е фамилија различни непразни подмножества на множеството $S=\{1,2,...,n\}$ таква што пресекот на било кои три нејзини елементи е празно множество. Тоа значи дека секој елемент на множеството S ќе биде елемент најмногу на две од множествата $S_1,S_2,...,S_m$. Ако со $|S_i|$ го означиме бројот на елементите на множеството S_i, добиваме дека $\sum_{i=1}^{m}|S_i|\le 2n$.

Од друга страна, ако со k го означиме бројот на едноелементните подмножества S_i кои се членови на дадената фамилија, тогаш $\sum_{i=1}^{m}|S_i|\ge k+2(m-k)$. Од последните две неравенства добиваме $2m\le 2n+k$. Но, $k\le n$, па затоа $2m\le 3n$, односно $m\le[\frac{3n}{2}]$.

Следниов пример

$$\{1\},\{2\},...,\{n\},\{1,2\},\{3,4\},...,\{2[\tfrac{n}{2}]-1,2[\tfrac{n}{2}]\}$$

покажува дека бараната максимална вредност за m е $[\frac{3n}{2}]$.

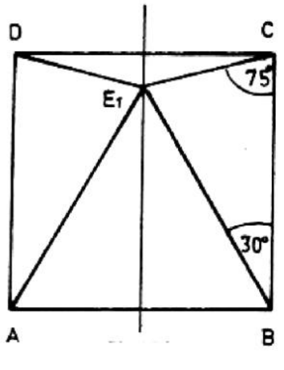
Сојузен натпревар 1985

I година

1. Докажи дека меѓу 39 последователни природни броеви има барем еден број чиј збир на цифри е делив со 11.

Решение. Нека n е природен број. Меѓу броевите $n, n+1, ..., n+19$ постојат два чија цифра на единиците е еднаква на нула. Барем кај еден од овие два броја цифрата на десетките не е еднаква на 9. Нека тоа е бројот a и нека S е збирот на неговите цифри. Тогаш $a+19 \leq n+19+19 = n+38$, а со пресметување на збировите на цифрите на броевите $a, a+1, a+2, ..., a+19$ се добиваат броевите $S, S+1, S+2, ..., S+10$. Бидејќи меѓу 11 последователни броеви постои број кој е делив со 11, заклучуваме дека збирот на цифрите на барем еден од броевите $n, n+1, ..., n+38$ е делив со 11.

2. Во внатрешноста на квадрат $ABCD$ дадена е точка E таква што триаголникот CDE е рамнокрак со агол од 150° кај темето E. Определи ги аглите на триаголникот ABE.



Решение. Нека E_1 е внатрешна точка на квадратот $ABCD$ таква што ABE_1 е рамностран триаголник, цртеж десно. Тогаш CDE_1 и CE_1B се рамнокраки триаголници (соодветно со основи CD и CE_1) и важи

$$\begin{aligned}\measuredangle CE_1D &= 180^\circ - 2\measuredangle E_1CD \\ &= 180^\circ - 2(90^\circ - \measuredangle E_1CB) \\ &= 2\measuredangle E_1CB = 180^\circ - \measuredangle E_1BC \\ &= 180^\circ - (90^\circ - 60^\circ) = 150^\circ.\end{aligned}$$

Затоа $E = E_1$, па сите агли на триаголникот ABE се еднакви на 60°.

3. Во рамнината се дадени 3000 точки такви што никои три не лежат на иста права. Докажи дека постојат 1000 триаголници со темиња во овие точки такви што никои два од нив немаат заеднички точки.

Решение. Нека l е произволна права која не е паралелна на ниту една од правите кои се определени со дадените точки. Да ги означиме со $l_1, l_2, ..., l_{3000}$ правите секоја од кои содржи по една од дадените точки, а сите се паралелни на правата l, но така што за секој $i \in \{1, 2, ..., 2999\}$ меѓу правите l_i и l_{i+1} не се наоѓа ниту една од тие прави. За секој $k \in \{1, 2, ..., 3000\}$ со A_k да ја означиме онаа од дадените точки која припаѓа на правата l_k. Тогаш триаголниците $A_1A_2A_3$, $A_4A_5A_6,...,A_{2998}A_{2999}A_{3000}$ се дисјунктни меѓу себе.

4. Докажи дека за позитивните реални броеви a,b,c,d,e,f важи неравенството

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}+\frac{ef}{e+f}\le\frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}\,.$$

Решение. Нека се x,y,z,u позитивни броеви. Со елементарни трансформации лесно може да го докажеме неравенството

$$\frac{xy}{x+y}+\frac{zu}{z+u}\le\frac{(x+z)(y+u)}{x+y+z+u} \qquad (1)$$

Ако неравенството (1) двапати последователно го примениме, и тоа прво

$$x=a, y=b, z=c, u=d\ ,$$

а потоа

$$x=a+c, y=b+d, z=e, u=f$$

добиваме

$$\frac{ab}{a+b}+\frac{cd}{c+d}+\frac{ef}{e+f}\le\frac{(a+c)(b+d)}{a+b+c+d}+\frac{ef}{e+f}\le\frac{(a+c+e)(b+d+f)}{a+b+c+d+e+f}\,.$$

II година

1. Определи го најмалиот природен број n со својство збировите на цифрите на броевите n и $n+1$ се деливи со 1985.

Решение. Бараниот број е од видот

$$n=c\underset{k}{99...9}8\underset{l}{99...9}$$

при што l е најмалиот природен број за кој важи $1985\,|\,9l-1$, а k е најмалиот природен број таков што за некој $c\in\{1,2,...,9\}$ важи $1985=9(k+1)+c$. Од условот

$$9l-1=1985s=9\cdot 220s+5s$$

добиваме дека $l=1544$ за $s=7$. Понатаму, лесно се добива $k=219, c=5$.

2. Нека функцијата $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е зададена со формулата $f(m)=m+[\sqrt{m}]$. Докажи дека за секој $m\in\mathbb{N}$ постои $k\in\mathbb{N}$ таков што

$$f^k(m)=\underbrace{f(f(...(f}_{k}(m))...))$$

е точен квадрат.

Решение. Да забележиме дека за секој природен број m постои природен број n таков што важи $n^2\le m<n^2+2n=(n+1)^2-1$. Ако $m=n^2$, тогаш

$$
\begin{aligned}
&f(m)=f(n^2)=n^2+n,\\
&f^2(n^2)=n^2+2n,\\
&f^3(n^2)=n^2+3n=(n+1)^2+n-1,\\
&f^5(n^2)=(n+1)^2+n-1+2(n+1)=(n+2)^2+n-2,\\
&f^7(n^2)=(n+2)^2+n-2+2(n+2)=(n+3)^2+n-3,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&f^{2n-1}(n^2)=(n+n-1)^2+1,\\
&f^{2n+1}(n^2)=(2n-1)^2+1+2(2n-1)=(2n)^2.
\end{aligned}
$$

Слично за $m=n^2+nl+k$, каде $l\in\{0,1\}$, $k\in\{1,2,...,n\}$ се добива

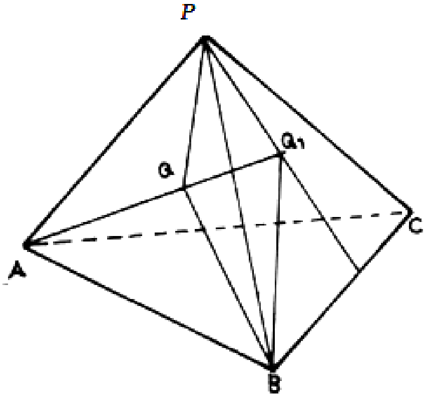
$$f^{2k-l}(m)=f^{2k-l}(n^2+nl+k)=(m+k)^2.$$

3. Дадени се тетраедар $PABC$ и точка Q внатре во него. Докажи дека

$$\measuredangle BQC+\measuredangle CQA+\measuredangle AQB>\measuredangle BPC+\measuredangle CPA+\measuredangle APB.$$

Решение. Нека Q_1 е пресекот на правата AQ и рамнината PBC, цртеж десно. Тогаш

$$
\begin{aligned}
\measuredangle ABP+\measuredangle PBC&=\measuredangle ABP+\measuredangle PBQ_1+\measuredangle Q_1BC\\
&>\measuredangle ABQ_1+\measuredangle Q_1BC\\
&=\measuredangle ABQ+\measuredangle QBQ_1+\measuredangle Q_1BC\\
&>\measuredangle ABQ+\measuredangle QBC.
\end{aligned}
$$



Според тоа,

$$\measuredangle ABP+\measuredangle PBC>\measuredangle ABQ+\measuredangle QBC$$

и аналогно

$$
\begin{aligned}
&\measuredangle BCP+\measuredangle PCA>\measuredangle BCQ+\measuredangle QCA,\\
&\measuredangle CAP+\measuredangle PAB>\measuredangle CAQ+\measuredangle QAB.
\end{aligned}
$$

Со собирање на последните три неравенства добиваме $\alpha_1>\alpha_2$, каде

$$
\begin{aligned}
\alpha_1&=\measuredangle ABP+\measuredangle PBC+\measuredangle BCP+\measuredangle PCA+\measuredangle CAP+\measuredangle PAB,\\
\alpha_2&=\measuredangle ABQ+\measuredangle QBC+\measuredangle BCQ+\measuredangle QCA+\measuredangle CAQ+\measuredangle QAB.
\end{aligned}
$$

Според тоа,

$$
\begin{aligned}
\measuredangle BQC+\measuredangle CQA+\measuredangle AQB&=3\cdot 180^\circ-\alpha_2\\
&>3\cdot 180^\circ-\alpha_1\\
&=\measuredangle BPC+\measuredangle CPA+\measuredangle APB.
\end{aligned}
$$

4. Определи го најмалиот природен број n за кој постои множество

$$M \subset \{1,2,...,100\}$$

од n елементи кое ги задоволува условите:

а) 1 и 100 припаѓаат на множеството M,

б) за секој $a \in M \setminus \{1\}$ постојат $x, y \in M$ такви што $a = x + y$.

Решение. Нека $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \subset \{1,2,...,100\}$, каде

$$1 = a_1 < a_2 < a_3 < ... < a_n = 100$$

и нека за M важи условот б). Тогаш

$$a_2 = 2, a_3 \leq 4, a_4 \leq 8, a_5 \leq 16, a_6 \leq 32, a_7 \leq 64.$$

Ако $50 \notin M$, тогаш од $a_6 + a_7 < 100$ следува $n > 8$, односно $n \geq 9$. Ако $a_k = 50$ за некој индекс k, тогаш од $a_5 + a_6 \leq 48 < 50$ следува $k > 7$, т.е. $k \geq 8$, па е $n \geq 9$. Непосредно се проверува дека за множествата

$$M_1 = \{1,2,4,6,10,20,40,60,100\},$$
$$M_2 = \{1,2,3,6,12,13,25,50,100\},$$

се исполнети сите услови на задачата. Според тоа, бараниот број е еднаков на 9.

III и IV година

1. Определи ги сите природни броеви помали од 1000 кои се еднакви на збирот на факториелите на своите цифри.

Решение. Треба да ги определиме сите тројки (x, y, z) за кои важи

$$x, y, z \in \{0,1,2,...,9\}, (x, y, z) \neq (0,0,0),$$
$$100x + 10y + z = x! + y! + z!.$$

Ако (x, y, z) е таква тројка, тогаш $x \leq 5, y \leq 5, z \leq 5$ и $x! + y! + z! \leq 3 \cdot 5! = 360$. Навистина, во спротивно ќе важи $x! + y! + z! \geq 6! = 720$, па е $x! \geq 7! = 5040$, што е противречност. Со проверка на броевите 55, 155, 255, 355, 455 лесно се добива дека ниту еден од нив не е решение на задачата, што значи дека најмногу еден од броевите x, y, z е еднаков на 5.

а) Нека точно еден од броевите x, y, z е еднаков на 5. Лесно се проверува дека двата други броја не се еднакви на 4. Затоа важи

$$120 \leq x! + y! + z! \leq 5! + 4! + 3! = 150.$$

Со проверка за броевите 125, 135, 145 добиваме дека 145 е едно решение на задачата.

б) Нека $x \leq 4, y \leq 4, z \leq 4$. Спо проверка се добива дека во овој случај тројките (0,0,1) и (0,0,2) се единствени решенија на задачата.

Конечно, сите барани броеви се 1, 2 и 145.

2. Нека P е полином со реални коефициенти таков што за секој за секој реален број x важи

$$P(\cos x)=P(\sin x).$$

Докажи дека постои полином Q таков што за секој реален број t важи

$$P(t)=Q(t^4-t^2).$$

Решение. Нека $P(t)=(t^4-t^2)Q_1(t)+at^3+bt^2+ct+d$. Од последното равенство и од условот на задачата следува дека за секој $x\in\mathbb{R}$ важи

$$\begin{aligned}0&=\sin^2 x\cos^2 x[Q_1(\cos x)-Q_1(\sin x)]+\\&+(\sin x-\cos x)[a\sin x\cos x+b(\sin x+\cos x)+a+c].\end{aligned}\tag{1}$$

Од равенството (1) за $x=0$ добиваме $a+b+c=0$, а за $x=\pi$ добиваме $a-b+c=0$, од што следува дека $a+c=0$ и $b=0$. Според тоа, равенството (1) можеме да го запишеме во облик

$$\sin^2 x\cos^2 x[Q_1(\sin x)-Q_1(\cos x)]=a(\sin x-\cos x)\sin x\cos x.\tag{2}$$

Бидејќи равенството (2) важи за секој $x\in\mathbb{R}$, а функциите $\sin x$, $\cos x$ и $Q_1(t)$ се непрекинати, добиваме дека и равенството

$$\sin x\cos x[Q_1(\sin x)-Q_1(\cos x)]=a(\sin x-\cos x)\tag{3}$$

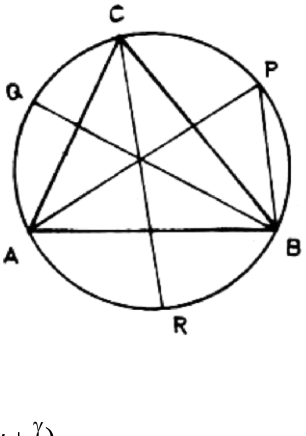
важи за секој $x\in\mathbb{R}$. Од (3) за $x=0$ добиваме $a=0$, па како $a+c=0$ имаме $c=0$. Според тоа,

$$P(t)=(t^4-t^2)Q_1(t)+d,$$

и од (3) следува дека за секој $x\in\mathbb{R}$ важи $Q_1(\sin x)=Q_1(\cos x)$. Сега тврдењето на задачата лесно се докажува со индукција по степените на полиномот P.

3. Во триаголникот ABC симетралите на аглите α,β,γ ја сечат опишаната кружница редоследно во точките P,Q,R. Докажи дека важи:

$$AP+BQ+CR>AB+BC+CA.$$



Решение. Од синусната теорема следува

$$AB=2r\sin\gamma,$$
$$BC=2r\sin\alpha,$$
$$CA=2r\sin\beta,$$

каде r е радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC, цртеж десно. Понатаму,

$$\measuredangle ABP=\measuredangle ABC+\measuredangle CBP=\beta+\measuredangle CAP=\beta+\tfrac{\alpha}{2},$$

па затоа

$$AP=2r\sin(\beta+\tfrac{\alpha}{2}).$$

Аналогно добиваме

$$BQ=2r\sin(\gamma+\tfrac{\beta}{2}) \text{ и } CR=2r\sin(\alpha+\tfrac{\gamma}{2}).$$

Понатаму, $\beta+\gamma<\pi$, па затоа

$$\frac{CA+AB}{2}=r(\sin\gamma+\sin\beta)=2r\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}<2r\cos\frac{\beta-\gamma}{2}=2r\sin(\frac{\beta-\gamma}{2}+\frac{\pi}{2})$$
$$=2r\sin(\frac{\beta-\gamma}{2}+\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2})=2r\sin(\beta+\frac{\alpha}{2})=AP.$$

Аналогно докажуваме

$$\frac{AB+BC}{2}<BQ,\quad \frac{BC+CA}{2}<CR.$$

Ако ги собереме последните три неравенстват, добиваме

$$AB+BC+CA<AP+BQ+CR,$$

што и требаше да се докаже.

4. Дадена е квадратна табела $n\times n$ во која се запишани цели броеви така што разликата на произволни два соседни броја од оваа табела не е поголема од 1 (два броја се соседни ако се запишани во квадратчиња кои имаат заедничка страна). Докажи дека постои број кој во табелата се појавува најмалку n пати.

Решение. Нека m_i и M_i се соодветно најмалиот и најголемиот број во $i-$тата колона и нека

$$m=\max_{1\le i\le n} m_i \text{ и } M=\min_{1\le i\le n} M_i.$$

Ќе разгледаме два случаја.

а) $m\le M$. Тогаш секоја колона го содржи секој од броевите $m,m+1,...,M$.

б) $m>M$. Нека $m_i=m$ и $M_j=M$, каде $i\ne j$, $i,j\in\{1,2,...,n\}$. Понатаму, нека k е произволен број од множеството $\{1,2,...,n\}$, а a_{ki} и a_{kj} се броевите кои се наоѓаат во пресеците на $k-$тата редица соодветно со $i-$тата и $j-$тата колона. Тогаш

$$a_{ki}\ge m_i=m>M=M_j\ge a_{kj}.$$

Според тоа, во $k-$тата редица меѓу броевите a_{ki} и a_{kj} се наоѓа бројот $M+1$, т.е. тој број е содржан во секоја редица.

Мала олимпијада 1985

1. Нека $S=\{1,2,...,n\}$. На секој елемент $i\in S$ му придружуваме непразно множество $S_i\subset S$ така што важи:

а) за произволни броеви $i,j\in S$ важи: $j\in S_i\ \Rightarrow\ i\in S_j$,

б) за произволни различни броеви $i,j\in S$ важи:

$$|S_i|=|S_j|\ \Rightarrow\ S_i\cap S_j=\varnothing.$$

Докажи дека постои број $k\in S$ таков што $|S_k|=1$.

Решение. Нека $k=\max\{|S_1|,|S_2|,...,|S_n|\}$ и нека, на пример, $|S_1|=k$. Ако $S_1=\{a_1,a_2,...,a_k\}$, тогаш од условот а) следува

$$1\in S_{a_1}\cap S_{a_2}\cap\ldots\cap S_{a_k},$$

а од условот б) следува дека броевите $|S_{a_1}|,|S_{a_2}|,\ldots,|S_{a_k}|$ се различни меѓу себе. Бидејќи овие броеви припаѓаат на множеството $\{1,2,\ldots,k\}$, следува дека еден од нив е еднаков на 1.

2. Нека $ABCD$ е паралелограм и E е точка таква што $AE\perp AB$ и $BC\perp EC$. Докажи дека

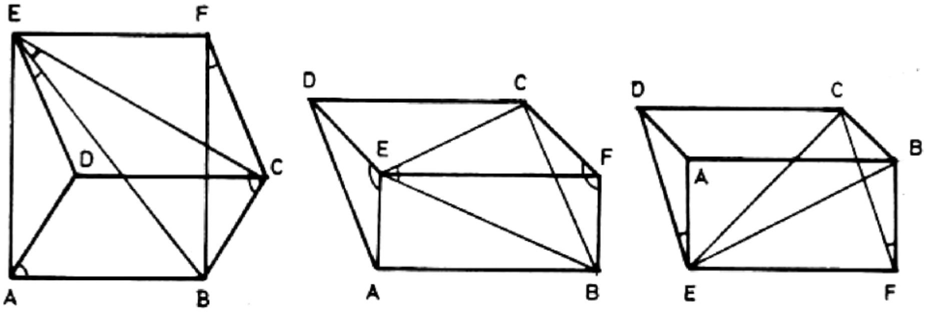
$$\measuredangle AED=\measuredangle BEC \text{ или } \measuredangle AED+\measuredangle BEC=180^\circ.$$

Решение. Нека F е точка, таква што четириаголникот $ABFE$ е правоаголник. Ќе ги разгледаме следниве случаи:

а) $\measuredangle BAD\leq 90^\circ$, цртеж а),

б) $\measuredangle BAD>90^\circ$, точката E е внатре во паралелограмот $ABCD$, цртеж б),

в) $\measuredangle BAD>90^\circ$, точката E е надвор од паралелограмот $ABCD$, цртеж в).



а) б) в)

Во секој од овие случаи важи $\measuredangle EAD=\measuredangle FBC$ (агли со паралелни краци) и $AE=BF,\ AD=BC$. Затоа $\triangle ADE\cong\triangle BCF$, па следува $\measuredangle AED=\measuredangle BFC$. Бидејќи $\measuredangle BCE=\measuredangle BFE=90^\circ$, точките B,C,E,F припаѓаат на кружницата со дијаметар BE. Во случаите а) и в) $\measuredangle BEC$ и $\measuredangle BFC$ се периферискиагли над ист лак, па затоа тие се еднакви, а во случајот б) овие агли се периферискиагли над комплементарни лаци, па затоа нивниот збир е еднаков на 180°. Затоа во случаите а) и в) важи

$$\measuredangle BEC=\measuredangle BFC=\measuredangle AED,$$

а во случајот б) важи

$$\measuredangle AED+\measuredangle BEC=\measuredangle BFC+\measuredangle BEC=180^\circ.$$

3. Докажи дека за секои позитивни реални броеви a,b,c,d важи:

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geq 2.$$

Решение. Од очигледното неравенство

$$(a-c)^2+(b-d)^2\geq 0$$

со елементарни трансформации го добиваме еквивалентното неравенство

$$2(a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ad+bc+cd)\geq (a+b+c+d)^2$$

Понатаму, од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува дека за позитивни реални броеви x и y важи $\frac{1}{xy}\geq (\frac{2}{x+y})^2$. Добиваме,

$$\begin{aligned}\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}&=\frac{a(d+a)+c(b+c)}{(b+c)(a+d)}+\frac{b(a+b)+d(c+d)}{(c+d)(a+b)}\\&\geq\frac{4a(d+a)+c(b+c)}{(b+c+a+d)^2}+\frac{4b(a+b)+d(c+d)}{(c+d+a+b)^2}\\&\geq\frac{4(a^2+b^2+c^2+d^2+ab+bc+cd+ad)}{(a+b+c+d)^2}\geq 2.\end{aligned}$$

Равенство важи ако и само ако е $a=c$ и $b=d$.

Сојузен натпревар 1986

I година

1. Докажи дека постојат бесконечно многу тројки последователни природни броеви такви што секој број е збир на два точни квадрати.

Решение. Да забележиме дека за произволен природен број n важи

$$n^2+n^2=2n^2,\ (n-1)^2+(n+1)^2=2n^2+2.$$

Затоа доволно е да докажеме дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што за некои цели броеви a и b важи: $(n+a)^2+(n-b)^2=2n^2+1$, односно

$$2n(a-b)=a^2+b^2-1.$$

Ако за произволен природен број b земеме $a=b+1$ и $n=b(b+1)$, тогаш ќе важи равенството (1).

2. Нека во конвексен четириаголник $ABCD$ важи $AB+BD\le AC+CD$. Докажи дека $AB\le AC$.

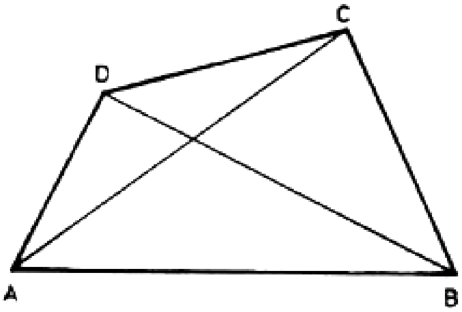
Решение. Нека претпоставиме дека $AB>AC$. Тогаш

$$AC+BD<AB+BD\le AC+CD,$$

па затоа $BD<CD$, цртеж десно. Но, од $AB>AC$ следува

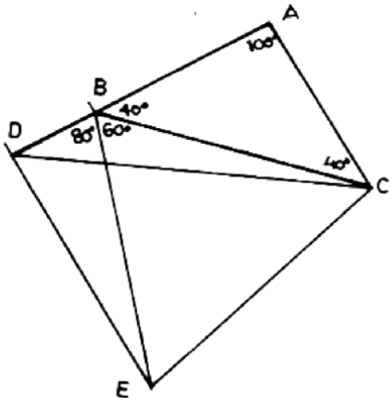
$$\measuredangle DBC<\measuredangle ABC<\measuredangle ACB<\measuredangle DCB,$$

од каде следува $CD<BD$, што е противречност.



3. Во триаголникот ABC аглите кај темињата B и C се еднакви на 40°. Нека D е точка од правата AB таква што точката B е меѓу точките A и D и важи $AD=BC$. Определи ги аглите на триаголникот ADC.

Решение. Нека E е точка од онаа страна на правата BC на која не е точката A, таква што триаголникот BCE е рамностран, цртеж десно. Бидејќи $\measuredangle CAD=\measuredangle ECA=100^\circ$ и $AD=BC=EC$, заклучуваме дека четириаголникот $DECA$ е рамнокрак трапез. Затоа важи $\measuredangle ECD=80^\circ=\measuredangle EBD$, па е $EB=ED$. Значи, точката E е центар на кружницата опишана околу триаголникот BCD. Оттука следува



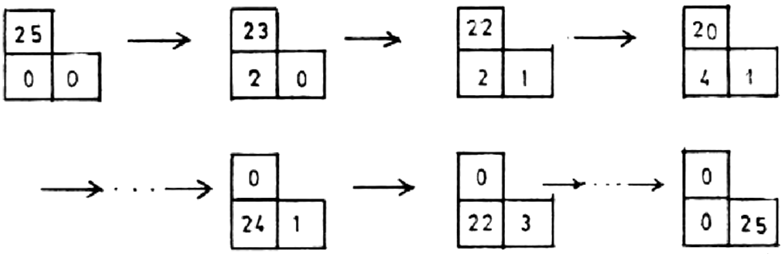
$$\measuredangle BCD = \frac{1}{2}\measuredangle BED = \frac{1}{2}\cdot 20^\circ = 10^\circ .$$

Според тоа, аглите на триаголникот ADC се $100^\circ, 30^\circ$ и 50°.

4. Табла со димензии 5×5 е поделена на 25 единечни полиња (квадратчиња). Во секое поле е поставен по еден жетон. Еден потез се состои во преместување на било кои два жетони, секој од нив во некое соседно поле. Да означиме некое поле. Дали може да се постигне по определен број чекори сите 25 жетони да се најдат во тоа поле? (Две полиња се соседни ако имаат заедничка страна.)

Решение. Полињата на дадениот квадрат да ги обоиме црно-бело како на шаховска табла, со тоа што аголните полиња ќе бидат црни. Тогаш има вкупно 13 црни и 12 бели полиња. При секое поместување на жетонот на соседно поле се менува бојата на полето на кое се наоѓа жетонот. Затоа при реализирање на секој дозволен потез не се менува парноста на бројот на жетоните кои се наоѓаат, како на белите, така и на црните полиња. Оттука следува дека сите 25 жетони не може да се најдат на ниту едно бело поле.

Ќе докажеме дека сите жетони може да се најдат на било кое црно поле. Прво, сите жетони може да се доведат на централното поле на следниов начин: со секој потез некои два жетона кои се распоредени симетрично во однос на центарот на квадратот се преместуваат на полиња поблиску до центарот кои исто така се симетрични во однос на центарот (полето е поблиску до центарот, ако од него до центарот може да се стигне со помал број преместувања).



За да докажеме дека сите жетони може да се преместат на произволно црно поле, доволно е да докажеме дека сите 25 жетони од некое црно поле може да се преместат со дозволени потези на црно поле кое со претходното има заедничко теме. Тоа може да се постигне, на пример, со потезите прикажани на горните цртежи.

II година

1. Нека x и y се природни броеви такви што $2x^2 + x = 3y^2 + y$. Докажи дека броевите $x-y, 2x+2y+1$ и $3x+3y+1$ се точни квадрати.

Решение. Од претпоставката $2x^2 + x = 3y^2 + y$ следува

$$\begin{aligned} x^2 &= x-y+3x^2-3y^2=(x-y)(3x+3y+1),\\ y^2 &= x-y+2x^2-2y^2=(x-y)(2x+2y+1). \end{aligned} \tag{1}$$

Бидејќи броевите $3x+3y+1=3(x+y)+1$ и $2x+2y+1=2(x+y)+1$ се заемно прости, па затоа

$$x-y=\mathrm{NZD}(x^2,y^2)=(\mathrm{NZD}(x,y))^2.$$

Сега од равенствата (1) следува дека броевите $3x+3y+1$ и $2x+2y+1$ се точни квадрати.

2. Докажи дека за позитивните броеви a,b и c важи неравенството:

$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}\geq\frac{a+b+c}{3}.$$

Решение. Прво да забележиме дека очигледното неравенство

$$2(x+y)(x-y)^2\geq 0,$$

кое важи за секои позитивни броеви x и y е еквивалентно на неравенството

$$\frac{x^3+y^3}{x^2+xy+y^2}\geq\frac{x+y}{3}, \tag{1}$$

при шти знак за равенство важи ако и само ако $x=y$. Понатаму, лесно се проверува дека важи

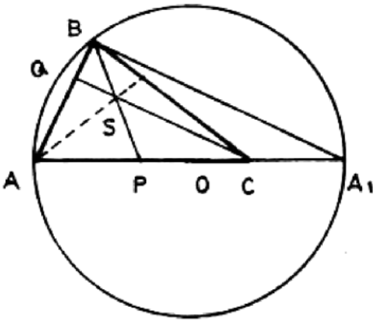
$$\frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2}=\frac{b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{a^3}{c^2+ca+a^2}. \tag{2}$$

Сега од (2), користејќи го неравенството (1), добиваме

$$\begin{aligned} \frac{a^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3}{c^2+ca+a^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{a^3+b^3}{a^2+ab+b^2}+\frac{b^3+c^3}{b^2+bc+c^2}+\frac{c^3+a^3}{c^2+ca+a^2}\right)\\ &\geq\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{3}+\frac{b+c}{3}+\frac{c+a}{3}\right)=\frac{a+b+c}{3}. \end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

3. На дијаметарот AA_1 на кружницата е дадена точка C. Нека B е точка од таа кружница за која важи $AB=CA_1$. Докажи дека во триаголникот ABC симетралата на внатрешниот агол во темето A, тежишната линија од темето B и висината од темето C се сечат во една точка.



Решение. Нека O е центарот на дадената кружница, P е средината на страната AC, Q е подножјето на висината повлечена од темето C на триаголникот ABC и S е пресекот на правите BP и CQ, види цртеж. Правите CQ и A_1B се нормални на AB, па затоа тие се паралелни. Оттука следува

$$\frac{PS}{SB}=\frac{PC}{CA_1}=\frac{AP}{AB}.$$

Тоа значи дека правата AS е симетрала на внатрешниот агол во темето A на триаголникот ABP, што и требаше да се докаже.

4. Дадени се пет различни позитивни броеви. Докажи дека меѓу нив постојат два броја, такви што ниту збирот ниту апсолутната вредност на разликата не се еднакви ниту на еден од преостанатите три броја.

Решение. Нека се тоа броевите a_1,a_2,a_3,a_4,a_5 и нека важи

$$0<a_1<a_2<a_3<a_4<a_5.$$

Нека го претпоставиме спротивното, т.е. да претпоставиме дека за произволни два од овие броеви нивниот збир или апсолутната вредност на нивната разлика е еднаква на некој од преостанатите броеви. Бидејќи за секој $i\in\{1,2,3,4\}$ важи $a_5+a_i>a_5$, добиваме дека мора да важи $a_5-a_i\in\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$. Поточно важи $a_5-a_1=a_4$ и $a_5-a_2=a_3$. Броевите a_4+a_2 и a_4+a_3 се поголеми од $a_4+a_1=a_5$, па броевите a_4-a_2 и a_4-a_3 припаѓаат на множеството $\{a_1,a_2,a_3\}$. Меѓутоа важи

$$a_4-a_3<a_4-a_2=(a_5-a_1)-(a_5-a_3)=a_3-a_1<a_3,$$

па затоа $a_4-a_2=a_2$, што е противречност.

III и IV година

1. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ кои ги задоволуваат условите

а) $f(x+f(y))=f(x+y)+1$ за секои $x,y\in\mathbb{R}$,

б) f е строго растечка функција.

Решение. Од условот а) следува дека за секои реални броеви x и y важи

$$f(x+f(y))=f(x+y)+1=f(y+x)+1=f(y+f(x)). \qquad (1)$$

Понатаму, според б) функцијата е строго растечка, па како секоја строго растечка функција е инјекција, од (1) следува дека $x+f(y)=y+f(x)$. Специјално, ако во последното равенство ставиме $y=0$ добиваме $f(x)=x+f(0)$. Повторно, од условот а) добиваме $x+f(y)+f(0)=x+y+f(0)+1$, односно $f(y)=y+1$ за секој реален број y. Јасно, последната функција ги задоволува двата услови на задачата.

2. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се реални броеви такви што

$$(n-1)(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2)=(x_1+x_2+...+x_n)^2. \qquad (1)$$

Докажи дека броевите $x_1,x_2,...,x_n$ се сите непозитивни или се сите ненегативни.

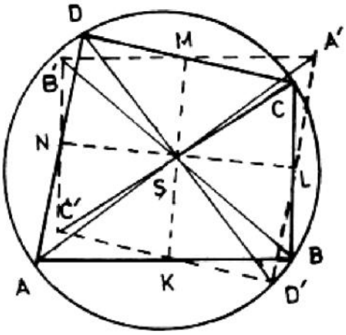
Решение. Ако $x_1+x_2+...+x_n=0$, тогаш од (1) следува $x_1=x_2=...=x_n=0$. Нека претпоставиме дека $x_1+x_2+...+x_n>0$. (Случајот $x_1+x_2+...+x_n<0$ се разгледува аналогно.) ќе докажеме дека $x_i\ge 0$ за секој $i=1,2,...,n$. Нека го претпоставиме спротивното, на пример, $x_n<0$. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+...+x_n)^2&<(x_1+x_2+...+x_{n-1})^2\\ &\le(n-1)(x_1^2+x_2^2+...+x_{n-1}^2)\\ &<(n-1)(x_1^2+x_2^2+...+x_n^2),\end{aligned}$$

што противречи на (1). Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

3. Од средината на секоја страна на тетивен четириаголник конструирана е нормала на спротивната страна. Докажи дека овие четири нормали се сечат во една точка.

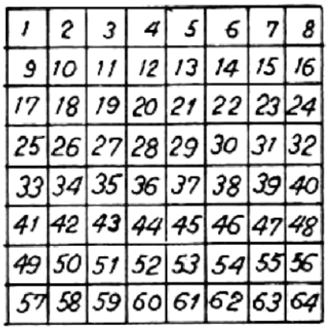
Решение. Нека K,L,M,N се соодветно средините на на страните AB,BC,CD,DA на тетивниот четириаголник $ABCD$ и нека S е пресекот на дијагоналите на паралелограмот $KLMN$, цртеж десно. Со A',B',C',D' да ги означиме редоследно симетричните точки на точките A,B,C,D во однос на точката S. Тогаш правите CD и $C'D'$ се паралелни, а точката K е симетрична на средината M на отсечката CD во однос на S, па затоа се совпаѓа со средината на отсечката $C'D'$. Затоа правата која ја содржи точката K, а е нормална на CD воедно е и симетрала на отсечката $C'D'$. Слично и преостанатите три нормали се симетрали на соодветните страни на четириаголникот $A'B'C'D'$. Но овој четириаголник е симетрична слика на тетивниот четириаголник $ABCD$, па затоа тој е тетивен, што значи дека споменатите четири нормали се сечат во центарот на кружницата опишана околу него.



4. Определи го најголемиот цел број k со следново својство: како и да ги запишеме броевите 1, 2, ..., 64 во полињата на табла 8×8 може да се најдат две соседни полиња такви што разликата на броевите запишани во тие полиња не е помала од k. (Две полиња се соседни ако имаат барем едно заедничко теме.)

Решение. Во табелата прикажана на цртежот десно броевите 1, 2, 3, ..., 64 се запишани во полињата така што разликата на било кои два соседни броја не е поголема од 9. Тоа значи дека $k\le 9$.

Ќе докажеме дека $k=9$. Било како да ги запишеме броевите во полињата на таблицата од полето со бројот 1 до полето со бројот 64 може да се стигне во најмногу 7 чекори, при што во секој чекор се преминува на соседно поле. Од $\frac{64-1}{7}=9$, следува дека постојат две соседни полиња такви што разликата на броевите запишани во нив не е помала од 9. Оттука следува дека $k>8$, па затоа $k=9$.



1	2	3	4	5	6	7	8
9	10	11	12	13	14	15	16
17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31	32
33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54	55	56
57	58	59	60	61	62	63	64

Сојузен натпревар 1987

I година

1. Докажи дека за ненегативните реални броеви a и b важи неравенството

$$\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{a+b}{4}\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a}\ .$$

Решение. Со елементарни трансформации и користејќи го неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned}\frac{(a+b)^2}{2}+\frac{a+b}{4}-a\sqrt{b}-b\sqrt{a}&=\frac{a+b}{2}(a+b+\tfrac{1}{2})-\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})\\&\geq\sqrt{ab}(a+b+\tfrac{1}{2})-\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})\\&=\sqrt{ab}(a+b+\tfrac{1}{2}-\sqrt{a}-\sqrt{b})\\&=\sqrt{ab}((\sqrt{a}-\tfrac{1}{2})^2+(\sqrt{b}-\tfrac{1}{2})^2)\geq 0.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=\frac{1}{4}$.

2. Даден е триаголник ABC со тап агол во темето A. Нека $a=BC$, $b=CA$ и h_a, односно h_b, висина од темето A, односно темето B. Докажи дека

$$a+h_a>b+h_b.$$

Решение. Нека P е плоштината на триаголникот ABC. Од условотна задачата следува $a>b>h_a$ и $2P=ah_a=bh_b<ab$. Затоа $\frac{2P}{ab}(a-b)<a-b$, од каде следува $h_b-h_a<a-b$, т.е. $b+h_b<a+h_a$.

3. Даден е природен број n. Определи го бројот на решенијата на равенката

$$x^2-[x^2]=(x-[x])^2,$$

за кои $1\leq x\leq n$.

Решение. Ако ставиме

$$x=m+\alpha,\ m\in\{1,2,...,n-1\},\ 0\leq\alpha<1,$$

дадената равенка го добива видот

$$m^2+2m\alpha=[m^2+2m\alpha+\alpha^2].$$

Според тоа, бројот $m+\alpha$ е решение на дадената равенка ако и само ако $2m\alpha$ е цел број, т.е. ако и само ако

$$\alpha\in\{0,\frac{1}{2m},\frac{2}{2m},...,\frac{2m-1}{2m}\},$$

што значи дека во интервалот $[m,m+1)$ дадената равенка има $2m$ решенија. Бидејќи и $x=n$ е решение на равенката, заклучуваме дека бараниот број решенија на оваа равенка е еднаков на

$$1+2(1+2+...+(n-1))=1+n(n-1)=n^2-n+1\,.$$

4. Секое теме на коцката е означено со еден од броевите 1 или -1, а на секој ѕид е запишан производот на броевите со кои се означени четирите темиња на тој ѕид. Дали збирот на така добиените 14 броеви може да биде еднаков на:

а) 7; б) 0?

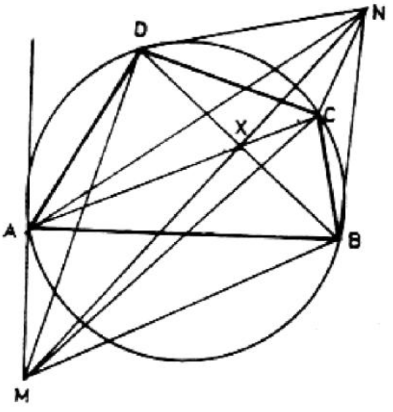
Решение. Ако се смени еден број во теме, се менуваат три броја на ѕидовите на коцката, а збирот се менува за $+8,+4,0,-4,-8$, што значи за број делив со 4. Ако сите темиња се означени со единици, тогаш збирот насите 14 добиени броеви е еднаков на 14.Според тоа, збирот при делење со 4 секогаш дава остаток 2, па затоа не може да биде еднаков ниту на 7, ниту на 0.

II година

1. Докажи дека постојат бесконечно многу прости броеви p такви што равенката $x^2+x+1=py$, по x и y, има целобројни решенија.

Решение. Нека претпоставиме дека постојат конечно многу прости броеви кои може да се множители на броеви од видот x^2+x+1, каде x е цел број и нека $p_1, p_2,..., p_n$ се сите такви броеви. Последното е противречност, бидејќи во тој случај бројот $(p_1p_2...p_n)^2+p_1p_2...p_n+1$ не е делив со ниту еден прост број.

2. Четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница, M е пресечната точка на нормалата на AB во A и на нормалата на CD во D, а N е пресечната точка на нормалата на AB во B и на нормалата на CD во C. Докажи дека пресекот на правите AC и BD припаѓа на правата MN.



Решение. Нека X е пресечната точка на отсечките MN и AC, а Y е пресечната точка на отсечките MN и BD и нека, на пример, $\measuredangle BAD<90^\circ$, цртеж десно. (Аналогно се разгледува случајот $\measuredangle BAD>90^\circ$. Ако $\measuredangle BAD=90^\circ$, тогаш $M=D$ и $N=B$, па тврдењето очигледно важи.). Тогаш

$$\frac{MX}{XN}=\frac{P_{AMC}}{P_{ANC}}=\frac{AM\cdot AC\sin\measuredangle MAC}{AC\cdot NC\sin\measuredangle ACN}=\frac{AM\sin(90^\circ+\measuredangle BAC)}{NC\sin(90^\circ+\measuredangle ACD)}\,, \tag{1}$$

$$\frac{MY}{YN}=\frac{P_{BMD}}{P_{BND}}=\frac{DM\cdot DB\sin\measuredangle MBD}{BN\cdot BD\sin\measuredangle DBN}=\frac{DM\sin(90^\circ-\measuredangle BDC)}{BN\sin(90^\circ-\measuredangle ABD)}=\frac{DM\sin(90^\circ+\measuredangle BAC)}{BN\sin(90^\circ+\measuredangle ACD)}\,, \tag{2}$$

бидејќи $\measuredangle BAC = \measuredangle BDC$ и $\measuredangle ACD = \measuredangle ABD$. Триаголниците BCN и DAM се слични, бидејќи $\measuredangle CNB = \measuredangle AMD$ како агли со паралелни краци и

$$\measuredangle BCN = 360^\circ - 90^\circ - \measuredangle DCB = 270^\circ - (180^\circ - \measuredangle BAD) = 90^\circ + \measuredangle BAD = \measuredangle MAD .$$

Затоа $\frac{NC}{BN} = \frac{AM}{DM}$, т.е.

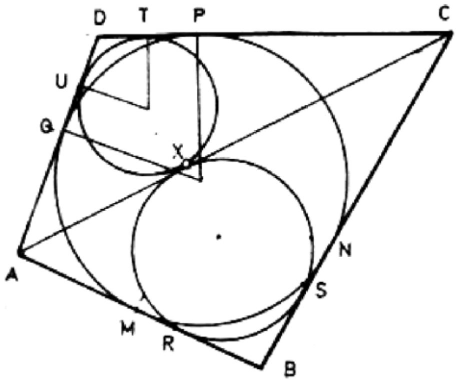
$$\frac{AM}{NC} = \frac{DM}{BN} . \qquad (3)$$

Од (1) , (2) и (3) следува $\frac{MX}{XN} = \frac{MY}{YN}$, т.е.точките X и Y ја делат отсечката MN во еднаков однос. Затоа $X = Y$.

3. Ако во четириаголник може да се впише кружница, докажи:

а) Кружниците впишани во двата триаголници на кои една од дијагоналите го дели четириаголникот меѓусебно се допираат.

б) Допирните точки на тие кружници со страните на дадениот четириаголник се темиња на тетивен четириаголник.



Решение. Нека $ABCD$ е тангентен четириаголник и нека M,N,P,Q се допирните точки на впишаната кружница со страните AB, BC, CD, DA. Нека впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните AB, BC, CA редоследно во точките R,S,X и нека впишаната кружница во триаголникот ACD ги допира страните AC, CD, DA соодветно во точките X_1,T, U, цртеж десно.

а) Бидејќи четириаголникот $ABCD$ е тангентен, важи

$$AB + CD = BC + AD ,$$

па следува

$$XX_1 = | AX - AX_1 | = | \frac{AB+AC-BC}{2} - \frac{AC+AD-CD}{2} | = \frac{|AB+CD-BC-AD|}{2} = 0 ,$$

т.е. точките X и X_1 се совпаѓаат.

б) Бидејќи $BR = BS$ и $BM = BN$, важи $RS \| MN$. Аналогно $UT \| QP$. Бидејќи $AR = AX = AU$ и $AM = AQ$, важи $QM \| UR$. Аналогно, $PN \| TS$. Бидејќи четириаголникот $MNPQ$ е тетивен, збирот на неговите спротивни агли е еднаков на 180°, а како четириаголникот $RSTU$ има паралелни страни со четириаголникот $MNPQ$, заклучуваме дека збирот на неговите спротивни страни е 180°. Затоа четириаголникот $RSTU$ е тетивен.

4. Нека $P(x)$ е полином од седми степен со целобројни коефициенти, таков што за седум различни цели броеви прима вредности во множеството $\{-1,1\}$. Докажи дека $P(x)$ не може да се претстави како производ на два полиноми со целобројни коефциициенти така што ниту еден од нив не е константен полином.

Решение. Нека $P(x)=Q(x)R(x)$, каде $Q(x)$ и $R(x)$ се полиноми со целобројни коефициенти, при што степенот на полиномот $R(x)$ е помал од четири. Тогаш и полиномот $R(x)$ во секоја од воочените седум точки прима вредности од множеството $\{-1,1\}$, па во четири од тие точки прима иста вредност, на пример 1. Но, тогаш полиномот $R(x)-1$ има четири реални нули, па затоа $R(x)-1\equiv 0$, односно $R(x)\equiv 1$.

III и IV година

1. Нека $a_1,a_2,...,a_n$ се позитивни реални броеви чиј производ е еднаков на 1. Докажи дека

$$(4+a_1)(4+a_2)...(4+a_n)\geq 5^n.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $\frac{4+a_i}{5}\geq\sqrt[5]{a_i}$, т.е. $1+a_i\geq 5\sqrt[5]{a_i}>0$, за $i=1,2,...,n$. Ако ги помножиме овие n неравенства добиваме

$$(4+a_1)(4+a_2)...(4+a_n)\geq 5^n\sqrt[5]{a_1a_2...a_n}=5^n,$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a_i=1$, за $i=1,2,...,n$.

2. Нека a и m се природни броеви и x е цел број таков што m е делител на a^2x-a. Докажи дека постои цел број y, таков што m е делител на броевите a^2y-a и ay^2-y.

Решение. а) Ако $m\,|\,ax-1$, тогаш за $y=x$ добиваме

$$a^2y-a=a^2x-a=a(ax-1),$$
$$ay^2-y=ax^2-x=x(ax-1),$$

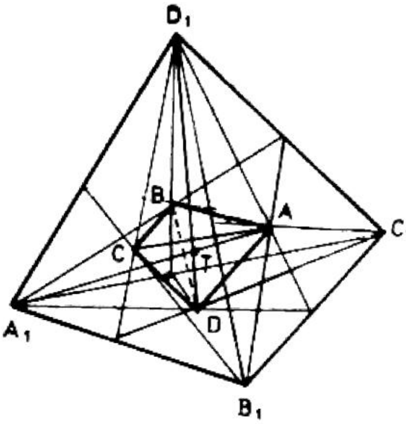
па следува $m\,|\,a^2y-a$ и $m\,|\,ay^2-y$.

б) Ако $m\,|\,a$, тогаш тврдењето важи за $y=m$.

в) Ако $a=km_1, ax-1=lm_2$ и $m=m_1m_2$, каде $k,l,m_1.m_2$ се цели броеви и $m_1>1$, $m_2>1$, тогаш се заемно прости следниве парови броеви a и m_2, m_1 и m_2 , am_1 и m_2. Затоа постојат цели броеви r и s такви што $ram_1-1=sm_2$. Нека $y=rm_1$. Тогаш

$$a^2y-a=a(ay-1)=km_1(arm_1-1)=ksm_1m_2=ksm,$$
$$ay^2-y=y(ay-1)=rm_1(arm_1-1)=rsm_2m_1=rsm.$$

3. Во просторот се дадени n точки, такви што било кои четири се темиња на недегенериран тетраедар со волумен не поголем од 1. Докажи дека постои тетраедар со волумен не поголем од 27 кој ги содржи сите дадени точки (во внатрешноста или на ѕидовите).



Решение. Нека $ABCD$ е тетраедар со максимален волумен чии темиња се некои четири од дадените точки. Нека T е тежиштето на тетраедарот $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ е тетраедарот хомотетичен на тетраедарот $ABCD$ во однос на хомотетијата со центар T и коефициент на хомотетијата $k=-3$, цртеж десно. Да забележиме дека тежиштето на тетраедарот ја дели секоја тежишна линија на тетраедарот на два дела, така што делот од темето до тежиштето е три пати подолг од делот од тежиштето на тетраедарот до тежиштето на спротивниот ѕид. Затоа точките A,B,C,D се тежишта на ѕидовите на тетраедарот $A_1B_1C_1D_1$. Волуменот на тетраедарот $A_1B_1C_1D_1$ е 27 пати поголем од волуменот на тетраедарот $ABCD$. Ќе докажеме дека тетраедарот $A_1B_1C_1D_1$ ги содржи сите дадени точки. Доволно е да докажеме дека никои две од дадените точки не се наоѓаат на различни страни на некоја од рамнините $A_1B_1C_1, B_1C_1D_1, C_1D_1A_1, D_1A_1B_1$. Нека го претпоставиме спротивното. Нека, на пример, точките B и E се на различни страни од рамнината $B_1C_1D_1$. Тогаш висината на тетраедатор $EBCD$ од темето E е поголема од висината на тетраедарот $ABCD$ од темето A, па како овие два тетраедри имаат заедничка основа BCD, добиваме дека волуменот на тетраедарот $EBCD$ е поголем од волуменот на тераедатор $ABCD$, што е противречност.

4. Нека X е множеството од сите конечни низи чии членови се 0 и 1 и функцијата $f:X\to X$ е определена со: за секој $x\in X$ сликата $f(x)$ се добива така што во низата секоја единица се замени со 01, а секоја нула со 10. Колку парови 00 се јавуваат во низата

$$\underbrace{f(f...(f}_{n}(1))...).$$

Решение. Со x_n да го означиме бројот на паровите 00 во низата

$$f^n(1) = \underbrace{f(f...(f}_{n}(1))...) .$$

Од равенствата

$$f(1) = 01,$$
$$f^2(1) = 1001,$$
$$f^3(1) = 01101001,$$
$$f^4(1) = 1001011001101001,$$
$$f^5(1) = 01101001100101101001011001101001,$$

непосредно следува $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 1, x_4 = 3, x_5 = 5$. Понатаму, да забележиме дека се точни следниве тврдења:

а) Низата $f^k(1)$ содржи 2^k членови.

б) Втората половина на низата $f^{k+1}(1)$ е еднаква на низата $f^k(1)$.

в) Низата $f^{2k}(1)$ е симетрична (првиот член е еднаков на последниот, вториот на претпоследниот итн.), а двата централни члена се 00.

г) Првата половина на низата $f^{2k+1}(1)$ се добива од втората (или од низата $f^{2k}(1)$) кога секоја нула се замени со единица, а секоја единица со нула. Затоа оваа низа содржи еднаков број парови 00 и 11.

д) Бројот на паровите 11 во низата $f^{2k}(1)$ е за еден помал од бројот на паровите 00 во таа низа.

Од наведените својства следува дека за секој природен број k важи

$$x_{2k} = 2x_{2k-1} + 1 \text{ и } x_{2k+1} = 2x_{2k} - 1,$$

па затоа

$$\begin{aligned} x_{2n} &= 2x_{2n-1} + 1 = 2^2 x_{2n-1} - 2 + 1 = 2^3 x_{2n-1} + 4 - 2 + 1 \\ &= ... = 2^{2n-1} x_1 + (2^{2n-2} - 2^{2n-3} + ... + 2^2 - 2 + 1) \\ &= \frac{1-(-2)^{2n-1}}{1-(-2)} = \frac{2^{2n-1}+1}{3}, \\ x_{2n+1} &= 2\frac{2^{2n-1}+1}{3} - 1 = \frac{2^{2n}-1}{3}. \end{aligned}$$

Мала олимпијада 1987

1. Нека $x_0 = a, x_1 = b$, каде a и b се цели броеви и

$$x_{n+1} = 2x_n - 9x_{n-1}, \text{ за } n \geq 1.$$

Определи потребен и доволен услов за a и b, при кој постои член на низата кој е делив со 7.

Решение. Да забележиме дека за секој $n \geq 1$ важи

$$x_{n+1} \equiv 2(x_n - x_{n-1}) \pmod{7}. \qquad (1)$$

Ако за некој индекс k важи $7 \mid x_{k+1}$, тогаш од (1) редоследно за $n = k, n = k-1$ и $n = k-2$ добиваме

$$7 \mid x_k - x_{k-1},\ 7 \mid x_{k-1} - 2x_{k-2},\ 7 \mid x_{k-3}.$$

Продолжувајќи ја оваа постапка добиваме дека е точно барем едно од следниве четири тврдења:

$$7 \mid a,\ 7 \mid b,\ 7 \mid a-b,\ 7 \mid 2a-b.$$

Лесно се гледа дека во секој од овие случаи бесконечно многу членови на низата се деливи со 7.

Забелешка. Може да се докаже дека за секој $n \in \{0,1,2,...\}$ важи:

$$\begin{aligned} x_n &= a(1-8\tbinom{n}{2}+8^2\tbinom{n}{4}-...)+(b-a)((\tbinom{n}{1})-8\tbinom{n}{3}+8^2\tbinom{n}{5}))-...) \\ &= a2^{\frac{4}{2}}\cos\tfrac{n\pi}{4}+(b-a)2^{\frac{4}{2}}\sin\tfrac{n\pi}{4}, \end{aligned}$$

од каде што следува бараниот резултат.

2. Нека

$$f(x) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}x+\sqrt{2-\sqrt{2}}}{-\sqrt{2-\sqrt{2}}x+\sqrt{2+\sqrt{2}}}.$$

Определи

$$\underbrace{f(f...(f}_{1987}(x))...)$$

Решение. На функцијата од видот $f(x) = \frac{ax+b}{-bx+a}$, каде a и b се реални броеви, и го придружуваме комплексниот број $z = a+ib$. Понатаму, ако $f_1(x) = \frac{a_1x+b_1}{-b_1x+a_1}$ и $f_2(x) = \frac{a_2x+b_2}{-b_2x+a_2}$, тогаш

$$f_1 \circ f_2(x) = f_1(f_2(x)) = \frac{(a_1a_2-b_1b_2)x+(a_1b_2+b_1a_2)}{-(a_1b_2+b_1a_2)x+(a_1a_2-b_1b_2)}.$$

Според тоа, ако на функциите f_1 и f_2 има се придружени комплексните броеви z_1 и z_2, тогаш на функцијата $f_1 \circ f_2$ и е придружен комплексниот број z_1z_2. Бидејќи

$$\cos\tfrac{\pi}{8} = \sqrt{\tfrac{1}{2}(1+\cos\tfrac{\pi}{4})} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}, \sin\tfrac{\pi}{8} = \tfrac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

добиваме дека на дадената функција и е придружен бројот $z = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$. Затоа на функцијата

$$\underbrace{f(f...(f}_{1987}(x))...) = f_{1987}(x)$$

и е придружен бројот $(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})^{1987}=\cos\frac{3\pi}{8}+i\sin\frac{3\pi}{8}$. Но,

$$\cos\frac{3\pi}{8}=\cos(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{8})=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},\ \sin\frac{3\pi}{8}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}},$$

па затоа

$$f_{1987}(x)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}x+\sqrt{2+\sqrt{2}}}{-\sqrt{2+\sqrt{2}}x+\sqrt{2-\sqrt{2}}}.$$

3. Во просторот се дадени прави a,b,c такви што никои две не се меѓусебно паралелни и постојат рамнини α,β,γ така што важи:

$$a\subset\alpha,\ b\subset\beta,\ c\subset\gamma,\ \alpha\perp\beta,\ \beta\perp\gamma,\ \gamma\perp\alpha.$$

Конструирај ја пресечната точка на рамнините α,β и γ. (Конструкцијата во простор дозволува поставување прави, рамнини и сфера и транслација за произволен вектор.)

Решение. Да претпоставиме дека за рамнините α,β,γ важи

$$a\subset\alpha,\ b\subset\beta,\ c\subset\gamma,$$
$$\alpha\perp\beta,\ \beta\perp\gamma,\ \gamma\perp\alpha.$$

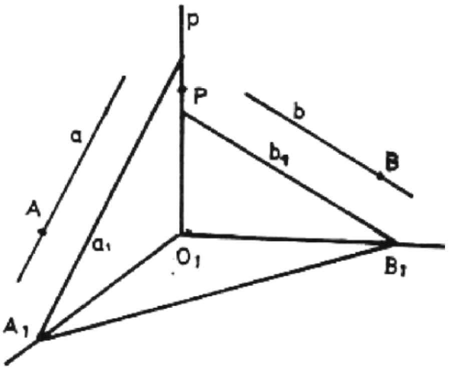
Нека A_1 и B_1 различни точки од правата c, а a_1 и b_1 прави определени со условите

$$A_1\in a_1\parallel a,\ B_1\in b_1\parallel b,$$

и α_1 и β_1 се рамнини определени со условите

$$A_1\in\alpha_1\parallel\alpha,\ B_1\in\beta_1\parallel\beta,$$

(цртеж десно). Тогаш рамнините α_1,β_1,γ се заемно нормални, а за заедничката точка O_1 на овие рамнини важи:



а) Точката O_1 припаѓа на сферата S со дијаметар A_1B_1.

б) Точката O_1 припаѓа на рамнините π_1 и π_2 за кои важи $A_1\in\pi_1\perp b_1$, $B_1\in\pi_2\perp a_1$.

Рамнинте α,β,γ за кои важат дадените услови (со тоа и нивната заедничка точка) ги конструираме на следниов начин: Прво конструираме прави a_1 и b_1 кои содржат соодветно произволни точки A_1 и B_1 од правата c такви што важи $A_1\in a_1\parallel a$ и $B_1\in b_1\parallel b$, а потоа рамнини π_1 и π_2 такви што важи $A_1\in\pi_1\perp b_1$ и $B_1\in\pi_2\perp a_1$. Нека правата n е пресек на рамнините π_1 и π_2, а S е сферата со дијаметар A_1B_1. Со O_1 да ја означиме заедничката точка на правата n и сферата S, со α_1,β_1,γ рамнините за кои важи

$$a_1 \subset \alpha_1,\ \alpha_1 \perp \pi_2,\ b_1 \subset \beta_1,\ \beta_1 \perp \pi_1,\ c \subset \gamma,\ O_1 \in \gamma,$$

со p пресекот на рамнините α_1 и β_1 и со A, B и P редоследно произволни точки од правите a, b и p. Нека α и β се рамнинте кои се добиваат со транслација на рамнините α_1 и β_1 редоследно за векторите $\overrightarrow{A_1A}$ и $\overrightarrow{B_1B}$. Тогаш α, β и γ се рамнини за кои важат условите на здачата.

Доказ. По конструкција важи $a \subset \alpha,\ b \subset \beta,\ c \subset \gamma$. Бидејќи точката O_1 припаѓа на сферата S со дијаметар A_1B_1, важи $A_1O_1 \perp O_1B_1$, а како правата O_1B_1 припаѓа на рамнината π_2, важи $O_1B_1 \perp a_1$. Според тоа, $O_1B_1 \perp \alpha_1$, а бидејќи $O_1B_1 \subset \beta_1$, добиваме $\beta_1 \perp \alpha_1$. Затоа и $\beta \perp \alpha$. Бидејќи $O_1B_1 \perp \alpha_1$ и $p \subset \alpha_1$, добиваме $O_1B_1 \perp PO_1$. Аналогно добиваме $O_1A_1 \perp PO_1$. Според тоа, правата p е нормална на правите O_1A_1 и O_1B_1 на рамнината γ, па затоа $p \perp \gamma$. Конечно, бидејќи $p \subset \alpha_1$ и $p \subset \beta_1$, следува $\alpha_1 \perp \gamma$, $\beta_1 \perp \gamma$, па важи $\alpha \perp \gamma$, $\beta \perp \gamma$.

Задачата има две или едно решение во зависност од тоа дали правата n и сферата S имаат две или една заедничка точка.

Сојузен натпревар 1988

I година

1. Ако n е природен број поголем од 1, таков што

$$[\tfrac{n}{1}]+[\tfrac{n}{2}]+...+[\tfrac{n}{n}]=2+[\tfrac{n-1}{1}]+[\tfrac{n-1}{2}]+...+[\tfrac{n-1}{n-1}],$$

тогаш n е прост број. Докажи!

Решение. Бидејќи $[\tfrac{n}{1}]=n, [\tfrac{n}{n}]=1,\ [\tfrac{n-1}{1}]=n-1$, даденото равенство е еквивалентно на равенството

$$[\tfrac{n}{2}]+...+[\tfrac{n}{n-1}]=[\tfrac{n-1}{2}]+...+[\tfrac{n-1}{n-1}]. \qquad (1)$$

Бидејќи за секој $k\in\{2,3,...,n-1\}$ важи $[\tfrac{n}{k}]\geq[\tfrac{n-1}{k}]$, од (1) следува дека за секој $k\in\{2,3,...,n-1\}$ важи $[\tfrac{n}{k}]=[\tfrac{n-1}{k}]$. Ако n е сложен број, тогаш бројот $\tfrac{n}{k}$ за некој $k\in\{2,3,...,n-1\}$ ќе биде природен број, па затоа ќе важи

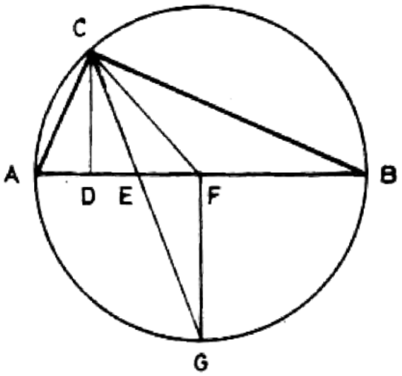
$$[\tfrac{n-1}{k}]=[\tfrac{n}{k}-\tfrac{1}{k}]=[\tfrac{n}{k}]-1<[\tfrac{n}{k}],$$

што е противречност. Од добиената противречност следува дека n е прост број.

2. Определи ги аглите на триаголникот ABC, ако тежишната линија, симетралата на аголот и висината од темето C го делат $\measuredangle ACB$ на четири еднакви дела.

Решение. Нека D,E,F се редоследно пресечните точки на висината, симетралата на аголот и тежишната линија повлечени од темето C на страната AB на триаголникот ABC и нека G е пресекот на симетралата на $\measuredangle BCA$ и опишаната кружница околу триаголникот ABC, цртеж десно. Тогаш точката G припаѓа на симетралата на страната AB. По претпоставка важи

$$\measuredangle ACD=\measuredangle DCE$$
$$=\measuredangle ECF=\measuredangle FCB.$$



Понатаму, од $CD\parallel FG$ следува

$$\measuredangle FCG=\measuredangle DCE=\measuredangle CGF,$$

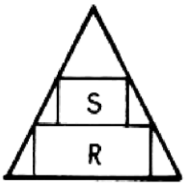
па затоа триаголникот CGF е рамнокрак и точката F припаѓа на симетралата на отсечката CG. Бидејќи F е средина на отсечката AB, заклучуваме дека F е центар на кружницата опишана околу триаголникот ABC . Според тоа,

$\measuredangle BCA=90^\circ$, $\measuredangle CAB=\measuredangle DCB=67^\circ 30'$ и $\measuredangle ABC=22^\circ 30'$.

3. Во даден остроаголен триаголник T вписани се два правоаголници R и S (цртеж десно). Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$\frac{P_R+P_S}{P_T},$$

каде P означува плоштина.



Решение. Со Q да ја означиме фигурата $T\setminus(R\cup S)$ која е унија на петте триаголници. Од овие триаголници може да се состават три триаголници кои се слични со триаголникот T. Со a,b,c да ги означиме висините на овие триаголници. Тогаш $a+b+c$ е висината на триаголникот T. Затоа важи

$$\frac{P_R+P_S}{P_T}=1-\frac{P_Q}{P_T}=1-\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}=2\frac{ab+bc+ca}{(a+b+c)^2}\leq\frac{2}{3},$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$. Значи, бараната максимална вредност е еднаква на $\frac{2}{3}$.

Во последното неравенство користевме дека $3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2$, што е еквивалентно со $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\geq 0$.

4. На една меѓународна конференција присуствуваат по два претставници од 27 земји. Докажи дека учесниците на конференцијата не може да се подредат околу тркалезна маса, така што меѓу секои два учесника, кои се претставници од иста земја, седат точно 9 други учесници на конференцијата.

Решение. Нека претпоставиме дека опишаниот распоред на седење е можен. Луѓето да ги нумеирраме редоследно со броевите 1, 2, ..., 54. Нека x_k и y_k се редните броеви на земјаците, за $k=1,2,...,27$. Тогаш за секој k важи $y_k-x_k=10$ или $y_k-x_k=44$. Да означиме

$$x=\sum_{i=1}^{27}x_i,\ y=\sum_{i=1}^{27}y_i.$$

Тогаш за некои цели броеви p и q важи $y-x=10p+44q$ и

$$x+y=1+2+3+...+54=27\cdot 55.$$

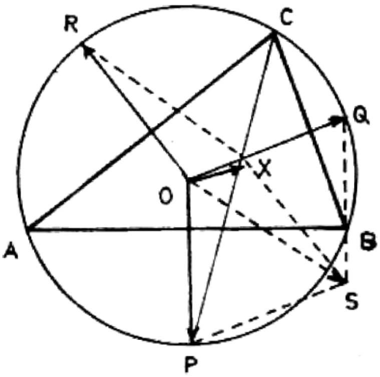
Но, за секои $x,y\in\mathbb{N}$ броевите $y-x$ и $x+y$ се со иста парност, а додека ние добивме дека броевите $y-x$ е парен, а $x+y$ е непарен број, што е противречност.

II година

1. Нека O е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC. Со P,Q,R да ги означиме средините на лаците AB,BC,CA кои не ги содржат точките C,A,B, соодветно. Ако за точката X важи

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR},$$

докажи дека X е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC.



Решение. Правите OP, OQ, OR редоследно се симетрали на страните AB, BC, CA на триаголникот ABC. Нека точката S е определена со $\overrightarrow{OS}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$ и $\gamma=\measuredangle BCA$, цртеж десно. Тогаш аголот меѓу правите OQ и CP е еднаков на $\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$, па бидејќи $PS \| OQ$, важи $\measuredangle CPS=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}$. Од $OR \perp CA$ и $OQ \perp BC$ следува дека $\measuredangle QOR=\pi-\gamma$, па од $SX \| OR$ и $PS \| OQ$ следува $\measuredangle XSP=\gamma$. Бидејќи $XS = OR=OQ=SP$, триаголникот XSP е рамнокрак, па затоа

$$\measuredangle XPS=\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}=\measuredangle CPS.$$

Значи,точкаа X припаѓа на симетралата CP на $\measuredangle BCA$. Слично се докажува дека таа припаѓа и на симетралите на другите два агли на триаголникот ABC.

2. Определи за кои непарни природни броеви n функцијата $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ определена со $f(x)=x^n-2x$ е инјекција.

Решение. Ќе докажеме дека функцијата f е инјекција за секој непарен природен број n. Да претпоставиме дека за некои два рацинални броја важи $f(x)=f(y)$, каде $x=\frac{a}{b}, y=\frac{c}{d}, (a,b)=1, (c,d)=1$ и $b>0, d>0$. Тогаш

$$ad^n(a^{n-1}-2b^{n-1})=b^n c(c^{n-1}-2d^{n-1}). \tag{1}$$

Бидејќи a и b се заемно прости, добиваме дека $a^{n-1}-2b^{n-1}$ и b се заемно прости, па од (1) следува дека $b^n \mid d^n$. Слично се докажува дека $d^n \mid b^n$, па затоа $b^n=d^n$, т.е. $b=d$. Сега, равенството (1) се сведува на

$$a^n-c^n=2b^{n-1}(a-c). \tag{2}$$

Ако претпоставиме дека $x\neq y$, тогаш $a\neq c$, па (2) го добива видот

$$a^{n-1}+a^{n-2}c+...+c^{n-1}=2b^{n-1}. \tag{3}$$

На левата страна на (3) имаме непарно многи собироци, па затоа броевите a и c мора да се парни. Но, тогаш и бројот b мора да е парен, што противречи на претпоставката $(a,b)=1$. Конечно, од добиената протиречност следува $a=c$, па затоа $x=y$, што значи дека функцијата f е инјекција.

3. За множеството $A\subset\mathbb{N}$ велиме дека е *добро*, ако за некој природен број n равенката $x-y=n$ има бесконечно многу решенија (x,y), каде $x\in A,\ y\in A$. Ако $\mathbb{N}=A_1\cup A_2\cup...\cup A_{1988}$, тогаш барем едно од множествата $A_1,A_2,...,A_{1988}$ е добро. Докажи!

Решение. Да петпоставиме дека ниту едно од множествата $A_1,A_2,...,A_{1988}$ не е добро. Тогаш за секој $i\in\{1,2,....,1988\}$ секоја од равенките

$$x-y=1,\ x-y=2,\ ...,\ x-y=1988$$

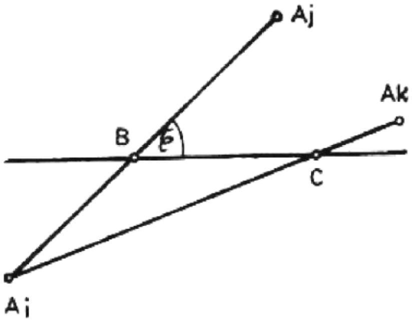
има конечно многу решенија (x,y), такви што $x,y\in A_i$. Нека y_0 е најголемиот y кој се појавува во некое од тие решенија. Меѓу 1989 броеви $y_0+1,\ y_0+2,...,$ y_0+1989 постојат два броја кои припаѓаат на исто множество A_i. Нека се тоа броевите y_0+k и y_0+l, каде $k<l$. Тогаш

$$y_0++l-(y_0++k)=l-k \text{ и } 1\le l-k\le 1988,$$

што противречи на изборот на y_0.

4. Докажи дека во внатрешноста на конвексен $2n-$аголник не постојат две различни точки низ кои минуваат по n дијагонали на тој $2n-$аголник.

Решение. Нека во внатрешноста на конвексниот многуагоаголник $A_1A_2...A_{2n}$ постојат точки B и C такви што низ секоја од нив минуваат по n негови дијагонали. Меѓу сите дијагонали кои минуваат низ B или C да ја избереме онаа која со правата BC формира најмал агол различен од нула. Овој агол да го означиме со φ. Нека тоа е дијагоналата A_iA_j, нека таа минува низ B и нека, на пример, е $\measuredangle A_jBC=\varphi$, цртеж десно. Бидејќи низ точата C минуваат n различни дијагонали на $2n-$ голникот, добиваме дека од секое теме излегува по една дијагонала која минува низ C. Нека A_iA_k е дијагонала која го содржи C. Јасно, $k\neq j$. Исто така



$$\varphi=\measuredangle A_jBC=\measuredangle BA_iC+\measuredangle A_iCB>\measuredangle A_iCB,$$

па дијагоналата A_iA_k (која го содржи C) формира со правата BC агол помал од φ, што е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува дека точките B и C со наведените својства не постојат.

III и IV година

1. Нека $a,b,c,d\in\mathbb{N}_0, d\neq 0$. Функцијата $f:\mathbb{N}_0\to\mathbb{N}_0$ е определена со

$$f(x)=[\tfrac{ax+b}{cx+d}].$$

Докажи дека f е инјекција ако и само ако $c=0$ и $a\geq d$.

Решение. Нека претпоставиме дека $c=0$ и $a\geq d$. Нека x_1 и x_2 се природни броеви такви што $x_1<x_2$. Тогаш $x_2-x_1\geq 1$, па затоа

$$\frac{ax_2+b}{d}-\frac{ax_1+b}{d}=\frac{a}{d}(x_2-x_1)\geq 1.$$

Значи $f(x_2)>f(x_1)$,т.е. f е инјекција.

За да го докажеме спротивното, ќе докажеме дека од било кој од условите

1) $c\neq 0$,

2) $c=0, a<d$,

следува дека f не е инјекција.

Во случајот 1) имаме

$$\frac{ax+b}{cx+d}=\frac{a}{c}+\frac{bc-ad}{c(cx+d)}.$$

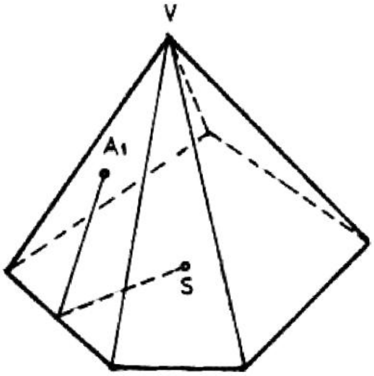
Ако $\frac{a}{c}=\alpha$ е цел број, тогаш за доволно големо x во еден од интервалите $(\alpha-1,\alpha],[\alpha,\alpha+1)$ (во зависност од знакот на $bc-ad$) ќе се наоѓаат сите броеви $\frac{ax+b}{cx+d}$. За сите овие броеви x ќе важи $f(x)=\alpha-1$ (односно $f(x)=\alpha$), па затоа функцијата не е инјекција. Слично, ако α не е цел број и $[\alpha]=\beta$, сите броеви $\frac{ax+b}{cx+d}$ за доволно големо x ќе припаѓаат на интервалот $[\beta,\beta+1)$, па за овие x ќе важи $f(x)=\beta$.

Во случајот 2) да означиме $y_n=\frac{an+b}{d}$, за $n\in\mathbb{N}_0$ и да избереме природен број k таков што $\frac{a}{d}<1-\frac{1}{k}$. Бидејќи за $n\in\mathbb{N}_0$ важи $y_{n+1}-y_n=\frac{a}{d}$, добиваме дека

$$y_k-y_0=k\tfrac{a}{d}<k-1.$$

Но, тоа значи дека за некој $i\in\{0,1,...,k-1\}$ броевите y_i и y_{i+1} припаѓаат на ист интервал од видот $[\alpha,\alpha+1)$. Тогаш $f(i)=f(i+1)$, па затоа и во овој случај функцијата f не е инјекција.

2. Во $n-$страна пирамида може да се впишпе сфера. Секој од бочните ѕидови на пирамидата го ротираме околу соодветниот раб на основата до поклопување со рамнината на основата, така што сликата на бочниот ѕид има заеднички внатрешни точки со основата. На тој начин добиваме n слики на врвот на пирамидата. Докажи дека овие n слики припаѓаат на една кружница.



Решение. Нека V е врвот на дадената $n-$страна пирамида и нека во неа впишаната сфера ја допира основата во точката S, а бочните ѕидови ги допира во точките $A_1, A_2, ..., A_n$, цртеж десно. При опишаните ротации секоја од точките $A_1, A_2, ..., A_n$ преминува во точката S. Бидејќи

$$VA_1 = VA_2 = ... = VA_n,$$

добиваме дека при разгледуваните ротации сите слики на врвот V се еднакво оддалечени од точката S, што значи дека припаѓаат на иста кружница со центар во точката S.

3. Дадена е строго растечка низа $a_1, a_2, a_3, ...$ природни броеви таква што $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и за секои заемно прости броеви m и n важи $a_m a_n = a_{mn}$. Докажи дека за секој природен број n важи $a_n = n$.

Решение. Од условот на задачата следува дека

$$a_3 a_5 = a_{15} < a_{18} = a_2 a_9 = 2a_9 < 2a_{10} = 2a_2 a_5 = 4a_5,$$

па затоа $a_3 = 3$.

Сега, со индукција ќе докажеме дека за секој природен број $n > 3$ важи $a_n = n$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за секој природен број помал или еднаков на n. Бидејќи броевите $n-1$ и n се заемно прости, добиваме

$$a_{(n-1)n} = a_{n-1} a_n = (n-1)n.$$

Бидејќи низата (a_n) строго монотоно расте, оттука добиваме дека $a_k = k$ за секој $n < k \le (n-1)n$, па затоа и за $k = n+1$, со што тврдењето е докажано.

4. Во една држава има повеќе од 7 градови. Докажи дека не постои мрежа одедносмерни патишта со следниве својства:

а) Меѓу секои два града постои точно еден директен пат.

б) За секои два града A и B постои точно еден град во кој директно може да се стигне и од A и од B.

в) За секои два града A и B постои точно еден град од кој директно може да се стигне и во A и во B.

Решение. Нека претпоставиме дека постои мрежа од едносмерни патишта меѓу градовите $A_1, A_2, ..., A_n$ ($n > 7$), такви што се исполнети условите а), б) и в). Со $A_i A_j$ да го означиме патот со почеток A_i и крај A_j, а множеството од сите патишта да го означиме со P. За секој $k \in \{1, 2, ..., n\}$ нека

$$B_k = \{A_i \mid A_k A_i \in P\},\ C_k = \{A_j \mid A_j A_k \in P\}.$$

Ако за некој i важи $A_i \in B_k$, тогаш од условот в) следува дека постои точно еден град A_j таков што важи $A_jA_i \in P$ и $A_jA_k \in P$, па за тој град A_j важи $A_j \in C_k$. Според тоа, $|B_k| \leq |C_k|$. На сличен начин, користејќи го условот б), се докажува дека $|C_k| \leq |B_k|$. Според тоа, за секој $k \in \{1,2,...,n\}$ важи $|C_k| = |B_k|$. Од условот а) следува дека $n = 1 + |C_k| + |B_k| = 1 + 2|B_k|$, т.е. n е непарен број, и за секој $k \in \{1,2,...,n\}$ важи $|C_k| = |B_k| = r$.

Сега, нека

$$P_k = \{(i,j) \mid i < j, A_kA_i \in P, A_kA_j \in P\}.$$

Од условот в) следува дека за секој пар $(i,j), i < j$, постои точно еден број $k \in \{1,2,...,n\}$, таков што важи $(i,j) \in P_k$. Според тоа, множествата $P_1, P_2, ..., P_{2r+1}$ се заемно дисјунктни и нивната унија има ист број елементи како и множеството P. Бидејќи $|B_k| = r$, т.е. бидејќи од секој град A_k може директно да се стигне во r други градови, добиваме дека $|P_k| = \binom{r}{2}$. Понатаму, $|P| = \binom{2r+1}{2}$, па следува

$$\binom{2r+1}{2} = |P| = \sum_{i=1}^{2r+1} |P_i| = (2r+1)\binom{r}{2}.$$

Од последната равека следува $r = 3$, т.е. $n = 7$, што противречи на претпоставката.

Заблешка. За држава со 7 градови може да се конструира мрежа патишта кои ги задоволуваат условите на задачата.

Сојузен натпревар 1989

I година

1. Нека x, y, z се позитивни броеви такви што $x+y+z=1$. Докажи дека

$$(1+\tfrac{1}{x})(1+\tfrac{1}{y})(1+\tfrac{1}{z}) \geq 64.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Ако го искористиме равенството $x+y+z=1$ и неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\begin{aligned}(1+\tfrac{1}{x})(1+\tfrac{1}{y})(1+\tfrac{1}{z}) &= \tfrac{x+x+y+z}{x} \cdot \tfrac{y+x+y+z}{y} \cdot \tfrac{z+x+y+z}{z} \\ &\geq \tfrac{1}{xyz} \cdot 4\sqrt[4]{x^2yz} \cdot 4\sqrt[4]{xy^2z} \cdot 4\sqrt[4]{xyz^2} = 64.\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z=\frac{1}{3}$.

2. Нека $x_1, x_2, ..., x_{1990}$ се природни броеви такви што

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{1989}^2 = x_{1990}^2.$$

Докажи дека најмалку два од овие броеви се парни.

Решение. а) Нека претпоставиме дека броевите $x_1, x_2, ..., x_{1990}$ се непарни. Да забележиме дека ако $n = 2k+1$, тогаш

$$n^2 = 4k(k+1)+1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 8).$$

Затоа

$$x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{1989}^2 \equiv 1989 \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 8) \text{ и } x_{1990}^2 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 8),$$

што е противречност.

б) Нека претпоставиме дека точно еден од броевите $x_1, x_2, ..., x_{1990}$ е парен. Ако тоа е бројот x_{1990}, тогаш секој од броевите $x_1, x_2, ..., x_{1989}$ е непарен, па затоа е непарен и збирот на нивните квадрати, што е противречност. Нека точно еден од броевите $x_1, x_2, ..., x_{1989}$ е парен, а бројот x_{1990} е непарен. Тогаш е парен и збирот $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_{1989}^2$, а бројот x_{1990}^2 е непарен, што повторно е противречност

3. Конструирај триаголник ABC за кој се дадени страните $BC=a$, $CA=b$ и важи $\measuredangle CAB = 3\measuredangle ABC$.

Решение. *Анализа.* Нека триаголникот ABC е таков што

$$BC=a,\ CA=b \text{ и } \measuredangle CAB = 3\measuredangle ABC.$$

Тогаш $a>b$. Со D да ја означиме точката на отсечката BC за која важи

$$\measuredangle DAB = \tfrac{1}{3} CAB = \measuredangle ABC.$$

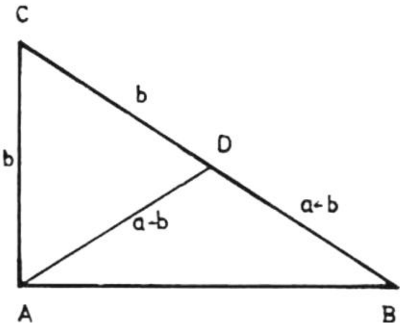
Тогаш $DA=DB$, а како е

$$\begin{aligned}\measuredangle CAD &= 2\measuredangle ABC\\ &= \measuredangle ABC + \measuredangle BAD\\ &= \measuredangle ADC,\end{aligned}$$

добиваме дека $CD = CA = b$. Затоа

$$DA = DB = a - b.$$

Конструкција. Го конструираме триаголникот ADC за кој важи $CD = CA = b$ и $DA = a - b$. Потоа на полуправата CD конструираме точка B таква што $CB = a$. Триаголникот ABC е бараниот триаголник.



Доказот и дискусијата му ги препуштаме на читателот за вежба.

4. Определи ги сите природни броеви n за кои важи:

$$[\sqrt[3]{1}] + [\sqrt[3]{2}] + \ldots + [\sqrt[3]{n}] = 2n.$$

Решение. Нека $a_k = [\sqrt[3]{k}] - 2$, за $k = 1, 2, 3, \ldots$. Треба да ги определиме сите природни броеви n за кои $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 0$. Да забележиме дека

$$\begin{aligned} a_k &= -1, \quad 1 \le k \le 7,\\ a_k &= 0, \quad 8 \le k \le 26,\\ a_k &= 1, \quad 27 \le k \le 63,\\ a_k &\ge 2, \quad k \ge 64. \end{aligned}$$

Јасно, збирот $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ е еднаков на 0 ако и само ако $n = 7 + 26 = 33$.

II година

1. Дадена е полукружница над дијаметар AB и на неа точки C и Dтакви што:

а) точката C припаѓа на лакот AD,

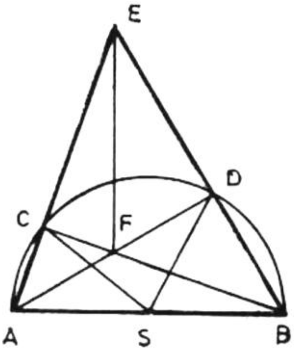
б) $\measuredangle CSD$ е прав, каде S е средина на отсечката AB.

Нека E е пресекот на правите AC и BD, а F е пресекот на правите AD и BC. Докажи дека векторот $\overrightarrow{EF}$ не зависи од изборот на точката C и D.

Решение. Бидејќи C и D припаѓаат на полукружницата над дијаметарот AB, важи

$$AD \perp BD, \; AC \perp BC.$$

Затоа точката F е ортоцентар на триаголникот ABE (цртеж десно). Според тоа, $EF \perp AB$. Бидејќи $\measuredangle CSD = 90^\circ$, добиваме $\measuredangle CAD = 45^\circ$. Значи, триаголникот ACF е рамнокрак правоаголен триаголник, па затоа $AC = CF$. Освен тоа, $\measuredangle ECF =$



$\measuredangle BCA = 90^\circ$ и $\measuredangle EFC = \measuredangle BAC$ (агли со нормални краци). Според тоа, триаголниците ECF и BCA се складни, па следува $EF = AB$.

2. Ако $a \geq 1, b \geq 1, c \geq 1$, докажи дека

$$\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} \leq \sqrt{c(ab+1)} .$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Нека $x \geq 1, y \geq 1$. Тогаш последователно добиваме:

$$\begin{aligned}
&(\sqrt{x-1}\sqrt{y-1}-1)^2 \geq 0,\\
&xy-x-y+2-2\sqrt{x-1}\sqrt{y-1} \geq 0,\\
&xy \geq x-1+2\sqrt{x-1}\sqrt{y-1}+y-1,\\
&xy \geq (\sqrt{x-1}+\sqrt{y-1})^2,\\
&\sqrt{xy} \geq \sqrt{x-1}+\sqrt{y-1}. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $\sqrt{x-1}\sqrt{y-1}=1$, т.е. ако и само ако $xy = x + y$.

Од неравенството (1) следува

$$\begin{aligned}
\sqrt{a-1}+\sqrt{b-1}+\sqrt{c-1} &\leq \sqrt{ab}+\sqrt{c-1}\\
&= \sqrt{(ab+1)-1}+\sqrt{c-1}\\
&\leq \sqrt{c(ab+1)}.
\end{aligned}$$

Знак за равенство важи ако и само ако $ab = a + b$ и $(ab+1)c = ab+1+c$, т.е. ако и само ако $abc-1 = ab = a+b$.

3. Во множеството цели броеви реши ја равенката: $x^y - 2^z = 1$.

Решение. Нека (x, y, z) е подредена тројка цели броеви за кои важи $x^y - 2^z = 1$. Лесно се гледа дека не е можно $y \leq 0$ и дека за $y = 1$ секоја тројка

$$(2^z+1, 1, z), \text{ каде } z \in \{0,1,2,...\}$$

е решение на дадената равенка. Нека $y > 1$. Тогаш $|x| > 1, z > 1$, а освен тоа x е непарен број и важи

$$(x-1)(x^{y-1}+x^{y-2}+...+x+1) = 2^z .$$

Сега, бидејќи $x^{y-1}+x^{y-2}+...+x+1$ е парен број, а сите собирци се непарни, заклучуваме дека $y-1 = 2k+1$, каде k е ненегативен цел број, па затоа

$$(x-1)(x+1)(x^{y-2}+x^{y-4}+...+1) = 2^z .$$

Бројот $(x-1)(x+1)$ е степен на бројот 2 со природен експонент, ако и само ако $x \in \{-3, 3\}$. За $x = 3$ добиваме

$$9^k+9^{k-1}+...+1=2^{z-3},$$
$$2^z=9^{k+1}-1=(3^{k+1}-1)(3^{k+1}+1),$$

од каде добиваме $k=0, y=2, z=3$, т.е. решение е тројката $(3,2,3)$. За $x=-3$ го добиваме решението $(-3,2,3)$.

4. Дадени се заемно прости природни броеви m и n. Во секое поле на бесконечна шаховска табла запишан е по еден реален број, така што важи: збирот на броевите во секој правоаголник $m\times n$ или $n\times m$ е еднаков на нула. Докажи дека барем два од запишаните броеви се еднакви меѓу себе.

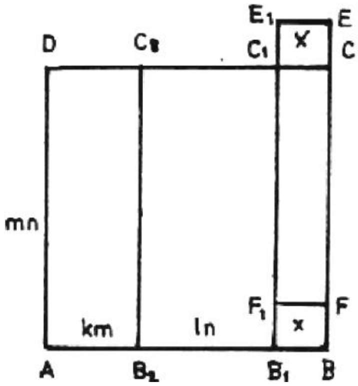
Решение. Бидејќи m и n се заемно прости броеви, при делење на броевите

$$m, 2m, ..., (n-1)m$$

се добиваат сите остатоци $1, 2, ..., n-1$. Според тоа, за некој $k\in\{1,2,...,n-1\}$ бројот $km+1$ е делив со n, па затоа бројот $mn-(km+1)$ е делив со n, т.е.

$$mn-1=km+nl,$$

каде l е природен број.



На шаховската табла да воведеме правоаголен координатен систем, така што точките со целобројни координати се темињата на полињата на таблата. Квадратот $ABCD$, каде $A(0,0), B(mn,0), C(mn,mn), D(0,mn)$, цртеж десно, може да се разбие на правоаголници со димензии $m\times n$ или $n\times m$. Затоа збирот на броевите кои се запишани внатре во квадратот е еднаков на нула. Да ги воведеме ознаките

$$B_1(mn-1,0), B_2(km,0), C_1(mn-1,mn), C_2(km,mn).$$

Тогаш секој од правоаголниците AB_2C_2D и $B_2B_1C_1C_2$ може да се разбие на правоаголници со димензии $m\times n$ или $n\times m$. Затоа збирот на сите броеви кои се запишани внатре во правоаголникот $AB_1C_1D_1$ е еднаков на нула, од што следува дека збирот на сите броеви кои се запишани внатре во правоаголникот B_1BCC_1 е еднаков на нула. Аналогно докажуваме дека истото својство го има и правоаголникот FEE_1F_1, каде

$$F(mn,1), F_1(mn-1,1), E(mn,mn+1), E_1(mn-1,mn+1).$$

Според тоа, во полињата BFF_1B_1 и CEE_1C_1 е запишан ист број.

III и IV година

1. Во множеството позитивни реални броеви реши го системот равенки:

$$\begin{aligned}x_1+x_2^2+x_3^3&=3,\\ x_2+x_3^2+x_4^3&=3,\\ x_3+x_4^2+x_1^3&=3,\\ x_4+x_1^2+x_2^3&=3.\end{aligned}$$

Решение. Нека четворката (x_1,x_2,x_3,x_4) позитивни реални броеви е решение на дадениот систем равенки.

а) Нека претпоставиме дека барем два од броевите x_1,x_2,x_3,x_4 се еднакви на 1. Бидејќи секои две непознати истовремено се појавуваат барем во една равенка, лесно добиваме дека и другите две непознати се еднакви на 1.

б) Да претпоставиме дека точно еден од броевите x_1,x_2,x_3,x_4 е еднаков на 1. Нека, на пример, $x_1=1$. Ако $x_2<1$, тогаш од првата равенка следува $x_3>1$, а потоа од третата следува $x_4<1$ и на крајот од четвртата следува $x_4>1$, што е противречност. Ако $x_2>1$, тогаш од првата, третата и четвртата равенка редоследно добиваме $x_3<1$, $x_4>1$ и $x_2<1$, што повторно е противречност.

в) Да претпоставиме дека ниту еден од броевите x_1,x_2,x_3,x_4 не е еднаков на 1. Нека, на пример, $x_1<1$. Можни се следниве четири случаи.

в1) $x_2>1, x_3>1$. Тогаш од втората равенка следува $x_4<1$, па затоа

$$3=x_3+x_4^2+x_1^3<x_3^3+x_2^2+x_1=x_1+x_2^2+x_3^3=3\,,$$

што е противречност.

в2) $x_2>1, x_3<1$. Тогаш од третата равенка следува $x_4>1$. Нека

$$x_1=1-a, x_2=1+b, x_3=1-c, x_4=1+d\text{, каде } 0<a<1, 0<c<1, b>0, d>0.$$

Тогаш

$$\begin{aligned}0&=x_2+x_3^2+x_4^3+x_4+x_1^2+x_2^3-x_1-x_2^2-x_3^3-x_3-x_4^2-x_1^3\\ &=(a^3-2a^2+2a)+(b^3+2b^2+2b)+(c^3-2c^2+2c)+(d^3+2d^2+2d)>0,\end{aligned}$$

бидејќи $2a>2a^2$ и $2c>2c^2$, што е противречност.

в3) $x_2<1, x_3>1$. Тогаш од четвртата равенка следува $x_4>1$, па затоа

$$3=x_4+x_1^2+x_2^3<x_4^3+x_3^2+x_2=x_2+x_3^2+x_4^3=3$$

што е противречност.

в4) $x_2<1, x_3<1$. Тогаш $x_1+x_2^2+x_3^3<3$, што е противречност.

Според тоа, во множеството позитивни броеви единствено решение на дадениот систем е $(1,1,1,1)$.

2. Нека $P(x)$ е полином со реални коефициенти таков што за секој реален x важи $P(x)\geq 0$.

Докажи дека постојат полиноми $Q(x)$ и $R(x)$ со реални коефициенти, такви што за секој реален број x важи

$$P(x)=Q^2(x)+R^2(x).$$

Решение. Нека $x_1,x_2,...,x_n$ се сите реални нули на полиномот $P(x)$, а $z_1,z_2,...,z_m$ се сите комплексни нули на полиномот $P(x)$ кои имаат позитивен имагинарен дел, при што секоја нула е запишана онолку пати колку што е нејзината кратност. Бидејќи полиномот $P(x)$ не го менува знакот на множеството реални броеви, заклучуваме дека кратноста на секоја реална нула е парен број. Затоа важи

$$\begin{aligned}P(x)&=Q_1^2(x)(x-z_1)...(x-z_m)(x-\overline{z_1})...(x-\overline{z_m})\\&=Q_1^2(x)(u+iv)(u-iv)\\&=Q_1^2(x)(u^2+v^2)\\&=(uQ_1)^2+(vQ_1)^2.\end{aligned}$$

3. Определи го бројот на подредените тројки (A,B,C) за кои важи:

а) $A\cup B\cup C=\{1,2,3,...,n\}$,

б) $A\cap B\cap C=\varnothing$,

в) $A\cap B\neq\varnothing$.

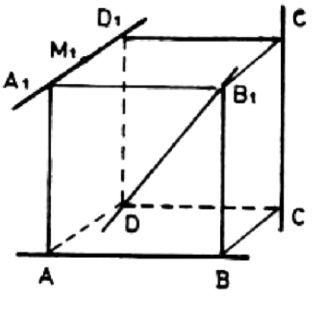
Решение. Ако за подредената тројка (A,B,C) важат дадените услови, тогаш секој од броевите $1,2,...,n$ се наоѓа во едно од следниве шест дисјунктни множества

$$A\cap\overline{B}\cap\overline{C},\ \overline{A}\cap B\cap\overline{C},\ \overline{A}\cap\overline{B}\cap C,\ A\cap B\cap\overline{C},\ A\cap\overline{B}\cap C,\ \overline{A}\cap B\cap C,$$

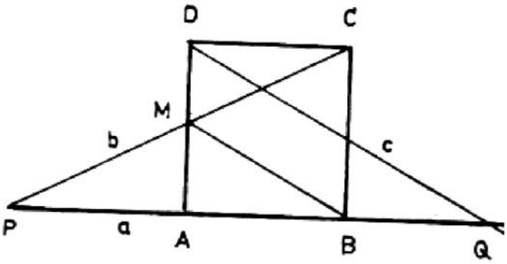
при што барем еден од овие елементи се наоѓа во множеството $A\cap B\cap\overline{C}$. Бројот на распоредите на n елементи во наведените шест дисјунктни множества е еднаков на 6^n. Бројот на распоредите кај кои $A\cap B\cap\overline{C}=\varnothing$ е еднаков на 5^n. Затоа бараниот број распореди е еднаков на 6^n-5^n.

4. Дадена е коцка $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Дали постои права која ја сече секоја од правите AB,CC_1,A_1D_1,DB_1?

Решение. Да претпоставиме дека постои права која ја сече секоја од правите AB,CC_1,A_1D_1,DB_1 (цртеж десно). Оваа права да ја означиме со n, со M_1 да го означиме нејзиниот пресек со правата A_1D_1, а со M нормалната проекција на точката M_1 на рамнината $ABCD$. Тогаш правата n е заедничка



за рамнините M_1AB, M_1CC_1 и M_1DB_1, па пресечните прави $a=AB, b=MC$ и c, редоследно, на овие рамнини со рамнината $ABCD$ имаат заедничка точка. Таа точка е пресекот на правата n и рамнината $ABCD$. Правата c е определена со условите $D\in c$, $c\|M_1B_1\|MB$, бидејќи c и M_1B_1 се пресеци на рамнината MDB_1 со паралелните рамнини $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$.



Меѓутоа, лесно се докажува дека правите a,b,c немаат заедничка точка. Со P и Q да ги означиме пресеците на правата a со правите b и c, соодветно. Ако $A-M-D$, т.е. ако точката M е меѓу точките A и D, тогаш $P-A-Q$, види цртеж. Ако е $A-D-M$, тогаш е $Q-B-P$. Ако е $D-A-M$, тогаш е $Q-A-P$. Ако $M=D$, тогаш $a\|b$, а ако е $M=A$, тогаш е $c=CD\|AB=a$. Според тоа, не постои права која ја сече секоја од правите AB, CC_1, A_1D_1, DB_1.

Сојузен натпревар 1990

I година

1. Нека n е природен број. Докажи го равенството

$$(\underbrace{33...3}_{n})^2+(\underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{44...4}_{n})^2=(\underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{44...4}_{n-1}5)^2.$$

Решение. Даденото равенство е еквивалентно на равенството

$$(\underbrace{33...3}_{n})^2=\underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{44...4}_{n-1}5+\underbrace{55...5}_{n-1}\underbrace{44...4}_{n},$$

т.е. на равенството

$$(\underbrace{33...3}_{n})^2=\underbrace{11...1}_{n-1}0\underbrace{88...8}_{n-1}9.$$

Последното равенство е исполнето бидејќи

$$\begin{aligned}\underbrace{11...1}_{n-1}0\underbrace{88...8}_{n-1}9&=\underbrace{11...1}_{n-1}\cdot 10^{n+1}+80\cdot\underbrace{11...1}_{n-1}+9\\&=\tfrac{10^{n-1}-1}{9}\cdot 10^{n+1}+\tfrac{10^{n-1}-1}{9}\cdot 80+9\\&=\tfrac{10^{2n}-2\cdot 10^{n}+1}{9}=(\tfrac{10^{n}-1}{3})^2\\&=(\underbrace{33...3}_{n})^2.\end{aligned}$$

2. Даден е остроаголен триаголник ABC со $\measuredangle ACB=60^\circ$. Докажи дека центарот на опишаната кружнца околу тој триаголник припаѓа на симетралата на еден од аглите кои ги формираат височините повлечени од темињата A и B.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}\measuredangle AHB=\measuredangle B'HA'&=120^\circ\\&=2\measuredangle ACB=\measuredangle AOB,\end{aligned}$$

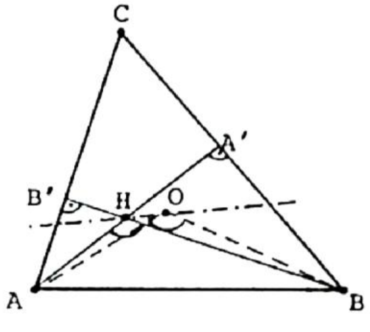
па затоа четириаголникот $ABOH$ е тетивен. Оттука следува

$$\measuredangle OHB=\measuredangle OAB=30^\circ.$$

Но,

$$\measuredangle A'HB=\measuredangle ACB=60^\circ,$$

па затоа правата OH е симетрала на $\measuredangle A'HB$.



3. Нека $a_1<a_2<...<a_n$ се дадени реални броеви. Ако

$$f:\{a_1,a_2,...,a_n\}\to\{a_1,a_2,...,a_n\}$$

е биекција таква што

$$a_1+f(a_1)<a_2+f(a_2)<...<a_n+f(a_n),$$

тогаш f е идентичното пресликување. Докажи!

Решение. Нека $f(a_k)=a_1$ и $k>1$. Тогаш

$$a_1+f(a_1)<a_2+f(a_2)<...<a_k+f(a_k)=a_k+a_1,$$

па затоа мора да важи инклузијата

$$\{f(a_1),f(a_2),...,f(a_{k-1})\}\subseteq\{a_1,a_2,...,a_{k-1}\}.$$

Но, $f(a_k)=a_1$ и бидејќи f е биекција добиваме $f(a_i)\neq a_1$, за $i=1,2,...,k-1$. Значи, важи $\{f(a_1),f(a_2),...,f(a_{k-1})\}\subseteq\{a_2,...,a_{k-1}\}$, што е противречност бидејќи f е биекција. Од добиената противречност следува $f(a_1)=a_1$.

Сега тврдењето на задачата следува ако претходните размислувања ги повториме за множествата $\{a_i,...,a_n\}, i=2,3,...n$.

4. На таблата се запишани броевите 1 и 2. Дозволено е допишување на нови броеви на следниов начин: Ако на таблата се запишани броевите a и b, тогаш може да се запише бројот $ab+a+b$. Дали на овој начин може да се добие бројот:

а) 13121, б) 12131.

Решение. Воочуваме дека ако $c=a+b+ab$, тогаш $c+1=(a+1)(b+1)$. Затоа наместо запишаните броеви на таблата може да ги разгледуваме броевите кои се зголемени за 1. Тогаш секој нов број е производ на некои два броја кои се веќе запишани на таблата. На почетокот ги имаме броевите $2=1+1$ и $3=2+1$, па затоа сите нови броеви се од видот $2^n\cdot3^m$, каде $m,n\in\mathbb{N}$. Но,

$$13121+1=13122=2\cdot3^8 \text{ и}$$

$$12131+1=12132=2^2\cdot3^2\cdot337,$$

што значи дека бројот 13121може да се добие на опишанио начин, а додека бројот 12131 не може да се добие на опишаниот начин.

II година

1. Определи ги сите парови различни природни броеви (x,y) такви што со замена на местата на последните две цифри на бројот x^2 се добива бројот y^2.

Решение. Да забележиме дека ако парот (x,y) го задоволува условот на здачата, тогаш и парот (y,x) го задоволува условот на здачата. Затоа доволно е да ги определиме паровите (x,y) за кои важи $x>y$.

Нека

$$x^2=\overline{a_1a_2...a_kpq} \text{ и } y^2=\overline{a_1a_2...a_kqp}.$$

Тогаш

$$x^2-y^2=9(p-q).$$

Ќе докажеме дека $d = p - q$ не може да е ниту еден од броевите 9, 8, 7 и 6.

а) Ако $d = 9$, тогаш $p = 9$ и $q = 0$, што не е можно бидејќи бројот x^2 не може да има двоцифрен завршеток 90.

б) Ако $d = 8$, тогаш $(p,q) = (9,1)$ или $(p,q) = (8,0)$. Ова повторно не е можно, бидејќи двоцифрениот завршеток на x^2 не може да биде ниту 91, ниту 80.

в) Ако $d = 7$, тогаш $(p,q) \in \{(7,0),(8,1),(9,2)\}$, што повторно не е можно бидејќи двоцифрениот завршеток на x^2 не може да биде ниту 92, ниту 81, ниту 70.

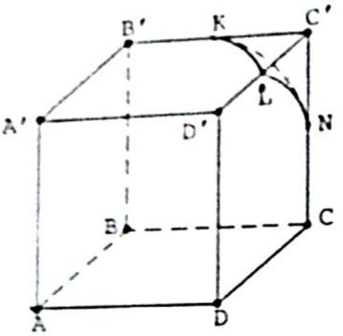
г) Ако $d = 6$, тогаш $(p,q) \in \{(6,0),(7,1),(8,2),(9,3)\}$, што од исти причини како погоре не е можно.

Значи, $d \leq 5$. Од ова пак следува

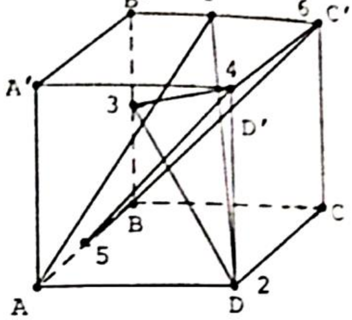
$$2y+1 \leq x+y \leq (x-y)(x+y) = 9d \leq 45,$$

од каде следува $y \leq 22$. Со проверка на сите вредности за y од 1 до 22, лесно се проверува дека $y = 13$ или $y = 14$, т.е. бараните парови се $(13,14)$ и $(14,13)$.

2. Искршената линија, на која секој сегмент има должина 3 и чии темиња припаѓаат на ѕидовие на коцка со раб 2, поврзува две најоддалечени темиња на таа коцка. Кој е најмалиот број сегменти што може да ги има таквата искршена линија?



Решение. Нека искршената линија почнува во темето A и завршува во темето C'. Сферата со радус 3 и центар во A ја сече површината на коцката во три лаци: KL, LN, NK, каде K, L, N се средините на рабовите $B'C', C'D', C'C$, соодветно, цртеж десно. Тоа значи дека следното теме M на искршената линија лежи на еден од овие лаци. Ако точката M не се поклопува со ниту една од точките K, L, N, тогаш сферата со радиус 3 и центар M минува низ точката A и преостанатите точки од коцката ги содржи во својата внатрешност. Затоа искршената линија минува низ една од точките K, L, N. Нека тоа е точката K. Сега единствен сегмент со должина 3 се добива ако искршената линија минува низ темето D (Зошто?). Продолжувајќи ја постапката добиваме дека искршената линија од A до C' мора да содржи најмалку шест сегменти. Една таква искршена линија е прикажана на цртежот лево.



3. Даден е триаголник ABC. Нека K е точка од отсечката AB, L е точка од отсечката BC, а M точка од отсечката KL. Докажи дека

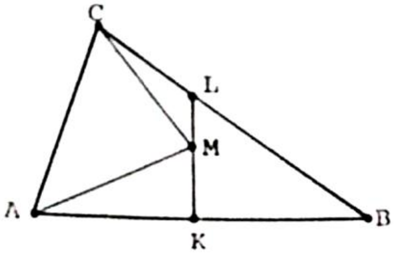
$$\sqrt[3]{P_{ABC}} \geq \sqrt[3]{P_{AKM}} + \sqrt[3]{P_{MLC}}.$$

Решение. Имаме:

$$\frac{P_{AKM}}{P_{ABC}} = \frac{P_{AKM}}{P_{AKL}} \cdot \frac{P_{AKL}}{P_{ABL}} \cdot \frac{P_{ABL}}{P_{ABC}} = \frac{KM}{KL} \cdot \frac{AK}{AB} \cdot \frac{BL}{BC},$$

па затоа

$$\sqrt[3]{\frac{P_{AKM}}{P_{ABC}}} = \frac{1}{3}\left(\frac{KM}{KL} + \frac{AK}{AB} + \frac{BL}{BC}\right).$$



Аналогно се докажува дека

$$\sqrt[3]{\frac{P_{MLC}}{P_{ABC}}} = \frac{1}{3}\left(\frac{ML}{KL} + \frac{KB}{AB} + \frac{LC}{BC}\right).$$

Ако ги собереме последните две равенства и помножиме со $\sqrt[3]{P_{ABC}}$, го добиваме бараното неравенство.

4. Еден цар сака да изгради дворец во кој ќе има 1990 соби на едно ниво и таков што ќе важат следниве услови:

(i) бројот на вратите на секоја соба е 0, 1 или 2,

(ii) меѓу две соби има најмногу една врата; од секоја соба на улица води најмногу една врата,

(iii) бројот на соби со врата на улица е 19, а бројот на соби со точно една врата е 90.

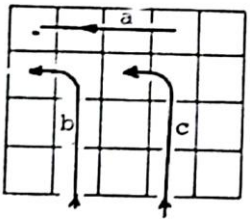
Дали е можно да се изгради ваков дворец?

Решение. Да претпоставиме дека таков дворец постои. Имаме три типа на максимални вериги кои ги поврзуваат собите и тоа:

a) се тргнува од соба и се завршува во соба,

b) се тргнува од улица и се излегува на улица,

c) се тргнува од улица и се завршува во соба.



Со отфрлање на сите вериги од типот a) бројот на соби со една врата ќе се промени за парен број и значи ќе биде повторно парен број, а бројот на врати према улица ќе остане 19. Потоа, со отфрлање на сите вериги од типот b) бројот на соби со една врата останува непроменет, па тој ќе биде парен број, а бројот на врати према улица ќе се промени за парен број, што значи дека ќе остане непарен број. Сега остануваат само вериги од типот c) и затоа бројот на соби со една врата ќе се совпадне со бројот на врати према улица, што не е можно бидејќи едниот број е парен, а другиот број е непарен.

Конечно, од добиената противречност следува дека не може да се изгради дворец кој ќе ги задоволува условите кои ги бара царот.

III и IV година

1. Квадар со димензии $m\times n\times p$ (m,n,p се природни броеви) е составен од mnp единични коцки. На секој единична коцка е придружен еден реален број. За секој квадрат со димензии $m\times 1\times 1$ или $1\times n\times 1$ или $1\times 1\times p$, составен од единичните коцки важи: броевите придружени на единичните коцки од овие квадари, земени по ред, формираа аритметичка прогресија. Збирот на броевите придружени на коцките кои се во темињата на почетниот квадар е еднаков на a. Определи го збирот на сите броеви кои се придружени на единичните коцки.

Решение. Прво да ги разгледаме броевите придружени на долниот слој на квадарот. Тие се:

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & \dots & a_{1n}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & \dots & a_{2n}^{(1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}^{(1)} & a_{m2}^{(1)} & \dots & a_{mn}^{(1)} \end{bmatrix}$$

За збирот на броевите од $i-$тата редица важи

$$A_i=\frac{n}{2}(a_{i1}^{(1)}+a_{in}^{(1)}),$$

а за збирот на сите бреови во долниот слој имаме:

$$N_1=\sum_{i=1}^{m}A_i=\frac{n}{2}(a_{11}^{(1)}+a_{21}^{(1)}+a_{m1}^{(1)}+a_{1n}^{(1)}+a_{2n}^{(1)}+...+a_{mn}^{(1)})$$

$$=\frac{n}{2}\cdot\frac{m}{2}(a_{11}^{(1)}+a_{m1}^{(1)}+a_{1n}^{(1)}+a_{mn}^{(1)}).$$

Аналогно, за збирот на броевите придружени на $k-$тиот слој се добива

$$N_1=\frac{n}{2}\cdot\frac{m}{2}(a_{11}^{(k)}+a_{m1}^{(k)}+a_{1n}^{(k)}+a_{mn}^{(k)}),$$

а за збирот на сите броеви придружени на квадарот се добива

$$\sum_{i=1}^{p}N_i=\frac{mn}{4}(a_{11}^{(1)}+a_{11}^{(2)}+...+a_{11}^{(p)}+a_{m1}^{(1)}+a_{m1}^{(2)}+...+a_{m1}^{(p)}+$$

$$+a_{1n}^{(1)}+a_{1n}^{(2)}+...+a_{1n}^{(p)}+a_{mn}^{(1)}+a_{mn}^{(2)}+...+a_{mn}^{(p)})$$

$$=\frac{mnp}{8}(a_{11}^{(1)}+a_{m1}^{(1)}+a_{1n}^{(1)}+a_{mn}^{(1)}+a_{11}^{(p)}+a_{m1}^{(p)}+a_{1n}^{(p)}+a_{mn}^{(p)})$$

$$=\frac{mnpa}{8}.$$

2. Нека $x_0=1990$ и $x_n=-\frac{1990}{n}(x_0+x_1+...+x_{n-1})$, за $n\ge 1$. Пресметај го збирот

$$x_0+2x_1+2^2x_2+...+2^{1990}x_{1990}.$$

Решение. Од

$$x_0+x_1+...+x_{n-1}=-\frac{n}{1990}x_n\,,$$

прво за $n=k$, а потоа за $n=k-1$ добиваме

$$x_k=-\frac{1990}{k}(x_0+x_1+...+x_{k-2}+x_{k-1})=-\frac{1990}{k}(-\frac{1990}{k-1}x_{k-1}+x_{k-1})$$

$$=-\frac{1990-k+1}{k}x_{k-1}=...=(-1)^k\binom{1990}{k}x_0.$$

Според тоа,

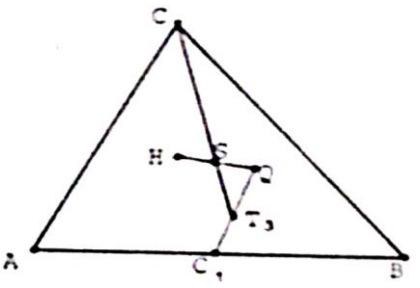
$$\sum_{k=0}^{1990}2^k x_k=x_0\sum_{k=0}^{1990}2^k(-1)^k\binom{1990}{k}=(1-2)^{1990}x_0=x_0=1990.$$

3. Нека S е центарот на опишаната кружница, а H е ортоцентарот на триагоникот ABC. Понатаму, нека Q е точка таква што S е средина на отсечката HQ и нека T_1,T_2 и T_3 се тежиштата на триаголниците BCQ,CAQ и ABQ, соодветно. Докажи дека

$$AT_1=BT_2=CT_3=\frac{4}{3}R,$$

каде што R е радусот на опишаната кружниа околу триаголникот ABC.

Решение. Нека C_1 е средината на AB. Да ги разгледаме триаголниците CHT и C_1ST каде T е тежиштето на триаголникот ABC. Користејќи ја теоремата на Ојлер, според која тежиштето T лежи на отсечката HS и притоа важи $HT=2TS$, и користејќи дека $C_1S\parallel CH$ добиваме $\overrightarrow{SC_1}=\frac{1}{2}\overrightarrow{CH}$. Тогаш



$$\overrightarrow{CT_3}=\overrightarrow{CQ}+\overrightarrow{QT_3}=\overrightarrow{CQ}+\frac{2}{3}\overrightarrow{QC_1}=\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{SQ}+\frac{2}{3}\overrightarrow{QC_1}$$

$$=\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{HS}+\frac{2}{3}\overrightarrow{QC_1}=\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{HS}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{QS}+\overrightarrow{SC_1})$$

$$=\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{HS}+\frac{2}{3}(\overrightarrow{QS}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CH})=\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{HS}+\frac{2}{3}(-\overrightarrow{HS}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CH})$$

$$=\overrightarrow{CS}+\overrightarrow{HS}+\frac{2}{3}(-\overrightarrow{HS}+\frac{1}{2}(\overrightarrow{CS}-\overrightarrow{HS}))=\frac{4}{3}\overrightarrow{CS}.$$

Значи точките C,S и T_3 се колинеарни и притоа важи $CT_3=\frac{4}{3}CS=\frac{4}{3}R$. Аналогно се докажува $AT_1=\frac{4}{3}R$ и $BT_2=\frac{4}{3}R$.

4. Колку различни бинарни релации постојат во множество од n елементи, кои што не се симетрични и антисиметрични?

(За една бинарна релација велиме дека е антисиметрична ако за кои било два различни елементи a и b за кои a е во релација со b важи дека b не е во релација со a.)

Решение. За кои било два елементи a и b од некое множество со n елементи, и релација ρ, постојат четири можности:

(i) $(a,b)\in\rho$ и $(b,a)\in\rho$,

(ii) $(a,b)\in\rho$ и $(b,a)\notin\rho$,

(iii) $(a,b)\notin\rho$ и $(b,a)\in\rho$,

(iv) $(a,b)\notin\rho$ и $(b,a)\notin\rho$.

Тогаш бројот на сите бинарни релации е еднаков на $2^n\cdot 4^{\binom{n}{2}}$, каде множителот 2^n се јавува заради паровите со еднакви компоненти. Антисиметрични релации има $2^n\cdot 3^{\binom{n}{2}}$, бидејќи од четирите можности не е дозволена само првата. Симетрични релации има $2^n\cdot 2^{\binom{n}{2}}$, бидејќи во овој случај не се дозволени две од четирите можности и тоа втората и третата. Релации што се и симетрични и антисиметрични има 2^n. Конечно, од принципот на вклучување и исклучување следува дека бараниот број е

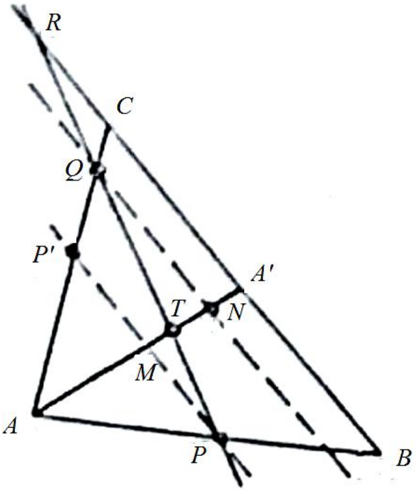
$$2^n\cdot 4^{\binom{n}{2}}-2^n\cdot 3^{\binom{n}{2}}-2^n\cdot 2^{\binom{n}{2}}+2^n=2^n\cdot(4^{\binom{n}{2}}-3^{\binom{n}{2}}-2^{\binom{n}{2}}+1).$$

Сојузен натпревар 1991

I година

1. Права минува низ тежиштето T на триаголникот ABC и ги сече страните AB и AC и продолжението на страната BC во точките P,Q и R, соодветно, при шт точката C е меѓу точките B и R. Докажи дека

$$\frac{1}{TP}=\frac{1}{TQ}+\frac{1}{TR}.$$



Решение. Нека тежишната линија TA ја сече страната BC во точката A', цртеж десно. Правата која минува низ Q и е паралелна на BC нека ја сече тежишната линија AA' во точката N, а правата која минува низ P и е паралелна со BC нека ги сече тежишната линија AA' и страната AC во точките M и P', соодветно. Да ставиме $TA'=a$, $TA=2a$, $TM=xa$ и $TN=ya$. Бидејќи $\triangle QTN\sim\triangle PTM$ и $PM=MP'$, добиваме

$$\frac{TN}{TM}=\frac{QN}{MP}=\frac{QN}{MP'}=\frac{NA}{MA}=\frac{NT+TA}{TA-MT}.$$

Значи,

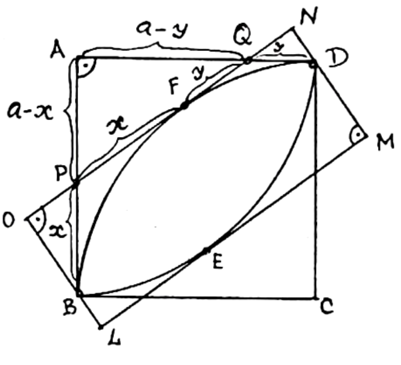
$$\frac{ya}{xa}=\frac{ya+2a}{2a-xa},\qquad \frac{y}{x}=\frac{y+2}{2-x},\qquad y=x(y+1),$$

$$\frac{y}{x}=y+1,\qquad \frac{ya}{xa}=1+\frac{ya}{a},\qquad \frac{TN}{TM}=1+\frac{TN}{TA'}.$$

Но, бидејќи $\triangle QTN\sim\triangle PTM$ имаме $\frac{TN}{TM}=\frac{TQ}{TP}$, а како $\triangle QTN\sim\triangle RTA'$ имаме $\frac{TN}{TA'}=\frac{TQ}{TR}$, па затоа од $\frac{TN}{TM}=1+\frac{TN}{TA'}$ следува $\frac{TQ}{TP}=1+\frac{TQ}{TR}$, односно $\frac{1}{TP}=\frac{1}{TQ}+\frac{1}{TR}$.

2. Фигурата F се состои од точките B и D и лаците BD конструирани во внатрешноста на квадратот $ABCD$ со центри во A и C и радиуси AB. Докажи дека сите правоаголници опишани околу фигурата F, такви што секоја страна на правоаголникот има точно една заедничка точка со фигурата F, имаат еднакви периметри.

Решение. Нека $LMNO$ е произволен правоаголник опишан околу фигурата F, и нека допирните точки на фигурата F со правоаголникот се B,D,E и F, цртеж десно. Нека страната ON на правоаголникот ги сече страните AB и AD на квадратот $ABCD$ во точките P и Q, соодветно.



Нека $PF=x$ и $FQ=y$. Тогаш $BP=x$, $AP=a-x$, $QD=y$ и $AQ=a-y$, каде a е должината на страната на квадратот $ABCD$. Од $\measuredangle BPO=\measuredangle QPA$ и $\measuredangle BOP=\measuredangle QAP=90^\circ$ следува $\triangle BPO\sim\triangle QPA$, па затоа

$$\frac{OP}{BP}=\frac{AP}{QP} \text{ и } \frac{OB}{BP}=\frac{AQ}{QP},$$

односно

$$OP=x\frac{a-x}{x+y} \text{ и } OB=x\frac{a-y}{x+y}.$$

Аналогно се докажува дека $\triangle QPA\sim\triangle QDN$, па од оваа сличност аналогно се добива дека $DN=y\frac{a-x}{x+y}$ и $QN=y\frac{a-y}{x+y}$. Понатаму, добиваме

$$\begin{aligned}BO+ON+ND&=x\frac{a-y}{x+y}+x\frac{a-x}{x+y}+x+y+y\frac{a-y}{x+y}+y\frac{a-x}{x+y}\\&=x+y+(x+y)\frac{a-x}{x+y}+(x+y)\frac{a-y}{x+y}\\&=x+y+a-x+a-y=2a.\end{aligned}$$

Аналогно се добива дека $BL+LM+MD=2a$, па затоа

$$LM+MN+NO+OL=4a=\text{const}.$$

3. Дали постои низа со должина 3982 за која важи:

а) секој број $k\in\{1,2,3,....,1991\}$ во низата се јавува два пати,

б) секој број k во таа низа се јавува по втор пат точно на $k-$тото место по првото појавување.

Решение. Нека претпоставиме дека постои низа со должина 3982 за која се исполнети условите а) и б). Бројот $k\in\{1,2,3,....,1991\}$ нека се јавува на m_k-тото место и на $(m_k+k)-$тото место. Тогаш

$$1+2+3+...+3982=(m_1+(m_1+1))+(m_2+(m_2+2))+...+(m_{1991}+(m_{1991}+1991)),$$

$$\frac{3982\cdot(3982+1)}{2}=2(m_1+m_2+...+m_{1991})+\frac{1991\cdot(1991+1)}{2},$$

$$7930153=2(m_1+m_2+...+m_{1991})+1983036,$$

што е противречност, бидејќи во последното равенство левата страна е непарен, а десната е парен број. Конечно, од добиената противречност следува дека не постои низа со саканите својства.

4. Ако $a\geq 1,\ b\geq 1$, тогаш

$$3(\frac{a^2-b^2}{8})^2+\frac{ab}{a+b}\geq\sqrt{\frac{a^2+b^2}{8}} \qquad (1)$$

Докажи!

Решение. Означуваме $K=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ и $A=\frac{a+b}{2}$. Од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина добиваме $K\ge A\ge 1$, па затоа $A^3\ge 1$, $K-A\ge 0$ и $3(K+A)\ge 2(K+2A)$.

Имаме,

$$ab=2A^2-K^2,\quad (a^2-b^2)^2=(a+b)^2(a^2+b^2-2ab)=16A^2(K^2-A^2)$$

па затоа неравенството (1) можеме да го запишеме во облик

$$\tfrac{3}{4}A^2(A^2-K^2)+\tfrac{2A^2-K^2}{2A}\ge\tfrac{K}{2},$$

т.е. во еквивалентно неравенство

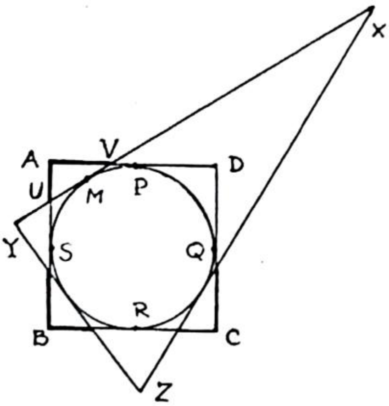
$$3A^3(K-A)(K+A)\ge 2(K-A)(K+2A),$$

кое очигледно е исполнето.

II година

1. Околу кружница со дијаметар 1 се опишани триаголник и квадрат, кои немаат страни кои припаѓаат на иста права. Докажи дека периметарот на делот од квадратот кој што се наоѓа надвор од триаголникот има должина помала од 1,8.

Решение. Нека опишаниот квадрат е $ABCD$, цртеж десно. Бидејќи триаголникот и квадратот немаат страни кои припаѓаат на иста права, три од темињата на квадратот $ABCD$ лежат надвор од триаголникот, а едно теме е во неговата внатрешност. Ќе го разгледаме делот од квадратот кој е сврзан со темето A. Истата дискусија важи и за темињата B и C, кои што се надвор од триаголникот.



Нека P,Q,R,S се допирните точки на квадратот и кружницата, а X,Y,Z се темињата на триаголникот. Нека страната XY ги сече страните на квадратот AB и AD во точките U и V, соодветно и нека ја допира кржницата во точката M. Ставаме $MU=x$ и $MV=y$.Тогаш $SU=x$, $VP=y$, $AU=\frac{1}{2}-x$ и $AV=\frac{1}{2}-y$. Од Питагоровата теорема, применета на триаголникот AUV следува:

$$(\tfrac{1}{2}-x)^2+(\tfrac{1}{2}-y)^2=(x+y)^2,\text{ т.е. } (x+\tfrac{1}{2})(y+\tfrac{1}{2})=\tfrac{1}{2}.$$

Според тоа,

$$\tfrac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{(x+\tfrac{1}{2})(y+\tfrac{1}{2})}\le\tfrac{(x+\frac{1}{2})+(y+\frac{1}{2})}{2},$$

$$x+y\ge\sqrt{2}-1.$$

Значи,

$$AU+AV=1-(x+y)\leq 2-\sqrt{2}\,.$$

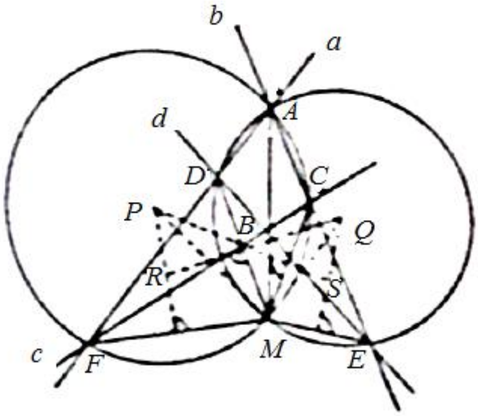
Конечно, заради симетрија, добиваме дека периметарот на делот од квадратот кој што се наоѓа надвор од триаголникот има должина помала или еднаква на

$$3(2-\sqrt{2})\approx 1,757359<1,8\,.$$

2. Дадени се четири прави такви што секои две се сечат и ниеи три не минуваат низ иста точка. Овие прави определуваат четири триаголници.

а) Докажи дека опишаните кружници околу четирите триаголници имаат заедничка точка X .

б) Докажи дека центрите на опишаните кружници околу четирите триаголници припаѓаат на една кружница која минува низ точката X .



Решение. Нека дадените прави се a,b,c,d и нека тие се сечат во точките A,B,C,D,E,F како на цртежот десно.

а) Со M да ја означиме втората пресечна точка на кружниците опишани околу триаголниците ACF и ADE . Имаме

$$\begin{aligned}\measuredangle BCM=\measuredangle FCM&=\measuredangle FAM\\&=\measuredangle DAM=\measuredangle DEM\\&=\measuredangle BEM,\end{aligned}$$

па затоа точките B,C,E,M се концилкични, т.е. опишаната кружница околу триаголникот BCE минува низ точката M . Аналогно се докажува дека опишаната кружница оклу триаголникот BDF минува низ точката M .

б) Центрите P,Q,R,S на кружниците опишани оклу триаголниците $ACF,$ ADE,BDF,BCE припаѓаат на симетралите на отсечките MC,MD,MF,ME , соодветно. Потоа

$$\measuredangle MPS=\tfrac{1}{2}\measuredangle MPC=\measuredangle MAC=\measuredangle MAE=\tfrac{1}{2}\measuredangle MQE=\measuredangle MQS\,,$$

од каде што следува дека точките M,P,Q,S припаѓаат на иста кружница k . Покрај тоа,

$$\measuredangle RPS=\tfrac{1}{2}\measuredangle FPC=\measuredangle FAC=\measuredangle DAE=\tfrac{1}{2}\measuredangle DQE=\measuredangle RQS\,,$$

што значи дека точките P,Q,R,S лежат на истата кружница k , што и требаше да се докаже.

3. Доажи дека за позитивните броеви a,b,c важи неравеството

$$\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}\leq\frac{1}{abc}.$$

Решение. Ако x и y се позитивни реални броеви, тогаш последователно добиваме

$$\begin{aligned}&(x-y)^2\geq 0,\\&x^2-xy+y^2\geq xy,\\&(x+y)(x^2-xy+y^2)\geq xy(x+y),\\&x^3+y^3\geq xy(x+y),\\&x^3+y^3+xyz\geq xy(x+y+z),\\&\frac{1}{x^3+y^3+xyz}\leq\frac{1}{xy(x+y+z)}.\end{aligned}$$

Сега, од докажаното неравенство следува дека за позитивните релани броеви a,b,c важи

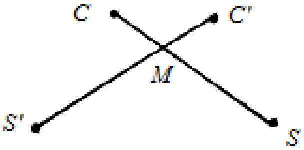
$$\begin{aligned}\frac{1}{a^3+b^3+abc}+\frac{1}{b^3+c^3+abc}+\frac{1}{c^3+a^3+abc}&\leq\frac{1}{ab(a+b+c)}+\frac{1}{bc(a+b+c)}+\frac{1}{ca(a+b+c)}\\&=\frac{c+a+b}{abc(a+b+c)}=\frac{1}{abc}.\end{aligned}$$

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

4. Во рамнината се дадени $2n$ точки такви што никои три не лежат на иста права. Половината од дадените точки се обоени во сина, а половината во црвена боја. Докажи дека постојат n отсечки чии крајни точки се различно обоени и такви што никои две од нив не се сечат.

Решение. Нека секоја црвена точка ја поврземе со сина точка, при што различните сини точки ги поврзуваме со различни црвени точки и обратно. На тој начин добиваме поврзување кое има n отсечки. Меѓу сите можни вакви поврзувања да го разгледаме поврзувањето кај кое збирот на должините на добиените отсечки е најмал. Ќе докажеме дека ова поврзување ги задоволува условите на задачата.

Навистина, да претпоставиме дека отсечките CS и $C'S'$ се сечат во точката M, при што точките C и C' се црвени, а точките S и S' се сини (цртеж десно). Тогаш од неравенството на триаголник следува



$$CS'+C'S<(CM+MS')+(MC'+MS)=CS+C'S'.$$

Затоа поврзувањето кое го добиваме од разгледуваното поврзување со замена на отсечките CS и $C'S'$ со отсечките CS' и $C'S$, а другите отсечки остануваат непроменети има помал збир на должините на отсечките, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува дека во поврзувањето со најмал збир на должините на отсечките не постојат две отсчки кои се сечат.

III и IV година

1. Нека $a \in \mathbb{N}$ и нека низата (x_n) е определена со:

$$x_1 = a, \quad x_{n+1} = \begin{cases} \frac{x_n}{2}, & \text{ако } x_n \text{ е парен број,} \\ \frac{3x_n+1}{2}, & \text{ако } x_n \text{ е непарен број.} \end{cases}$$

Докажи дека барем еден член на низата (x_n) е парен број.

Решение. Ако a е парен рбој, тогаш нема што да се докажува. Затоа нека претпоставиме дека a е неапрен број и $a+1 = 2^k R$, каде $R = 2R_1 + 1$ е непарен природен број. Тогаш

$$x_1 = 2^{k+1}R_1 + 2^k - 1,$$
$$x_2 = \frac{3x_1+1}{2} = 2^k(3R_1+1) + 2^{k-1} - 1 = 2^k R_2 + 2^{k-1} - 1,$$
$$x_3 = \frac{3x_2+1}{2} = 2^{k-1}R_3 + 2^{k-2} - 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_n = 2^{k-n+2}R_n + 2^{k-n+1} - 1,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$x_k = 4R_k + 1,$$
$$x_{k+1} = 6R_k + 2.$$

Значи, x_{k+1} е парен број.

2. Определи го бројот на пермутациите $(a_1, a_2, ..., a_n)$ на броевите $1, 2, ..., n$ такви што за секој $k \in \{2, 3, ..., n\}$ важи: меѓу броевите $a_1, a_2, ..., a_{k-1}$ постои барем еден кој од бројот a_k се разликува за 1.

Решение. Нека бројот на разгледуваните пермутации е S_n. Со индукција по n ќе докажеме дека $S_n = 2^{n-1}$. За $n=1$ и $n=2$ тврдењето е тривијално. Нека претпоставиме дека за бројот n важи $S_n = 2^{n-1}$. За да ги најдеме сите пермутации на броевите $1, 2, ..., n+1$ кои го имаат разгледуваното својство, прво ќе докажеме дека во секоја таква пермутација последниот број не може да биде некој од броевите $2, 3, ..., n$.

Нека е дадена произволна пермутација $(a_1, a_2, ..., a_{n+1})$ на броевите $1, 2, ..., n+1$ таква што $a_{n+1} \neq 1$ и $a_{n+1} \neq n+1$. Бројот $a_{n+1}+1$ се наоѓа пред бројот a_{n+1}. Според својството на пермутацијата следува дека $a_{n+1}+2$ се наоѓа пред $a_{n+1}+1$, потоа $a_{n+1}+3$ е пред $a_{n+1}+2$ итн. Значи, бројот $n+1$ се наоѓа пред бројот n и освен тоа мора да е прв. Од друга страна, пак, јасно е дека бројот $a_{n+1}-1$ се наоѓа пред бројот a_{n+1}. Сега, од својството на пермутацијата следува дека $a_{n+1}-2$ мора да е пред $a_{n+1}-1$, потоа $a_{n+1}-3$ мора да е пред $a_{n+1}-2$ итн. Значи, бројот 1 е пред бројот 2 и затоа 1 мора да е на прво место. Со тоа добивме дека на прво место треба да се и 1 и $n+1$, што е противречност.

Од претходните разгледувања следува дека во пермутацијата на последното место мора да е бројот 1 или бројот $n+1$. Ако на последното место е бројот $n+1$, тогаш пермуатцијата $(a_1,a_2,...,a_n,n+1)$ го има саканото својство ако и само ако пермутацијата $(a_1,a_2,...,a_n)$ на бровите $1,2,...,n$ го има саканото својство, а такви пермуатции има 2^{n-1}. Ако бројот 1 е на последното место, тогаш пермуацијата $(a_1,a_2,...,a_n,1)$ го има саканото својство ако и само ако пермутацијата $(a_1-1, a_2-1,...,a_n-1)$ на броевите $1,2,...,n$ го има саканото својство, а такви пермутации има 2^{n-1}. Конечно, од принципот на збир следува дека

$$S_{n+1}=2^{n-1}+2^{n-1}=2^n,$$

со што доказот е завршен.

3. Ако $a_0\geq a_1\geq a_2\geq...\geq a_n>0$ и ако α е нула на полиномот

$$p(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n,$$

докажи дека $|\alpha|\leq 1$.

Решение. Да претпоставиме дека $r=|\alpha|>1$. Ќе докажеме дека $p(\alpha)\neq 0$, со што задачата ќе биде решена.

Да го разгледаме полиномот

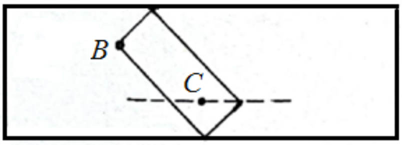
$$\begin{aligned}q(x)&=p(x)(1-x)\\&=(a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n)(1-x)\\&=a_0x^n-a_0x^{n+1}+a_1x^{n-1}-a_1x^n+...+a_n-a_nx\\&=a_n+(a_{n-1}-a_n)x+...+(a_0-a_1)x^n-a_0x^{n+1}.\end{aligned}$$

Оттука следува

$$\begin{aligned}|p(\alpha)(1-\alpha)|&=|a_n+(a_{n-1}-a_n)\alpha+...+(a_0-a_1)\alpha^n-a_0\alpha^{n+1}|\\&\geq a_0r^{n+1}-|a_n+(a_{n-1}-a_n)\alpha+...+(a_0-a_1)\alpha^n|\\&\geq a_0r^{n+1}-r^n(a_n+a_{n-1}-a_n+...+a_0-a_1)\\&=a_0r^n(r-1)>0.\end{aligned}$$

Според тоа, $|p(\alpha)|\cdot|1-\alpha|>0$, па затоа $p(\alpha)\neq 0$.

4. Дадена е правоаголна табла која има m колони и n редици, каде што $m>n$ и броевите m и n се со иста парност. Во долниот лев агол на таблата се наоѓа бел ловец, а во горниот десен агол се наоѓа црн ловец. Играчите B и C наизменично повлекуваат потези со ловците според правилата на шаховската игра. Играта ја започнува играчот B и тој секогаш игра со белиот ловец, а играчот C секогаш игра со црниот ловец. Играта ја добива играчот кој ќе го постави својот ловец под удар на противничкиот ловец. Кој играч има победничка стратегија?



Решение. Играта ја добива црниот ловец. Неговата победничка стратегија е следнава: Ако белиот ловец B се наоѓа на $k-$тиот ред од горниот раб на таблата, тогаш црниот ловец C доаѓа до $k-$тиот ред од долниот дел на таблата, при што ако има повеќе можности за таков потез, тој го избира потезот со кој ќе биде поблиску до белиот ловец. Јасно, со оваа стратегија на црниот ловец белиот ловец не може да ја добие играта. Освен тоа, по конечен број чекори со оваа стратегија, црниот ловец ќе успее да влезе во внатрешноста на малиот правоаголник (види цртеж), чие едно теме е ловецот B, или пак по дијагонала да е наспроти B. Сега, како и да игра белиот ловец, црниот ловец во следниот чекор ја добива играта.

ЛИТЕРАТУРА

1. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DMS, Beograd, 1991
2. Kadelburg, Z.; Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematika 1960-1989, DMS, Beograd, 1990
3. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjoh škola, DMS, Beograd, 1991
4. Димитровски, Д., Марковски, С.: Десет години сојузни натпревари по математика на учениците од средните школи во СФРЈ, Математички институт со нумерички центар, Скопје, 1971
5. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки (второ издание), Армаганка, Скопје, 2019
6. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства (второ издание), Армаганка, Скопје, 2019
7. Малчески, Р.: Збирка задачи по теорија на броеви, Математички талент, Скопје, 2022
8. Малчески, Р.: Теорија на броеви, Математички талент, Скопје, 2022
9. Списание СИГМА (1977-1992), СММ, Скопје