МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ С8

збирка задачи за IV година
втор дел

Ристо Малчески
Алекса Малчески
Слаѓана Брсаковска
Зоран Мисајлески
Томи Димовски

Ристо Малчески
Алекса Малчески
Слаѓана Брсаковска
Зоран Мисајлески
Томи Димовски

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ С8
(збирка задачи за IV година)

Скопје, 2020

Рецензенти:
Даниел Велинов
Самоил Малчески
Сања Костадинова

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски", Скопје

51(075.3)(076)

МАТЕМАТИЧКИ талент С8 : (збирка задачи за IV година) / Ристо Малчески ... [и др.]. - Скопје : Армаганка, 2020. - 219 стр. ; 25 см

Други автори: Алекса Малчески, Слаѓана Брсаковска, Зоран Мисајлески, Томи Димовски. - Библиографија: стр. 213-219

ISBN 978-608-4904-60-1

1. Малчески, Ристо [автор] 2. Малчески, Алекса [автор] 3. Брсаковска, Слаѓана [автор] 4. Мисајлески, Зоран [автор] 5. Димовски, Томи [автор]
а) Математика -- Задачи за средно образование

COBISS.MK-ID 51228933

СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

> Ниедно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент* C8 е продолжение на книгите Математички талент C1 – C7 и истата е наменета за талентираните ученици по математика од четврта година од средното образование. Книгата, всушност, е вториот дел од збирката задачи за четврта година и во овој дел се содржани 352 решени задачи и во три одделни делови се обработени содржини од теоријата на броеви, комбинаториката и генераторните функции.

Како и во книгите *Математички талент* C1 – C7 и во оваа книга природата на задачите содржани во неа е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите повторно не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области. Така, на пример, задачите од теоријата на броеви си распределени во шест делови.

Рецензентите, д-р Даниел Велинов, д-р Самоил Малчески и д-р Сања Костадинова, придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодариме.

И покрај вложениот напор, не можеме да се ослободиме од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сме благодарни на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ни биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје, март, 2020 г.

Авторите

VI ТЕОРИЈА НА БРОЕВИ

1. ДЕЛИВОСТ

1. Нека природните броеви a и b се такви што броевите $ax+2$ и $bx+3$ не се заемно прости за ниту еден $x \in \mathbb{N}$. Определи го $\frac{a}{b}$.

Решение. Ако е $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$, тогаш условот на задачата е исполнет. Нека претпоставиме дека $\frac{a}{b} \neq \frac{2}{3}$ и да земеме $x = |3a-2b| \neq 0$. Ако $\text{NZD}(ax+2, bx+3) = d$, тогаш

$$d \mid a(bx+3) - b(ax+2) = 3a - 2b = \pm x$$

и

$$d \mid (bx+3) - (ax+2) = (b-a)x + 1.$$

Меѓутоа, тогаш $d \mid (b-a)x + 1 - (b-a)x = 1$, што не е можно.

2. Да се докаже дека еден цел број c може да се претстави како збир на квадратите на два цели броја ако и само ако бројот $2c$ го има истото својство.

Решение. Нека бројот c може да се претстави како збир на од квадратите на два цели броја x и y, т.е. $c = x^2 + y^2$. Броевите $x-y$ и $x+y$ се цели и користејќи го очигледното равенство $(x-y)^2 + (x+y)^2 = 2c$, заклучуваме дека и бројот $2c$ е збир од квадратите на два цели броја.

Обратно, нека $2c = a^2 + b^2$ за некои цели броеви a и b. Бидејќи бројот $a^2 + b^2$ е парен, следува дека a^2 е парен и b^2 е парен, или a^2 е непарен и b^2 е непарен. Квадратот на било кој парен број е парен, и квадратот на било кој непарен број е непарен, па заклучуваме дека a и b се парни броеви, или a и b се непарни броеви. Разликата и збирот на парни (непарни) броеви е парен број. Затоа $\frac{a+b}{2}$ и $\frac{a-b}{2}$ се цели броеви. Користејќи го овој резултат и претпоставката $2c = a^2 + b^2$ добиваме

$$\left(\tfrac{a+b}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{a^2+2ab+b^2+a^2-2ab+b^2}{4} = \frac{2(a^2+b^2)}{4} = \frac{2 \cdot 2c}{4} = c,$$

Значи, и бројот c е збир на квадратите на два цели броја.

3. Симон избрал два различни природни броја a и b и во тетратката ги запишал броевите $a, a+2, b$ и $b+2$. Потоа на таблата ги запишал шесте производи формирани од различните парови броеви запишани во тетратката. Колку најмногу точни квадрати запишал Симон на таблата?

Решение. Бидејќи два точни квадрати не се разликуваат за 1, добиваме дека броевите $a(a+2) = (a+1)^2 - 1$ и $b(b+2) = (b+1)^2 - 1$ не се точни квадрати. Освен тоа, ab и $a(b+2)$ не може истовремено да се точни квадрати, бидејќи во тој случај производот $a^2 b(b+2)$ ќе биде точен квадрат, што значи дека и бројот $b(b+2)$ ќе биде точен квадрат. Аналогно, меѓу броевите $(a+2)b$ и $(a+2)(b+2)$

има најмногу еден точен квадрат. Според тоа, на таблата има најмногу два точни квадрати.

Два точни квадрати се добиваат на пример за $a=2, b=16$ и тогаш

$$a(b+2)=6^2 \text{ и } (a+2)b=8^2.$$

4. Нека k е природен број. За $n\in\mathbb{N}$ со $f_k(n)$ да го означиме најмалиот природен број поголем од kn таков што $nf_k(n)$ е точен квадрат на природен број. Докажи, ако $f_k(n)=f_k(m)$, тогаш $m=n$.

Решение. Нека претпоставиме дека $f_k(n)=f_k(m)=q$. Нека $q=au^2$, каде $a,u\in\mathbb{N}$ и a не е делив со ниту еден точен квадрат поголем од 1. Бидејќи $mq=amu^2$ е точен квадрат, заклучуваме дека am е точен квадрат, па затоа $m=av^2$ за некој $v\in\mathbb{N}$. Аналогно се добива дека $n=aw^2$ за некој $w\in\mathbb{N}$.

Од $f(av^2)=au^2$, следува дека u е најмалиот природен број поголем од $v\sqrt{k}$. Аналогно, u е најмалиот природен број поголем од $w\sqrt{k}$, па затоа важи $|v\sqrt{k}-w\sqrt{k}|<1$. Од последното неравенство добиваме $|v-w|<\frac{1}{\sqrt{k}}\le 1$, па затоа $v=w$, т.е. $m=av^2=aw^2=n$.

5. Определи го најголемиот природен број, кој е делител на p^4-1 за секој прост број $p>3$.

Решение. Бидејќи $p>3$ е прост број, важи $p\equiv\pm1(\mathrm{mod}\,3)$, од што следува дека $p^4\equiv1(\mathrm{mod}\,3)$. Од друга страна, p е непарен број, па затоа

$$p\equiv\pm1,\pm3,\pm5,\pm7(\mathrm{mod}\,2^4).$$

Со непосредна проверка се добива дека за секој можен остаток важи $p^4\equiv1(\mathrm{mod}\,2^4)$. Според тоа, $3\cdot2^4$ е делител на p^4-1, за секој прост број p. Конечно, бидејќи $\mathrm{NZD}(5^4-1,7^4-1)=3\cdot2^4$ добиваме дека бараниот најголем природен број е $3\cdot2^4=48$.

6. Нека a и b се природни броеви. Докажи, дека ако $4ab-1$ е делител на $(4a^2-1)^2$, тогаш $a=b$.

Решение. Ќе го докажеме следново поопшто тврдење:

Нека $k>1$ е природен број. Ако ако $kab-1$ е делител на $(ka^2-1)^2$, тогаш $a=b$.

За парот природни броеви (a,b) ќе велиме дека е *добар* ако $kab-1\,|\,(ka^2-1)^2$. Од

$$(ka^2-1)^2\equiv(ka^2-kab)^2=k^2a^2(a-b)^2\ (\mathrm{mod}\,kab-1) \text{ и } \mathrm{NZD}(k^2a^2,kab-1)=1$$

следува дека $kab-1\,|\,(ka^2-1)^2$ ако и само ако $kab-1\,|\,(a-b)^2$. Според тоа, парот

(a,b) е добар ако и само ако парот (b,a) е добар. Последното значи, дека ако $a \neq b$, тогаш можеме да претпоставиме дека $b > a$.

Нека a е најмалиот природен број за кој постои $b > a, b \in \mathbb{N}$ таков што парот (a,b) е добар. Тогаш

$$\frac{(ka^2-1)^2}{kab-1} \equiv -\frac{(ka^2-1)^2}{kab-1}(kab-1) = -(ka^2-1)^2 \equiv -1 \pmod{ka},$$

па затоа постои $c \in \mathbb{N}$ таков што $(ka^2-1)^2 = (kab-1)(kac-1)$, што значи дека парот (a,c) е добар. Меѓутоа, $kac-1 = \frac{(ka^2-1)^2}{kab-1} < ka^2-1$, па затоа $a > c$, што противречи на изборот на парот (a,b). Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

7. Нека $m = 30030 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 11\cdot 13$ и M е множеството од сите позитивни делители на m кои се производ на два прости делители на m. Определи го најмалиот природен број n со следното својство: од било кои n различни броеви од M може да се изберат три чиј производ е m.

Решение. Јасно е дека множеството M има $\frac{6\cdot 5}{2} = 15$ елементи, односно

$$M = \{2\cdot 3,\ 2\cdot 5,\ 2\cdot 7,\ 2\cdot 11, 2\cdot 13, 3\cdot 5, 3\cdot 7, 3\cdot 11, 3\cdot 13,\ 5\cdot 7, 5\cdot 11, 5\cdot 13, 7\cdot 11, 7\cdot 13, 11\cdot 13\}.$$

Од друга страна, ако избереме 5 од шесте прости делители на бројот m, може да направиме $\frac{5\cdot 4}{2} = 10$ елементи од множеството M. Производот на било кои три од нив не може да е бројот m. Значи, $n \geq 11$

Ќе покажеме дека $n = 11$. Елементите на множеството M ќе ги разделиме на пет попарно дисјунктни подмножества од M при што производот на елементите од секое од тие множества одделно е бројот m. Една таква поделба е

$$\{2\cdot 3, 5\cdot 13, 7\cdot 11\}$$
$$\{2\cdot 5, 3\cdot 7, 11\cdot 13\}$$
$$\{2\cdot 7, 3\cdot 13, 5\cdot 11\}$$
$$\{2\cdot 11, 3\cdot 5, 7\cdot 13\}$$
$$\{2\cdot 13, 3\cdot 11, 5\cdot 7\}.$$

Ако избереме 11 елементи од множеството M, според принципот на Дирихле три елементи ќе бидат од едно исто множество, од претходните делбени множества. Нивниот производ е бројот m.

8. На колку начини дропката $\frac{2017}{2016}$ може да се прикаже како производ на две дропки од видот $\frac{n+1}{n}$, каде n е природен број? Редоследот на множителите не е важен.

Решение. Нека p и q се природни броеви такви што $\frac{p+1}{p}\cdot\frac{q+1}{q} = \frac{2017}{2016}$. Тогаш

$$2017pq = 2016(pq + p + q + 1)$$
$$pq = 2016(p + q + 1)$$
$$p = \frac{2016(q+1)}{q-2016} = \frac{2016(q-2016)+2016\cdot 2017}{q-2016} = 2016 + \frac{2016\cdot 2017}{q-2016}$$

Бидејќи p и q се природни броеви, од последното равенство следува дека $q-2016 \mid 2016\cdot 2017$. На секој делител на бројот $2016\cdot 2017$ му соодветствува точно еден пар (p,q). Но, $2016\cdot 2017 = 2^5\cdot 3^2\cdot 7\cdot 2017$ што значи дека бројот $2016\cdot 2017$ има $6\cdot 3\cdot 2\cdot 2 = 72$ делители.

Конечно, бидејќи паровите (p,q) и (q,p) определуваат исто претставување, заклучуваме дека бараниот број е еднаков на 36.

9. Природните броеви a,b и c се различни меѓу себе и за нив важи:

$$a \mid b+c+bc, \qquad b \mid a+c+ac, \qquad c \mid a+b+ab.$$

Докажи, дека барем еден од броевите a,b и c не е прост број.

Решение. Нека претпоставиме дека сите три броја a,b и c се прости броеви. Од условите за деливост имаме дека

$$a \mid a+b+c+ac+ab+bc$$
$$b \mid a+b+c+ac+ab+bc$$
$$c \mid a+b+c+ac+ab+bc.$$

Бидејќи a,b,c се различни прости броеви, имаме дека

$$abc \mid a+b+c+ac+ab+bc+abc,$$

па според тоа

$$\frac{a+b+c+ac+ab+bc}{abc} = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \qquad (*)$$

е природен број. Ниту еден од броевите не може да биде 2, бидејќи тогаш се добива дека 2 е делител на непарен број. Затоа изразот од десната страна во (*) прима најголема вредност за $a=3, b=5, c=7$, односно имаме

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} \le \frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{21}+\frac{1}{35}+\frac{1}{21} = \frac{86}{105} < 1,$$

што е спротивно со тврдењето дека $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}$ е природен број.

10. Нека a,b и c се ненулти цели броеви такви што $a \ne c$ и $\frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$. Докажи дека $a^2+b^2+c^2$ не може да биде прост број.

Решение. Равенството $\frac{a}{c} = \frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$ е еквивалентно $(a-c)(b^2-ac)=0$. Бидејќи $a \ne c$, од последното равенство добиваме $b^2 = ac$ и затоа

$$a^2+b^2+c^2 = a^2+2b^2+c^2-b^2 = a^2+2ac+c^2-b^2$$
$$= (a+c)^2 - b^2 = (a+c-b)(a+b+c).$$

Според тоа, ако $a^2+b^2+c^2$ е прост број, тогаш можни се следните случаи:

i) $a+c-b=1$ и $a+b+c = a^2+b^2+c^2$

ii) $a+b+c=1$ и $a-b+c=a^2+b^2+c^2$

iii) $a+c-b=-1$ и $a+b+c=-(a^2+b^2+c^2)$

iv) $a+c+b=-1$ и $a-b+c=-(a^2+b^2+c^2)$

Во случаите *i)* и *ii),* со собирање на равенствата добиваме

$$a^2+b^2+c^2-2(a+c)+1=0 \text{ т.е. } (a-1)^2+(c-1)^2+b^2=0$$

и како $b\neq 0$ наоѓаме $a=c=1$, што е противречност. Во случаите *iii)* и *iv),* со собирање на равенствата добиваме

$$a^2+b^2+c^2+2(a+c)+1=0 \text{ т.е. } (a+1)^2+(c+1)^2+b^2=0$$

и како $b\neq 0$ наоѓаме $a=c=-1$, што е повторно е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува дека $a^2+b^2+c^2$ не е прост број.

11. Нека a,b,c и d се цели броеви. Докажи дека производот

$$P=(a-b)(c-a)(d-a)(d-c)(d-b)(c-b)$$

е делив со 12.

Решение. Од четири природни, т.е. цели броеви, два броја можеме да избереме на $\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!2!}=6$ начини, и тие се a и b;a и c;a и d;b и c;b и d;c и d . Сега е јасно дека од разликите на броевите во секој пар одвоено е формиран производот P . Од друга страна, бројот 12 можеме да го запишеме во облик $12=2^2\cdot 3$. Според тоа, доволно е да докажеме дека $4\,|\,P$ и $3\,|\,P$.

Според принципот на Дирихле два од броевите a,b,c и d при делење со 3 имаат ист остаток, па затоа нивната разлика е делива со 3, и таа е делител на P , т.е. $3\,|\,P$. Навистина, без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a=3k+r$ и $b=3p+r$, па тогаш од $b-a\,|\,P$, добиваме дека $3(p-k)\,|\,P$, т.е. $3\,|\,P$.

Од друга страна при делење со 4 на дадените четири броја, се добиваат четири остатоци r_1,r_2,r_3,r_4, т.е. можни се четири остатоци. Тие припаѓаат на множеството $\{0,1,2,3\}$. Сега, можни се два случаи.

Случај 1. Постојат два остатоци кои се еднакви меѓу себе.

Нека два од броевите a,b,c,d се од облик $4k_1+r$ и $4k_2+r$. Тогаш нивната разлика $(4k_1+r)-(4k_2+r)=4(k_1-k_2)$ е делива со 4, т.е. $4\,|\,P$.

Случај 2. Сите четири остатоци се различни меѓу себе.

Со други зборови $r_i\neq r_j$ ако $i\neq j$, $i,j\in\{0,1,2,3\}$. Тогаш еден од броевите е од облик $4k_i+1$ а друг е од облик $4k_j+3$. Нивната разлика е делива со 2. Преостанатите два броја се од облик $4k_l+2$ и $4k_m$ и нивната разлика е исто така делива со 2. Значи, два од множителите на P се деливи со 2, па нивниот производ е делив со 4. Значи, $4\,|\,\mathrm{P}$, па според тоа $12\,|\,P$, што и требаше да се докаже.

12. Низата $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ е зададена со $a_1 = 2$ и $a_{n+1} = 2^{a_n} + 2$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Ако m и n се природни броеви и $m < n$, докажи дека $a_m \mid a_n$.

Решение. Ако a и b се природни броеви, познато е дека $2a+1 \mid 2b+1$ ако и само ако $a \mid b$ и $\frac{b}{a}$ е непарен број (Докажи!).

Тврдењето ќе го докажеме со индукција. Имаме $a_1 = 2 \mid a_2 = 6 \mid a_3 = 66$. Да претпоставиме дека $n > 3$ и декаа $a_i \mid a_j$ за $i < j < n$. Бидејќи a_{n-3} и a_{n-2} се деливи со 2 и не се деливи со 4, количникот $\frac{a_{n-2}}{a_{n-3}}$ е непаран цел број. Следува дека $2^{a_{n-3}} + 1 = a_{n-2} - 1$ е делител на $2^{a_{n-2}} + 1 = a_{n-1} - 1$. Притоа $a_{n-2} - 1$ и $a_{n-1} - 1$ се непарни, така што $2^{a_{n-2}-1} + 1 = \frac{a_{n-1}}{2}$ е делител на $2^{a_{n-1}-1} + 1 = \frac{a_n}{2}$, т.е. $a_{n-1} \mid a_n$ и оттука $a_m \mid a_n$ за секои $m < n$, со што тврдењето е докажано.

13. Определи ги сите парови (a_n, a_{n+1}) од последователни членови на низата $a_n = 2^n + 49,\ \ n = 1, 2, ...$ за кои $a_n = pq, a_{n+1} = rs$, каде p, q, r, s се прости броеви такви што $p < q, r < s$ и $q - p = s - r$.

Решение. Да означиме $q - p = s - r = x > 0$. Тогаш

$$a_n = p(p + x) \text{ и } a_{n+1} = r(r + x)$$

и од $a_{n+1} > a_n$ следува дека $r > p$. Од друга страна $a_{n+1} - 2a_n = -49$, т.е. $a_{n+1} < 2a_n$, што значи $r(r + x) < 2p(p + x)$. Според тоа,

$$2p(p + x) > r(r + x) > r(p + x),$$

па затоа $2p > r$.

Бидејќи $a_n = 2^n + 49$ е делив со 3 ако и само ако n е непарен број, од $\min\{p, q, r, s\} = p$ следува дека $p = 3$. Оттука и од $2p > r$ следува дека $r = 5$. Тогаш од $a_{n+1} = 2a_n - 49$ наоѓаме $x = 56$ и конечно $a_7 = 3 \cdot 59 = 2^7 + 49$ и $a_8 = 6 \cdot 61 = 2^8 + 49$. Според тоа, единствено решение е подредениот пар (a_7, a_8).

14. Ако збирот на 2002 цели броеви е делив со 6, тогаш и збирот на нивните кубови е делив со 6. Докажи!

Решение. За било кој цел број a, бројот $a^3 - a$ е делив со 6. Тоа е очигледно од записот

$$a^3 - a = a(a^2 - 1) = a(a - 1)(a + 1) = (a - 1)a(a + 1)$$

(барем еден од нив е парен и барем еден од нив е делив со 3).

Нека $a_1, a_2, ..., a_{2002}$ се цели броеви чиј збир $a_1 + a_2 + ... + a_{2002}$ е делив со 6. Тогаш, од записот

$$a_1^3 + a_2^3 + a_3^3 + ... + a_{2002}^3 = (a_1^3 - a_1) + (a_2^3 - a_2) + (a_3^3 - a_3) + ... +$$
$$+ (a_{2002}^3 - a_{2002}) + (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{2002})$$

е очигледно дека бројот од левата страна е делив со 6. Секој од броевите во заградите од десната страна на последното равенство е делив со 6.

15. За еден број со 2017 цифри ќе велиме дека е *лош*, ако секој број формиран од три негови последователни цифри не е делив со 3. Определи го бројот на лошите броеви во чиј декаден запис учествуваат само цифрите 1, 6 и 8.

Решение. Нека $\overline{a_1a_2}$ е двоцифрен број запишан со цифрите 1, 6 и 8. Јасно,

- ако $\overline{a_1a_2} = 3k$, тогаш $3\,|\,\overline{a_1a_2 6}$, $3 \nmid \overline{a_1a_2 1}$ и $3 \nmid \overline{a_1a_2 8}$,
- ако $\overline{a_1a_2} = 3k+1$, тогаш $3\,|\,\overline{a_1a_2 8}$, $3 \nmid \overline{a_1a_2 1}$ и $3 \nmid \overline{a_1a_2 3}$, и
- ако $\overline{a_1a_2} = 3k+2$, тогаш $3\,|\,\overline{a_1a_2 1}$, $3 \nmid \overline{a_1a_2 6}$ и $3 \nmid \overline{a_1a_2 8}$.

Според тоа, два од броевите $\overline{a_1a_2 1}, \overline{a_1a_2 6}$ и $\overline{a_1a_2 8}$ се лоши, а еден не е лош. Значи, од еден двоцифрен број (лош или не) запишан со цифрите 1, 6 и 8 со додавање на една од цифрите 1, 6 и 8 може да се добијат точно два трицифрени лоши броја. Нека сега $\overline{a_1a_2...a_n}$, $n>1$ е лош $n-$цифрен број запишан со цифрите 1, 6 и 8. На потполно ист начин, разгледувајќи ги двоцифрените завршетоци $\overline{a_{n-1}a_n}$ добиваме дека со додавање на цифрите 1, 6 и 8 од бројот $\overline{a_1a_2...a_n}$ може да се добијат точно два лоши броја.

Конечно, бидејќи со цифрите 1, 6 и 8 може да се запишат $3^2=9$ различни двоцифрени броеви, а за да добиеме број запишан со 2017 цифри, треба да допишеме 2015 цифри, заклучуваме дека бројот на лошите 2017-цифрени броеви е еднаков на $9\cdot 2^{2015}$.

16. За природниот број n ќе велиме дека е *убав*, ако секој негов природен делител, зголемен за 1, е делител на бројот $n+1$. Определи ги сите убави природни броеви.

Решение. Јасно, бројот 1 е решение на задачата. Решение на задачата се и сите непарни прости броеви. Навистина, ако $n=p$, тогаш делителите зголемени за 1 се 2 и $p+1$, па како бројот $p+1$ е парен, следува $2\,|\,(p+1)$ и $(p+1)\,|\,(p+1)$.

Нека претпоставиме, дека некој сложен број n е решение. Бидејќи $1\,|\,n$, заклучуваме дека $1+1=2\,|\,(n+1)$, па затоа n е непарен број. Нека $n=ab$, каде $a \ge b > 2$. Тогаш $(a+1)\,|\,(n+1)$ и бидејќи важи $n+b=(a+1)b$, добиваме дека $(a+1)\,|\,(n+b)$, па затоа $(a+1)\,|\,[n+b-(n+1)]=b-1$. Но, $b-1>0$, па затоа $(b-1)\ge(a+1)$, што е противречност. Значи, не постои убав сложен природен број.

Конечно, решение на задачата се бројот 1 и сите прости броеви.

17. Нека n е непарен природен број. Докажи дека броевите $0,1,2,3,...,n^2-1$ може да се распоредат во таблица со n редици и n колони така што секој количник и секој остаток добиени при делењето на тие броеви со бројот n да се наоѓа точно по еднаш во ред и колона.

Решение. Во полето кое се наоѓа во $i-$тиот ред и $j-$тата колона го запишуваме бројот

$$n\cdot((i+j)\pmod n)+(i-j)\pmod n.$$

Јасно, секој количник и секој остаток се наоѓа точно по еднаш во ред и колона. Нека претпоставиме дека во полињата (i,j) и (k,l), $(i,j)\neq(k,l)$ има запишано еден и ист број. Тогаш $i+j\equiv k+l(\mathrm{mod}\, n)$ и $i-j\equiv k-l(\mathrm{mod}\, n)$, од каде следува $i=k,\ j=l$, што е противречност.

18. Дали постои множество B кое се состои од 4004 природни броеви такво што за секое негово подмножество A кое има 2003 елементи збирот на елементите на множеството A не е делив со 2003?

Решение. Постои. Доволно е да земеме множество B кое се состои од 2002 броја од видот $2003k$ и 2002 броја од видот $2003k+1$. Навистина, ако 2003-елементно множество $A\subset B$ содржи m елементи од облик $2003k+1$ и $2003-m$ елементи од облик $2003k$ (каде $1\le m\le 2002$), тогаш збирот на неговите елементи е конгруентен со m по модул 2003, па затоа не е делив со 2003.

19. Природните броеви $m\ge 3$ и n се такви што $n>m(m-2)$. Определи го најголемиот природен број d таков што d е делител на $n!$ и k не е делител на d, за секој $k\in\{m,m+1,...,n\}$.

Решение. Ќе докажеме, дека бараниот број е $d=m-1$. Навистина, d е делител на $n!$ и за секој $k\ge m$ важи дека k не е делител на $m-1$, т.е. $d=m-1$ ги задоволува условите на задачата.

Да претпоставиме дека d е таков што d е делител на $n!$ и k не е делител на d, за секој $k\in\{m,m+1,...,n\}$. Ќе докажеме дека $d\le m-1$. Нека $d=p_1p_2...p_t$, каде $p_i, 1\le i\le t$ се прости броеви (не задолжително различни). Од првиот услов за d следува дека $p_i\le n$ за секој i. Од вториот услов за d следува дека $p_i\notin \{m,m+1,...,n\}$. Според тоа, $p_i\le m-1$ за секој i. Секој од броевите p_1, p_1p_2, ..., $p_1p_2...p_t$ е делител на d и следствено сите не припаѓаат на множеството $\{m,m+1,...,n\}$. Освен тоа, $p_i\le m-1$. Нека $j\le t$ е најголемиот број за кој

$$p_1p_2...p_j\le m-1.$$

Ако $j<t$ имаме

$$p_1p_2...p_jp_{j+1}\le(m-1)p_{j+1}\le(m-1)(m-1)=m(m-2)+1\le n,$$

и тогаш $p_1p_2...p_jp_{j+1}\le m-1$, што противречи на максималноста на j. Значи, $p_1p_2...p_t\le m-1$, со што доказот е завршен.

20. Нека $(a_1,a_2,...,a_n)$ и $(b_1,b_2,...,b_n)$ се две пермутации на броевите од множеството $\{1,2,3,...,n\}$. Докажи дека, ако n е парен број, тогаш меѓу броевите a_1+b_1, $a_2+b_2,...,a_n+b_n$ постојат два чија разлика е делива со n.

Решение. Да претпоставиме спротивно, т.е. дека разликата на било кои два броја од броевите a_1+b_1, $a_2+b_2,...,a_n+b_n$ не е делива со n. Според тоа, остатоците од делењето на a_1+b_1, $a_2+b_2,\ldots,a_n+b_n$ со бројот n се попарно различни, и тие го образуваат множеството $\{0,1,2,3,\ldots,n-1\}$. За парен број $n=2k$ имаме

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)\equiv 0+1+2+3+\ldots+(n-1)=\tfrac{n(n-1)}{2}\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ n),$$

бидејќи $\mathrm{NZD}(n,n-1)=1$ и $n\nmid k$ ($k<n$). Од друга страна

$$\begin{aligned}(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)&=(a_1+a_2+\ldots+a_n)+(b_1+b_2+\ldots++b_n)\\&=2(1+2+3+\ldots+n)=2\tfrac{n(n+1)}{2}\\&=n(n+1)\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ n).\end{aligned}$$

Од добиената противречност следува дека постојат $i\neq j$, $1\leq i,j\leq n$, такви што $n\,|\,(a_i+b_i)-(a_j+b_j)$.

21. Нека n е непарен природен број поголем од 1 и нека $k_1,k_2,\ldots,k_n$ се цели броеви. За секоја пермутација $a=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ на множеството $\{1,2,\ldots,n\}$ нека

$$S(a)=\sum_{i=1}^{n}k_ia_i\ .$$

Докажи, дека постојат различни пермутации b и c такви што $n!$ е делител на бројот $S(b)-S(c)$.

Решение. Нека претпоставиме дека сите $n!$ броеви $S(a)$ се различни по модул $n!$. Тогаш збирот $\sum_a S(a)$ по сите пермутации е кунгруентна со

$$0+1+\ldots+(n!-1)=\tfrac{(n!-1)n!}{2}\equiv\tfrac{n!}{2}(\mathrm{mod}\ n!)$$

Од друга страна, секој од броевите k_i во збирот $\sum_a S(a)$ се јавува со коефициент

$$(n-1)!(1+2+\ldots+n)=\tfrac{n+1}{2}n!,$$

а овој збир за непарен n е делив со $n!$. Затоа, $\sum_a S(a)\equiv 0(\mathrm{mod}\ n!)$, што е противречност.

22. Дали постојат природни броеви a,b и c поголеми од 2011 такви што во декаден запис важи равенството

$$(a+\sqrt{b})^c=\ldots2010,2011\ldots.$$

Решение. Ќе докажеме дека такви броеви a,b и c постојат. Бројот $x=(a+\sqrt{b})^n+(a-\sqrt{b})^n$ е цел број. Доволно е да избереме a,b и c така што x да биде делив со 10^4 и $7989,7989>(a-\sqrt{b})^c>7989,7988$.

За непарен c, бројот $x=2a^c+2\binom{c}{2}a^{c-2}+\ldots+2\binom{c}{c-1}a$ е делив со a, па затоа доволно е да земеме a кој е делив со 10^4. Вториот услов го постигнуваме со избор на a и b така што $1<a-\sqrt{b}<\sqrt{\frac{7989,7989}{7989,7988}}$, на пример, $a=10^8$ и $b=(a-1)^2-1$. Навистина, нека c е најмалиот непарен природен број за кој

$$(a-\sqrt{b})^c > 7989,7988 .$$

Таквиот c очигледно е поголем од 2011, а во овој случај $c=1797184159$ и $(a-\sqrt{b})^c < 7989,7989$.

23. Определи ги сите природни броеви n такви што бројот $n^{10}+1$ е делив со 10 .

Решение. Нека $n=10q+r$, $0\le r\le 9$. Од Њутновата биномна формула имаме $n^{10}+1=(10q+r)^{10}+1=10m+r^{10}+1$, следува дека $n^{10}+1$ е делив со 10 ако и само ако $r^{10}+1$ е делив со 10 , а оттука следува дека $r=3$ или $r=7$. Значи броевите кои имаат облик $10q+3$ или $10q+7$ се бараните броеви.

24. Определи ги сите природни броеви n за кои бројот 7^n-1 е делив со 6 и со 8.

Решение. Бидејќи

$$7^n-1=(7-1)(7^{n-1}+7^{n-2}+...+7^2+7+1)$$

следува дека бројот 7^n-1 е делив со 6 за секој природен број n . Понатаму,

$$7^n-1=(8-1)^n-1=8^n-\binom{n}{1}8^{n-1}+\binom{n}{2}8^{n-2}+...+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}8+(-1)^n-1$$

$$=8[8^{n-1}-\binom{n}{1}8^{n-2}+\binom{n}{2}8^{n-3}+...+(-1)^{n-1}\binom{n}{n-1}]+[(-1)^n-1] .$$

Според тоа, бројот 7^n-1 е делив со 8 ако и само ако $(-1)^n-1=0$, т.е. ако и само ако n е парен број.

Конечно, бројот 7^n-1 е делив со 6 и со 8 ако и само ако n е парен број.

25. Определи го остатокот при делењето на бројот $11^{100}+13^{200}+17^{300}$ со бројот 7.

Решение. Ќе ги определиме остатоците при делењето на секој од собирците со 7. Имаме

$$11^{100}=(7+4)^{100}=7^{100}+\binom{100}{1}\cdot 7^{99}\cdot 4+\binom{100}{2}\cdot 7^{98}\cdot 3^2+...+\binom{100}{99}\cdot 7\cdot 4^{99}+4^{100},$$

па сите собироци освен последниот се деливи со 7 . Значи 11^{100} и 4^{100} имаат еднакви остатоци при делењето со 7. Натаму

$$4^{100}=(4^3)^{33}4=(63+1)^{33}4=4\cdot 63^{33}+4\cdot\binom{33}{1}\cdot 63^{32}+...+4\cdot\binom{33}{32}\cdot 63+4,$$

па сите собироци освен последниот се деливи со 7. Значи 4^{100} има остаток 4 па и 11^{100} има остаток 4. Слично

$$13^{200}=(14+(-1))^{200}$$

$$=14^{200}+\binom{200}{1}\cdot 14^{199}(-1)^1+\binom{200}{2}\cdot 14^{198}(-1)^2+...+\binom{200}{199}\cdot 14(-1)^{199}+(-1)^{200},$$

па 13^{200} има остаток 1. За 17^{300} имаме $17^{300}=(21-4)^{300}$, па работејќи како претходно добиваме дека има ист остаток како и 4^{300} . Од друга страна

$4^{300} = (4^3)^{100} = (63-1)^{100}$ и повторно развивајќи го по биномната формула добиваме дека неговиот остаток е 1. Значи, бараниот остаток е $4+1+1=6$.

26. Дали постои природен број n така, што n да има точно 2000 различни прости делители и бројот 2^n+1 е делив со n?

Решение. Прво ќе ја докажеме следната лема.

Лема. За секој природен број $n>2$ постои прост број p таков што $p \mid n^3+1$, но $p \nmid n+1$.

Доказ. Нека претпоставиме дека постои $n>2$ за кој тврдењето не е точно. Бидејќи $n^3+1=(n+1)(n^2-n+1)$, тоа значи, дека секој прост број p, кој е делител на n^2-n+1 е делител и на $n+1$. Но,

$$n^2-n+1=(n+1)(n-2)+3$$

пз затоа $p \mid 3$, т.е. $p=3$. Според тоа, $3 \mid n+1$ и како $n+1 \equiv n-2 \pmod 3$ добиваме дека $3 \mid n-2$. Според тоа, $9 \nmid n^2-n+1$ и како n^2-n+1 е степен на 3 заклучуваме дека $n^2-n+1=3$, што не е можно бидејќи за секој $n>2$ важи $n^2-n+1>3$. ■

Да се вратиме на задачата. Ќе докажеме поопшто тврдење, дека за секој природен број k постои n со k прости делители така, што $n \mid 2^n+1$. Доказот ќе го спроведеме со индукција по k.

За $k=1$ доволно е да земеме $n=3$. Понатаму нека претпоставиме дека за некој $k \geq 1$ постои број n од облик $n=3^l t$, каде $l \geq 1$ и $3 \nmid t$, таков, што $n \mid 2^n+1$. Но, тогаш n е непарен број па затоа $3 \mid 2^{2n}-2^n+1$. Од друга страна

$$2^{3n}+1=(2^n+1)(2^{2n}-2^n+1)$$

и затоа $3 \mid 2^{3n}+1$. Од претходно докажаната лема следува дека постои прост број p таков, што $p \mid 2^{3n}+1$ и $p \nmid 2^n+1$. Сега бројот $3pn$ ги исполнува барањата за $k+1$, со што доказот е завршен.

27. Ако p е прост број и m е природен број, докажи дека m^p-m е делив со p.

Решение. *Прв начин.* Ако $p \mid m$, тогаш е јасно дека $p \mid m^p-m$. Ако $p \nmid m$, тогаш од малата теорема на Ферма следува дека $m^{p-1} \equiv 1 \pmod p$, што значи дека $p \mid m^{p-1}-1$, па затоа $p \mid m^p-m$.

Втор начин. Јасно, тврдењето е точно за $m=1$. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за $m=n$. Тогаш за $m=n+1$ имаме:

$$\begin{aligned}(n+1)^{p+1}-(n+1) &= n^p+\tbinom{p}{1}n^{p-1}+\tbinom{p}{2}n^{p-2}+\dots+\tbinom{p}{p-1}n+1-n-1\\ &= n^p-n+\tbinom{p}{1}n^{p-1}+\tbinom{p}{2}n^{p-2}+\dots+\tbinom{p}{p-1}n.\end{aligned}$$

Од индуктивната претпоставка имаме $p \mid n^p - n$ и како $p \mid \binom{p}{k} = \frac{p\cdot(p-1)!}{k!(p-k)!}$ заклучуваме дека $p \mid (n+1)^p - (n+1)$. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека $p \mid m^p - m$ за секој $m \in \mathbb{N}$.

28. Ако $n \mid a-b$ докажи дека $n^2 \mid a^n - b^n$. Дали важи обратното тврдење?

Решение. Бидејќи $n \mid a-b$ следува дека постои цел број c така што $a = nc+b$. Од Њутновата биномна формула добиваме

$$\begin{aligned} a^n - b^n &= (b+nc)^n - b^n = b^n + \binom{n}{1}b^{n-1}nc + \binom{n}{2}b^{n-2}n^2c^2 + \dots + \binom{n}{n}n^nc^n - b^n \\ &= n^2(b^{n-1}c + \binom{n}{2}b^{n-2}c^2 + \dots + \binom{n}{n}n^nc^n). \end{aligned}$$

Значи, $n^2 \mid (a^n - b^n)$.

Обратно тврдење не важи, бидејќи $3^4 \equiv 1^4 \pmod{4^2}$ но 3 и 1 немат ист остаток при делење со 4.

29. Нека $n, k \in \mathbb{N}$ и $k \le n$. Докажи дека $\frac{n}{\mathrm{NZD}(n,k)} \mid \binom{n}{k}$.

Решение. Ќе го докажеме равенството $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$. Навистина,

$$k\binom{n}{k} = k\frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{nk}{k}\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = n\frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} = n\binom{n-1}{k-1}.$$

Користејќи го претходното равенство, од својствата на најголем заеднички делител, добиваме

$$\binom{n}{k}\cdot \mathrm{NZD}(n,k) = \mathrm{NZD}(n\binom{n}{k}, k\binom{n}{k}) = \mathrm{NZD}(n\binom{n}{k}, n\binom{n-1}{k-1}) = n\cdot \mathrm{NZD}(\binom{n}{k}, \binom{n-1}{k-1}).$$

Добиеното равенството $\binom{n}{k}\cdot \mathrm{NZD}(n,k) = n\cdot \mathrm{NZD}(\binom{n}{k}, \binom{n-1}{k-1})$, ќе го запишеме во облик $\binom{n}{k} = \frac{n}{\mathrm{NZD}(n,k)}\cdot \mathrm{NZD}(\binom{n}{k}, \binom{n-1}{k-1})$, од каде се добива дека $\frac{n}{\mathrm{NZD}(n,k)} \mid \binom{n}{k}$.

30. Докажи дека ако a е природен број и $4 \mid (a-1)$, тогаш збирот

$$b_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3}a + \binom{n}{5}a^2 + \dots$$

е делив со 2^{n-1} (сметаме дека за $k > n$ $\binom{n}{k} = 0$).

Решение. Кога $n = 1$ бројот $b_1 = 1$ е делив со $2^{1-1} = 1$. Нека b_k е делив со 2^{k-1} за секој $k < n$. Од Њутновата биномна формула добиваме

$$b_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{3}a + \binom{n}{5}a^2 + \dots = \frac{(1+\sqrt{a})^n - (1-\sqrt{a})^n}{2\sqrt{a}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{2\sqrt{a}},$$

каде што $\alpha = 1+\sqrt{a}$, $\beta = 1-\sqrt{a}$.

Од друга страна, $\frac{\alpha^n-\beta^n}{2\sqrt{a}} = \frac{1}{2\sqrt{a}}(\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}-\beta^{n-1}) - \frac{1}{2\sqrt{a}}\alpha\beta(\alpha^{n-2}-\beta^{n-2})$ и ја добиваме формулата $A_n = 2A_{n-1} + (a-1)A_{n-2}$.

Според условот во задачата, $a-1 = 4t$ и значи $A_n = 2A_{n-1} + 4tA_{n-2}$. Од индуктивната претпоставка следува дека $2^{n-2} \mid A_{n-1}$ и $2^{n-3} \mid A_{n-2}$ и затоа $2^{n-1} \mid A_n$.

31. Нека n е природен број. Определи го најголемиот заеднички делител на броевите $\binom{2n}{1},\binom{2n}{3},...,\binom{2n}{2n-1}$.

Решение. Имаме

$$0=(1-1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}(-1)^k\binom{2n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}-\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1} \text{ и}$$

$$2^{2n}=(1+1)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}+\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}.$$

Ако од второто равенство го одземеме првото, добиваме

$$\binom{2n}{1}+\binom{2n}{3}+...+\binom{2n}{2n-1}=2^{2n-1},$$

од што следува дека $d=\text{NZD}(\binom{2n}{1},\binom{2n}{3},...,\binom{2n}{2n-1})=2^s$, за некој $s\in\mathbb{N}_0$.

Нека $n=2^m b$, каде b е непарен број. Бидејќи $d\,|\,\binom{2n}{1}=2^{m+1}b$, следува дека $s\le m+1$. За секој природен број $k\le n-1$ важи равенството

$$\binom{2n}{2k+1}=\frac{2n}{2k+1}\binom{2n-1}{2k}=2^{m+1}\frac{b\binom{2n-1}{2k}}{2k+1},$$

што значи дека $2^{m+1}\,|\,\binom{2n}{2k+1}$, за секој $k\in\{0,1,2,...,n-1\}$. Со тоа докажавме дека $d=2^{m+1}$, каде m е степенот на 2 во n.

32. Нека p е непарен прост број. За секој $i=1,2,3,....,p-1$ со r_i го означуваме остатокот од делењето на i^p со p^2. Пресметај го збирот $r_1+r_2+....+r_{p-1}$.

Решение. Бараниот збир ќе го означиме со S. Ако го собереме првиот со последниот собирок, вториот со претпоследниот итн. последниот со првиот собирок (да забележиме дека бројот на собироците е парен број), добиваме

$$2S=(r_1+r_{p-1})+(r_2+r_{p-2})+...+(r_{p-1}+r_1). \tag{1}$$

Според дефинцијата на $r_1,r_2,...,r_{p-1}$ имаме $r_i+r_{p-i}\equiv i^p+i^{p-i} \pmod{p^2}$. Од друга страна, бидејќи p е непарен број имаме

$$\begin{aligned} i^p+(p-i)^p &= p^p-\binom{p}{1}p^{p-1}i+\binom{p}{2}p^{p-2}i^2-...+\binom{p}{p-1}pi^{p-1} \\ &= p[p^{p-1}-\binom{p}{1}p^{p-2}i+\binom{p}{2}p^{p-3}i^2-...+\binom{p}{p-1}i^{p-1}]. \end{aligned}$$

За биномниот коефициент $\binom{p}{i}$ имаме

$$\binom{p}{i}=p\frac{(p-1)(p-2)\cdot...\cdot(p-i+1)}{i!}.$$

Но, p е прост број при што $\text{NZD}(p,i)=1$, за $i=1,2,...,p-1$, па според тоа $p^2\,|\,i^p+(p-i)^p$, од каде добиваме $p^2\,|\,r_i+r_{p-i}$. Сега, од неравенствата $0<r_i<p^2$ и $0<r_{p-i}<p^2$, добиваме

$$r_i+r_{p-i}=p^2,\ i=1,2,...,p-1. \tag{2}$$

Конечно, од (1) и (2) имаме

$$S=\frac{p-1}{2}p^2=\frac{p^3-p^2}{2}.$$

33. Нека p е непарен прост број. Дали постојат природни броеви $a,b_1,b_2,$ $b_3,b_4,b_5,b_6\in\{1,2,...,p-2\}$ за кои е исполнето равенството

$$\binom{p-1}{a}\binom{p-1}{a+1}=\binom{p-1}{b_1}^2+\binom{p-1}{b_2}^2+...+\binom{p-1}{b_6}^2. \qquad (1)$$

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. За секој прост број p и за секој $k\in\{1,2,...,p-2\}$ важи

$$\binom{p-1}{k}\equiv(-1)^k(\text{mod }p).$$

Доказ. Бидејќи $\text{NZD}(p,k!)=1$ разгледуваната конгруенција

$$\frac{(p-1)(p-2)...(p-k)}{k(k-1)\cdot...2\cdot1}\equiv(-1)^k(\text{mod }p)$$

е еквивалентна со конгруенцијата

$$(p-1)(p-2)...(p-k)\equiv(-1)^k k!(\text{mod }p),$$

која очигледно е точна. ■

Нека претпоставиме дека постојат броеви со саканите својства. Да забележиме дека $a=p-2$ не дава решение (Зошто?). Тогаш од лемата следува дека левата страна на даденото равенство е конгруентна со $(-1)^a(-1)^{a+1}=-1$, а десната страна е конгруентна со $(-1)^{2b_1}+(-1)^{2b_2}+...+(-1)^{2b_6}=6$. Според тоа, $-1\equiv6(\text{mod }p)$, од каде следува $p=7$.

За $p=7$ од својствата на биномните коефициенти следува дека левата страна на даденото равенство може да прима само две различни вредности, кои се добиваат за $a=1$ и $a=2$ и соодветните вредности се $\binom{6}{1}\binom{6}{2}=90$ и $\binom{6}{2}\binom{6}{3}=300$. Најмалата вредност на десната страна е $6\cdot\binom{6}{1}^2=216$, а следната по големина е $5\cdot\binom{6}{1}^2+\binom{6}{2}^2=405$, па затоа равенството (1) не е можно.

34. Нека p е прост број. Докажи, дека бројот $(2^{p-2}-1)^p(2^p-1)-2^{p(p-2)}+1$ е делив со p^3.

Решение. Да означиме $A(p)=(2^{p-2}-1)^p(2^p-1)-2^{p(p-2)}+1$. Од $A(2)=0$ следува дека $A(2)$ е делив со 2. Нека $p\geq3$ е прост број. Ќе докажеме дека $2^pA(p)$ е делив со p^3, од што ќе следува дека $A(p)$ е делив со p^3. Од малата теорема на Ферма следува дека $2^{p-1}\equiv1(\text{mod }p)$, што значи дека $2^{p-1}=kp+1$, за некој $k\in\mathbb{N}$. Тогаш

$$2^pA(p)=(2^{p-1}-2)^p(2^p-1)-2^{p(p-1)}+2^p=(pk-1)^p(2pk+1)-(pk+1)^p+2^p.$$

Ако ја искористиме Њутновата биномна формула за $(pk-1)^p$ и $(pk+1)^p$ и фактот дека биномниот коефициент $\binom{p}{2}$ е делив со p, добиваме

$$\begin{aligned}2^p A(p) &\equiv (p^2k-1)(2pk+1)-(p^2k+1)+2^p\\ &\equiv p^2k-2pk-1-p^2k-1+2^p\\ &= 2^p-2pk-2=0(\mathrm{mod}\,p^3)\end{aligned}$$

со што доказот е завршен.

35. Определи ги сите природни броеви $n\geq 2$ со следново својство: за секои $i,j\in\{0,1,2,...,n\}$ броевите $i+j$ и $\binom{n}{i}+\binom{n}{j}$ имаат еднаква парност.

Решение. Прво ќе докажеме дека сите биномни коефициенти $\binom{n}{0},\binom{n}{1},...,\binom{n}{n}$ се непарни ако и само ако $n=2^k-1$, за некој природен број $k\geq 2$.

Нека $n=2^m+s$, каде $s<2^m$ е цел ненегативен број, т.е. $2^m\leq n<2^{m+1}$. Ако биномниот коефициент

$$\binom{n}{2^m-1}=\frac{(2^m+s)(2^m+s-1)...(2^m+1)2^m}{s!(s+1)}$$

е непарен, тогаш $2^m\,|\,s+1$ (бидејќи степенот на 2 во 2^m+i и i, $1\leq i\leq 2^m-1$, е еднаков, докажете!). Но $s+1$ е природен број, кој е помал или еднаков на 2^m и затоа $s+1=2^m$, од каде следува $n=2^{m+1}-1$. Обратно, ако $n=2^k-1$, за некој природен број $k\geq 2$, тогаш од формулата

$$\binom{n}{i}=\frac{(2^k-1)(2^k-2)...(2^k-i)}{i!}$$

и фактот дека степените на 2 во 2^m-i и i с еднакви, следува дека $\binom{n}{i}$ е непарен број.

Сега, нека $n\geq 2$ го има својството од условот на задачата. Тоа е еквивалентно на барањето броевите $\binom{n}{i}-i$ да имаат иста парност за $i=0,1,2,...,n$. Во спротивно, ако броевите $\binom{n}{i}-i$ и $\binom{n}{j}-j$ имаат различна парност, тогаш нивниот збир ќе биде непарен, што доведува до противречност. Според тоа, секои два соседни биномни коефициенти $\binom{n}{i}$ и $\binom{n}{i+1}$ имаат различна парност. Тогаш сите биномни коефициенти

$$\binom{n+1}{i+1}=\binom{n}{i}+\binom{n}{i+1},\ i=1,2,...,n-1$$

се непарни. Последното значи, дека $n+1=2^k-1$, т.е. $n=2^k-2$, за некој природен број $k\geq 2$.

36. Нека

$$S_n=\{\binom{n}{n},\binom{2n}{n},\binom{3n}{n},...,\binom{n^2}{n}\},n\in\mathbb{N}\,.$$

а) Докажи дека постојат бесконечно многу сложени природни броеви n такви што S_n не е полн систем на остатоци по модул n.

б) Докажи дека постојат бесконечно многу сложени природни броеви n такви што S_n е полн систем на остатоци по модул n.

Решение. а) Ќе докажеме дека $n=2p$, каде $p>2$ е прост број го задоволува условот. Имаме

$$\binom{2kp}{2p}=k\prod_{i=1}^{p-1}\frac{2kp-i}{2p-i}\cdot(2k-1)\prod_{i=1}^{p-1}\frac{2kp-p-i}{p-i}\equiv k(2k-1)\ (\mathrm{mod}\ p)\ .$$

Конкретно, одовде следува дека $\binom{2kp}{2p}$ е делив со p за $k\in\{\frac{p+1}{2},p,2p\}$, т.е. S_{2p} има три елементи деливи со p, па затоа не е полн систем на остатоци.

б) Ќе докажеме дека $n=p^2$, каде $p>2$ е прост број го задоволува условот. Имаме

$$\binom{kp^2}{p^2}=\prod_{i=0}^{p^2-1}\frac{kp^2-i}{p^2-i}=k\prod_{j=1}^{p-1}\frac{kp^2-jp}{jp}\cdot\prod_{p\nmid i}\frac{kp^2-i}{p^2-i}\ ,$$

па затоа по модул p^2

$$\binom{kn}{n}\equiv k\prod_{j=1}^{p-1}\frac{kp-j}{j}=k\prod_{j=1}^{p-1}(1-\tfrac{kp}{j})\equiv k-k^2p\sum_{j=1}^{p-1}\tfrac{1}{j}\ .$$

Бидејќи

$$\sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{j}=\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}(\tfrac{1}{j}+\tfrac{1}{p-j})=\sum_{j=1}^{\frac{p-1}{2}}\frac{p}{j(p-j)}\equiv 0(\mathrm{mod}\ p)$$

добиваме $\binom{kn}{n}\equiv k(\mathrm{mod}\ p^2)$.

37. Определи ги сите парови природни броеви $(a,n), a\ge n\ge 2$ такви што $(a+1)^n+a-1$ е степен на бројот 2.

Решение. Нека $(a+1)^n+a-1=2^b$. Бидејќи a е делител на левата страна на последното равенство заклучуваме дека $a=2^c, c\le b$. Ако равенството го поделиме со 2^c го добиваме равенството

$$(2^c+1)^{n-1}+(2^c+1)^{n-2}+...+(2^c+1)+2=2^{b-c}$$

кое може да се запише како $2^ck+n+1=2^{b-c}$. Според тоа, $v_2(n+1)\ge c$ (во спротивно левата страна ќе има непарен прост делител), т.е. a е делител на $n+1$. Но, $a\ge n\ge 2$, па заклучуваме дека $a=n+1=2^c, c\ge 2$.

Сега, од Њутновата биномна формула следува $(2^c+1)^i=2^{2c}K+2^ci+1$, па затоа левата страна на горното равенство е еднаква на

$$2^{2c}A+\tfrac{n(n-1)}{2}\cdot 2^c+n+1=2^{2c}A+2^{c+1}(2^{2c-2}-2^{c-2}-2^{c-1}+1),\ A\in\mathbb{N}\ .$$

За $c=2$ добиваме $(a,n)\equiv(4,3)$, што е решение.

За $c\ge 3$ бројот $2^{2c-2}-2^{c-2}-2^{c-1}+1$ е непарен, па ако 2^{c+1} го извадиме како заеднички множител $(2c>c+1)$ во заградите добиваме непарен број поголем од 1, што е противречност на тоа дека десната страна нема непарни делители.

38. Дадени се природни броеви m и n. Определи го најмалиот природен број $N, N \geq m$, со следново својство: ако $N-$елементно множество од цели броеви содржи комплетен систем на остатоци по модул m, тогаш тоа множество има непразно подмножество, чиј збир на елементи е делив со n.

Решение. Прво ќе докажеме, дека $N \geq \max\{m, m+n-\frac{m(\mathrm{NZD}(m,n)+1)}{2}\}$. Неравенството $N \geq m$ е очигледно. Нека $\mathrm{NZD}(m,n)=d$, $m=m_1 d$, $n=n_1 d$ и $n > \frac{m(d+1)}{2}$. Постои комплетен систем на остатоци $(x_1, x_2, ..., x_m)$ по модул m, таков што остатоците на броевите $x_1, x_2, ..., x_m$ при делење со n формираат точно m_1 групи $\{1, 2, ..., d\}$. Навистина, броевите $i+jdn_1$, $i=1,2,...,d$, $j=1,2,...,m_1$, го имаат саканото својство. Кон броевите $x_1, x_2, ..., x_m$ да додадеме уште $k=n-\frac{m(d+1)}{2}$ броеви $y_1, y_2, ..., y_k$ секој од кои дава остаток 1 при делење со n. Тогаш множеството $\{x_1, x_2, ..., x_m, y_1, y_2, ..., y_k\}$ го има саканото својство. Навистина, $(x_1, x_2, ..., x_m)$ е комплетен систем на остатоци по модул m, а збирот на сите остатоци по модул n е меѓу 0 и $m_1(1+2+...+d)+k=n-1$.

Останува да докажеме, дека бројот $N = \max\{m, m+n-\frac{m(\mathrm{NZD}(m,n)+1)}{2}\}$ ги има саканите својства. Неколку пати ќе ја искористиме следнава

Лема 1. Меѓу произволни k броеви можат ада се изберат неколку, чиј збир е делив со k.

Доказ. За броевите $a_1, a_2, ..., a_k$ ги разгледуваме збировите $S_i = a_1 + a_2 + ... + a_i$, $i=1,2,...,k$. Ако ниту еден збир не е делив со k, тогаш два од нив даваат исти остатоци при делење со k и тогаш нивната разлика е делива со k. ■

Лема 2. Меѓу произволни k броеви кои се деливи со a можат да се изберат неколку чиј збир е делив со ka.

Доказ. Непосредно следува од лема 1. ■

Понатаму, ќе велиме дека едно конечно множество е $k-$*множество*, ако збирот на неговите елементи е делив со k.

Одделно ќе разгледаме два случаја за максимумот.

Случај 1. Нека $n \leq \frac{m(d+1)}{2}$ и соодветно $N=m$.

Нека $X=\{x_1, x_2, ..., x_m\}$ е произволно множество од $N=m$ цели броеви со саканите својства. Бидејќи $(x_1, x_2, ..., x_m)$ е комплетен систем на остатоци по модул m, истиот можеме да го разделиме на m_1 групи, секоја од кои е комплетен систем на остатоци по модул d. За секој од последните системи $Y=(y_1, y_2, ..., y_d)$ ќе сметаме дека $y_i \equiv i (\mathrm{mod}\, d)$.

Ако d е непарен, тогаш Y можеме да го поделиме на $\frac{d+1}{2}$ на број $d-$множества (на пример, $\{y_i, y_{d-i}\}$, за $i=1,2,...,\frac{d-1}{2}$ и $\{y_d\}$). Добивме $\frac{m_1(d+1)}{2} \geq n_1$ на број $d-$множества, па затоа можеме да избереме неколку од нив со вкупен збир на елементи делив со $n_1 d = n$.

Ако d е парен, тогаш Y можеме да го поделиме на $\frac{d}{2}$ на број $d-$множества и го оставаме $y_{\frac{d}{2}}$ на страна, комбинирајќи го со аналогниот елемент од друг систем. Така добиваме $\frac{m_1 d}{2}+[\frac{m_1}{2}]\geq n_1$ на број $d-$множества, и повторно можеме да избереме неколку од нив со вкупен збир на елементи делив со $n_1 d=n$.

Случај 2. Нека $n>\frac{m(d+1)}{2}$ и соодветно $N=m+n-\frac{m(d+1)}{2}$.

Нека X е множество од N елементи, и $A=\{x_1,x_2,...,x_m\}\subset X$ е комплетен систем на остатоци по модул m.

Ако d е непарен, тогаш го разбиваме A како во случај 1 на $\frac{m_1(d+1)}{2}$ на број $d-$множества, а останатите $n-\frac{m(d+1)}{2}$ елементи на A ги разбиваме произволно на $n_1-\frac{m_1(d+1)}{2}$ множества од по d броеви. Во ское од последните множества можеме да најдеме $d-$множество, т.е. имаме уште $n_1-\frac{m_1(d+1)}{2}$ на број $d-$множества. Така добивме n_1 на број $d-$множества и следствено можеме да избереме неколку од нив чиј вкупен збир на елементи е делив со $n_1 d=n$.

Ако d е парен, тогаш го разбиваме A како во случај 1 на $\frac{m_1 d}{2}+[\frac{m_1}{2}]$ на број $d-$множества. Да забележиме, дека ако m_1 е парен, тогаш имаме $\frac{m_1(d+1)}{2}$ на број $d-$множества, а ако m_1 е непарен, тогаш ни останува бројот $y_{\frac{d}{2}}\equiv\frac{d}{2}(\mathrm{mod}\, m)$. Сега, останатите $n-\frac{m(d+1)}{2}$ елементи на A ги разбиваме произволно на $2n_1-m_1(d+1)$ множества од по $\frac{d}{2}$ броеви. Во секое од последните множества можеме да најдеме $\frac{d}{2}-$подмножество, а потоа од секои две $\frac{d}{2}-$множества имаме барем едно $d-$множество, при што добиваме $n_1-[\frac{m_1(d+1)}{2}]$ на број $d-$множества. Во случај на парен m_1 директно имаме n_1 на број $d-$множества. За непарен m_1 ги комбинираме останатите $y_{\frac{d}{2}}$ и едно $\frac{d}{2}-$множество, за да добиеме уште едно $d-$множество, со што добиваме n_1 на број $d-$множества. Конечно, можеме да избереме неколку од нашите n_1 на број $d-$множества со вкупен збир на елементи делив со $n_1 d=n$.

39. Нека $N=2012^{2013}$. Кој е најголемиот број елементи што може да го има множество A кое ги задоволува следниве услови:

1) елементите на A се природни броеви помали или еднакви на N, и

2) ако $a,b\in A$, $a\neq b$, тогаш $N\,|\,ab$.

Решение. Ќе го определиме бараниот максимален број за сите цели броеви N од видот $N=p^{\alpha}q^{\beta}$, каде α е парен и β е непарен број. Да ги разгледаме множествата

$$X_0 = \{m \mid m = p^\lambda q^\mu r, \lambda < \tfrac{\alpha}{2}, \mu \le \tfrac{\beta-1}{2}, \mathrm{NZD}(r,p) = \mathrm{NZD}(r,q) = 1\},$$

$$X_1 = \{m \mid m = p^\lambda q^\mu r, \lambda < \tfrac{\alpha}{2}, \mu \ge \tfrac{\beta+1}{2}, \mathrm{NZD}(r,p) = \mathrm{NZD}(r,q) = 1\},$$

$$X_2 = \{m \mid m = p^\lambda q^\mu r, \lambda \ge \tfrac{\alpha}{2}, \mu \le \tfrac{\beta-1}{2}, \mathrm{NZD}(r,p) = \mathrm{NZD}(r,q) = 1\},$$

$$X_3 = \{m \mid m = p^\lambda q^\mu r, \lambda \ge \tfrac{\alpha}{2}, \mu \ge \tfrac{\beta-1}{2}, \mathrm{NZD}(r,p) = \mathrm{NZD}(r,q) = 1\}.$$

Очигледно множествата $X_0 \cup X_1$ и $X_0 \cup X_2$ содржат најмногу по еден елемент од множеството A. Затоа $|A| \le |X_3| + 2$. Нека претпоставиме дека A содржи и елемент од X_1 и елемент од X_2. Тогаш постои барем еден елемент од X_3 кој не се содржи во A. Според тоа, $|A| \le |X_3| + 1$.

Множество A со овој број елементи може да се конструира, на пример, такво е множеството $A = X_3 \cup \{p^\alpha q^{\frac{\beta-1}{2}}\}$. Останува да забележиме дека $|X_3| = p^\alpha q^{\frac{\beta-1}{2}}$.

За конкретната вредност на $N = 2012^{2013} = 2^{2\cdot 2013} 503^{2013}$ имаме

$$p = 2,\ q = 503, \quad \alpha = 2 \cdot 2013, \beta = 2013,$$

па затоа најголемиот број елементи кој може да го има множеството A е $2^{2013} 503^{1006} + 1$.

40. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што најголемиот прост делител на $n^4 + n^2 + 1$ е еднаков на најголемиот прост делител на $(n+1)^4 + (n+1)^2 + 1$.

Решение. Прво да забележиме дека

$$n^4 + n^2 + 1 = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) = ((n-1)^2 + (n-1) + 1)(n^2 + n + 1),$$

па затоа ако со p_n го означиме најголемиот прост делител на $n^4 + n^2 + 1$, а со q_n најголемиот прост делител на $n^2 + n + 1$, тогаш $p_n = \max\{q_n, q_{n-1}\}$, за секој $n \ge 2$. Бидејќи $\mathrm{NZD}(n^2 + n + 1, n^2 - n + 1) = 1$, добиваме $q_n \ne q_{n-1}$, за секој n. Според тоа, задачата се сведува на тоа да докажеме дека постојат бесконечно многу $n \ge 2$ такви што $q_n > q_{n-1}$ и $q_n > q_{n+1}$. Бидејќи $q_2 = 7 < 13 = q_3$ и $q_4 = 7 < 13 = q_3$, добиваме дека 3 еден таков број. Нека претпоставиме дека вакви броеви се конечно многу и нека m е најголемиот меѓу нив. Тогаш или

$$q_m > q_{m+1} > q_{m+2} > \dots,$$

што очигледно не е можно или постои $k \ge m$ таков што $q_k < q_{k+1}$ ($q_k \ne q_{k+1}$). Од друга страна, не е можно

$$q_k < q_{k+1} < q_{k+2} < \dots,$$

бидејќи $q_{(k+1)^2} = p_{k+1} = \max\{q_k, q_{k+1}\} = q_{k+1}$, па затоа постои најмал $l \ge k+1$ таков што $q_l > q_{l+1}$. Од минималноста следува $q_l > q_{l-1}$, но $l \ge k+1 > k \ge m$, што противречи на изборот на m, а со тоа и на претпоставката. Според тоа, постојат бесконечно многу n кои го задоволуваат условот на задачата.

41. Нека p е прост број за кој постојат различни природни броеви u и v такви што p^2 е аритметичка средина на u^2 и v^2. Докажи дека $2p-u-v$ е или точен квадрат или е удвоен квадрат.

Решение. За $p=2$ имаме $u^2+v^2=8$ и $u=v=2$, т.е. броевите u и v не се различни. Нека $p\neq 2$. Имаме

$$(2p-u-v)(2p+u+v)=4p^2-u^2-v^2-2uv=u^2+v^2-2uv=(u-v)^2.$$

Бидејќи u^2+v^2 е парен број, заклучуваме дека u и v се со иста парност и затоа $2p+u+v$ и $2p-u-v$ се парни. Сега последното равенство е еквивалентно со равенството

$$\frac{2p-u-v}{2}\cdot\frac{2p+u+v}{2}=(\frac{u-v}{2})^2.$$

Од последното равенство следува дека $\frac{2p-u-v}{2}=qa^2$ и $\frac{2p+u+v}{2}=qb^2$ за некои a,b и q кој не содржи квадрати. Бидејќи $2p+u+v>0$, заклучуваме дека $q>0$. Освен тоа,

$$q\,|\,\frac{2p-u-v}{2}+\frac{2p+u+v}{2}=2p.$$

Ако $q=p$, тогаш $p\,|\,u+v$ и затоа $p\,|\,\frac{u+v}{2}$. Од друга страна

$$(\frac{u+v}{2})^2+(\frac{u-v}{2})^2=p^2$$

па затоа $0<\frac{u+v}{2}<p$, што е противречност. Освен тоа, јасно е дека не е можно $q=2p$. Оттука заклучуваме дека $q=1$ или $q=2$. Ако $q=1$, тогаш $2p-u-v=2a^2$, а ако $q=2$, тогаш важи $2p-u-v=(2a)^2$, што и требаше да се докаже.

42. Природните броеви m и n се такви што бројот $m-n$ е непарен. Докажи дека бројот $(m+3n)(5m+7n)$ не е точен квадрат.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното и нека $d=\text{NZD}(m,n)$. Тогаш $m=dx, n=dy,\ \ \text{NZD}(x,y)=1$ и

$$(m+3n)(5m+7n)=d^2(x+3y)(5x+7y).$$

Бидејќи $m-n$ е непарен, истото важи и за $x-y$. Нека c е најголемиот заеднички делител на $x+3y$ и $5x+7y$. Броевите $x+3y$ и $5x+7y$ се непарни, па затоа и c е непарен. Јасно, c е делител на

$$3(5x+7y)-7(x+3y)=8x$$

и на

$$5(x+3y)-(5x+7y)=8y,$$

па затоа тој е делител на x и на y. Но, $\text{NZD}(x,y)=1$, па затоа $c=1$.

Сега од претпоставката следува дека $x+3y=a^2$ и $5x+7y=b^2$, каде a и b се непарни природни броеви. Бидејќи броевите a и b се непарни добиваме

$$b^2-a^2\equiv 0(\text{mod}\,8).$$

Од друга страна имаме $b^2 - a^2 = 4(x+y)$, каде $x+y = 2x-(x-y)$ е непарен број, што значи дека 8 не е делител на $b^2 - a^2$, противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

43. Дали постои биекција $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ таква што за секои два различни природни броја x и y важи

а) $2012 \mid xf(y) + yf(x)$?

б) $2012 \mid xf(x) + yf(y)$?

Решение. а) Не постои. Нека го претпоставиме спротивното и нека $f(1) = a$. За $x > 1$, од деливоста $2012 \mid xf(1) + f(x)$ добиваме $f(x) \equiv -ax (\mathrm{mod}\ 2012)$. Сега $0 \equiv 3f(5) + 5f(3) \equiv 3(-5a) + 5(-3a) = -30a (\mathrm{mod}\ 2012)$, а од овде $1006 \mid a$. Но, тогаш $1006 \mid f(x)$ за секој x, контрадикција.

б) Постои. Множествата $S = \{2012n \mid n \in \mathbb{N}\}$ и $\mathbb{N}\setminus S$ се бесконечни и пребројливи, па постои биекција $g: S \to \mathbb{N}\setminus S$. Дефинираме $f(x) = g(x)$ ако $2012 \mid x$ и $f(x) = g^{-1}(x)$ ако $2012 \nmid x$. Јасно, функција $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ е биекција и $2012 \mid xf(x)$ за секој x.

44. Нека p е прост број и $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е низа природни броеви такви што

$$a_n a_{n+2} = a_{n+1}^2 + p,$$

за секој природен број n. Докажи дека за секој природен број n бројот a_{n+1} е делител на бројот $a_n + a_{n+2}$.

Решение. Ќе користиме индукција по n. Имаме $a_1a_3 + a_3^2 = a_2a_4 + a_2^2$, па затоа a_2 е делител на $a_3(a_1 + a_3)$. Ако претпоставиме дека $d = \mathrm{NZD}(a_2, a_3) > 1$, тогаш d е делител на $a_1a_3 - a_2^2 = p$, па затоа $d = p$ и тогаш p е делител на a_2 и a_3 и од $p = a_3a_5 - a_4^2$ следува дека p е делител на a_4. Последното значи дека p^2 е делител на $a_2a_4 - a_3^2 = p$, што е противречност. Според тоа, $\mathrm{NZD}(a_2, a_3) = 1$ и од $a_2 \mid a_3(a_1 + a_3)$ следува $a_2 \mid (a_1 + a_3)$.

Нека претпоставиме дека за некој $k \in \mathbb{N}$ важи $a_{k+1} \mid (a_k + a_{k+2})$. Од рекурентната формула непосредно следува $\frac{a_k + a_{k+2}}{a_{k+1}} = \frac{a_{k+1} + a_{k+3}}{a_{k+2}}$. Сега од $a_{k+1} \mid (a_k + a_{k+2})$ и последното равенство следува $a_{k+2} \mid (a_{k+1} + a_{k+3})$, па од принципот на математичка индукција следува тврдењето на задачата.

45. Дадена е бесконечна низа природни броеви $x_1, x_2, \ldots$ таква што за секој природен број s важи $x_{s+1} - x_s \le 3$. Докажи, дека постојат бесконечно многу парови различни природни броеви m и n за кои x_m е делител на x_n.

Решение. Доволно е да докажеме дека некој член на низата е делител на друг член на низата (зошто?). Од условот следува дека меѓу секои три последователни природни броеви барем еден е член на низата.

Нека a е член на низата и да ги разгледаме броевите

$b=a+a(a+1)(a+2)$, $b+1=a+1+a(a+1)(a+2)$ и $b+2=a+2+a(a+1)(a+2)$.

Бидејќи $a\,|\,b$, ако b е член на низата, тогаш тврдењето е докажано. Нека b не е член на низата. Тогаш еден од броевите $b+1$ или $b+2$ е член на низата. Нека $b+1$ е член на низата (вториот случај се разгледува аналогно). Да ги разгледаме броевите

$c=b+b(b+1)(b+2)$, $c+1=b+1+b(b+1)(b+2)$ и $c+2=b+2+b(b+1)(b+2)$.

Ако c е член на низата, тогаш $a\,|\,c$ и тврдењето е докажано, а ако $c+1$ е член на низата, тогаш $b+1\,|\,c+1$ и тврдењето едокажано. Затоа, нека $c+2$ е член на низата. Да ги разгледаме броевите

$d=c+c(c+1)(c+2)$, $d+1=c+1+c(c+1)(c+2)$ и $d+2=c+2+c(c+1)(c+2)$.

Ако d е член на низата, тогаш $a\,|\,d$ и тврдењето е докажано. Ако $d+1$ е член на низата, тогаш $b+1\,|\,d+1$ и тврдењето е докажано и ако $d+2$ е член на низата, тогаш $c+2\,|\,d+2$ и тврдењето е докажано.

46. Докажи, дека за секој природен број $a\ge 4$ постојат бесконечно многу природни броеви n кои се делители на a^n-1, но не се деливи со квадрат на прост број.

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека $p\ge 3$ е непарен делител на бројот b. Тогаш постои непарен прост број q таков што $q\,|\,(b+1)^p-1$, но $q\nmid b$.

Доказ. Ако $b=pc$, тогаш

$$\begin{aligned}(b+1)^p-1&=b((b+1)^{p-1}+(b+1)^{p-2}+...+(b+1)+1)\\&=b(Bb^2+\tfrac{p(p-1)}{2}b+p)\\&=bp(b(Bc+\tfrac{p-1}{2})+1)\\&=bpd,\end{aligned}$$

и останува да избереме прост делител q на d. Да забележиме дека d е непарен, бидејќи ако b е парен, тогаш $d=bK+1$ е непарен, а ако b е непарен, тогаш $(b+1)^p-1$ е непарен, па затоа d е непарен. Јасно, $q\,|\,(b+1)^p-1$, но $q\nmid b$. ■

Сега, ќе докажеме дека ако $a\ne 2^k+1$, тогаш постои низа $p_1,p_2,...$ од непарни прости броеви таква што ако $p_0=1$ и ако $P_n=a^{p_0p_1\cdots p_n}-1$, тогаш $p_1\,|\,a-1$ и $p_{n+1}\,|\,P_n$, но $p_{n+1}\nmid P_{n-1}$, $n\ge 1$.

Нека p_1 е непарен прост делител на $a-1$ и нека веќе сме ги избрале броевите $p_1,p_2,...,p_k$. Ако ја примениме лемата за $b=P_k$ и $p=p_k$, наоѓаме непарен прост број p_{k+1} кој е делител на P_k, но не е делител на P_{k-1}.

Понатаму, бидејќи P_{k-1} е делив со броевите $p_1,p_2,...,p_k$, но не е делив со p_{k+1}, заклучуваме дека p_{k+1} е различен од броевите $p_1,p_2,...,p_k$. Според тоа, броевите од видот $p_1p_2...p_k$ го имаат саканото својство од условот на задачата.

Ако $a=2^l+1$, $l\ge 2$, тогаш $a^2\neq 2^m+1$ и останува да ги помножиме со 2 најдените броеви за бројот a^2.

47. За секој природен број n збирот $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}$ е запишан како нескратлива дропка $\frac{p_n}{q_n}$.

а) Докажи, дека 3 не е делител на p_{67}.

б) Определи ги сите природни броеви n за кои $3\,|\,p_n$.

Решение. а) Нека

$$S_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}.$$

Имаме,

$$S_2=3\cdot\frac{1}{2},\ S_7=3\cdot\frac{121}{140} \text{ и}$$

$$S_{22}-S_7=\frac{1}{8}+\frac{1}{22}+\frac{1}{10}+\frac{1}{20}+\frac{1}{11}+\frac{1}{19}+\frac{1}{14}+\frac{1}{13}+\frac{1}{13}+\frac{1}{17}+$$
$$\frac{1}{9}+\frac{1}{12}+\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{21}=\frac{30a}{b}+\frac{51}{140}=\frac{3c}{d},$$

каде $\text{NZD}(a,b)=\text{NZD}(c,d)=1$. Лесно се гледа дека $a\equiv b(\text{mod}\,3)$. Затоа $3\nmid c,d$, $c\not\equiv d(\text{mod}\,3)$, $p_{22}=3p_{22}'$ и $3\nmid p_{22}'$. Слично се докажува дека $S_{67}-S_{22}=\frac{90e}{f}+\frac{c}{d}$, каде $3\nmid f$. Затоа $3\nmid p_{67},q_{67}$.

б) Нека $S_n=\frac{k_n}{3^{m_n}l_n}$, каде $3\nmid k_n,l_n$. Тогаш

$$S_{3n}=\frac{S_n}{3}+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+...+\frac{1}{3n-2}+\frac{1}{3n-1}$$
$$=\frac{k_n}{3^{m_n+1}l_n}+3\frac{a_n}{b_n}=\frac{k_nb_n+3^{m_n+2}l_nb_n}{3^{m_n+1}l_nb_n},$$

каде $3\nmid b_n$. Затоа, ако $m_n\ge -1$, тогаш $m_{3n}=m_n+1$. Аналогно,

$$m_{3n+2}=m_n+1 \text{ за } m_n\ge -1 \text{ и } m_{3n+1}=m_n+1 \text{ за } m_n\ge 0.$$

Бидејќи $m_1=0, m_2=m_7=m_{22}=-1$ и $m_{67}=0$, лесно се следува дека одговорот на задачата е $n=2,7,22$.

48. Нека c е природен број. Низата $a_1,a_2,...$ е дефинирана со

$$a_1=c, a_{n+1}=a_n^2+a_n+c^3,$$

за секој природен број n. Определи ги сите вредности на c за кои постојат природни броеви $k\ge 1$ и $m\ge 2$ такви што бројот $a_k^2+c^3$ е еднаков на $m-$тиот степен на некој природен број.

Решение. За $k>1$ од рекурентната врска добиваме

$$a_k^2+c^3=a_{k+1}-a_k=a_k^2+a_k-a_{k-1}^2-a_{k-1}=(a_k-a_{k-1})(a_k+a_{k-1}+1). \qquad (1)$$

Нека претпоставиме дека $d\,|\,a_k-a_{k-1}$ и $d\,|\,a_k+a_{k-1}+1$. Тогаш $d\,|\,2a_k+1$ и $d\,|\,2a_{k-1}+1$. Но, од рекурентната релација следува

$$2(2a_k+1)=(2a_{k-1}+1)^2+4c^3+1,$$

па затоа $d\,|\,4c^3+1$, а оттука следува дека $d\,|\,2a_n+1$, за секој $n<k$. Според тоа, $d\,|\,2a_1+1=2c+1$. Меѓутоа, тогаш $d\,|\,2(4c^3+1)-(2c+1)(4c^2-2c+1)=1$, т.е. $d=1$.

Сега ако $a_{k+1}-a_k$ е $m-$ти степен, од (1) следува дека и a_k-a_{k-1} е $m-$ти степен. Постапката ја продолжуваме е заклучуваме дека

$$a_2-a_1=c^2(c+1)$$

е $m-$ти степен, па од $\text{NZD}(c^2,c+1)=1$ следува дека c^2 и $c+1$ се $m-$ти степени. Меѓутоа, c не може да биде $m-$ти степен, па затоа m мора да биде парен број и уште повеќе $m=2$. Значи, $c+1$ е точен квадрат. Конечно, ако $c+1$ е точен квадрат, тогаш и

$$c^2(c+1)=a_1^2+c^3$$

е точен квадрат.

49. Нека a е позитивен цел број. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е дефинирана со

$$a_1=a,\ a_{k+1}=a_k^2+a_k+a^3$$

за секој позитивен цел број $k\geq 1$. Најди ги сите вредности за a за кои постои позитивен цел број n така што $a_n^2+a^3$ е m-ти степен, $m\geq 2$, $m\in\mathbb{N}$, на позитивен цел број.

Решение. Најпрво, да забележиме дека:

$$a_{n+1}^2+a^3=(a_n^2+a_n+a^3)^2+a^3=(a_n^2+a^3)(a_n^2+2a_n+1+a^3)$$

Ќе покажеме дека $a_n^2+a^3$ и $a_n^2+2a_n+1+a^3$ се заемно прости.

Со индукција ќе докажеме дека $4a^3+1$ е заемно прост со $2a_n+1$, за секој $n\geq 1$.

Нека $n=1$ и нека p е прост делител на $4a^3+1$ и $2a_1+1=2a+1$. Тогаш p е делител на

$$2(4a^3+1)=(2a+1)(4a^2-2a+1)+1,$$

односно p е делител на 1, што е контрадикција.

Да претпоставиме сега дека $\text{NZD}(4a^3+1,2a_n+1)=1$ за некој $n\geq 1$ и простиот број p е делител на $4a^3+1$ и $2a_{n+1}+1$. Тогаш p е делител на

$$4a_{n+1}+2=(2a_n+1)^2+4a^3+1,$$

кое повторно дава контрадикција.

Да претпоставиме дека за некој $n\geq 1$ бројот

$$a_{n+1}^2+a^3=(a_n^2+a_n+a^3)^2+a^3=(a_n^2+a^3)(a_n^2+2a_n+1+a^3)$$

е степен. Бидејќи $a_n^2+a^3$ и $a_n^2+2a_n+1+a^3$ се заемно прости, следува дека и $a_n^2+a^3$ е исто така степен.

Ова размислување може повторно да го искористиме, со што се добива дека

$$a_1^2+a^3=a^2+a^3=a^2(a+1)$$

е степен. Конечно,

- ако $a^2(a+1)=t^k$ каде $k\geq 3$ е непарен, тогаш $a=t_1^k$ и $a+1=t_2^k$, што не е можно.

- ако $a^2(a+1)=t^{2k}$ каде $k\geq 2$, тогаш $a=t_1^k$ и $a+1=t_2^k$, што не е можно.

Одовде $a^2(a+1)=t^2$ од каде ги добиваме решенијата $a=s^2-1$, $s\geq 2$, $s\in\mathbb{N}$.

50. Докажи дека постојат бесконечно многу природни броеви n, такви што n^2+1 има прост делител, кој што е поголем од $2n+\sqrt{2n}$.

Решение. За секој доволно голем прост број p од видот $4m+1$, ќе најдеме соодветен n, таков што p е делител на n^2+1 и $p>2n+\sqrt{2n}$. Бидејќи постојат бесконечно многу вакви прости броеви, и за секој од нив $n\geq\sqrt{p-1}$, со ова ќе најдеме бесконечно многу различни n, кои ја задоволуваат претпоставката.

Нека p е многу голем прост број од видот $4m+1$.

Постои n, таков што $p\,|\,n^2+1$, бидејќи секој непарен фактор на n^2+1 е од видот $4m+1$. Бидејќи $p\,|\,(n-p)^2+1$ можеме да претпоставиме дека $n\leq p$.

Ако $n>\frac{p}{2}$, тогаш $p-n<\frac{p}{2}$, па наместо n да го земеме $p-n$. Значи, може да претпоставиме дека $2n<p$.

Нека $p-2n=k>0$. Од $p\,|\,n^2+1$ добиваме:

$$p\,|\,4n^2+4=(p-k)^2+4=p^2-2pk+k^2+4$$

па $p\,|\,k^2+4$.

Да забележиме дека $k>4$. Имено, ако $k\leq 4$, можни се само два случаи $k=1$ и $k=3$, но тогаш добиваме контрадикција со изборот на p да биде многу голем. Па имаме:

$$k^2+k>k^2+4\geq p\,,$$

од каде

$$k^2\geq p-k\text{, т.е. } k\geq\sqrt{p-k}\,.$$

Сега јасно

$$p-2n\geq\sqrt{p-k}=\sqrt{2n}\,,$$

односно

$$p\geq 2n+\sqrt{2n}\,.$$

51. Даден е природен број n. Определи го минималниот број на броеви од видот $m!$, каде m е природен број со следново својство:

За секој природен број $t\leq n!$ збирот на неколку од броевите од видот $m!$ (можно е само еден) е еднаков на t.

Решение. Ќе докажеме, дека бараниот минимален број е еднаков на $\frac{n(n-1)}{2}+1$. За секој $i=1,2,3,\ldots,n-1$ да земеме i броеви по $i!$ и да го додадеме бројот $n!$.

Имаме точно $\frac{n(n-1)}{2}+1$ броеви. Ако $1\le t<n!$, нека $r_0=t$ и индуктивно да ги дефинираме броевите q_i и r_i на следниов начин:

$$r_{i-1}=q_i(n-i)!+r_i,\qquad 0\le r_i<(n-i)!\,.$$

Тогаш $t=\sum_{i=1}^{n-1}q_i(n-i)!$ и бидејќи $r_{i-1}<(n-i+1)!$ добиваме дека $q_i\le n-i$. За секој $i=1,2,...,n-1$ можеме да избереме q_i броеви, сите еднакви на $(n-i)!$ и збирот на овие броеви е еднаков на t.

Да го разгледаме минималниот број на броеви, потребни за добивање на $n!-1$. Бројот на броевите еднакви на $i!$ да го означиме со c_i. Ако $c_i\ge i+1$, тогаш можеме $i+1$ броеви еднакви на $i!$ да замениме со еден број еднаков на $(i+1)!$ и ќе добиеме противречност со минималноста на бројот на разгледуваните броеви. Тогаш

$$n!-1=\sum_{i=1}^{n-1}c_i i!\le\sum_{i=1}^{n-1}i\cdot i!=\sum_{i=1}^{n-1}((i+1)!-i!)=n!-1,$$

па затоа сите неравенства треба да се равенства, т.е. за секој i важи $c_i=i$. Бројот на броевите е $1+2+3+...+(n-1)=\frac{n(n-1)}{2}$ и нивниот збир е $n!-1$. Останува да забележиме, дека за добивање на бројот $n!$ треба да додадеме барем уште еден број и тогаш вкупниот број е $\frac{n(n-1)}{2}+1$.

52. Даден е прост број $p>3$. Докажи, дека ако постои природен број k, за кој k^2+5 е делив со p, тогаш постојат природни броеви m и n, такви што $p^2=m^2+5n^2$.

Решение. Ќе докажеме, дека ако постојат цели броеви x и y за кои

$$x^2+5y^2=p,2p,3p,4p \text{ или } 5p,$$

тогаш постојат природни броеви m и n такви што $p^2=m^2+5n^2$.

- Нека $x^2+5y^2=p$. Бидејќи p е прост број, важи $xy\ne0$ и непосредно се проверува дека
$$(x^2-5y^2)^2+5(2xy)^2=p^2\,.$$
- Нека $x^2+5y^2=2p$. Бидејќи $p>2$, заклучуваме дека x и y се непарни и тогаш
$$(\tfrac{x^2-5y^2}{2})^2+5(xy)^2=p^2.$$
- Нека $x^2+5y^2=3p$. Бидејќи $p>3$, заклучуваме дека x и y не се деливи со 3. Ако $x+y$ е делив со 3, тогаш
$$(\tfrac{x-5y}{3})^2+5(\tfrac{x+y}{3})^2=2p\,.$$
Ако $x-y$ е делив со 3, тогаш

$$(\tfrac{x+5y}{3})^2+5(\tfrac{x-y}{3})^2=2p.$$

Според тоа, случајот се сведува на претходниот.

- Нека $x^2+5y^2=4p$, тогаш x и y се парни. Според тоа, важи

$$(\tfrac{x}{2})^2+5(\tfrac{y}{2})^2=p$$

и случајот се сведува на $r^2+5s^2=p$.

- Нека $x^2+5y^2=5p$. Тогаш $5\,|\,x$ и $y^2+5(\frac{x}{5})^2=p$ и случајот се сведува на $r^2+5s^2=p$.

Од претходно докажаното следува, дека можеме да сметаме дека $k^2+5=tp$, за $t\geq 6$, бидејќи во спротивен случај $x=k,\ y=1$ дава $x^2+5y^2=tp$, за $t\leq 5$.

Да го разгледаме множеството $A=\{a_1+a_2k\,|\,0\leq a_1\leq s,\ 0\leq a_2\leq s\}$, каде $s=[\sqrt{p}]$. Бројот на елементите на A е еднаков на $(s+1)^2>p$ (од $k^2+5=tp,$ за $t\geq 6$, лесно следува, дека $k>s$ и тогаш во A нема еднакви елементи) што значи дека, разликата на два елементи на A се дели со p. Според тоа, постојат x и y, такви што $|x|\leq s, |y|\leq s,\quad x+yk\neq 0$ и p е делител на $x+yk$. Тогаш p е делител на

$$(x+yk)(x-yk)=x^2+5y^2-y^2(k^2+5)$$

и бидејќи p е делител на k^2+5, добиваме дека p е делител на x^2+5y^2. Но,

$$0<x^2+5y^2\leq 6s^2<6p,$$

т.е.

$$x^2+5y^2=p, 2p, 3p, 4p \text{ или } 5p.$$

53. Нека $a_1,a_2,...$ е низа цели броеви, која содржи бесконечно многу и позитивни и негативни броеви. Познато е дека за секој природен број n броевите $a_1,a_2,...,a_n$ даваат различни остатоци при делење со n. Докажи, дека во оваа низа секој цел број се појавува точно по еднаш.

Решение. Од условот на задачата следува дека сите членови на низата се различни. Исто така, ако $d=|a_i-a_j|\geq n$ за некои $i,j\leq n$, тогаш меѓу членовите $a_1,a_2,...,a_d$ се наоѓаат два кои даваат ист остаток по модул d, што не е можно. Според тоа, $|a_i-a_j|\leq n-1$, за секои $i,j\leq n$, т.е. множеството $\{a_1,a_2,...,a_n\}$ се состои од n последователни цели броеви.

Ако целиот број k не се појавува во низата, тогаш сите членови на низата се поголеми од k или сите се помали од k, што противречи на условот дека низата содржи бесконечно многу и позитивни и негативни броеви. Според тоа, низата ги содржи сите цели броеви и притоа секој број се содржи точно по еднаш.

54. Дадено е множество M од 2^{2015} природни броеви, секој од кои има 2014 цифри. Секои два од овие броеви даваат различни остатоци при делење со 2^{2015}.

Колку најмалку различни цифри учествуваат во декадните записи на броевите од множеството M ?

Решение. Ако броевите x и y даваат различни остатоци при делење со 2^n, тогаш од $10x+c\equiv 10y+c \pmod{2^{n+1}}$ следува дека после допишувањето на произволна цифра од десно, новите броеви даваат различни остатоци при делење со 2^{n+1}. Според тоа, ако имаме полн систем на остатоци по модул 2^n, по допишување на 1 (од ови броеви ќе се добијат различни непарни остатоци, а по допишување на 2 од овие броеви ќе се добијат различни парни остатоци, па добиваме полн систем на остатоци по модул 2^{n+1}.

Почнувајќи од 1, 2, 3, 4 кои формираат полн систем на остатоци по модул 2^2, добиваме пример со 4 различни цифри, кои го задоволуваат условот на задачата.

Нека претпоставиме дека такво множество можеме да конструираме со три цифри a,b и c. Цифрите a,b и c не се со еднаква парност, бидејќи во спротивен случај сите остатоци по модул 2^{2015} ќе бидат со еднаква парност и нема да формираат полн систем на остататоци. Нека a и b се непарни, а c е парна (другиот случај е разгледува аналогно). Бидејќи броевите од M формираат полн систем на остатоци, половината од броевите во M се парни, а половината се непарни. Бидејќи c е единствена парна цифра, добиваме дека сите парни броеви од M завршуваат на c. Ако ја избришеме последната цифра од овие броеви, ќе добиеме полн систем на остатоци од различни 2013-цифрени броеви по модул 2^{2014}, бидејќи ако $x\equiv y \pmod{2^{2014}}$, тогаш $10x+c\equiv 10y+c \pmod{2^{2015}}$. За ново-то множество го повторуваме размислувањето и добиваме полн систем на остатоци по модул 2^{2013}, составен од 2012-цифрени броеви. Продолжувајќи на овој начин ќе добиеме полн систем на остатоци по модул $2^2=4$ составен од различни едноцифрени броеви. Последното противречи на фактот дека имаме само три едноцифрени броеви a,b и c.

55. Нека $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$. Докажи дека постои природен број m поголем од n^n таков што $\frac{n^m-m^n}{n+m}$ е природен број.

Решение. На почетокот да забележиме дека со индукција може да се докаже дека $n^m>m^n$ за $m>n\geq 3$. Затоа

$$\frac{n^m-m^n}{n+m}>0.$$

Ако $n=2$, тогаш можеме да земеме $m=10$ и притоа

$$\frac{n^m-m^n}{n+m}=\frac{2^{10}-10^2}{12}=77.$$

Нека претпоставиме дека $n>2$. Имаме

$$n^m-m^n\equiv n^m-(-n)^n=n^n(n^{m-n}-(-1)^n) \pmod{n+m}.$$

Бројот m ќе го побараме во облик $m=kn^n-n,\, k\in\mathbb{N}$. Тогаш $m+n=kn^n \mid n^m-m^n$ ако и само ако $k\mid n^{m-n}-(-1)^n$.

1) Ако n е непарен, тогаш $n^{m-n}-(-1)^n$ е парен, па можеме да земеме $k=2$, т.е. $m=2n^n-n$.
2) Ако n е парен, тогаш $n^{m-n}-(-1)^n=n^{m-n}-1$ е делив со $n-1$, па можеме да земеме $k=n-1$, т.е. $m=(n-1)n^n-n$.

Забелешка. Неравенството $n^m>m^n$ за $m>n\ge 3$ може да се докаже и со помош на изводи. Навистина, за функцијата $f(x)=\frac{\ln x}{x}$, $x>e$ важи неравенството $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}<0$ кога $x>e$, што значи дека таа монотоно опаѓа за $x>e$. Затоа

$$\frac{\ln n}{n}>\frac{\ln m}{m}\text{, т.е. } m\ln n>n\ln m,$$

од каде добиваме

$$n^m=e^{m\ln n}>e^{n\ln m}=m^n\text{, кога } m>n\ge 3.$$

56. Дадени се природни броеви $a_1,...,a_{2^{2016}}$ такви што за секој n, $1\le n\le 2^{2016}$ важи $a_n\le 2016$ и $a_1a_2...a_n+1$ е точен квадрат. Докажи, дека некој од броевите $a_1,a_2,...,a_{2^{2016}}$ е еднаков на 1.

Решение. Нека за броевите a и b, $a>b$ важи $a+1=u^2$ и $b=v^2$. Тогаш

$$(uv-1)^2<ab+1=u^2v^2-v^2+1<(uv)^2,$$

што значи дека бројот $ab+1$ не е точен квадрат.

Нека $p_1,p_2,...,p_m$ се сите прости броеви помали од 2016. За секој n, $1\le n\le 2^{2016}$ ја разгледуваме бинарната низа $c_n=(r_1,r_2,...,r_m)$, каде $r_i=0$ ако експонентот на p_i во производот $P_n=a_1a_2...a_n$ е парен, а $r_i=1$ во спротивно. За низата c_n има само 2^m можности, па затоа за секој

$$k\le 2^{2016}-2^m$$

меѓу бинарните низи

$$c_k,c_{k+1},...,c_{k+2^m}$$

постојат две еднакви, да кажеме c_s и c_t ($s<t$), а тогаш $\frac{P_t}{P_s}$ е точен квадрат помал или еднаков на 2016^{2^m}.

Нека претпоставиме дека низата $\{a_n\}$ не содржи единици. Да земеме $k=11\cdot 2^m$. Јасно,

$$k+2^m<2^{2016}.$$

Како што видовме, постојат индекси s,t, $k\le s<t\le k+2^m$ такви што $b=\frac{P_t}{P_s}$ е точен квадрат. Меѓутоа, како што претходно покажавме, бидејќи

$$a=P_s\ge P_k\ge 2^k=2^{11\cdot 2^m}=2048^{2^m}>2016^{2^m}\ge b$$

броевите $a+1=P_s+1$ и $ab+1=P_t+1$ истовремено не може да бидат точни квадрати, што противречи на условот на задачата.

2. ДИОФАНТОВИ РАВЕНКИ

1. Природните броеви x, y и z се по парови заемно прости и ја задоволуваат релацијата $x^2 + y^2 = z^2$. Докажи дека:

а) Еден од броевите x, y и z е делив со 5.

б) Еден од броевите броевите x и y е делив со 3.

в) Еден од броевите броевите x и y е делив со 4.

Решение. а) Бидејќи секој природен број N може да се запише во облик $5k, 5k \pm 1$ или $5k \pm 2$ добиваме дека бројот N^2 може да се запише во облик $5k$ или $5k \pm 1$. Нека претпоставиме дека ниту еден од броевите x и y не е делив со 5. Тогаш бројот $z^2 = x^2 + y^2$ може да се запише во облик $5Q \pm 2$, кога и двата x и y се од облик $5k+1$ или и двата се од облик $5k-1$, што не е можно, или бројот $z^2 = x^2 + y^2$ може да се запише во облик $5Q$ кога еден од броевите x и y е од облик $5k+1$, а другиот е од облик $5k-1$, што значи дека бројот z е делив со 5.

б) Бидејќи секој природен број N може да се запише во облик $3k, 3k+1$ или $3k-1$ добиваме дека бројот N^2 може да се запише во облик $3k$ или $3k+1$. Нека претпоставиме дека ниту еден од броевите x и y не е делив со 3. Тогаш бројот $z^2 = x^2 + y^2$ е од облик $3Q+2$, што не е можно, па затоа еден од броевите x и y е делив со 3.

в) Еден од броевите x и y сигурно е парен број, бидејќи во спротивно ако $x = 2k+1$ и $y = 2t+1$, тогаш $z^2 = x^2 + y^2 = 4Q+2$, што не е можно бидејќи квадрат на природен број е или од облик $4Q$ или од облик $4Q+1$. Останува да докажеме дека еден од броевите x и y е делив со 4. Нека претпоставиме дека $x = 2t$. Тогаш, $y = 2k+1$ бидејќи во спротивно броевите x, y и z нема да бидат заемно прости. Според тоа, $z^2 = 4t^2 + 4k^2 + 4k + 1 = 2l + 1$, па затоа

$$4t^2 = x^2 = z^2 - y^2 = 4(l-k)(l+k+1) \text{ т.е. } t^2 = (l-k)(l+k+1).$$

Бидејќи $l - k + l + k + 1 = 2l + 1$ добиваме дека еден од множителите $l-k$ или $l+k+1$ на бројот t^2 е парен број, што значи и бројот t е парен број, па затоа $4 \mid x$.

2. Докажи, дека за секои два природни броја k и n постојат k природни броеви $m_1, m_2, ..., m_k$ (не задолжително различни) такви што

$$1 + \frac{2^k - 1}{n} = (1 + \frac{1}{m_1})(1 + \frac{1}{m_2})...(1 + \frac{1}{m_k}).$$

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по k.

За $k = 1$ и за секој $n \in \mathbb{N}$ имаме $1 + \frac{2^k - 1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$, па ако земеме $m_1 = n$, добиваме дека равенството (1) е исполнето, т.е. тврдењето важи за $k = 1$ и за секој $n \in \mathbb{N}$.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $k = r - 1$ и за секој $n \in \mathbb{N}$. Нека

$k = r$ и $n \in \mathbb{N}$. Можни се два случаја: $2 \mid n = 2n_1$ и $2 \nmid n = 2n_1 - 1$.

1) Ако $2 \mid n = 2n_1$, тогаш

$$1+\frac{2^r-1}{n}=\frac{n+2^r-1}{n+2^r-2}\cdot\frac{n+2^r-2}{n}=(1+\frac{1}{n+2^r-2})(1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}).$$

Од индуктивната претпоставка следува дека постојат $m_1, m_2, ..., m_{r-1}$ такви што

$$1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}=(1+\frac{1}{m_1})(1+\frac{1}{m_2})...(1+\frac{1}{m_{r-1}})$$

па затоа доволно е да земеме $m_r = n + 2^r - 2$.

2) Ако $2 \nmid n = 2n_1 - 1$, тогаш

$$1+\frac{2^r-1}{n}=\frac{n+2^r-1}{n+1}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{2n_1-1+2^r-1}{2n_1-1+1}\cdot\frac{n+1}{n}=(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}).$$

Од индуктивната претпоставка следува дека постојат $m_1, m_2, ..., m_{r-1}$ такви што

$$1+\frac{2^{r-1}-1}{n_1}=(1+\frac{1}{m_1})(1+\frac{1}{m_2})...(1+\frac{1}{m_{r-1}}),$$

па затоа доволно е да земеме $m_r = n$.

Според тоа, и во двата случаја тврдењето важи за $k = r$ и секој $n \in \mathbb{N}$, со што доказот е завршен.

3. Определи ги сите природни броеви x и y за кои бројот $\frac{xy^3}{x+y}$ е точен куб на прост број.

Решение. Нека p е прост број таков што

$$xy^3 = p^3(x+y). \qquad (1)$$

Ако $p \nmid y$, тогаш $p^3 \mid x$. Значи, $x = p^3 h$ и следствено $p^3 h y^3 = p^3(p^3 h + y)$, од каде наоѓаме $y(hy^2-1) = p^3 h$. Бидејќи $p \nmid y$, добиваме дека $p^3 \mid hy^2 - 1$ и $y \mid h$. Нека $h = yk$. Тогаш $y(ky^3-1) = p^3 yk$, па затоа $k(y^3 - p^3) = 1$. Според тоа, $y^3 - k^3 = \pm 1$, што не е можно.

Нека $p \mid y$, т.е. $y = ps$. Од (1) следува $xp^3s^3 = p^3(x+ps)$, од каде наоѓаме $x(s^3-1) = ps$. Бидејќи $s \nmid s^3 - 1$, добиваме $s \mid x$. Тогаш $s^3 - 1 \mid p$, што значи дека $s^3 - 1 = p$. Последното е можно само за $s - 1 = 1$ и $s^2 + s + 1 = p$. Значи, $x = s = 2,\ p = 7$, т.е. $x = 2$ и $y = 14$.

4. Определи ги сите прости броеви p, за кои бројот $2p^2 - 3p - 1$ е точен куб на природен број.

Решение. Од равенството

$$2p^2 - 3p - 1 = n^3 \qquad (1)$$

добиваме $n^3 \le 2p^2 - 3p - 1 \le 2p^2 \le p^3$, па затоа $n < p$, т.е. $n + 1 \le p$.

Ако $p=n+1$, тогаш од (1) добиваме $n^3-2n^2-n+2=0$, од каде наоѓаме $(n-2)(n-1)(n+1)=0$. Значи, $n\in\{1,2\}$, па затоа $p\in\{2,3\}$.

Ако $p>n+1$, тогаш од (1) следува

$$p(2p-3)=(n+1)(n^2-n+1) \qquad (2)$$

и бидејќи $p>n+1$ и p е прост број следува дека p е делител на n^2-n+1. Тогаш

$$n^2-n+1=kp \qquad (3)$$

за некој природен број k. Од (2) и (3) добиваме $2p=k(n+1)+3$ и ако во (3) замениме $p=\frac{k(n+1)+3}{2}$ добиваме $2n^2-(k^2+2)n-(k^2+3k-2)=0$.

Дискриминантата на оваа квадратна равенка $D=k^4+12k^2+24^2-12$ треба да е точен квадрат. Ако $k\geq 9$, тогаш

$$(k^2+6)^2<k^4+12k^2+24^2-12<(k^2+7)^2$$

и D не може да биде точен квадрат. Според тоа, $1\leq k\leq 8$ и со непосредна проверка се покажува дека ниту едно од овие броеви не дава решение.

Конечно, бараните прости броеви се 2 и 3.

5. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$(b^2+11(a-b))^2=a^3b.$$

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(a-b)(a^2b+ab^2+b^3-22b^2-121(a-b))=0.$$

Од последната равенка следува $a-b=0$, па решенија на задачата се паровите $(t,t), t\in\mathbb{Z}$. Нека $a\neq b$ и $a^2b+ab^2+b^3-22b^2-121(a-b)=0$. Ако $b=0$, добиваме $a=0$, што противречи на $a\neq b$. Еквивалентната равенка

$$ba^2+(b^2-121)a+b^3-22b^2+121b=0$$

е квадратна по a со дискриминанта $D=(3b+11)(11-b)^2$. Условот $D\geq 0$ дава $-\frac{11}{3}\leq b\leq 11$ и со непосредна проверка се добива дека решение на почетната равенка е само парот $(0,11)$.

6. Во множеството цели броеви реши ја равенката $a^3+b^3+3ab=1$.

Решение. Од равенството

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

следува

$$\begin{aligned}&a^3+b^3+3ab=1 &&\Leftrightarrow\\ &a^3+b^3+(-1)^3-3ab(-1)=0 &&\Leftrightarrow\\ &(a+b-1)(a^2+b^2+1-ab+b+a)=0 &&\Leftrightarrow\\ &(a+b-1)((2a-b+1)^2+3(b+1)^2)=0,\end{aligned}$$

од каде добиваме $(a,b)=(-1,-1)$ и $(a,b)=(n,1-n), n\in\mathbb{Z}$.

7. За природниот број n кој не е степен на бројот 2, со $a(n)$ и $b(n)$ соодветно да ги означиме најголемиот и најмалиот непарен делител на бројот n поголем од 1. Определи ги сите броеви n за кои важи

$$3a(n)+5b(n)=n.$$

Решение. Нека p е најмалиот непарен прост делител на n и $n=2^k mp$, каде m е непарен број и $k\geq 0$. Тогаш $a(n)=mp, b(n)=p$ и $2^k mp=3mp+5p$, па затоа $(2^k-3)m=5$. Можни се два случаја:

i) $m=1$ и $2^k-3=5$, т.е. $k=3$. Тогаш $n=8p$ и ова е едно решение.

ii) $m=5$ и $2^k-3=1$, т.е. $k=2$. Тогаш $n=20p$, а како р е најмалиот непарен прост делител, мора да биде $p=3$ или $p=5$, што дава уште две решенија: $n=60$ и $n=100$.

8. Нека p е прост број и $m\geq 2$ е природен број. Докажи дека равенката

$$\frac{x^p+y^p}{2}=\left(\frac{x+y}{2}\right)^m$$

во множеството природни броеви има решение $(x,y)\neq(1,1)$ ако и само ако $m=p$.

Решение. Јасно, ако $m=p$, тогаш дадената равенка има бесконечно многу решенија од видот $(x,x), x\in\mathbb{N}$.

Нека (x,y) е решение на равенката. Ако $x=y$, тогаш $x^p=x^m$, па затоа $m=p$. Затоа во натамошните разгледувања ќе сметаме дека $x\neq y$. Да забележиме дека од

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^m=\frac{x^p+y^p}{2}>\left(\frac{x+y}{2}\right)^p$$

следува $m>p$.

Нека $\mathrm{NZD}(x,y)=d$, $x=du$ и $y=dv$, каде $\mathrm{NZD}(u,v)=1$. Заменуваме во равенката и добиваме

$$u^p+v^p=2d^{m-p}\left(\frac{u+v}{2}\right)^m. \tag{1}$$

Ако u и v се со различна парност, тогаш $(u+v)^m$ е делител на u^p+v^p, што не е можно, бидејќи $(u+v)^m>(u+v)^p\geq u^p+v^p$. Според тоа, u и v се непарни броеви. Нека $u+v=2^a t$, каде a е природен број и t е непарен број. Да забележиме дека $\mathrm{NZD}(t,u)=\mathrm{NZD}(t,v)=1$. За $p=2$ имаме $u^2+v^2\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$, а кога p е непарен прост број имаме

$$u^p+v^p=(2^a t-v)+v^p=2^a t[(2^a t)^{p-1}-\binom{p}{1}(2^a t)^{p-2}v+\ldots-2^a tv^{p-2}\binom{p}{p-2}+pv^{p-1}],$$

каде pv^{p-1} е непарен број, а сите собирци освен него во средната заграда се парни броеви. Според тоа, ако $p>2$, тогаш највисокиот степен на 2 кој е делител на u^p+v^p е 2^a, а ако $p=2$, тогаш е 2. Но десната страна на (1) се дели барем со $2^{1+(m-1)a}$. Затоа $1+(m-1)a \le a$, а тоа е можно само за $a=1$. Добивме $u+v=2t$, каде t е непарен број, при што очигледно $t\ge 3$. Сега равенката (1) го добива видот

$$(2t-v)^p+v^p=2d^{m-p}t^m.$$

За $p=2$ имаме $t\,|\,2v^2$, што не е можно бидејќи $\mathrm{NZD}(t,v)=1$. Ако p е непарен прост број, добиваме

$$2^p t^{p-1}-\tbinom{p}{1}2^{p-1}t^{p-2}v+...-\tbinom{p}{p-2}4tv^{p-2}+2pv^{p-1}=2d^{m-p}t^{m-1},$$

од каде следува дека $t\,|\,p$, т.е. $t=p$. Но, сега сите членови со исключок на $2pv^{p-1}$ се делат со p^2, што не е можно.

Според тоа, равенката нема решенија за кои $x\ne y$, со што тврдењето е докажано.

9. Определи ги сите природни броеви n за кои равенката

$$(x+y)(y+z)(z+x)=2^n$$

а) има решение во множеството природни броеву;

б) има решешение во множеството природни броеви такво што броевите x, y, z се различни.

Решение. Нека $x\le y\le z$. Според условот на задачата, секој од броевите $x+y,\ x+z,\ y+z$ е степен на бројот 2. Бидејќи $z+x\le z+y<2(z+x)$, мора да важи $x=y$.

Сега имаме $x+y=2x=2^k$ и $x+z=2^l$ за некои $k,\ l\in\mathbb{N},\ k\le l$, па затоа

$$(x+y)(x+z)(y+z)=2^{k+2l},$$

т.е. $n=k+2l$. Вакви k и l постојат за $n=3$ и $n>5$.

Добивме дека $x=y$. Значи, нема решенија со различно x, y, z.

10. Определи ги сите парови природни броеви a и b такви што

$$\mathrm{NZS}(a+1,b+1)=a^2-b^2.$$

Решение. Нека $a+1=dx$ и $b+1=dy$, каде d, x, y се природни броеви, $x>y$ и $\mathrm{NZD}(x,y)=1$. Тогаш

$$\mathrm{NZS}(a+1,b+1)=dxy=(dx-1)^2-(dy-1)^2=d(x-y)(dx+dy-2)$$

и затоа

$$dx+dy-2=\frac{xy}{x-y}.$$

Бидејќи $x-y$ е заемно прост и со x и со y, мора да важи $x-y=1$. Значи,

$$d(2x-1)-2=x(x-1),$$

од каде добиваме дека важи

$$2x-1\,|\,x^2-x+2\,|\,(2x-1)^2+7.$$

Значи, $2x-1|7$, т.е. $x=1$ или $x=4$. Првата можност очигледно отпаѓа, а од втората добиваме $d=2$ и $(a,b)=(7,5)$.

11. Определи ги сите позитивни цели броеви u, v, w за кои:

1) $14w^2=4uv-5(u+v)w$;

2) $u-v=2p$, каде што p е некој прост број;

3) Ниту еден од броевите $9w+1$, $18w+4$ не е точен квадрат.

Решение. Бидејќи $u-v$ е парен, следува $u+v=(u-v)+2v$ е парен. Да ставиме $u+v=2q$. Тогаш добиваме $u=p+q$, $v=q-p$, па до 1) добиваме

$$2p^2=(2q-7w)(q+w).$$

i) Ако w е парен, т.е. $w=2w_1$, следува $p^2=(q-7w_1)(q+2w_1)$, и тогаш:

- ако $q-7w_1=1$, $q+2w_1=p^2$, тогаш

$$9w_1+1=p^2 \text{ и } 18w+4=18\cdot 2w_1+4=4(9w_1+1)=4p^2=(2p)^2,$$

што според 3) не е можно;

- ако $q-7w_1=p$, $q+2w_1=p$, тогаш $9w_1=0$, од што следува дека $w_1=0$, т.е. $w=0$ што не е можно заради позитивноста на броевите;

- ако $q-7w_1=p^2$, $q+2w_1=1$, тогаш $9w_1=-p^2+1<0$, па $w_1<0$, што повторно не е можно.

ii) Ако $w=2w_1-1$, тогаш од $2p^2=(2q-7w)(q+w)$ добиваме дека и q е непарен, т.е. $q=2q_1-1$ па $p^2=(4q_1-14w_1+5)(q_1+w_1-1)$. Сега имаме:

- ако $4q_1-14w_1+5=1$, $q_1+w_1-1=p^2$ добиваме $9w_1-4=2p^2$ и оттука

$$9w+1=9(2w_1-1)+1=2(9w_1-4)=2\cdot 2p^2=(2p)^2;$$

- ако $4q_1-14w_1+5=p^2$ и $q_1+w_1-1=1$ слично се добива контрадикција.

- останува случајот $4q_1-14w_1+5=p$ и $q_1+w_1-1=p$. Од тие две равенки добиваме $q_1=5w_1-2$, па заменувајќи во $4q_1-14w_1+5=p$ добиваме $6w_1-3=p$. Левата страна е делива со три а десната е прост број. Единствено е можно $w_1=1$ и $p=3$. Натаму $w=1$, $u=8$ и $v=2$. За овие броеви $9w+1=10$ и $18w+4=22$ не се точни квадрати.

12. Во множеството цели броеви реши ја равенката

$$x^4+2y^4+4z^4+8t^4=16xyzt.$$

Решение. Јасно е дека $(0,0,0,0)$ е решение на равенката. Ќе покажеме дека ненулто решение на равенката не постои. Нека претпоставиме спротивно односно нека $(x_\circ,y_\circ,z_\circ,t_\circ)$ е решение на равенката со барем една ненулта координата. $y_0^4+2z_0^4+4t_0^4+8x_1^4=16x_1y_0z_0t_0$ Јасно е дека x_0 е делив со 2. Па го запишуваме од облик $x_0=2x_1$ за некој $x_1\in\mathbb{Z}$ и заменуваме во првата равенка при што по кратењето со 2 ја добиваме равенката $y_0^4+2z_0^4+4t_0^4+8x_1^4=16x_1y_0z_0t_0$. Сега, бројот y_0 е делив со 2 па $y_0 = 2y_1$ за некој $y_1 \in \mathbb{Z}$. Повторно заменуваме во последната равенка и кратиме со 2 при што добиваме . Аналогно, бројот z_0 е делив со 2, па $z_0 = 2z_1$, за $z_1 \in \mathbb{Z}$. Заменуваме во последната равенка и кратиме со 2 после што добиваме равенка $t_0^4 + 2x_1^4 + 4y_1^4 + 8z_1^4 = 16x_1y_1z_1t_0$. Бројот t_0 е делив со 2 односно $t_0 = 2t_1$ за $t_1 \in \mathbb{Z}$. После заменувањето и кратењето со 2 ја добиваме равенката $x_1^4 + 2y_1^4 + 4z_1^4 + 8t_1^4 = 16x_1y_1z_1t_1$. Добиваме дека четворката (x_1, y_1, z_1, t_1) е исто така решение на првата равенка. Аналогно продолжувајќи ја постапката добиваме четворки целобројни решенија на првата равенка (x_2, y_2, z_2, t_2), (x_3, y_3, z_3, t_3) ,... при што во $4n$-тиот чекор $(x_n, y_n, z_n, t_n) = (\frac{x_0}{2^n}, \frac{y_0}{2^n}, \frac{z_0}{2^n}, \frac{t_0}{2^n})$, што е контрадикција со целобројноста на добиените решенија.

Значи единствено решение е $(0,0,0,0)$.

13. Да се определат сите природни броеви x, y и z за кои

$$1 + 2^x 3^y = z^2.$$

Решение. Лесно се проверува дека за $z = 1,2,3$ дадената равенка нема решение.

Нека $z \geq 4$. Имаме $2^x 3^y = (z-1)(z+1)$. Најмногу еден од $z-1$ и $z+1$ е делив со 3, бидејќи ако $3 \mid z-1$ и $3 \mid z+1$ следува дека $3 \mid (z+1)-(z-1) = 2$, што не е можно. Исто така бидејќи $2 \mid (z-1)(z+1)$ добиваме дека и $z-1$ и $z+1$ се деливи со 2 и само еден од нив може да е делив со 4, бидејќи ако $4 \mid z-1$ и $4 \mid z+1$ следува дека $4 \mid (z+1)-(z-1) = 2$, што не е можно.

Поради ова ги имаме следниве случаи:

1° $z+1 = 2\cdot 3^y$, $z-1 = 2^{x-1}$ и

2° $z+1 = 2^{x-1}$, $z-1 = 2\cdot 3^y$.

Случај 1° Нека $z+1 = 2\cdot 3^y$, $z-1 = 2^{x-1}$. Со одземање на дадените равенки имаме

$$2\cdot 3^y - 2^{x-1} = 2 \text{ т.е. } 3^y - 2^{x-2} = 1.$$

За $x = 2$ лесно се проверува дека дадената равенка нема решение.

За $x = 3$ имаме $3^y = 1+2 = 3$ т.е. $y = 1$ и лесно се добива $z = 5$.

Значи едно решение е $(x, y, z) = (3,1,5)$.

Ако $x \geq 4$, имаме $3^y \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ па следува дека y е парен т.е. $y = 2y_1$, $y_1 \in \mathbb{N}$. Сега имаме

$$3^{2y_1} - 1 = 2^{x-2} \text{ т.е. } (3^{y_1} - 1)(3^{y_1} + 1) = 2^{x-2},$$

од каде лесно се добива дека $3^{y_1} - 1 = 2$ и $3^{y_1} + 1 = 2^{x-3}$ т.е. т.е. $y_1 = 1$ односно $y = 2$, сега лесно се добива дека $x = 5$ и $z = 17$.

Значи решение е $(x, y, z) = (5,2,17)$.

Случај 2° Нека $z+1 = 2^{x-1}$, $z-1 = 2\cdot 3^y$ тогаш $2^{x-1} - 2\cdot 3^y = 2$, т.е.

$$2^{x-2}-3^{y}=1.$$

За $y=1$ имаме $x=4$ и $z=7$, па решение е $(x,y,z)=(4,1,7)$.

Ако $y\geq 2$ тогаш имаме $2^{x-2}\equiv 1(\mathrm{mod}\,3)$ т.е. $x-2$ мора да е парен број па нека $x-2=2x_1$.Па имаме $3^y=2^{2x_1}-1=(2^{x_1}-1)(2^{x_1}+1)$, од каде следува дека $2^{x_1}-1=1$ или 3. Ако $2^{x_1}-1=1$ добиваме $x_1=1$ т.е. $x=4$, па го добиваме решението $(4,1,7)$.

Ако $2^{x_1}-1=3$ следува $x_1=2$ т.е. $x=6$ и добиваме $3^y=15$, што не е можно.

Значи решенија на дадената равенка се $(x,y,z)=(3,1,5),(5,2,17),(4,1,7)$.

14. Нека $p\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$ е прост број. Нека N е бројот на правоаголниците со плоштина $2p^2$, чии темиња имаат целобројни координати (x,y) за кои важи $0\leq x,y\leq 2p^2$. Определи го остатокот од делењето на бројот N со бројот p.

Решение. Прво ќе го определиме бројот на правоаголниците со страни паралелни со координатните оски. Очигледно, бројот на правоаголниците со страни со должини a и b, кои се паралелни со координатните оски и чии темиња имаат целобројни координати (x,y), за кои важи $0\leq x,y\leq 2p^2$ е

$$(2p^2-a+1)(2p^2-b+1)\equiv(a-1)(b-1)\ (\mathrm{mod}\,p).$$

Правоаголници со плоштина $2p^2$ имаат страни $2p^2\times 1,\ p^2\times 2,\ 2p\times p,\ p\times 2p,\ 2\times p^2,\ 1\times 2p^2$. Според тоа, ако нивниот број е K, тогаш $K\equiv 0(\mathrm{mod}\,p)$.

Сега ќе го определиме бројот L на правоаголниците чии страни не се паралелни со координатните оски. Да разгледаме три последователни темиња на таков правоаголник, кои имаат координати $(0,a),(b,0),(b+c,d)$. Очигледно,

$$c=ka,\ d=kb \text{ и } k(a^2+b^2)=2p^2$$

за некој цел број k (зошто k е цел број?). Решенијата на оваа равенка се $k=1, a=b=p$ и $k=p^2, a=b=1$.

Во првиот случај имаме квадрат со страна $\sqrt{2}p$ и неговата положба е еднозначно определена од опишаниот околу него квадрат со страна $2p$. За второто решение имаме два правоаголника со плоштина $2p^2$, впишани во квадрат со страна p^2+1. Според тоа, за L добиваме

$$L\equiv(2p-1)^2+2p^4\equiv 1(\mathrm{mod}\,p).$$

Конечно, $N=K+L\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$.

15. Определи ги сите тројки природни броеви (a,b,c) такви што секој од броевите

$$ab-c,\ bc-a,\ ca-b$$

е степен на бројот 2.

Решение. Нека претпоставиме дека $a=b$. Тогаш $b(c-1)$ и b^2-c се степени на бројот 2, па затоа $b=2^k$ и $c=2^l+1$ за некои $k,l\in\mathbb{N}_0$ и $b^2-c=2^{2k}-2^l-1$ е степен на бројот 2, што е можно единствено за $k=1$ и $l\in\{0,1\}$. Одовде ги добиваме решенијата $(2,2,2)$ и $(2,2,3)$.

Понатаму, заради симетрија можеме да сметаме дека $a<b<c$. Јасно е дека мора да биде $a>1$. Да означиме $bc-a=2^\alpha, ca-b=2^\beta$ и $ab-c=2^\gamma$. Тогаш $\alpha>\beta>\gamma$.

Броевите $2^\alpha+2^\beta=(c-1)(b+a)$ и $2^\alpha-2^\beta=(c+1)(b-a)$ се деливи со 2^β. Но, барем еден од броевите $c\pm1$ не е делив со 4, па затоа $2(a+b)$ или $2(a-b)$ е делив со 2^β. Според тоа, $2^\beta=ca-b\le 2(a+b)$, т.е. $a(b+1)\le ac\le 2a+3b<a+4b$, па затоа $ab<4b$, т.е. $a<4$.

1) Нека $a=3$. Претходно видовме дека 2^β е делител на $2(b+3)$ или на $2(b-3)$. Но, $2^\beta=3c-b>\max\{2(b-3),b+3\}$, па единствена можност е $3c-b=2(b+3)$, т.е. $c=b+2$. Сега $2^\alpha=bc-a=(b-1)(b+3)$, што значи дека $b-1$ и $b+3$ се степени на бројот 2 чија разлика е еднаква на 4. Оттука следува дека $b=5$, што го дава решението $(3,5,7)$.
2) Нека $a=2$. Имаме $2c-b=2^\beta$ и $2b-c=2^\gamma$. Ако $\gamma>0$, тогаш броевите b и c се парни, па затоа $2c-b$ не е делив со 4, што не е можно. Според тоа, $\gamma=0$ и $c=2b-1$. Од $2^\beta=2c-b=3b-2$ следува $b=\frac{2^\beta+2}{3}$ и $2^\alpha=b(2b-1)-2=\frac{2^{2\beta+1}+5\cdot2^\beta-16}{9}$. Ако $\beta>4$, последниот израз не е делив со 2^5, па затоа не е делив со 2^α, што е противречност. Според тоа, $\beta\le4$. Со проверка на можните случаи го добиваме решението $(2,6,11)$.

Конечно, решенија на задачата се подредените тројки $(2,2,2)$, $(2,2,3)$, $(2,6,11)$ и $(3,5,7)$ и нивните пермутации.

16. Во множеството цели броеви реши ја равенката $2x^2-y^{14}=1$.

Решение. *Лема* 1. Ако $n>1$ е природен број, тогаш бројот

$$n^6-n^5+n^4-n^3+n^2-n+1$$

не е точен квадрат.

Доказ. Ако допуштиме дека бројот $n^6-n^5+n^4-n^3+n^2-n+1$ е точен квадрат, тогаш и бројот

$$\begin{aligned}256(n+1)^2(n^6-n^5+n^4-n^3+n^2-n+1)&=256(n+1)(n^7+1)\\&=256(n^8+n^7+n+1)\end{aligned}$$

треба да е точен квадрат. Ќе докажеме дека последното не е можно, т.е. ќе докажеме дека брјот $256(n^8+n^7+n+1)$ се наоѓа меѓу два последователни точни квадрати. Имено, за $n \geq 3$ важи

$$(16n^4 + 8n^3 - 2n^2 + n - 1)^2 < 256(n^8 + n^7 + n + 1) < (16n^4 + 8n^3 - 2n^2 + n)^2,$$

што непосредно се проверува со ослободување од заградите. Навистина левото неравенство е еквивалентно со $12n^4 + 20n^3 - 5n^2 + 254n + 255 > 0$, за чија точност доволно е да забележиме дека $12n^4 - 5n^2 > 10n^4 - 5n^2 = 5n^2(2n^2 - 1) > 0$ n е природен број (останатите собирци се позитивни). Десното неравенство е еквивалентно со неравенството $20n^4 - 4n^3 + n^2 - 256n - 256 > 0$ и е доволно да докажеме дека $20n^4 - 4n^3 - 256n - 256 > 0$, т.е. $5n^4 - n^3 - 64n - 64 > 0$. Бидејќи $n^4 - n^3 > 0$, останува да провериме дека важи неравенството $4n^4 - 64n - 64 > 0$ т.е. неравенството $n^4 - 16n - 16 > 0$. Лесно се докажува дека е исполнето последното неравенство, на пример, со индукција по $n \geq 3$.

Сега за да го комплетираме доказот на тврдењето доволно е да забележиме дека за $n = 2$ важи $n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1 = 43$. ■

Лема 2. Ако n е природен број, тогаш најголемиот заеднички делител на $n+1$ и $n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1$ е еднаков на 1 или 7.

Доказ. Очигледно изразот

$$n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1 - 7 = n^6 - 1 + n^5 - 1 + n^4 - 1 - (n^3 + 1) + n^2 - 1 - (n+1)$$

е делив со $n+1$. Оттука непосредно следува дека ако

$$d = \text{NZD}(n+1, n^6 - n^5 + n^4 - n^3 + n^2 - n + 1),$$

тогаш $d \,|\, 7$. ■

Нека (x, y) е решение на задачата. Тогаш

$$2x^2 = y^{14} + 1 = (y^2)^7 + 1 = (y^2 + 1)(y^{12} - y^{10} + y^8 - y^6 + y^4 - y^2 + 1).$$

Бидејќи $y^2 + 1$ не е делив со 7, од лема 2 следува дека

$$\text{NZD}(y^2 + 1, y^{12} - y^{10} + y^8 - y^6 + y^4 - y^2 + 1) = 1.$$

Од друга страна бројот $y^{12} - y^{10} + y^8 - y^6 + y^4 - y^2 + 1$ е непарен и затоа треба да постојат природни броеви u и v такви што

$$y^2 + 1 = 2u^2 \text{ и } y^{12} - y^{10} + y^8 - y^6 + y^4 - y^2 + 1 = v^2.$$

Сега од лема 1 следува дека $y = 1$, па затоа и $x = 1$.

Според тоа, единствено решение на задачата е $(x, y) = (1, 1)$.

17. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^2 - 2y^2 = 1.$$

Решение. Со проверка се добива дека $(3, 2)$ е најмало можно решение на равенката на Пел $x^2 - 2y^2 = 1$. Според тоа, за сите решенија на дадената равенка имаме

$$(x_n, y_n) = \left(\frac{(3+2\sqrt{2})^n + (3-2\sqrt{2})^n}{2}, \frac{(3+2\sqrt{2})^n - (3-2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}\right).$$

18. Докажи дека постојат бесконечно многу тројки од последователни цели броеви такви што секој од нов е збир од два квадрати.

Решение. Првата таква тројка се броевите

$$8 = 2^2 + 2^2,\ 9 = 3^2 + 0^2 \text{ и } 10 = 3^2 + 1^2.$$

Ќе ја разгледаме тројката последователни броеви $x^2 - 1, x^2$ и $x^2 + 1$. Бидејќи равенката на Пел $x^2 - 2y^2 = 1$ во множеството природни броеви бесконечно многу решенија (x, y) следува дека броевите

$$x^2 - 1 = y^2 + y^2, x^2 = x^2 + 0^2, x^2 + 1 = x^2 + 1^2$$

се бесконечно многу тројки од последователни цели броеви за кои важи условот на задачата.

19. Најди ги сите природни броеви n така што важи

$$\binom{n}{k-1} = 2\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

за некој природен број $k < n.$

Решение. Дадената равенка последователно е еквивалентна на равеките

$$\frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} = \frac{2n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!}$$

$$k(k+1) = 2(n-k+1)(k+1) + (n-k)(n-k+1)$$

$$n^2 + 3n + 2 = 2k^2 + 2k$$

$$(2n+3)^2 - 2(2k+1)^2 = -1.$$

Последнта равенка со смената $2n + 3 = x$ и $2k + 1 = y$ се сведува на равенката на Пел $x^2 - 2y^2 = -1$. Најмалото решение на оваа равенка е парот $(a,b) = (1,1)$. Оттука добиваме

$$(x_i, y_i) = \left(\tfrac{(1+\sqrt{2})^i + (1-\sqrt{2})^i}{2}, \tfrac{(1+\sqrt{2})^i - (1-\sqrt{2})^i}{2\sqrt{2}}\right), i = 1, 2, ...$$

Лесно се докажува дека x_i и y_i се непарни броеви. Конечно, $2n + 3 = x_i$, т.е. $n = \frac{x_i - 3}{2}, i = 1, 2, ...$

20. Докажи дека ако $m = 2 + 2\sqrt{28n^2 + 1}$ е цел број за некој природен број $n,$ тогаш m е точен квадрат.

Решение. Даденото равенство е еквивалентно на равенството

$$(m-2)^2 = 4(28n^2 + 1),$$

т.е. на равенството

$$\left(\tfrac{m-2}{2}\right)^2 - 28n^2 = 1.$$

Значи парот $(\frac{m-2}{2}, n)$ е решение на равенката на Пел $x^2 - 28y^2 = 1$. Лесно се проверува дека $(127, 24)$ е најмалото решение на последната равенка. Според тоа, сите вредности на m се дадени со

$$m = 2 + (127 + 24\sqrt{28})^k + (127 - 24\sqrt{28})^k = ((8 + 3\sqrt{7})^k + (8 - 3\sqrt{7})^k)^2,\ k = 1, 2, ...$$

што значи дека m е точен квадрат.

21. Определи го најмалиот непарен природен број $a>5$ за кој постојат природни броеви m_1, m_2, n_1 и n_2 такви што

$$a=m_1^2+n_1^2,\ a^2=m_2^2+n_2^2 \text{ и } m_1-n_1=m_2-n_2. \tag{1}$$

Решение. Од $261=15^2+6^2, 261^2=189^2+180^2$ и $15-6=189-180$ следува дека бројот 261 ги задоволува условите (1). Ќе докажемедека тоа е најмалиот непарен природен број кој ги задоволува условите (1). Нека претпоставиме дека $a<261$ исто така ги задоволува условите (1). Бидејќи $a=m_1^2+n_1^2$ е непарен број, заклучуваме дека m_1 и n_1 се со различна парност. Според тоа, $d=m_1-n_1$ е непарен број. Освен тоа, од $d<m_1<\sqrt{a}<\sqrt{261}=17$ следува дека можни вредности за d се $d=1,3,5,7,9,11,13,15$.

Имаме $m_2=n_2+d$, па затоа $a^2=(n_2+d)^2+n_2^2$, од каде следува

$$2a^2-d^2=(2n_2+d)^2. \tag{2}$$

Ако $d=1$, тогаш равенката (2) е равенка на Пел $x^2-2y^2=-1$, каде $(x,y)=(2n_2+1,a)$. Оваа равенка на Пел има минимално решение $(a,y)=(1,1)$ и $x+y\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^{2k-1}$, каде $k\in\mathbb{N}$. Според тоа, вредностите на y, т.е. на a, кои се решенија на оваа равенка се 5, 29, 169, 985, ... Значи, можни вредности на a се 29 и 169. Лесно се проверува дека 29 и 169 не може да се претстават во облик $(n_1+1)^2+n_1^2$. Значи, $d\neq 1$.

Ако $d=7$, тогаш од $(n_1+7)^2+n_1^2=a<261$ следува дека $n_1<8$. Сега $m_1=n_1+7$, па соодветните можни вредности за a се 65, 85, 109, 137, 169, 205 и 245. Понатаму, равенката (2) го добива обликот $2a^2-49=(2n_2+7)^2$ и со непосредна проверка се добива дека за $a=65,85,109,137,169,205,245$ последната равенка нема решение. Значи, $d\neq 7$.

Аналогно се покажува дека останатите вредности за d не се можни.

Конечно, бараната вредност е $a=261$.

22. Нека n е природен број. Докажи, дека постојат бесконечно многу тројки по парови заемно прости броеви (x,y,z) такви што е исполнето равенството

$$nx^2+y^3=z^4.$$

Решение. Имаме $y^3=z^4-nx^2=(z^2-x\sqrt{n})(z^2+x\sqrt{n})$ и ако земеме $y=s^2-nt^2$, $\text{NZD}(n,t)=1$, добиваме

$$\begin{aligned} y^3 &= (s-t\sqrt{n})^3(s+t\sqrt{n})^3 \\ &= (s^3-3s^2t\sqrt{n}+3nst^2-nt^3\sqrt{n})(s^3+3s^2t\sqrt{n}+3nst^2+nt^3\sqrt{n}) \\ &= (z^2-x\sqrt{n})(z^2+x\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Непосредно се проверува, дека $z^2 = s^3 + 3nst^2$ и $x = 3s^2t + nt^3$ го задоволуваат горното равенство. Бидејќи секогаш постои цел број $x = 3s^2t + nt^3$, останува да докажеме, дека постојат бесконечно z, кои го задоволуваат равенството

$$z^2 = s^3 + 3nst^2. \tag{1}$$

Случај 1. Ако $3n$ не е точен квадрат, да земеме $s = 1$. Тогаш (1) преминува во равенка на Пел $z^2 - 3nt^2 = 1$. Познато е дека оваа равенка има бесконечно многу решенија и ако (z_1, t_1) е решение со најмалата позитивна вредност на z_1 (следствено и на t_1), тогаш $k-$тото решение е дадено со

$$z_k + \sqrt{3n}t_k = (z_1 + \sqrt{3n}t_1)^k .$$

Лесно се проверува, дека ако k е парен, тогаш и t_k е парен. Останува да докажеме, дека постојат бесконечно многу парови (z_k, t_k), за кои броевите

$$x_k = 3t_k + nt_k^3,\ y_k = 1 - nt_k^2,\ z_k^2 = 1 + 3nt_k^2$$

за по парови заемно прости. Ќе ги разгледаме само парните вредности на t_k. Имаме

$$\begin{aligned}\mathrm{NZD}(x_k, z_k^2) &= \mathrm{NZD}(t_k(3 + nt_k^2), 1 + 3nt_k^2) = \mathrm{NZD}(3 + nt_k^2, 1 + 3nt_k^2)\\ &= \mathrm{NZD}(3 + nt_k^2, -8) = 1\end{aligned}$$

и аналогно

$$\mathrm{NZD}(y_k, z_k^2) = \mathrm{NZD}(1 - nt_k^2, 4) = 1 \text{ и } \mathrm{NZD}(x_k, y_k) = \mathrm{NZD}(4, 1 - nt_k^2) = 1 .$$

Случај 2. Ако $3n = m^2$ за некој природен број m, да зибереме $s = u^2$ и $z = uv$. Тогаш (1) го добива обликот $u^4 = v^2 - 3nt^2 = (v - mt)(v + mt)$. Непосредно се проверува дека за секој природен број k броевите

$$u_k = 2mk + 1, t_k = \tfrac{u_k^4 - 1}{m}, v_k = mt_k + 1$$

се решенија на последната равенка. Освен тоа u_k е непарен, а t_k е парен и важи $\mathrm{NZD}(t_k, v_k) = \mathrm{NZD}(t_k, mt_k + 1) = 1$. Останува да докажеме, дека за тројката

$$x_k = 3u_k^4 t_k + nt_k^3,\ y_k = u_k^4 - nt_k^2,\ z_k = u_k v_k = u_k(mt_k + 1)$$

која ја задоволува равенката од условот, важи

$$\mathrm{NZD}(x_k, y_k) = \mathrm{NZD}(y_k, z_k) = \mathrm{NZD}(z_k, x_k) = 1 .$$

Имаме

$$\begin{aligned}\mathrm{NZD}(x_k, y_k) &= \mathrm{NZD}(3u_k^4 t_k + nt_k^3, u_k^4 - nt_k^2) = \mathrm{NZD}(4u_k^4 t_k, u_k^4 - nt_k^2)\\ &= \mathrm{NZD}(4, u_k^4 - nt_k^2) = 1,\\ \mathrm{NZD}(y_k, z_k) &= \mathrm{NZD}(u_k^4 - nt_k^2, u_k v_k) = \mathrm{NZD}(u_k^4 - nt_k^2, 4nt_k^2)\\ &= \mathrm{NZD}(u_k^4 - nt_k^2, 4) = 1,\\ \mathrm{NZD}(z_k, x_k) &= \mathrm{NZD}(3u_k^4 t_k + nt_k^3, u_k v_k) = \mathrm{NZD}(3u_k^4 + nt_k^2, u_k v_k)\\ &= \mathrm{NZD}(3u_k^4 + nt_k^2, v_k) = \mathrm{NZD}(u_k^4 + 3nt_k^2, 8) = 1.\end{aligned}$$

Според тоа, постојат бесконечно многу тројки по парови заемно прости броеви (x, y, z) такви што е исполнето равенството $nx^2 + y^3 = z^4$.

23. Докажи дека ако n е ненегативен цел број таков што $2n+1$ и $3n+1$ се точни квадрати, тогаш n е делив со 40.

Решение. Нека постојат природни броеви a и b такви што $2n+1=a^2$ и $3n+1=b^2$. Според тоа, $a^2+b^2 \equiv 2(\bmod 5)$. Бидејќи за секој цел број x важи

$$x^2 \equiv \begin{cases} 0(\bmod 5), & x=5k \\ 1(\bmod 5), & x=5k\pm 1, \\ 4(\bmod 5), & x=5k\pm 2, \end{cases}$$

од

$$a^2+b^2 \equiv 2(\bmod 5)$$

следува

$$a^2 \equiv b^2 \equiv 1(\bmod 5).$$

Од $2n+1=a^2$ и последната конгруенција следува $2n=a^2-1\equiv 0(\bmod 5)$, па затоа $5\,|\,n$.

Од друга страна важи $3a^2-2b^2=1$, што значи дека a е непарен , па затоа можеме да вовдеме замени $a=u+2v$ и $b=u+3v$, со што последната равенка се ормира во равенката на Пел $u^2-6v^2=1$, која во множеството природни броеви има бесконечно многу решенија. Бидејќи a е непарен број земаме $a=2k+1$ и добиваме $n=2k(2k+1)$. Од $3n+1=b^2$ добиваме дека и b е непарен број, па затоа $b=4s\pm 1$. Според тоа, $3n=(4s\pm 1)^2-116s^2\pm 8s$, од каде следува дека $8\,|\,n$.

Конечно, од $5\,|\,n$, $8\,|\,n$ и $\mathrm{NZD}(5,8)=1$, следува $40\,|\,n$.

24. Определи ги сите тројки од последователни природни броеви кои се страни на триаголник чија плоштина е природен број.

Решение. Нека $a-1, a, a+1$ се должините на страните на триаолникот. Од Хероновата формула следува дека $P=\frac{a\sqrt{3(a^2-4)}}{4}$. Бидејќи P е природен број јасно е дека a мора да е парен број и $3(a^2-4)$ да е точен квадрат. Според тоа, постојат природни броеви m и n такви што $a=2m$ и $a^2-4=3n^2$. Значи, $4m^2-4=3n^2$, па оттука добиваме $n=2k$ и последнта равенка се сведува на равенка на Пел $m^2-3k^2=1$ со почетно решение $(m,k)=(2,1)$.

Според тоа, сите решенија на равенката се даде ни со

$$m_s=\frac{(2+\sqrt{3})^s+(2-\sqrt{3})^s}{2} \text{ и } k_s=\frac{(2+\sqrt{3})^s-(2-\sqrt{3})^s}{2\sqrt{3}}.$$

Значи, страните на триаголникот се $2m_s-1, 2m_s$ и $2m_s+1$.

3. КИНЕСКА ТЕОРЕМА ЗА ОСТАТОЦИ

1. Определи го најмалиот природен број a со следново својство: постои природен број n таков што бројот $17^n+87^n a$ е делив со 455.

Решение. Нека a и n се такви што $A=17^n+87^n a$ е делив со 455. Бидејќи $455=5\cdot 7\cdot 13$, одделно ќе го разгледаме A по модул 5, 7 и 13.

Имаме $0\equiv A\equiv 2^n+2^n a(\mathrm{mod}\,5)$, од каде следува $a\equiv -1(\mathrm{mod}\,5)$. Пнатаму од $0\equiv A\equiv 3^n+3^n a(\mathrm{mod}\,7)$ следува $a\equiv -1(\mathrm{mod}\,7)$, а од $0\equiv A\equiv 4^n+(-4)^n a(\mathrm{mod}\,13)$ следува $a\equiv (-1)^{n+1}(\mathrm{mod}\,13)$.

За n непарен број го добиваме системот $a\equiv -1(\mathrm{mod}\,5)$, $a\equiv -1(\mathrm{mod}\,7)$ и $a\equiv 1(\mathrm{mod}\,13)$, а за n парен го добиваме системот $a\equiv -1(\mathrm{mod}\,5)$, $a\equiv -1(\mathrm{mod}\,7)$ и $a\equiv -1(\mathrm{mod}\,13)$. Согласно Кинеската теорема за остатоци решенијата на овие два системи се $a\equiv 209(\mathrm{mod}\,455)$ за n непарен и $a\equiv 454(\mathrm{mod}\,455)$ за n парен. Според тоа, бараната вредност е $a=209$ и притоа имаме $455\,|\,17^n+209\cdot 87^n$, кога n е непарен, во случајов за $n=1$.

2. Дадени се n бесконечни аритметички прогресии $A_1,A_2,...,A_n$ од природни броеви со разлики $b_1,b_2,...,b_n$, соодветно. Ако $A_1\cup A_2\cup...\cup A_n=\mathbb{N}$, докажи дека некој од броевите $b_1,b_2,...,b_n$ е делител на најмалиот заеднички содржател на останатите броеви.

Решение. Нека претпоставиме дека секој од броевите $b_1,b_2,...,b_n$ не е делител на најмалиот заеднички содржател на останатите броеви. Тогаш за секој $i=1,2,...,n$ имаме $b_i>1$, при што постои прост број p_i чиј степен во каноничното разложување на b_i е поголем од степенот на p_i во каноничните разложувања на секој од останатотите броеви.

Ако $a_1,a_2,...,a_n$ се првите членови на дадените прогресии, тогаш од Кинеската теорема за остатоци следува дека постои природен број k таков што $k\equiv a_i+1(\mathrm{mod}\,p_i)$, за секој $i=1,2,...,n$. Тогаш $k\notin A_i$, за секој $i=1,2,...,n$, што е противречност.

3. За едно множество C од различни природни броеви ќе велиме дека е *добро* ако за секој цел број k постојат $a,b\in C,\,a\neq b$, такви што броевите $a+k$ и $b+k$ не се заемно прости. Докажи, дека ако збирот на елементите на C е еднаков на 2003, тогаш за некој $c\in C$ множеството $C\setminus\{c\}$ исто така е *добро* множество.

Решение. Нека $p_1,p_2,...,p_n$ се сите прости делители на сите можни разлики на два различни броја од C. Нека претпоставиме дека за секој број p_i постои остаток α_i, кој се среќава најмногу еднаш при делење на броевите од C со p_i. Согласно Кинеската теорема за остатоци можеме да најдеме цел број k, кој при делење со p_i дава остатот $-\alpha_i$, за секој i. Од условот следува дека p_j е делител на $a+k$ и $b+k$ за некој j и некои $a,b\in C$. Тогаш a и b при делење со p_j даваат остаток α_j, што е противречност. Според тоа, броевите од C барем двапати го даваат секој остаток при делење со некој прост број p. Ако претпоставиме дека тие остатоци се среќаваат точно по двапати, тогаш збирот на броевите од C ќе има вид

$$pr+2(0+1+2+...+p-1)=p(r+p-1),\ r\ge 1$$

што не е можно, бидејќи 2003 е прост број. Според тоа, некој остаток се среќава барем трипати и ако од C отстраниме било кој број кој го дава тој остаток, тогаш повторно добиваме добро множество.

4. Определи ги сите вредности функцијата $f(x,y)=7x^2+5y^3$, $x,y\in\mathbb{Z}$ кои припаѓаат на интервалот $[2000,2012]$.

Решение. Нека $f(x,y)=k\in[2000,2012]$ за некои цели броеви x и y. Ако $5\,|\,x$, тогаш $5\,|\,k$ и ако $7\,|\,y$, тогаш $7\,|\,k$. Ако $\text{NZD}(5,x)=\text{NZD}(7,y)=1$, тогаш $k\equiv 7x^2\equiv\pm 2(\text{mod}\,5)$ и $k\equiv 5y^3\equiv\pm 2(\text{mod}\,7)$. Од Кинеската теорема за остатоци следува дека имаме четири можности за k по модул 35, но само една од нив, 2007, е во разгледуваниот интервал.

Сега имаме 6 можности за k и тоа: 2000, 2002, 2005, 2009, 2010 и 2007. Притоа важи $7\cdot 21^2+5(-6)^2=2007$. Ќе докажеме дека останатите случаи не се реализираат.

Ако $7x^2+5y^3=2000$, тогаш $5\,|\,x$, па затоа $5\,|\,y$, од што следува дека $5^3\,|\,7x^2$, што доведува до противречност по модул 5^4. Ако $7x^2+5y^3=2005$ или 2010, тогаш $x=5a,\ a\in\mathbb{Z}$ и добиваме $35a^2+y^3=401$ или 402, што не е можно по модул 7. Ако $7x^2+5y^3=2009$, тогаш $7\,|\,y$, па затоа $7\,|\,x$ и тогаш имаме противречност по модул 7^3. Ако $7x^2+5y^3=2002$, тогаш $y=7b,\ b\in\mathbb{Z}$ и $x^2+5\cdot 49y^3=286$, што не е можно по модул 7.

5. Определи го бројот на подредените шесторки (a,b,c,a',b',c') такви што

$$ab+a'b'\equiv bc+b'c'\equiv ca+c'a'(\text{mod}\,15)$$

и $a,b,c,a',b',c'\in\{1,2,3,...,14\}$.

Решение. За секој цел број k со N_k да го означиме бројот на подредените шесторки (a,b,c,a',b',c'), за кои

$$ab+a'b'\equiv bc+b'c'\equiv ca+c'a'(\text{mod}\,k)$$

и $a,b,c,a',b',c'\in\{1,2,3,...,k-1\}$. Од Кинеската теорема за остатоци следува, дека $N_{mn}=N_mN_m$, кога $\text{NZD}(m,n)=1$. Според тоа, доволно е да ги определиме N_3 и N_5. Всушност ќе го определиме N_p за секој прост број p. За секое решение (a,b,a',b') на конгруенцијата $ab+a'b'\equiv 1(\text{mod}\,p)$ ќе го пресметаме бројот на решенијата на системот

$$bc+b'c' \equiv ca+c'a'(\mathrm{mod}\, p)\,. \qquad (*)$$

Разгледуваме три случаи.

Прв случај. Нека $\mathrm{NZD}(1,a') \not\equiv t\,\mathrm{NZD}(b,b')(\mathrm{mod}\, p)$ за секој $t \in \{1,2,...,p-1\}$. Тогаш системот (*) има единствено решение

$$c \equiv \frac{a'-b'}{a'b-b'a}(\mathrm{mod}\, p) \text{ и } c' \equiv \frac{a-b}{ab'-ba'}(\mathrm{mod}\, p)\,.$$

Втор случај. Нека $\mathrm{NZD}(1,a') \equiv t\,\mathrm{NZD}(b,b')(\mathrm{mod}\, p)$, за некој $t \neq 1$. Тогаш системот (*) нема решение.

Трет случај. Нека $\mathrm{NZD}(1,a') \equiv \mathrm{NZD}(b,b')(\mathrm{mod}\, p)$. Системот (*) се сведува на равенката $bc+b'c' \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$. Бидејќи $bc+b'c' \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$, можеме да земеме дека $b \neq 0$. Според тоа, при секој избор на c' имаме единствен избор за $c \equiv \frac{1-b'c'}{b}(\mathrm{mod}\, p)$. Тоа значи дека системот (*) има точно p репенија.

Со T_p да го означиме бројот на подредени четворки (a,b,a',b') за кои важи

$$ab+a'b' \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$$

и $a,b,a',b' \in \{0,1,2,3,...,p-1\}$. За секој подреден пар $(a,a') \neq (0,0)$ постојат точно p парови (b,b') кои ја задоволуваат равенката. Според тоа, $T_p = p(p^2-1)$.

6. Даден е природен број a. Докажи, дека

а) за секој прост број p постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $p \mid a^n+n$,

б) за секој прост број p постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $p^2 \mid a^n+n$.

Решение. Очигледно а) следува од б), но ќе дадеме одделни докази за двете тврдења. Јасно, ако $p \mid a$, тогаш доволно е да ги земеме природните броеви n кои се деливи со p^2, а такви има бесконечно многу.

а) Малата теорема на Ферма дава идеја да бараме n таков што се исполнети конгруенциите

$$n \equiv 0(\mathrm{mod}\, p-1) \text{ и } n \equiv -1(\mathrm{mod}\, p)\,,$$

бидејќи тогаш важи

$$a^n \equiv 1(\mathrm{mod}\, p) \text{ и } n \equiv -1(\mathrm{mod}\, p)\,,$$

па затоа $a^n+n \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$. Од Кинеската теорема за остатоци следува дека постојат бесконечно многу такви броеви n. Од $n \equiv 0(\mathrm{mod}\, p-1)$ следува $n = s(p-1)$ и тогаш од $n \equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$ добиваме $s \equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$, т.е. $s = kp+1$. Според тоа, $n = (p-1)(kp+1),\, k \geq 0$ е цел број.

б) Ако ја искористиме теоремата на Ојлер за

$$a^{\varphi(p^2)} \equiv 1(\mathrm{mod}\, p^2),\ \varphi(p^2) = p(p-1)$$

за најдените вредности во а) добиваме

$$a^n+n = a^{kp(p-1)}a^{p-1}+kp^2-kp+p-1 \equiv a^{p-1}-kp+p-1(\mathrm{mod}\, p^2)\,.$$

Според тоа, доволно е да избереме k таков што $k \equiv \frac{a^{p-1}-1}{p}+1 (\bmod p)$ и да добиеме $a^n + n \equiv 0 (\bmod p^2)$.

7. Даден е природен број $n \geq 3$. Докажи, дека постои природен број m кој припаѓа на интервалот $(\sqrt[4]{5}n, \frac{n^4+4}{2})$ таков што n^4+4 е делител на m^4+4.

Решение. За бројот $x \in [1, n^4+4]$ ќе велиме дека е *добар* ако $\frac{x^4+4}{n^4+4}$ е цел број. Лесно се докажува дека:

1) Ако x е добар број, тогаш n^4+4-x исто така е добар број.

2) Ако $x > n$ е добар број, тогаш $\frac{x^4+4}{n^4+4} \geq 5$. Ако $x^4+4 = 2(n^4+4)$, ќе добиеме дека n е парен број; ако $x^4+4 = 3(n^4+4)$ ќе добиеме противречност по модул 3 и ако $x^4+4 = 4(n^4+4)$ ќе добиеме за $x = 2a$ дека $(2a^2 - n^2)(2a^2 + n^2) = 3$, што е можно само за $a = n = 1$.

Имаме $n^4 + 4 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$. Да ставиме

$$a = n^2 - 2n + 2 \text{ и } b = n^2 + 2n + 2,$$

при што $n^4 + 4 = ab$ и $a > 1, b > 1$ се непарни заемно прости броеви.

Согасно Кинеската теорема за остатоци постои природен број $x \in [1, n^4+4]$ таков што

$$x \equiv n (\bmod a) \text{ и } x \equiv -n (\bmod b).$$

Тогаш n^4+4 е делител на $(x^4+4)-(n^4+4)$, па затоа x е добар број.

Лесно се гледа дека случаите $x = n$ и $x = n^4 - n + 4$ доведуваат до противречност. Освен тоа $x < n$ не е можно, а од 1) следува дека $x < n^4 - n + 4$.

Ако претпоставиме дека $x \geq \frac{n^4+4}{2}$, тогаш $x' = n^4 + 4 - x$ е добар број, за кој $x' < \frac{n^4+4}{2}$ (бидејќи $\frac{n^4+4}{2}$ не е цел број). Според тоа, можеме да сметаме, дека $x < \frac{n^4+4}{2}$. Ако $x \leq \sqrt[4]{5}n$, тогаш од 2) следува дека $5n^4 + 4 \geq x^4 + 4 \geq 5n^4 + 20$, што е противречност. Според тоа, $x \in (\sqrt[4]{5}n, \frac{n^4+4}{2})$.

8. Дадени се по парови различни природни броеви $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ такви што за секој природен број n бројот $(n+1)a_1^n + na_2^n + (n-1)a_3^n$ е делител на $(n+1)b_1^n + nb_2^n + (n-1)b_3^n$. Докажи, дека постои $k \in \mathbb{N}$ таков што $b_i = ka_i$, за $i = 1, 2, 3$.

Решение. Нека r е произволен природен број и p е прост број таков што

$$p > (a_1^r + a_2^r + a_3^r)(b_1^r + b_2^r + b_3^r).$$

Бидејќи p е прост број важи $\mathrm{NZD}(p, a_1^r + a_2^r + a_3^r) = 1$ и $\mathrm{NZD}(p, p-1) = 1$. Од Кинеската теорема за остатоци следува дека постои природен број n таков што

$$n \equiv r(\mathrm{mod}\, p-1) \text{ и } n(a_1^r + a_2^r + a_3^r) + a_1^r - a_3^r \equiv 0(\mathrm{mod}\, p).$$

Од овие конгруенции и од малата теорема на Ферма следува

$$(n+1)a_1^n + na_2^n + (n-1)a_3^n \equiv n(a_1^r + a_2^r + a_3^r) + a_1^r - a_3^r \equiv 0(\mathrm{mod}\, p).$$

Сега од условот на задачата следува дека

$$(n+1)b_1^n + nb_2^n + (n-1)b_3^n \equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$$

и како погоре добиваме

$$n(b_1^r + b_2^r + b_3^r) + b_1^r - b_3^r \equiv 0(\mathrm{mod}\, p).$$

Понатаму, ако го елиминираме n од добиените конгруенции добиваме

$$(a_1^r + a_2^r + a_3^r)(b_1^r - b_3^r) \equiv (b_1^r + b_2^r + b_3^r)(a_1^r - a_3^r)(\mathrm{mod}\, p).$$

Оттука и од изборот на p следува дека последната конгруенција всушност е равенство, т.е.

$$(a_1^r + a_2^r + a_3^r)(b_1^r - b_3^r) = (b_1^r + b_2^r + b_3^r)(a_1^r - a_3^r)$$

$$(a_2 b_1)^r + 2(a_3 b_1)^r + (a_3 b_2)^r = (a_1 b_2)^r + 2(a_1 b_3)^r + (a_2 b_3)^r$$

при што посленото равенство важи за секој природен број r.

Лема. Дадени се реални броеви

$$x_i, y_i, i = 1,2,...,s, \; 0 < x_1 \le x_2 \le ... \le x_s \text{ и } 0 < y_1 \le y_2 \le ... \le y_s$$

такви што за секој природен број r важи

$$x_1^r + x_2^r + ... + x_s^r = y_1^r + y_2^r + ... + y_s^r \tag{1}$$

Тогаш $x_i = y_i$, за $i = 1,2,...,s$.

Доказ. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по s. За $s = 1$ земаме $r = 1$ и добиваме $x_1 = y_1$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $s = t$. Нека $s = t$ и нека претпоставиме дека тврдењето не важи. Тогаш без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x_{t+1} < y_{t+1}$. Понатаму, од (1) следува дека

$$(\frac{x_1}{y_{t+1}})^r + (\frac{x_2}{y_{t+1}})^r + ... + (\frac{x_{t+1}}{y_{t+1}})^r = (\frac{y_1}{y_{t+1}})^r + (\frac{y_2}{y_{t+1}})^r + ... + (\frac{y_t}{y_{t+1}})^r + 1 \ge 1.$$

Но, $0 < \frac{x_i}{y_{t+1}} < 1$, за $1 \le i \le t+1$, па ако во последното неравенство земеме $r \to \infty$ добиваме $0 \ge 1$, што е противречност. Според тоа, $x_{t+1} = y_{t+1}$, со што доказот е завршен. ■

Од лемата следува дека броевите $a_2 b_1, a_3 b_1$ и $a_3 b_2$ во некој редослед се еднакви на броевите $a_1 b_2, a_1 b_3$ и $a_2 b_3$. Бидејќи шесте броеви се по парови различни, лесно се гледа дека постојат само две можност:

$$a_2 b_1 = a_3 b_2 = a_1 b_3 \text{ и } a_3 b_1 = a_1 b_2 = a_2 b_3 \text{ или } a_2 b_1 = a_1 b_2, \; a_3 b_1 = a_1 b_3 \text{ и } a_3 b_2 = a_2 b_3.$$

1) Ако $a_2 b_1 = a_3 b_2 = a_1 b_3$ и $a_3 b_1 = a_1 b_2 = a_2 b_3$, тогаш $\frac{a_2 b_1}{a_3 b_1} = \frac{a_3 b_2}{a_1 b_2} = \frac{a_1 b_3}{a_2 b_3}$, па затоа $\frac{a_2}{a_3} = \frac{a_3}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = t$. Тогаш $t^2 = t$, т.е. $t = 1$ и $a_2 = a_1$, што е противречност.

2) Ако $a_2b_1 = a_1b_2$, $a_3b_1 = a_1b_3$ и $a_3b_2 = a_2b_3$, тогаш

$$\frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \frac{k}{l}, \ \text{NZD}(k,l) = 1.$$

Имаме $b_i = \frac{k}{l} a_i$, за $i = 1,2,3$. Според тоа, $2b_1 + b_2 = \frac{k}{l}(2a_1 + a_2)$ и како за $n = 1$ од условот на задачата следува дека $2a_1 + a_2$ е делител на $2b_1 + b_2$, заклучуваме дека $\frac{k}{l}$ е природен број. Според тоа, $l = 1$ и $b_i = ka_i$, за $i = 1,2,3$.

9. Еден природен број r го нарекуваме „степен“, ако $r = t^s$, каде $t \geq 2, s \geq 2$ се природни броеви. Докажи, дека за секој природен број n постои множество A од природни броеви, кое ги задоволува следните услови:

a) A има n елементи;

b) секој елемент од A е „степен“; и

c) за секои $r_1, r_2, \ldots, r_k \in A$, $2 \leq k \leq n$ бројот $\frac{r_1 + r_2 + \ldots + r_k}{k}$ е „степен“.

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. За секој $m \in \mathbb{N}$ постои таков $d \in \mathbb{N}$, што сите броеви од множеството $\{d, 2d, \ldots, md\}$ се степени.

Доказ. Нека $p_1, p_2, \ldots, p_k$ се сите прости делители на $m!$, а $q_1, q_2, \ldots, q_m$ се првите m прости броеви. Ќе бараме d од облик $p_1^{x_1} p_2^{x_2} \ldots p_k^{x_k}$ така што dl да е точно q_l – ти степен на $l = 1,2,\ldots,m$. Ако l го запишеме во обликот $p_1^{\alpha_1(l)} p_2^{\alpha_2(l)} \ldots p_k^{\alpha_k(l)}$ добиваме, дека треба да е $x_i + \alpha_i(l) \equiv 0 (\text{mod } q_l)$, $i = 1,2,\ldots,k$ т.е. секој x_i треба да го задоволува условот

$$x_i + \alpha_i(l) \equiv 0 (\text{mod } q_l), \text{ за } l = 1,2,\ldots,m.$$

Бидејќи броевите $q_1, q_2, \ldots, q_m$ се по парови заемно прости, од Кинеската теорема за остатоци следува дека последниот систем има решение, што значи дека лемата е докажана. ■

Сега решението на задачата следува ако во претходната лема ставиме $m = n! \frac{n(n+1)}{2}$ и земеме $r_j = jn!d$, за $j = 1,2,\ldots,n$. Очигледно аритметичката средина на било кои k од дадените броеви е од облик id, каде

$$i < n! \frac{n(n+1)}{2} = m$$

па затоа таа е степен.

4. ТЕОРЕМА НА ДИРИХЛЕ

1. Секоја аритметичка прогресија $ak + b, k = 0,1,2,\ldots$, каде a, b се заемно прости природни броеви, за секој природен број s содржи бесконечно многу членови кои се производ на s различни прости броеви. Докажи!

Решение. За $s=1$ тврдењето следува од теоремата на Дирихле.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за прирoдниот број $s \geq 1$. Од $\mathrm{NZD}(a,b)=1$ следува дека постои број k_0 таков што

$$ak_0 + b = q_1 q_2 \dots q_s$$

каде $q_1 < q_2 < \dots < q_s$ се прости броеви. Согласно теоремата на Дирихле постојат бесконечно многу природни броеви k, такви што $ak+1=q$ е прост број поголем од q_s. За

$$t = q_1 q_2 \dots q_s k + k_0$$

имаме

$$\begin{aligned} at+b &= q_1 q_2 \dots q_s ak + ak_0 + b \\ &= q_1 q_2 \dots q_s (ak+1) \\ &= q_1 q_2 \dots q_s q, \end{aligned}$$

т.е тврдењето важи за $s+1$.

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој $s \in \mathbb{N}$.

2. Докажи, дека за секој природен број m постои прост број чиј збир на цифрите е поголем од $9m$.

Решение. Нека m е природен број. Бидејќи $\mathrm{NZD}(10^m, 10^m - 1) = 1$, според теоремата на Дирихле, постои таков природен број k, што

$$p = 10^m k + 10^m - 1$$

е прост број. Бидејќи последните m цифри на p се еднакви на 9, добиваме дека збирот на цифрите на p е поголем од $9m$.

3. За простите броеви p и q, $p > q$ ќе велиме дека се прости броеви близнаци ако $p = q + 2$. Докажи, дека постојат бесконечно многу прости броеви кои не припаѓаат на паровити прости броеви близнаци.

Решение. Согласно теоремата на Дирихле во аритметичката прогресија $15k+7,\ k=1,2,...$ се содржат бесконечно многу прости броеви. Ниту еден од овие броеви не припаѓа на ниту еден пар прости броеви близнаци, бидејќи

$$(15k+7)+2 = 3(5k+3) \text{ и } (15k+7)-2 = 5(3k+1)$$

се сложени броеви.

4. Докажи, дека за секој природен број m постои прост број, во чиј декаден запис има најмалку m нули.

Решение. Нека m е даден природен број. Бидејки $\mathrm{NZD}(10^{m+1}, 1) = 1$ од теоремата на Дирихле следува, дека постои природен број k таков што $p = 10^{m+1} k + 1$ е прост број. Последните $m+1$ цифра на бројот 10^{m+1} се нули, па затоа во декадниот запис на бројот бројот p има најмалку m нули.

5. Докажи дека за секој природен број n постои полином $f(x)$ со целобројни коефициенти таков што $f(1) < f(2) < \ldots < f(n)$ при што сите овие вредности се прости броеви.

Решение. Нека n е даден природен број. За $k \le n$ индуктивно ќе определиме природни броеви t_k на следниов начин.

Нека $t_0 = 1$. Да претпоставиме дека за даден $k \le n$ е определен бројот t_{k-1}. Според теоремата на Дирихле постои природен број t_k таков што бројот

$$q_k = (k-1)!(n-k)!t_k + 1$$

е прост и кога $k > 1$ тој е поголем од бројот

$$(k-2)!(n-k+1)!t_{k-1} + 1.$$

Така, броевите $q_1, q_2, \ldots, q_n$ се прости и притоа важи $q_1 < q_2 < \ldots < q_n$. Нека

$$f(x) = 1 + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{x-j} \; .$$

Јасно, $f(x)$ е полином со степен помал или еднаков на $n-1$ со целобројни коефициенти и $f(k) = 1 + (k-1)!(n-k)!t_k = q_k$.

6. Докажи, дека за секој природен број n постојат прост број p и цел број m такви што се исполнети условите

1) $p \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 6)$,
2) p не е делител на n и
3) $n \equiv m^3 (\mathrm{mod}\, p)$.

Решение. Од теоремата на Дирихле следува дека постојат бесконечно многу прости броеви од видот $6k+5$. Да избереме еден таков прост број кој е поголем од n. Тогаш за p се исполнети условите 1) и 2). Од малата теорема на Ферма следува дека за $m = n^{4k+3}$ важи

$$m^3 = n^{12k+9} = n^{6k+4} n^{6k+4} n = n^{p-1} n^{p-1} n \equiv n (\mathrm{mod}\, p),$$

т.е. за броевите p и m исполнет е и условот 3).

7. Мистериозна машина содржи комбинација од 2016 цели броеви $x_1, x_2, ..., x_{2016}$. Познато е дека сите броеви од комбинацијата освен еден број се еднакви. На машината можеме да и зададеме произвоона низа од 2016 цели броеви $y_1, y_2, ..., y_{2016}$, по што таа го дава збирот

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_{2016} y_{2016} .$$

Колку низи се потребни за да ја дознаеме комбинацијата на машината, ако на почетокот:

а) знаеме дека бројот различен од останатите е 0.

б) немаме никаква информација за броевите во комбинацијата.

Решение. Прво ќе докажеме дека едно прашање не е доволно во ниту еден од двата случаја. За таа цел доволно е да докажеме дека за секои $y_1, y_2, ..., y_{2016}$ постојат две различни 2016-торки:

$$(a_1, a_2, ..., a_{2016}) = (n, ..., n, 0, n, ..., n)$$

и

$$(b_1, b_2, ..., b_{2016}) = (m, ..., m, 0, m, ..., m)$$

такви што

$$\sum_{i=1}^{2016} a_i y_i = \sum_{i=1}^{2016} b_i y_i \ .$$

Ако за некои $i \neq j$ имаме $y_i = y_j$, тогаш при избор $n = m = 1$ во едната 2016-торка имаме 0 на $i-$ тото место, а во другата на $j-$ тото. Ако сите y_i се различни, тогаш можеме да избереме n, m таков што

$$n \sum_{i=1}^{2015} y_i = m \sum_{i=2}^{2016} y_i \ .$$

Ќе докажеме дека две прашања се доволни и во двата случаја. Нека n е вредноста на 2015-те еднакви броеви, а $n+m$ на 2016-тиот број кој се наоѓа на позицијата j. Треба да ги определиме броевите n, m, j. Збирот кој ќе го даде машината е

$$S = n \sum_{i=1}^{2016} y_i + m y_j \ .$$

Во првото прашање земаме

$$(y_1, y_2, ..., y_{2016}) = (1, -1, 1, -1, ..., 1, -1) \ .$$

Бидејќи $\sum_{i=1}^{2016} y_i = 0$, тука еднозначно го определуваме бројот $m' = |m|$. За второто прашање избираме

$$(y_1, y_2, ..., y_{2016}) = (q-1, q+1, q+2, ..., q+2015) \ ,$$

каде q е таков што

$$p = \sum_{i=1}^{2016} y_i = 2016q + 2015 \cdot 1008 - 1$$

е прост број (таков број постои заради $\text{NZD}(2016, 2015 \cdot 1008 - 1) = 1$ и теоремата на Дирихле). Одговорот на машината е

$$S = np + (\pm 1) m' y_j \ .$$

Од друга страна, лесно се гледа дека елементите на множеството

$$\{em' y_i \mid e \in \{-1, 1\}, \ i = 1, 2, ..., 2016\}$$

даваат различни остатоци при делење со p. Според тоа, бидејќи ги знаеме S и p, можеме да ги определиме знакот на m (што значи и самиот m) и j. Сега еднозначно можеме да го определиме и n.

8. Докажи дека, за секој природен број n постои прост број p таков што секој од броевите $p-1$ и $p+1$ има повеќе од n различни природни делители.

Решение. Нека n е даден природен број. Согласно теоремата на Дирихле во аритметичката прогресија $6^n k + 2 \cdot 3^{2^{n-1}} - 1$, каде $k \in \mathbb{N}$ постојат прости броеви. Оттука бидејќи $2^{n-1} \geq n$, за $n \in \mathbb{N}$ добиваме дека $3^n \mid 6^n k + 2 \cdot 3^{2^{n-1}} = p+1$ и бројот

$p+1$ има повеќе од n различни природни делители, на пример $1,3,3^2,...,3^n$. Согласно со теоремата на Ојлер имаме

$$3^{\varphi(2^n)} \equiv 1 \pmod{2^n},$$

па е $2^n \mid 3^{2^{n-1}}-1$, што значи $2^n \mid 6^n k + 2\cdot 3^{2^{n-1}} - 2 = p-1$ и бројот $p-1$ има најмалку n различни природни делители, на пример броевите $1,2,2^2,\dots 2^n$.

9. Докажи, за секој природен број n постојат прост број p и природен број m, такви што

1) $p \equiv 5 \pmod 6$,

2) p не е делител на n,

3) $n \equiv m^3 \pmod p$.

Решение. Од теоремата на Дирихле следува дека постојат бесконечно многу прости броеви од видот $6k+5$. Да избереме прост број $p=6k+5$ кој е поголем од n. Јасно, бројот p ги задоволува условите 1) и 2). За $m=n^{4k+3}$ од малата теорема на Ферма следува

$$m^3 \equiv n^{12k+9} \equiv n^{6k+4}n^{6k+4}n \equiv n^{p-1}n^{p-1}n \equiv n \pmod p.$$

10. Докажи, дека за секој природен број n постои прост број p таков, што секој од броевите $p-1, p+1, p+2$ има најмалку n различни прости делители.

Решение. Нека n е даден природен број, а p_i е $i-$тиот прост број. Од Кинеската теорема за остатоци следува дека постои природен број b, таков што

$$b \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p_1 p_2 \cdots p_n),$$
$$b \equiv -1 (\mathrm{mod}\, p_{n+1} p_{n+2} \cdots p_{2n}),$$
$$b \equiv -2 (\mathrm{mod}\, p_{2n+1} p_{2n+2} \cdots p_{3n})$$

Бидејќи

$$\mathrm{NZD}(b, p_1 p_2 \dots p_{3n}) = 1$$

од теоремата на Дирихле следува дека постои природен број k таков што

$$p = p_1 p_2 \cdots p_{3n} k + b$$

е прост број. Во овој случај $p_i \mid (b-1)$, за $i=1,2,...,n$ и $p_i \mid (b+1)$, за $i=n+1, n+2,...,2n$, што значи $p_i \mid (p-1)$, за $i=1,2,...,n$ и $p_i \mid (p+1)$, за $i=n+1,n+2, ...,2n$. Аналогно $p_i \mid (b+2)$, за $i=2n+1,2n+2,...,3n$, па затоа $p_i \mid (p+2)$, за $i=2n+1,2n+2,...,3n$.

Конечно, секој од броевите $p-1, p+1, p+2$ има најмалку n различни прости делители.

5. КВАДРАТНИ ОСТАТОЦИ

1. Нека $p=4k-1$ е прост број, $k\in N$. Докажи дека ако a е цел број таков што конгруенцијата $x^2\equiv a \pmod p$ има решение, тогаш важи $x=\pm a^k$.

Решение. Од Ојлеровиот критериум имаме

$$a^{2k-1}\equiv a^{\frac{p-1}{2}}\equiv (\tfrac{a}{p})\equiv 1 \pmod p.$$

Значи

$$a^{2k}\equiv a\equiv x^2 \pmod p,$$

од каде следува дека $x=\pm a^k$.

2. Докажи дека за секој природен број n секој прост делител на бројот n^4-n^2+1 е од облик $12k+1$.

Решение. Нека p е прост делител на бројот n^4-n^2+1. Важи

$$n^4-n^2+1=(n^2-1)^2+n^2 \text{ и } n^4-n^2+1=(n^2+1)^2-3n^2.$$

Понатаму,

$$n^2-1\equiv -1,0 \pmod 4 \text{ и } n^2\equiv 0,1 \pmod 4.$$

Според тоа,

$$(n^2-1)^2+n^2\equiv 1 \pmod 4$$

од каде следува дека $p\equiv 1 \pmod 4$. Важи

$$n^4-n^2+1=(n^2+1)^2-3n^2\equiv 1 \pmod 3,$$

па оттука $p\equiv 1 \pmod 3$. Од $p\equiv 1 \pmod 4$ и $p\equiv 1 \pmod 3$ следува дека постојат природни броеви s и t така што $p=4s+1=3t+1$. Јасно $4s=3t,$ од каде следува дека $t=4k.$ Значи, $p=3t+1=12k+1.$

3. Нека p и q се непарни прости броеви за кои $p+q+7pq$ е точен квадрат. Докажи дека барем еден од броевите p и q е од облик $4k+1.$

Решение. Нека a е природен број за кој важи $p+q+7pq=a^2.$ Имаме,

$$a^2\equiv p \pmod q \text{ и } a^2\equiv q \pmod p.$$

Значи $(\frac{p}{q})=(\frac{q}{p})=1$. Понатаму, од својството на квадратните реципрочности добиваме

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}=(\tfrac{p}{q})\cdot(\tfrac{q}{p})=1,$$

од каде следува дека барем еден од броевите $\frac{p-1}{2}$ и $\frac{q-1}{2}$ е парен. Јасно барем еден од броевите p и q е од облик $4k+1.$

4. Докажи дека равенката $x^2-17y^2=12$ нема целобројни решенија.

Решение. Ако (x,y) е решение на дадената равебка, тогаш $x^2 \equiv 12 \pmod{17}$. Исто така, важи:

$$(\tfrac{12}{17}) = (\tfrac{3}{17})(\tfrac{4}{17}) = (\tfrac{17}{3}) \cdot (-1)^{\frac{3-1}{2}\cdot\frac{17-1}{2}} \cdot (\tfrac{2^2}{17}) = (\tfrac{2}{3}) \cdot 1 \cdot 1 = -1.$$

Значи, конгруентната равенка $x^2 \equiv 12 \pmod{17}$ нема решение, односно дадената равенка нема целобројно решение.

5. Пресметај $(\frac{205}{407})$.

Решение. Од $407 = 37 \cdot 11$ и $205 = 41 \cdot 5$ следува

$$(\tfrac{205}{407}) = (\tfrac{205}{37 \cdot 11}) = (\tfrac{205}{37}) \cdot (\tfrac{205}{11}) = (\tfrac{41 \cdot 5}{37}) \cdot (\tfrac{41 \cdot 5}{11}) = (\tfrac{41}{37}) \cdot (\tfrac{5}{37}) \cdot (\tfrac{41}{11}) \cdot (\tfrac{5}{11}).$$

Сега, бидејќи $41 \equiv 4 \pmod{37}$ и $41 \equiv 8 \pmod{11}$ имаме:

$$(\tfrac{205}{407}) = (\tfrac{41}{37}) \cdot (\tfrac{5}{37}) \cdot (\tfrac{41}{11}) \cdot (\tfrac{5}{11}) = (\tfrac{2^2}{37}) \cdot (\tfrac{5}{37}) \cdot (\tfrac{2^3}{11}) \cdot (\tfrac{5}{11}).$$

За секој непарен прост број p и цел број a таков што $\mathrm{NZD}(a,p) = 1$ важи $(\frac{a^2}{p}) = 1$

. Оттука $(\frac{2^2}{37}) = 1$. Понатаму,

$$(\tfrac{5}{37}) \cdot (\tfrac{37}{5}) = (-1)^{\frac{(5-1)(37-1)}{4}} = 1.$$

Значи $(\frac{5}{37}) = (\frac{37}{5}) = (\frac{2}{5}) = -1$, бидејќи $x^2 \equiv 0,1,4 \pmod 5$. Аналогно важи

$$(\tfrac{5}{11})(\tfrac{11}{5}) = (-1)^{\frac{(5-1)(11-1)}{4}} = 1, \text{ т.е. } (\tfrac{5}{11}) = (\tfrac{11}{5}) = (\tfrac{1}{5}) = 1.$$

Исто така имаме

$$(\tfrac{41}{11}) = (\tfrac{8}{11}) = (\tfrac{2^2}{11}) \cdot (\tfrac{2}{11}) = (\tfrac{2}{11}) = -1.$$

На крај добиваме

$$(\tfrac{205}{407}) = (\tfrac{41}{37}) \cdot (\tfrac{5}{37}) \cdot (\tfrac{41}{11}) \cdot (\tfrac{5}{11}) = 1 \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot 1 = 1.$$

6. Определи ги сите точни квадрати во низата $a_n = 2^n + 2021n$, $n \in \mathbb{N}$.

Решение. Нека $n = 2k+1$ и да претпоставиме дека $2^{2k+1} + 2021n = x^2, x \in \mathbb{N}$. Бидејќи $2021 = 43 \cdot 47$ добиваме $x^2 \equiv 2 \cdot 2^{2k} \pmod{43}$. Нека $y \in \mathbb{N}$ е таков што $2^k y \equiv 1 \pmod{43}$. Тогаш $(xy)^2 \equiv 2(2^k y)^2 \equiv 2 \pmod{43}$, т.е. 2 е квадратен остаток по модул 43, што е противречност.

Нека $n = 2k$ и $2^{2k} + 2021n = x^2, x \in \mathbb{N}$. Тогаш $(x-2^k)(x+2^k) = 2021n$, па затоа

$$x - 2^k = d_1 n_1, \quad x + 2^k = d_2 n_2, \; d_1 d_2 = 2021, \; n_1 n_2 = n, \; d_1, d_2, n_1, n_2 \in \mathbb{N}.$$

Имаме $2^{k+1} = \frac{2021n}{d_1 n_1} - d_1 n_1 < 2021n$, па затоа $2^k < 2021k$. Но, функцијата $f(k) = \frac{2^k}{k}$ монотоно расте и $f(15) > 2021$. Според тоа, $k \in \{1,2,...,14\}$, при што со непосредна проверка (случаите лесно се отфрлаат по различни модули) добиваме дека единствено решение е $k=2, x=90, n=4$.

7. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^3+2x+1=2^n.$$

Решение. Со непосредна проверка се добива дека за $n\le 2$ единствено решение е парот $(1,2)$. Ќе докажеме дека равенката нема решенија за $n\ge 3$.

Бројот x мора да биде непарен, па затоа $x^2+2\equiv 3(\bmod 8)$. Сега од $x(x^2+2)\equiv -1(\bmod 8)$ следува дека $x\equiv 5(\bmod 8)$. Уште повеќе, бидејќи $3\,|\,x(x^2+2)$ мора да важи $2^n\equiv 1(\bmod 3)$, што значи дека n е парен број. Ако на двете страни на равенката го додадеме бројот 2 добиваме

$$(x+1)(x^2-x+3)=2^n+2.$$

Бидејќи n е парен број и 2^n е точен квадрат, па затоа бројот -2 е квадратен остаток по секој непарен прост делител p на бројот $(x+1)(x^2-x+3)$. Затоа

$$1=(\tfrac{-2}{p})=(\tfrac{-1}{p})(\tfrac{2}{p})=(-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}=(-1)^{\frac{(p-1)(p-5)}{8}},$$

од каде следува дека p е од облик $8k+1$ или $8k+3$. Како производ на такви прости броеви и бројот x^2-x+3 мора да биде од истиот облик. Меѓутоа, бидејќи $x\equiv 5(\bmod 8)$, важи $x^2-x+3\equiv 7(\bmod 8)$, што е противречност.

Конечно, единствено решение на равенката е $(x,n)=(1,2)$.

8. Нека a и b се заемно прости природни броеви и a_n и b_n се цели броеви, дефинирани со равенството

$$(a+b\sqrt{2})^{2n}=a_n+b_n\sqrt{2}.$$

Определи ги сите прости броеви p, за кои постои природен број $n\le p$ таков што p е делител на b_n.

Решение. Бидејќи $b_1=2ab$, т.е. $p=2$ и сите прости делители на ab се решенија на задачата, во натаможноте разгледувања ќе претпоставиме дека p е непарен прост број, заемно прост со a и со b.

Од условот добиваме

$$\begin{aligned}a_n+b_n\sqrt{2}&=(a+b\sqrt{2})^{2n}\\&=(a+b\sqrt{2})^{2(n-1)}(a^2+2b^2+2ab\sqrt{2})\\&=(a_{n-1}+b_{n-1}\sqrt{2})(a^2+2b^2+2ab\sqrt{2})\end{aligned}$$

од каде следуваат рекурзиите

$$a_n=(a^2+2b^2)a_{n-1}+4abb_{n-1}$$

$$b_n=2aba_{n-1}+(a^2+2b^2)b_{n-1}.$$

Ќе разгледаме два случаја: $p\,|\,a^2-2b^2$ и $\text{NZD}(p,a^2-2b^2)=1$.

Прв случај. Нека $p\,|\,a^2-2b^2$, p е непарен и $\text{NZD}(p,ab)=1$. Тогаш p не е делител на $b_1=2ab$. Нека претпоставиме дека p е делител на некој $b_r, r\geq 2$ и нека r е најмалиот индекс со тоа својство. Тогаш

$$\begin{aligned}0\equiv b_r &= 2ab[(a^2+2b^2)a_{r-2}+4abb_{r-2}]+(a^2+2b^2)b_{r-1}\\ &= 2ab[(a^2+2b^2)a_{r-2}+4abb_{r-2}]+\\ &\quad +2(a^2+2b^2)b_{r-1}-(a^2+2b^2)[2aba_{r-2}+(a^2+2b^2)b_{r-2}]\\ &= 2(a^2+2b^2)b_{r-1}-(a^2-2b^2)^2 b_{r-2}\equiv 2(a^2+2b^2)b_{r-1}(\text{mod}\, p)\end{aligned}$$

Од претпоставките следува дека $\text{NZD}(p,2(a^2+2b^2))=1$, па затоа од претходните конгруенции следува $p\,|\,b_{r-1}$, што противрели на изборот на r. Според тоа, во овој случај немаме решение на задачата.

Втор случај. Нека $\text{NZD}(p,a^2-2b^2)=1$, p е непарен и $\text{NZD}(p,ab)=1$. Да забележиме дека

$$b_n=\tfrac{(a+b\sqrt{2})^{2n}-(a-b\sqrt{2})^{2n}}{2\sqrt{2}}=\sum_{k-\text{непарен}}\tbinom{2n}{k}a^{2n-k}b^k 2^{\frac{k-1}{2}}.$$

Нека претпоставиме дека постои цел број m таков што $m^2\equiv 2(\text{mod}\, p)$, т.е. дека 2 е квадратен остаток по модул p. Тогаш

$$b_n\equiv\sum_{k-\text{непарен}}\tbinom{2n}{k}a^{2n-k}b^k m^{k-1}=\tfrac{(a+bm)^{2n}-(a-bm)^{2n}}{m}(\text{mod}\, p).$$

Од

$$(a+bm)(a-bm)\equiv a^2-2b^2(\text{mod}\, p),$$

имаме $\text{NZD}(a+bm,p)=\text{NZD}(a-bm,p)\;=1$ и можеме да ја примениме малата теорема на Ферма за $n=\frac{p-1}{2}$, при што добиваме $b_{\frac{p-1}{2}}\equiv 0(\text{mod}\, p)$.

Нека сега конгруенцијата $x^2\equiv 2(\text{mod}\, p)$ нема решенија и да го разгледаме $n=\frac{p+1}{2}$. Тогаш $\binom{2n}{k}=\binom{p+1}{k}\equiv 0(\text{mod}\, p)$. Сега, ако ја искористиме малата теорема на Ферма и фактот дека од критериумот на Ојлер следува $2^{\frac{p+1}{2}}\equiv -1(\text{mod}\, p)$ добиваме

$$b_{\frac{p+1}{2}}\equiv(p+1)a^p b+(p+1)ab^p 2^{\frac{p+1}{2}}\equiv ab(1+2^{\frac{p+1}{2}})(\text{mod}\, p).$$

Од претходно изнесеното следува, дека секој прост број p таков што $\text{NZD}(p,a^2-2b^2)=1$, p е непарен и $\text{NZD}(p,ab)=1$ е решение на задачата.

9. Докажи дека за секој природен број n бројот n^7+7 не е точен квадрат.

Решение. Ќе докажеме дека равенката $n^7+7=k^2$ нема решение во множеството природни броеви. Ж

Дадената равенка последователно е еквивалентна со равенките

$$n^7+128=k^2+121$$
$$n^7+2^7=k^2+121$$
$$(n+2)(n^6-2n^5+4n^4-8n^3+16n^2-32n+64)=k^2+121$$

Понатаму,

$$a=n^6-2n^5+4n^4-8n^3+16n^2-32n+64\equiv n^5(n-2)(\mathrm{mod}\,4),$$

па затоа $a\equiv 0,3,0,3(\mathrm{mod}\,4)$ за $n=4s,4s+1,4s+2,4s+3$, соодветно. Од друга страна, ако сите прости делители на еден број се од видот $4t+1$, тогаш и самиот број е од истиот вид, што не е случај. Затоа, n^7+128 има прост делител p од облик $4t+3$. Притоа важи $k^2\equiv -11^2(\mathrm{mod}\,p)$, односно -121 е квадратен остаток на p. Оттука следува

$$1=(\tfrac{-11^2}{p})=(\tfrac{11^2}{p})(\tfrac{-1}{p})=(\tfrac{-1}{p})=(-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Од последното равенство добиваме $\frac{p-1}{2}=2m$, т.е. $p=4m+1$, што противречи на $p=4t+3$. Конечно, од добиената противречност следува дека равенката $n^7+7=k^2$ нема решение.

10. Докажи дека ако $p=2^n+1, n\geq 2$ е прост број, тогаш $3^{\frac{p-1}{2}}+1$ е делив со p.

Решение. Од $2^n+1\equiv(-1)^n+1(\mathrm{mod}\,3)$ следува дека n е парен број, бидејќ во спротивно бројот p ќе биде делив со 3, што не е можно. Од Ојлеров критериум следува $(\frac{3}{p})\equiv 3^{\frac{p-1}{2}}(\mathrm{mod}\,p)$. Понатаму,

$$p=2^n+1=2^{2k}+1=4^k+1\equiv 1(\mathrm{mod}\,4) \text{ и } p=4^k+1\equiv 2(\mathrm{mod}\,3)$$

па според тоа конгруенцијата $x^2\equiv p(\mathrm{mod}\,3)$ нема решение, т.е. важи $(\frac{p}{3})=-1$. Од теоремата за квадратни реципрочности следува $(\frac{3}{p})\cdot(\frac{p}{3})=(-1)^{\frac{p-1}{2}}=(-1)^{2k}=1$ и бидејќи $(\frac{p}{3})=-1$ добиваме дека $(\frac{3}{p})=-1$. Бидејќи $(\frac{3}{p})\equiv 3^{\frac{p-1}{2}}(\mathrm{mod}\,p)$ следува дека $3^{\frac{p-1}{2}}\equiv -1(\mathrm{mod}\,p)$, т.е. $p\,|\,3^{\frac{p-1}{2}}+1$.

11. Ако x е природен број докажи дека цифрата на десеткитр на секој повеќе-цифрен прост делител на бројот $5x^2+1$ е парна.

Решение. Нека p е прост број таков што $p\,|\,5x^2+1$. Значи, $(5x)^2\equiv -5(\mathrm{mod}\,p)$, т.е. $(\frac{-5}{p})=1$. Понатаму,

$$(\tfrac{-5}{p})=(\tfrac{-1}{p})(\tfrac{5}{p})=(-1)^{\frac{p-1}{2}}(\tfrac{5}{p}).$$

Од теоремата за квадратни реципрочности имаме:

$$\left(\frac{5}{p}\right)\left(\frac{p}{5}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{5-1}{2}}=1 .$$

Според тоа, $\left(\frac{5}{p}\right)=\left(\frac{p}{5}\right)$. Значи, $\left(\frac{-5}{p}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{5}\right)=1$. Можни се два случаи:

1) $(-1)^{\frac{p-1}{2}}=-1,\ \left(\frac{p}{5}\right)=-1$ и

2) $(-1)^{\frac{p-1}{2}}=1,\ \left(\frac{p}{5}\right)=1$.

1) Од $(-1)^{\frac{p-1}{2}}=-1$ следува дека $\frac{p-1}{2}=2k+1$, т.е. $p=4k+3$, што значи дека $p\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)$. Од $\left(\frac{p}{5}\right)=-1$ следува дека конгруентната равенка $x^2\equiv p(\mathrm{mod}\,5)$ нема решение. Значи $p\equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$ или $p\equiv 3(\mathrm{mod}\,5)$. Ако $p\equiv 2(\mathrm{mod}\,5)$, тогаш го решаваме системот

$$\begin{cases} p\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)\\ p\equiv 2(\mathrm{mod}\,5)\end{cases}$$

Добиваме $p=4s+3,\ p=4t+2,\ s,t\in\mathbb{N}_0$. Важи

$$4s+3=4t+2,\ \text{т.е. } 4(s-1)=5(t-1).$$

Јасно, $s-1=5m$, од каде следува $p=20m+7$, т.е. $p\equiv 7(\mathrm{mod}\,20)$.

Аналогно го решаваме и системот

$$\begin{cases} p\equiv 3(\mathrm{mod}\,4)\\ p\equiv 3(\mathrm{mod}\,5)\end{cases}$$

од каде добиваме $p\equiv 3(\mathrm{mod}\,20)$.

2) Сега $\frac{p-1}{2}=2s$ и $p\equiv 0,1,4(\mathrm{mod}\,p)$ бидејќи во тој случај $x^2\equiv p(\mathrm{mod}\,5)$ има решение. По решавање на системите

$$\begin{cases} p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)\\ p\equiv 0(\mathrm{mod}\,5)\end{cases}$$

$$\begin{cases} p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)\\ p\equiv 1(\mathrm{mod}\,5)\end{cases}$$

и

$$\begin{cases} p\equiv 1(\mathrm{mod}\,4)\\ p\equiv 4(\mathrm{mod}\,5)\end{cases}$$

добиваме

$$p\equiv 5(\mathrm{mod}\,20),\ p\equiv 1(\mathrm{mod}\,20)\ \text{ и }\ p\equiv 9(\mathrm{mod}\,20)$$

соодветно.

Значи, $p\equiv 1,3,5,7,9(\mathrm{mod}\,20)$, од каде следува дека цифрата на десетките на секој повеќецифрен прост делител p на $5x^2+1$ е парна.

6. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. За природниот број n ќе велиме дека е *добар* ако и само ако постојат природни броеви $a>1$ и $b>1$ такви што $n=a^b+b$. Дали постојат 2014 последователни природни броеви меѓу кои има точно 2012 добри броеви?

Решение. Прво ќе дадеме пример на 2012 последователни добри броеви. Доволно е да ги земеме броевите $N+2, N+3, ..., N+2013$ каде $N=2^{2013!}$. За природниот број n со $f(n)$ да го означиме бројот на добрите броеви меѓу броевите $n, n+1, n+2, ..., n+2013$. Бидејќи $f(1)<2012$ (броевите 1, 2, 3 ,4 и 5 не се добри), $f(N)\geq 2012$ и $|f(n+1)-f(n)|\leq 1$ за секој n заклучуваме дека постои n таков што $f(n)=2012$.

2. Од природните броеви ги формираме множествата

$A_1=\{1\}$, $A_2=\{2,3,4\}$, $A_3=\{3,4,5,6,7\}$, $A_4=\{4,5,6,7,8,9,10\}$,…

Докажи дека збирот на броевите во секое множество A_n, $n=1,2,3,4,...$ е квадрат на некој непарен број.

Решение. Нека S_n е збирот на броевите во множеството

$$A_n=\{n, n+1, n+2, n+3, ..., 3n-2\}.$$

Тогаш:

$$S_1=1=1^2=(2\cdot 1-1)^2$$

$$S_2=2+3+4=9=3^2=(2\cdot 2-1)^2$$

$$S_3=3+4+5+6+7=25=5^2=(2\cdot 3-1)^2 \text{, итн.}$$

Да претпоставиме дека $S_k=(2\cdot k-1)^2$. За S_{k+1} имаме:

$$\begin{aligned} S_{k+1} &= (k+1)+(k+2)+...+3(k+1)-3+3(k+1)-2 \\ &= S_k-k+3k-1+3k+3k+1=S_k+b_k \\ &= (2k-1)^2+8k=4k^2+4k+1 \\ &= (2k+1)^2=[2(k+1)-1]^2. \end{aligned}$$

Според принципот на математичка индукција $S_n=(2n-1)^2$ за секој $n\in\mathbb{N}$.

3. Дали постои бесконечно множество природни броеви S, $S\neq\mathbb{N}$ такво што за секој природен број $n\notin S$ точно n броеви од S се заемно прости со n?

Решение. Ќе докажеме дека множество со саканите својства не постои. Нека го претпоставиме спротивното и нека $n\notin S$ е природен број. Бидејќи точно n броеви од S се заемно прости со n, заклучуваме дека постојат бесконечно многу прости броеви кои не се содржат во S. Нека p и q се два од тие прости броеви. Точно p од броевите во S не се деливи со p. Уште повеќе, имаме $p^\alpha\in S$ за секој природен број $\alpha>1$, бидејќи во спротивно ќе имаме $p^\alpha>p$ броеви од S кои се заемно прости со p^α, па оттука и со p. Но, сега имаме бесконечно многу броеви од S кои се заемно прости со q, што е противречност.

4. Докажи, дека за секој природен број $n \geq 5$ постојат природни броеви p и q такви што важи

$$|p^2 + 2q^2 - n| \leq \sqrt[4]{9n}.$$

Решение. Нека q е природниот број за кој важи $2q^2 \leq n < 2(q+1)^2$. Тогаш

$$n - 2q^2 < 4q + 2 \leq 4\sqrt{\tfrac{n}{2}} + 2 = 2(\sqrt{2n} + 1).$$

Понатаму, нека t е природниот број за кој важи

$$t^2 \leq n - 2q^2 < (t+1)^2.$$

За p го земаме бројот t или $t+1$ во зависност од положбата на $n - 2q^2$ во однос на средината на интервалот $[t^2, (t+1)^2]$. Ставаме

$$p = \begin{cases} t, & \text{ако } n - 2q^2 - t^2 \leq t \\ t+1, & \text{ако } n - 2q^2 - t^2 > t. \end{cases}$$

Тогаш имаме

$$|p^2 + 2q^2 - n| \leq t \leq \sqrt{n - 2q^2} \leq \sqrt{2(2\sqrt{n} + 1)}.$$

Останува да забележиме дека $\sqrt{2(2\sqrt{n} + 1)} \leq \sqrt[4]{24n}$ за секој $n \geq 5$.

5. Постојат само два прости броја чија реципрочна вредност, кога ќе се запише како децимален број, има период со должина 7. Определи ги!

Решение. Од

$$\tfrac{1}{p} = 0,\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7\ldots},$$

т.е. од

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{p} &= \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7} \cdot 10^{-7} + \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7} \cdot 10^{-14} + \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7} \cdot 10^{-21} + \ldots \\
&= \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7} \cdot 10^{-7}(1 + 10^{-7} + 10^{-14} + \ldots) \\
&= \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7} \cdot 10^{-7} \cdot \tfrac{1}{1 - \frac{1}{10^7}} \\
&= \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7} \cdot \tfrac{1}{10^7 - 1}
\end{aligned}$$

имаме

$$p \cdot \overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7} = 10^7 - 1 = 9 \cdot 239 \cdot 4649.$$

Од последното равенство имаме

$$\tfrac{1}{239} = 0,00418410041841\ldots,$$

$$\tfrac{1}{4649} = 0,000215100021510002151\ldots$$

6. Определи ги цифрите a и b, така што

$$\sqrt{0,aaaa\ldots} = 0,bbbb\ldots\ldots.$$

Решение. Броевите $0,aaaa...$ и $0,bbbb...$ се периодични децимални броеви, па според тоа, тие се рационални броеви. Било кој периодичен децимален број $0,xxxx...$, каде x е цифра можеме да го запишеме во облик

$$0,xxxx...=\frac{x}{10}+\frac{x}{10^2}+\frac{x}{10^3}+...+\frac{x}{10^n}+....=\frac{x}{10}(1+\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+....+\frac{1}{10^{n-1}}+...)=\frac{x}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}}=\frac{x}{9}.$$

Според тоа, равенката

$$\sqrt{0,aaaa....}=0,bbbb.....$$

можеме да ја запишеме во облик $\sqrt{\frac{a}{9}}=\frac{b}{9}$, односно $a=\frac{b^2}{9}$. Ќе ги определиме решенијата на равенката $b^2=9a$ во множеството едноцифрени природни броеви. Бидејќи $9=3^2$, од последната равенка добиваме дека a е точен квадрат, т.е. $a=c^2$. Според тоа $b^2=9c^2$, т.е. $b=3c$. Бидејќи b и c се цифри, за $c=0$ добиваме $b=0$, за $c=1$ добиваме $b=3$, за $c=2$ добиваме $b=6$ и за $c=3$ добиваме $b=9$. Значи, можни парови цифри (a,b) за кои

$$\sqrt{0,aaaa....}=0,bbbb.....$$

се

$$(a,b)\in\{(0,0),(1,3),(4,6),(3,9)\}.$$

Може да се провери дека секој од нив е решение на задачата.

7. На табла се запишани 100 по парови различни природни броеви $a_1,a_2,...,$ a_{100}. Потоа, под секој број a_i е запишан број b_i еднаков на збирот на a_i и најголемиот заеднички делител на останатите 99 почетни броеви. Колку најмногу може по парови да се различни меѓу броевите $b_1,b_2,...,b_{100}$.

Решение. Ако земеме $a_{100}=1$ и $a_i=2i, i=1,2,...,99$, тогаш $b_1=b_{100}=3$, па затоа меѓу броевите $b_1,b_2,...,b_{100}$ нема повеќе од 99 по парови различни.

Ќе докажеме дека меѓу броевите $b_1,b_2,...,b_{100}$ има 99 по парови различни. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a_1<a_2<...<a_{100}$. Нека d_i е најголемиот заеднички делител на сите почетни 99 броеви без a_i. Тогаш $b_i=a_i+d_i$. Нека $d_k=\max\{d_1,d_2,...,d_{100}\}$. Тогаш за $i\neq k$ броевите a_i се деливи со d_k. Според тоа, при $i<j$ и $i\neq k\neq j$ разликата a_j-a_i исто така е делива со d_k. Бидејќи оваа разлика е позитивна, имаме $a_j-a_i\geq d_k\geq d_i$. Тогаш $b_j>a_j\geq a_i+d_i=b_i$, па затоа $b_i\neq b_j$. Добивме дека $b_i\neq b_j$, за $i\neq k\neq j$, што значи дека сите 99 броеви b_i при $i\neq k$ се по парови различни.

8. Природниот број k ќе го нарекуваме *наизменичен* ако секои две соседни цифри во неговиот декаден запис се со различна парност. Определи ги сите природни броеви n за кои постои наизменичен природен број A_n делив со n.

Решение. Ако $20\,|\,n$, тогаш последните две цифри на секој број делив со n се парни, па затоа не е наизменичен. Ќе докажеме дека за секој n таков што $20\nmid n$

постои наизменичен содржател A_n. Прво, за секој m таков што $\mathrm{NZD}(m,10)=1$ и за секој $k\in\mathbb{N}$ постои број од облик

$$I_{k,m}=\overline{1\underbrace{0...0}_{k-1}1\underbrace{0...0}_{k-1}1\underbrace{0...0}_{k-1}1...1\underbrace{0...0}_{k-1}1}=\frac{10^{ik}-1}{10^k-1},\ i\in\mathbb{N}$$

таков што $m\,|\,I_{k,m}$. Навистина, според теоремата на Ојлер можеме да земеме $i=\varphi((10^k-1)m)$.

1) Ако $\mathrm{NZD}(n,10)=1$, тогаш $I_{2,n}$ е наизменичен број делив со n.

2) Нека $n=2\cdot 5^k m$, каде $\mathrm{NZD}(m,10)=1$. Ќе докажеме, дека за секој r постои $r-$ цифрен наизменичен број U_r (кој може да почнува со нула) делив со 5^r, а потоа ќе земеме $A_n=10U_{2k}I_{2k,m}$.
Низата $\{U_r\}$ ја дефинираме индуктивно. Нека $U_1=5$. За $r\geq 1$ нека $c\in\{0,1,2,3,4\}$ е таков што $2^r c\equiv -\frac{U_r}{5^r}(\mathrm{mod}\,5)$ и нека $d=c+5$. Тогаш $(r+1)-$ цифрените броеви $\overline{cU_r}$ и $\overline{dU_r}$ се деливи со 5^{r+1}, а еден од нив е наизменичен. За U_{r+1} го земеме тој наизменичен број.

3) Нека $n=2^k m$, каде $\mathrm{NZD}(m,10)=1$. Ќе докажеме дека за секој r постои $2r-$цифрен наизменичен број V_r делив со 2^{r+1}, а потоа ќе земеме $A_n=V_k I_{2k,m}$. Како и во случајот 2), V_r го дефинираме индуктивно. Земаме $V_1=16$, а за $r>1$ точно еден од броевите $\overline{10V_r},\overline{12V_r},\overline{14V_r},\overline{16V_r}$ може да се земе за V_{r+1}.

9. За еден природен број $n>1$ велиме дека е *добар* ако за произволни природни броеви $b_1,b_2,...,b_{n-1}$ такви што $1\leq b_1,b_2,...,b_{n-1}\leq n-1$, важи: за секој $i\in\{0,1,...,n-1\}$ постои множество $I\subseteq\{1,2,...,n-1\}$ такво што

$$\sum_{k\in I} b_k\equiv i(\mathrm{mod}\ n).$$

(Притоа празната сума по дефиниција е еднаква на нула, а сума од еден собирок по дефиниција е тој собирок.)

Определи ги сите добри броеви.

Решение. Ќе докажеме дека еден број е добар акко е прост. Најпрво да покажеме дека ако n е сложен број, тогаш n не е добар. Имено, нека $n=rs$, $1<r,s<n$. Да избереме $b_1=b_2=...=b_{n-1}=r$. Тогаш

$$\{\sum_{i\in I} bi(\mathrm{mod}\,n)\vdots I\subseteq\{1,2,...,n-1\}\}=\{0,r,2r,...,n-r\},$$

па на пример за $i=1$ не постои соодветното подмножество I.

Ќе докажеме дека секој прост број е добар. Нека p е прост број. Важи нешто повеќе: за $1\leq r\leq n-1$ и за произволни природни броеви $b_1,b_2,...,b_r$ такви што $1\leq b_1,b_2,...,b_r\leq p-1$ постојат барем $r+1$ различни броеви $(\mathrm{mod}\,p)$ кои се добиваат како суми од елементите $b_1,b_2,...,b_r$.

Доказот на ова ќе го изведеме со индукција по r.

За $r=1$ тврдењето важи бидејќи празната сума е $\equiv 0 (\bmod p)$, а сумата од b_1 не е $\equiv 0 (\bmod p)$. Нека $r<n-1$ и тврдењето за r е исполнето. Да претпоставиме дека за $p+1$ тврдењето не важи. Нека $1 \le b_1, b_2, ..., b_r, b \le p-1$ се такви да сумите од овие броеви не даваат барем $r+2$ различни броеви $(\bmod p)$. Бидејќи за r тврдењето важи, за броевите $b_1, b_2, ..., b_r$ постојат суми $0=\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_r$ по парови различни $(\bmod p)$. Тогаш $\sigma_0 + b, \sigma_1 + b, ..., \sigma_r + b$ не даваат нов број $(\bmod p)$ (различен од $0=\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_r$). Бидејќи

$$\sigma_i + b \neq \sigma_i \ (\bmod p),$$

мора $0, b, 2b, ..., (r+1)b \in \{\sigma_0, \sigma_1, ..., \sigma_r\}$. Но, тогаш постојат i, j такви што $0 \le i < j \le r+1$ и $ib \equiv jb \ (\bmod p)$, што повлекува дека $(j-i)b \equiv 0 \ (\bmod p)$. Последново противречи на фактот дека p е прост број. Значи претпоставката за $r+1$ не е точна. Со тоа тврдењето е докажано.

10. Нека a е природен број поголем од 1. Докажи дека бројот

$$n(2n+1)(3n+1)...(an+1)$$

е делив со секој прост број помал од бројот a, за секој природен број n.

Решение. Нека p е прост број таков што $p<a$. Ќе разгледаме два случаи.

а) Ако $p \mid n$, тогаш $p \mid [n(2n+1)(3n+1)...(an+1)]$.

б) Нека $p \nmid n$. Тогаш броевите $2n+1, 3n+1, ..., (p+1)n+1$ при делење со p имаат остатоци $r_1, r_2, ..., r_p$ соодветно. Нека претпоставиме дека постојат $i, j \in \{1, 2, ..., p\}$ такви што $i \neq j$ и $r_i = r_j$. Според тоа, постојат природни броеви b_i и b_j такви што $in+1 = pb_i + r_i$ и $hn+1 = pb_j + r_i$, од каде добиваме

$$(i-j)n = p(b_i - b_j).$$

Заради $p \nmid n$, добиваме $p \mid (i-j)$. Од друга страна $i \le p+1$, $j \le p+1$, па од $i \neq j$ имаме $1 \le |i-j| < p$. Од последното неравенство добиваме $p \nmid (i-j)$. Заради добиената противречност имаме $r_i \neq r_j$ за $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, ..., p\}$. Според принципот на Дирихле постои природен број k, $1 \le k \le p$, такаов што $r_k = 0$. Според тоа, $p \mid [(k+1)n+1]$ односно

$$p \mid n(2n+1)(3n+1)...(kn+1)[(k+1)n+1]...[(p+1)n+1],$$

т.е.

$$p \mid n(2n+1)(3n+1)...(kn+1)[(k+1)n+1]...[(p+1)n+1]...[(a-1)n+1](an+1).$$

11. Нека $a_1, a_2, ..., a_n$ се природни броеви и $a>1$ е природен број таков што $a_1 a_2 ... a_n \mid a$. Докажи дека $(a+a_1-1)(a+a_2-1)...(a+a_n-1)$ не е делител на $a^{n+1}+a-1$.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното. Ако $a_i = 1$ за некој i, добиваме дека $a \mid (a+a_1-1)(a+a_2-1)...(a+a_n-1) \mid a^{n+1}+a-1$, што не е можно. Според тоа,

$a_i \geq 2$, за $i = 1, 2, ..., n$.

Нека

$$a = ba_1 a_2 ... a_n \text{ и } a^{n+1} + a - 1 = c(a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1)...(a + a_n - 1).$$

Очигледно, $\text{NZD}(b, c) = 1$, $1 \leq b \leq a - 1$, а лесно се покажува дека $c \leq \frac{a^{n+1}+a-1}{(a+1)^n} < a$.

Освен тоа

$$ba_1 a_2 ... a_n \equiv ca_1 a_2 ... a_n (\bmod a - 1)$$

што заедно со претходно изнесеното дава $b = c = 1$. Сега имаме

$$\begin{aligned} a^{n+1} + a - 1 &= (a + a_1 - 1)(a + a_2 - 1)...(a + a_n - 1) \\ &< (a + a_1)(a + a_2)...(a + a_n) \\ &= a(\frac{a}{a_1} + 1)(\frac{a}{a_2} + 1)...(\frac{a}{a_n} + 1) \\ &\leq a(\frac{a}{2} + 1)^n \leq a^{n+1}, \end{aligned}$$

што е противречност.

12. Докажи дека ако $n > 1$ е природен број за кој бројот $1 + 2^n + 4^n$ е прост, тогаш n е степен на бројот 3.

Решение. Нека $a_n = 1 + 2^n + 4^n$, $n = 3^k m$ и 3 не е делител на m. Ако $m > 1$, тогаш $m = 3t + 1$ или $m = 3t + 2$. За случајот $m = 3t + 1$ имаме:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 2^{3^k(3t+1)} + 4^{3^k(3t+1)} \\ &= a_{3^k} + 2^{3^k}(2^{3^k \cdot 3t} - 1) + 4^{3^k}(4^{3^k \cdot 3t} - 1) \\ &= a_{3^k} + 2^{3^k}(2^{3^k \cdot 3t} - 1)(1 + 2^{3^k}(2^{3^k \cdot 3t} + 1)) \\ &= a_{3^k} + 2^{3^k}(2^{3^k \cdot 3} - 1)(2^{3^{k \cdot 3(t-1)}} + ... + 1)(1 + 2^{3^k}(2^{3^k \cdot 3t} + 1)) \\ &= a_{3^k} + 2^{3^k}(2^{3^k} - 1)(2^{3^k \cdot 2} + 2^{3^k} + 1)(2^{3^{k \cdot 3(t-1)}} + ... + 1)(1 + 2^{3^k}(2^{3^k \cdot 3t} + 1)) \\ &= a_{3^k} + 2^{3^k}(2^{3^k} - 1)a_{3^k}(2^{3^{k \cdot 3(t-1)}} + ... + 1)(1 + 2^{3^k}(2^{3^k \cdot 3t} + 1)), \end{aligned}$$

а оттука јасно се гледа дека $a_{3^k} \mid a_n$.

За случајот $m = 3t + 2$ имаме:

$$\begin{aligned} a_n &= 1 + 2^{3^k(3t+2)} + 4^{3^k(3t+2)} \\ &= a_{3^k} + 2^{3^k}(2^{3^k \cdot 3} - 1) + 2^{3^k \cdot 2}(2^{3^k \cdot 3t} - 1) + 2^{3^k \cdot 4}(2^{3^k \cdot 3 \cdot t \cdot 2} - 1) \\ &= a_{3^k} + 2^{3^k}(2^{3^k} - 1)(2^{3^k \cdot 2} + 2^{3^k} + 1) + 2^{3^k \cdot 2}(2^{3^k \cdot 3t} - 1) + 2^{3^k \cdot 4}(2^{3^k \cdot 3t} - 1)(2^{3^k \cdot 3t} + 1) \\ &= a_{3^k} + 2^{3^k}(2^{3^k} - 1)a_{3^k} + 2^{3^k \cdot 2}(2^{3^k \cdot 3t} - 1)(1 + 2^{3^k \cdot 2}(2^{3^k \cdot 3t} + 1)) \\ &= a_{3^k} + 2^{3^k}(2^{3^k} - 1)a_{3^k} + 2^{3^k \cdot 2}(2^{3^k} - 1)a_{3^k}(2^{3^{k \cdot 3(t-1)}} + ... + 1)(1 + 2^{3^k \cdot 2}(2^{3^k \cdot 3t} + 1)) \end{aligned}$$

па затоа $a_{3^k} \mid a_n$.

Значи и во двата случаи $a_{3^k} \mid a_n$, па затоа a_n не може да биде прост број. Според тоа, ако a_n е прост број тогаш $n = 3^k$ за некој природен број k.

13. За кои вредности на k, постои k - цифрен број n, чиј запис не ја содржи цифрата 0, кој е еднаков на збирот на два броја, добиени од бројот n со пермутација на неговите цифри?

Решение. 1) Јасно е дека едноцифрен број со тоа својство не постои;

2) Кај двоцифрените броеви имаме две пермутации на цифрите во бројот, па со собирање би требало да се добие една од нив. Но, тоа не е можно бидејќи броевите се различни од 0. Значи, не постои и двоцифрен број со бараното својство.

3) Трицифрен број со бараното својство постои. На пр. $954 = 495 + 459$;

4) Четирицифрен: $7614 = 1467 + 6147$;

5) Петцифрен: $71865 = 15678 + 56187$.

Натаму ќе докажеме дека за секој $k \geq 6$ таков број постои.

а) Ако $k = 3p$, $p \geq 2$ од 4) добиваме еден таков број:

$$\underbrace{954954\ldots954}_{p \text{ пати } 954} = \underbrace{459459\ldots459}_{p \text{ пати } 459} + \underbrace{495495\ldots495}_{p \text{ пати } 495};$$

б) За $k = 3p + 1 = 3(p-1) + 4$, $p \geq 2$ и од 4) и 5) добиваме број

$$\underbrace{954954\ldots954}_{p-1 \text{ пати } 954}7614 = \underbrace{459459\ldots459}_{p-1 \text{ пати } 459}1467 + \underbrace{495495\ldots495}_{p-1 \text{ пати } 495}6147;$$

в) Ако $k = 3p + 2 = 3(p-1) + 5$, $p \geq 2$ и од 4) и 6) бројот е

$$\underbrace{954954\ldots954}_{p-1 \text{ пати } 954}71865 = \underbrace{495495\ldots495}_{p-1 \text{ пати } 495}15678 + \underbrace{459459\ldots459}_{p-1 \text{ пати } 459}56187..$$

Значи број со бараното својство постои за $k \geq 3$.

14. Дадена е низата $x_1 = 1, x_2 = 4$ и $x_{n+2} = 4x_{n+1} - x_n, n \geq 1$. Определи ги сите природни броеви m такви, што бројот $3x_n^2 + m$ е точен квадрат за секој природен број n.

Решение. Карактеристичната равенка на дадената низа е $x^2 - 4x + 1 = 0$ и нејзини решенија се $x_{1/2} = 2 \pm \sqrt{3}$, Соред тоа, низата е од видот

$$x_n = A(2+\sqrt{3})^n + B(2-\sqrt{3})^n,$$

за некои константи A и B. Ако ги искористиме почетните услови $x_1 = 1$, $x_2 = 4$ наоѓаме $A = -B = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, т.е.

$$x_n = \frac{1}{2\sqrt{3}}[(2+\sqrt{3})^n - (2-\sqrt{3})^n].$$

Сега

$$3x_n^2 + 1 = \frac{1}{4}((2+\sqrt{3})^{2n} + (2-\sqrt{3})^{2n}) = [\frac{1}{2}((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n)]^2 = y_n^2,$$

каде

$$y_n = \frac{1}{2}((2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n)$$

е природен број. Според тоа, $m=1$ ги задоволува условите на задачата. Нека претпоставиме дека постои $m\neq 1$ кој исто така ги задоволува условите на задачата. Тогаш

$$3x_n^2+m=y_n^2+(m-1)=z_n^2,$$

($z_n\geq 0$) и точен квадрат за секој n. Значи,

$$m-1=z_n^2-y_n^2=(z_n-y_n)(z_n+y_n)$$

има бесконечно многу делители, што не е можно. Значи, единствено решение на задачата е $m=1$.

15. Определи го минималниот број бои со кои може да се обојат природните броеви од 1 до 2004 така што не постојат тројки различни еднобојни броеви a,b,c за кои $a\,|\,b$ и $b\,|\,c$.

Решение. Нека $f(n)$ е минималниот број бои со кои може да се обојат природните броеви од 1 до 2004 така што не постојат тројки различни еднобојни броеви a,b,c за кои $a\,|\,b$ и $b\,|\,c$. Ќе докажеме дека $f(n)=[\frac{k+1}{2}]$, каде $2^{k-1}\leq n<2^k$.

Јасно, во низата $1,2,2^2,...,2^{k-1}$ не може да има три еднобојни броеви, па затоа $f(n)\geq[\frac{k+1}{2}]$. Да ги нумерираме искористените бои со првите $[\frac{k+1}{2}]$ природни броеви и нека $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_t^{\alpha_t}\leq n$. Очигледно, $h(m)=\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_t<k$. Го боиме бројот m во бојата со број $[\frac{h(m)+1}{2}]$. Ако $a\,|\,b$ и $b\,|\,c$, тогаш важи $h(a)<h(b)<h(c)$, т.е. $h(c)-h(a)\geq 2$. Според тоа, броевите a и c се обоени со различни бои. Затоа $f(n)=[\frac{k+1}{2}]$. Конечно, за $n=2004$ добиваме $f(2004)=6$.

16. За природниот број q ќе велиме дека е добар именител за реалниот број α ако $|\alpha-\frac{p}{q}|<\frac{1}{10q}$ за некој цел број p. Докажи, декаако два ирационални броја α и β имаат еднакви множества добри именители, тогаш $\alpha+\beta$ или $\alpha-\beta$ е цел број.

Решение. Нека $q_1<q_2<...$ се сите добри именители за ирационалните броеви α и β. Јасно, за секој q_i постои единствен p_i таков што $|q_i\alpha-p_i|<\frac{1}{10}$. Бројот p_i ќе го наречеме добар броител соодветен на q_i. На почетокот ќе го разгледаме случајот кога $0<\alpha,\beta<\frac{1}{10}$. Нека $p_1<p_2<...$ се добрите броители за α, а $r_1<r_2<...$ се добрите броители на β. Со индукција ќе докажеме дека $p_i=r_i$ за секој $i\in\mathbb{N}$. Очигледно $p_1=r_1=0$. Нека $p_k=r_k$. Ако $q_{k+1}=q_k+1$, тогаш $p_{k+1}=p_k$ (бидејќи $|p_k\alpha-q_k|<\frac{1}{10}$ и $|p_{k+1}\alpha-q_{k+1}|<\frac{1}{10}$) и аналогно $r_{k+1}=r_k$. Според тоа, $p_{k+1}=r_{k+1}$. Ако $q_{k+1}>q_k+1$, тогаш $p_{k+1}=p_k+1$. Навистина во растечката аритметичка прогресија со почетен член $(q_k+1)\alpha$ и разлика $\alpha<\frac{1}{10}$ првиот член е помал од $(p_k+1)-\frac{1}{10}$ и затоа истото важи и за членовите кои се од

p_k+1 на растојание помало од $\frac{1}{10}$. Аналогно $r_{k+1}=r_k+1$, со што индуктивниот доказ е завршен. Од $|q_k\alpha-p_k|<\frac{1}{10}$ и $|q_k\beta-p_k|<\frac{1}{10}$ следува $|q_k(\alpha-\beta)|<\frac{1}{5}$ за секој k, па затоа $\alpha=\beta$.

Во случај кога α и β се произволни ги разгледуваме броевите $q_1\alpha$ и $q_1\beta$. Ако е потребно можеме да ги промениме знаците, па затоа можеме да сметаме дека $0<\{q_1\alpha\},\{q_1\beta\}<\frac{1}{10}$. За броевите $\{q_1\alpha\}$ и $\{q_1\beta\}$ е исполнет условот на задачата, па затоа $\{q_1\alpha\}=\{q_1\beta\}$. Последното значи дека бројот $q_1\alpha-q_1\beta=r$ е цел и затоа $\alpha-\beta=\frac{r}{q_1}$ е рационален број. Нека претпоставиме дека оваа разлика не е цел број. Тогаш бројот $\frac{r}{q_1}$ може да го помножиме со соодветен природен број k така што дробнот дел да се наоѓа во интервалот $(\frac{1}{3},\frac{2}{3})$. Сега ќе искористиме дека за произволни $0\le u<v\le 1$ и произволен рационален број θ може да се најде природен број n, за кој $\{nq_1\alpha\}$ се наоѓа меѓу $\{\frac{-kr}{q_1}-\frac{1}{10}\}$ и $\{\frac{-kr}{q_1}+\frac{1}{10}\}$. Тогаш бројот $(nq_1+k)\alpha$ се наоѓа до најблискиот цел број на растојание помало од $\frac{1}{10}$. Но, тогаш и $(nq_1+k)\beta$ ќе се наоѓа до најблискиот цел број на растојание помало од $\frac{1}{10}$, што противречи на условот

$$\{(nq_1+k)\alpha-(nq_1+k)\beta\}=\{nr+\tfrac{kr}{q_1}\}\in(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3}).$$

17. Со $\sigma(x)$ да го означиме збирот на делителите на природниот број x, вклучувајќи ги 1 и x. За секој $n\in\mathbb{N}$ нека $f(n)$ е бројот на природните броеви $m, m\le n$ за кои $\sigma(m)$ е непарен број. Докажи, дека постојат бесконечно многу природни броеви n такви што $f(n)\,|\,n$.

Решение. Ако $n=p_1^{r_1}p_2^{r_2}...p_k^{r_k}$ е факторизацијата на бројот n на прости множители, тогаш $\sigma(n)=\prod_{i=1}^{k}(1+p_i+...+p_i^{r_i})$. Бројот $\sigma(n)$ е непарен ако и само ако сите множители $1+p_i+...+p_i^{r_i}$ се непарни, што е еквивалентно со $p_i=2$ или $2\,|\,r_i$. Според тоа, $\sigma(n)$ е непарен ако и само ако n или $\frac{n}{2}$ е квадрат на природен број, од што следува $f(n)=[\sqrt{n}]+[\sqrt{\frac{n}{2}}]$.

Важи $f(n)\le f(n+1)$ за секој n. Исто така, количникот $\frac{n}{f(n)}$ не е ограничен, па затоа за секој $k\in\mathbb{N}$ постои најмал $n=n_k$ за кој $\frac{n}{f(n)}\ge k$. За $k>1$ важи $n_k>1$ и $\frac{n_k-1}{f(n_k-1)}<k$, од каде следува $n_k\ge kf(n_k)\ge kf(n_k-1)>n_k-1$. Ова е можно само ако првите две неравенства всушност се равенства, т.е. $f(n_k)\,|\,n_k=kf(n_k)$. Сите броеви n_k се различни, со што тврдењето е докажано.

18. Нека $m,n\in\mathbb{N}$ и
$$A(m,n)=m^{3^{4n}+6}-m^{3^{4n}+4}-m^5+m^3.$$
Определи ги сите природни броеви n за кои $A(m,n)$ е делив со 1992 за секој $m\in\mathbb{N}$.

Решение. Нека n е решение на задачата. Да забележиме дека $1992=2^2\cdot 3\cdot 83$ и
$$A(m,n)=m^3(m^2-1)(m^{3^{4n}+4}-1).$$
Лесно се докажува дека 24 е делител на $m^3(m^2-1)$. Според тоа, $A(m,n)$ е делив со 1992 ако и само ако $A(m,n)$ е делив со 83. Нека n е таков што $83\,|\,A(m,n)$ за секој $m\in\mathbb{N}$. Во случајов имаме $83\,|\,A(2,n)=2^{3^{4n}+1}-1$. Бидејќи степенот на 2 по модул 83 е 82 (провери!), заклучуваме дека $82\,|\,3^{4n}+1=81^n+1$. Лесно се проверува дека последното е исполнето ако и само ако n е непарен број.

Ќе докажеме дека најдениот потребен услов е и доволен, т.е. дека $83\,|\,A(m,n)$ за секој природен број m и за секој непарен природен број n. Случаите $m=1$ и $83\,|\,m$ се тривијални. Нека $m>1$ и $\text{NZD}(m,83)=1$. Тогаш $m^{82}\equiv 1(\text{mod}\,83)$, а од непарноста на n следува дека $82\,|\,3^{4n}+1$. Според тоа,
$$m^{3^{4n}+4}-1\equiv m^{82k}-1\equiv 0(\text{mod}\,83).$$

19. Определи ги сите природни броеви k, за кои производот на првите k прости броеви, намален за 1, е точен степен (поголем од еден) на природен број.

Решение. Нека $n\geq 2$ и $2=p_1<p_2<...<p_k$ се првите k прости броеви такви што $p_1p_2...p_k=a^n+1$. Ако $a=1$, тогаш $a^n+1=2$, па затоа $k=1$.

Нека сега $a>1$ и $k>1$. Бројот a е непарен, па затоа има непарен прост делител q. Очигледно $q>p_k$, па затоа и $a>p_k$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека n е прост број (ако $n=st$, можеме да го замениме n со t, а a со a^s). Освен тоа $n>2$, бидејќи a^2+1 не е делив со 3.

Ако $n>p_k$, тогаш $a^n+1>p_k^{p_k}>p_1p_2...p_k$, што не е можно.

Според тоа, $n\leq p_k$, т.е. $n=p_s$ за некој $s\in\{1,2,...,k\}$. Според условот важи $p_i\,|\,a^{p_i}+1$, а од малата теорема на Ферма следува $p_i\,|\,a^{p_i}-a$, па затоа $p_i\,|\,(a^{p_i}+1)-(a^{p_i}-a)=a+1$. Но, тогаш $a^{p_i}+1=(1+a)(1-a+...+a^{p_i-1})$ е делив со p_i^2, бидејќи $p_i\,|\,a+1$ и
$$1-a+...+a^{p_i-1}\equiv 1+1+...+1=p_i\equiv 0(\text{mod}\,p_i).$$

Според тоа, $p_1p_2...p_k=a^{p_i}+1$ е делив со p_i^2, што не е можно.

20. Определи ги сите природни броеви k за кои производот на првите k непарни прости броеви, намален за 1, е точен степен (поголем од еден) на природен број.

Решение. Ќе докажеме дека такви природни броеви k не постојат. Нека $n \geq 2$ и $3 = p_1 < p_2 < ... < p_k$ се првите k непарни прости броеви. Нека претпоставиме дека

$$p_1 p_2 ... p_k = a^n + 1 \tag{1}$$

за некој природен број a. Можни се два случаја.

Прв случај. Нека a е степен на бројот 2. Бидејќи степените на 2 при делење со 7 даваат остатоци 1, 2 и 4, а $a^n + 1$ се дели со 7 кога $k \geq 7$, заклучуваме дека $k \leq 2$. Можни вредности се $3-2$ и $3 \cdot 5 - 1 = 14$, но и двете не се точни степени на природен број.

Втор случај. Нека a има непарен прост делител q. Тогаш $q > p_k$, бидејќи во спротивен случај левата страна на (1) е делива со q, а десната страна на (1) не е делива со q. Значи, $a > p_k$.

Без ограничување на општоста можеме да сметаме, дека n е прост број, бидејќи ако $n = st$, тогаш можеме n да го замениме со t, а a да го замениме со a^s. Понатаму, $n > 2$, бидејќи $a^2 + 1$ не е делив со $3 = p_1$.

Ќе докажеме, дека $n > p_k$. Навистина, во спротивен случај имаме $n = p_i$, за некој $i \in \{1, 2, ..., k\}$. Тогаш $p_i \mid a^{p_i} + 1$, а од малата теорема на Ферма следува дека $p_i \mid a^{p_i} - a$. Според тоа $p_i \mid (a^{p_i} + 1) - (a^{p_i} - a) = a + 1$. Но, тогаш

$$a^{p_i} + 1 = (1 + a)(1 - a + ... + a^{p_i - 1})$$

е делив со p_i^2, бидејќи $p_i \mid a + 1$ и

$$1 - a + ... + a^{p_i - 1} \equiv 1 + 1 + ... + 1 = p_i \equiv 0 (\text{mod } p_i).$$

Според тоа, $p_1 p_2 ... p_k = a^{p_i} + 1$ е делив со p_i^2, што не е можно.

Добивме, дека $a > p_k$ и $n > p_k$, па затоа $a^n + 1 > p_k^{p_k} + 1 > p_1 p_2 ... p_k$, што противречи на (1).

21. Да се определи петцифрен природен број n таков што збирот на неговите цифри е минимален и $n^3 - 1$ е делив со 2556.

Решение. Бидејќи $2556 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 71$ имаме $n^3 \equiv 1 (\text{mod } 2^2 \cdot 3^2 \cdot 71)$. Освен тоа, од малата теорема на Ферма следува $n^{70} \equiv 1 (\text{mod } 71)$, па затоа

$$1 \equiv n \cdot n^{69} \equiv n(n^3)^{23} \equiv n (\text{mod } 71) \; .$$

Според тоа, $71 \mid n - 1$. Од $n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$ и фактот дека $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$ е непарен број следува дека $4 \mid n - 1$. Сега, ако $3 \nmid n - 1$, тогаш $3 \mid n(n+1)$, па затоа $3 \nmid n(n+1) + 1$, т.е. $3 \nmid n^3 - 1$, што е противречност. Од досега изнесеното следува дека $n - 1$ е делив со 3, 4 и 71, па затоа важи

$$n=3\cdot 4\cdot 71k+1=852k+1.$$

Ќе докажеме дека бараниот број со најмал збир на цифрите е бројот

$$n=852\cdot 25+1=21301.$$

Бидејќи последната цифра на $852k$ не може да биде 9, доволно е да најдеме петцифрен природен број од видот $852k$ со најмал збир на цифри. Бидејќи тој број е делив со 3, потребно е збирот на цифрите да е делив со 3. Освен тоа, последните две цифри треба да формираат број кој е делив со 4. Ако збирот на цифрите е 3, тогаш единствена можност е тој број да е од видот $\overline{abc20}$, каде $a+b+c=1$, од што следува $a=1, b=c=0$. Но, 10020 не е делив со 71. Сега, ако збирот на цифрите е еднаков на 6, тогаш лесно следува дека бараниот број е 21301.

22. Нека p е непарен прост број. Докажи дека

$$1^{p-2}+2^{p-2}+...+(\tfrac{p-1}{2})^{p-2}\equiv \tfrac{2-2^p}{p} (\text{mod } p).$$

Решение. Нека $\text{NZD}(a,p)=1$, a е фиксиран, и за секој $v\in\{1,2,...,p-1\}$ да го поделиме av со p и остаток и да ставиме $av=pq_{a,v}+r_{a,v}$. Лесно се покажува дека остатоците $r_{a,v}$ се ненулти и дека се по парови различни, што значи дека го формираат множеството $\{1,2,...,p-1\}$. Нека $T(a)=\frac{a^{p-1}-1}{p}$, за $\text{NZD}(a,p)=1$. Имаме

$$T(av)=\frac{(av)^{p-1}-1}{p}=\frac{(pq_{a,v}+r_{a,v})^{p-1}-1}{p}\equiv T(r_{a,v})-q_{a,v}(av)^{p-2}.$$

Според тоа,

$$\begin{aligned}\sum_{v=1}^{p-1}T(av)&\equiv\sum_{v=1}^{p-1}(T(r_{a,v})-q_{a,v}(av)^{p-2})\\&\equiv\sum_{v=1}^{p-1}T(v)-\sum_{v=1}^{p-1}q_{a,v}(av)^{p-2}(\text{mod } p)\end{aligned}.$$

Од друга страна, лесно се гледа, дека

$$T(ab)-T(a)-T(b)=pT(a)T(b), \text{ т.е. } T(ab)\equiv T(a)+T(b)(\text{mod } p).$$

Тогаш

$$\sum_{v=1}^{p-1}T(av)\equiv(p-1)T(a)+\sum_{v=1}^{p-1}T(v)(\text{mod } p)$$

и следствено

$$T(a)\equiv\sum_{v=1}^{p-1}q_{a,v}(av)^{p-2}(\text{mod } p).$$

Во случајов, за $a=2$ имаме

$$\begin{aligned}\frac{2^p-2}{p}=2T(2)&\equiv(2^{p-1}-1+1)\sum_{v=1}^{p-1}q_{2,v}v^{p-2}\equiv\sum_{v=1}^{p-1}q_{2,v}v^{p-2}\\&\equiv\sum_{v>\frac{p}{2}}v^{p-2}\equiv-\sum_{v=1}^{\frac{p-1}{2}}v^{p-2}(\text{mod } p)\end{aligned}$$

со што тврдењето е докажано.

23. За секој природен број n со канонично претставување $n = p_1^{a_1} p_2^{a_2} ... p_t^{a_t}$ ставаме

$$\omega(n) = t, \quad \Omega(n) = a_1 + a_2 + ... + a_t .$$

Докажи го или оповргни го следново тврдење: За дадени произволен природен број k и произволни позитивни реални броеви α и β постои природен број n, за кој

$$\tfrac{\omega(n+k)}{\omega(n)} > \alpha \ , \ \tfrac{\Omega(n+k)}{\Omega(n)} < \beta \ .$$

Решение. Ќе докажеме дека тврдењето е точно. Од дефиницијата на ω и Ω следува, дека за секои природни броеви a и b важи:

$$\omega(ab) \le \omega(a) + \omega(b) , \tag{1}$$

$$\Omega(ab) = \Omega(a) + \Omega(b) . \tag{2}$$

За дадени природен број k и позитивни реални броеви α и β избираме природен број $m > (\omega(k)+1)\alpha$. Можеме да избереме доволно голем прост број p таков што $\frac{\Omega(k)+1}{p^m} + \log_p 2 < \beta$ и m различни прости броеви $q_1, q_2, ..., q_m$ секој од кои е поголем од p . Ќе докажеме дека бројот $n = 2^{q_1 q_2 \cdots q_m} k$ го има саканото својство.

Прво ќе докажеме дека $\frac{\omega(n+k)}{\omega(n)} > \alpha$. Бидејќи $q_1, q_2, ..., q_m$ се непарни прости броеви, добиваме дека за $n_1 = \frac{n+k}{k} = 2^{q_1 q_2 \cdots q_m} + 1$ важи $2^{q_1} \mid n_1$ и $d_i = \frac{2^{q_i}+1}{3}$ е природен број. Познато е дека за произволни природни броеви r и s важи

$$\mathrm{NZD}(2^r - 1, 2^s - 1) = 2^{\mathrm{NZD}(r,s)} - 1 . \tag{3}$$

Бидејќи $\mathrm{NZD}(q_i, q_j) = 1,$ за $i \ne j$, добиваме

$$\begin{aligned} \mathrm{NZD}(d_i, d_j) &= \tfrac{1}{3} \mathrm{NZD}(2^{q_i} + 1, 2^{q_j} + 1) \\ &\le \tfrac{1}{3} \mathrm{NZD}(2^{2q_i} - 1, 2^{2q_j} - 1) \\ &= \tfrac{2^{\mathrm{NZD}(2q_i, 2q_j)}}{2} = \tfrac{2^2 - 1}{3} = 1. \end{aligned}$$

Значи, $d_1, d_2, ..., d_m$ се различни заемно прости делители на n_1 , па затоа $\omega(n_1) \ge m$. Од (1) и од изборот на m сега добиваме

$$\tfrac{\omega(n+k)}{\omega(n)} \ge \tfrac{\omega(n_1)}{\omega(n)} \ge \tfrac{\omega(n_1)}{\omega(k)+1} \ge \tfrac{m}{\omega(k)+1} > \alpha \ .$$

Останува да докажеме дека $\frac{\Omega(n+k)}{\Omega(n)} < \beta$. Бидејќи $q_1 q_2 ... q_m$ е непарен и не е делив со 3, важи $n_1 = 2^{q_1 q_2 \cdots q_m} + 1 \equiv \pm 3 (\mathrm{mod}\, 9)$, т.е. $3 \mid n_1$. Да претпоставиме дека q е прост делител на $\frac{n_1}{3}$ и $q \le p$. Тогаш

$$2^{2 q_1 q_2 \cdots q_m} - 1 = (2^{q_1 q_2 \cdots q_m} - 1) n_1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, q) .$$

Од малата теорема на Ферма следува дека $2^{q-1} \equiv 1 (\bmod q)$ и од (3) имаме $3 \mid 2^{2q_1q_2...q_m} - 1$. Бидејќи

$$\mathrm{NZD}(q-1, 2q_1q_2...q_m) = \mathrm{NZD}(q-1, 2) = 2 \text{ и } q-1 < p < q_i,\ i = 1, 2, ..., m$$

следува, дека $q \mid 2^2 - 1 = 3$, т.е. $q = 3$. Последното противречи на $3 \mid n_1$ и следствено секој прост делител на $\frac{n_1}{3}$ е поголем од p. Тогаш $\frac{n_1}{3} \geq p^{\Omega(\frac{n_1}{3})}$ и од (2) и од изборот на $p, q_1, q_2, ..., q_m$ имаме

$$\begin{aligned}\Omega(n+k) &= \Omega(k) + \Omega(3) + \Omega(\tfrac{n_1}{3})\\ &< \Omega(k) + 1 + \log_p \tfrac{n_1}{3}\\ &< \Omega(k) + 1 + \log_p (n_1 - 1)\\ &= \Omega(k) + 1 + q_1q_2...q_m \log_p 2.\end{aligned}$$

Според тоа,

$$\frac{\Omega(n+k)}{\Omega(n)} < \frac{\Omega(k)+1+q_1q_2...q_m \log_p 2}{q_1q_2...q_m} < \frac{\Omega(k)+1}{p^m} + \log_p 2 < \beta .$$

24. Нека n е природен број. Правоаголник со должини на страни $90n+1$ и $90n+5$ е поделен на единечни квадрати со страни паралелни на страните на правоаголникот. Нека S е множеството од сите темиња на овие единечни квадрати. Докажи, дека бројот на правите кои содржат барем две точки од множеството S е делив со 4.

Решение. Нека поставиме координатен систем со координатен почеток во центарот O на квадратот и x оска паралелна на подолгата страна на правоаголникот. Множеството P од разгледуваните прави да го поделиме на две групи.

1) Прави кои не минуваат низ точката O. Има $(90n+2)+(90n+6)$ прави паралелни на една од координатните оски и овој број е делив со 4. За секоја од останатите прави кои минуваат низ точката O, правите кои се симетрични на неа во однос на координатните оски и во однос на точката O исто така припаѓаат на множеството P, па затоа множеството од овие прави е унија на дисјунктни четириелементни множества. Затоа, бројот на правите кои не минуваат низ точката O е делив со 4.
2) Прави кои минуваат низ точката O. Секоја права низ O која содржи некоја точка од S ја содржи и нејзината симетрична точка, па затоа припаѓа на P, а нејзиниот коефициент на правец е рационален број $\frac{p}{q}$, каде p и q се непарни цели броеви такви што $|p| \leq 90n+1,\ 0 < q \leq 90n+5$ и $\mathrm{NZD}(p,q) = 1$. Правите од оваа група ги делиме на три подгрупи:

   а) Две прави $l_1(x = y), l_2(x = -y)$.

   б) За секоја права која минува низ O со коефициент на правец $\frac{p}{q}$ за $|p| \leq 90n+1$ и $0 < q \leq 90n+1$, различна од l_1 и l_2, правите симетрични на неа во однос на правите x, l_1 и l_2 припаѓаат на множеството P, па затоа множеството од овие прави е унија на дисјунктни четириелементни множества.

в) Останувaат правите кои минуваат низ O и имаат коефициент на правец $\frac{p}{q}$ за кој $q \in \{90n+3, 90n+5\}$. Бидејќи $NZD(x,q)=1$ и $2 \nmid x$ ако и само ако $\mathrm{NZD}(q, q-x)=1$ и $2 \mid q-x$, заклучуваме дека непарни природни броеви кои се помали или еднакви на q и се заемно прости со q има исто колку што има и парни, па затоа нивниот број е $\frac{1}{2}\varphi(q)$. Според тоа, за $q=90n+3$ бројот на овие прави е $\varphi(90n+3)$, додека за $q=90n+5$ нивниот број е $\varphi(90n+4)-2$, бидејќи треба да се исклучат правите со коефициент на агол $\pm\frac{90n+3}{90n+5}$. Бидејќи $4 \mid \varphi(3)\varphi(30n+1)=\varphi(90n+3)$ и $4=\varphi(5) \mid \varphi(90n+5)$, добиваме дека бројот на овие прави е од облик $4k-2$.

Од а), б) и в) следува дека бројот на правите кои минуваат низ точката O е делив со 4.

Конечно, од 1) и 2) следува дека бројот на правите кои содржат барем две точки од множеството S е делив со 4.

25. Докажи дека за секој природен број n постојат природни броеви $a_1 < a_2 < ... < a_n$ такви, што

$$\varphi(a_1) > \varphi(a_2) > ... > \varphi(a_n).$$

Решение. Индуктивно ќе конструираме низа со саканото својство. За $n=1$ тврдењето е тривијално.

Нека природните броеви $a_1 < a_2 < ... < a_n$ се такви, што $\varphi(a_1) > \varphi(a_2) > ... > \varphi(a_n)$. Со p_i да го означиме $i-$тиот прост број. Нека p_N е најголемиот меѓу сите прости делители на броевите $a_1, a_2, ..., a_n$. Тогаш секој природен број x чии прости делители се поголеми од p_N е заемно прост со секој од броевите $a_1, a_2, ..., a_n$. Последното значи дека низата $a_1x < a_2x < ... < a_nx$ исто така го има саканото својство, бидејќи $\varphi(a_ix) = \varphi(a_i)\varphi(x)$.

Сега, ќе најдеме таков x и ќе избереме природен број y таков, што $y < a_1x$ и $\varphi(y) > \varphi(a_1x)$, од што ќе следува дека тврдењето важи и за $n+1$.

Прво ќе докажеме дека постои x таков, што $\frac{a_1x}{\varphi(a_1x)} > 4$, т.е. $\frac{x}{\varphi(x)} > 4\frac{\varphi(a_1)}{a_1}$. Нека $x_m = p_{N+1}p_{N+2}...p_{N+m}$, каде m е природен број. Тогаш

$$\frac{x_m}{\varphi(x_m)} = \prod_{i=N+1}^{N+m} \frac{p_i}{p_i-1} = \prod_{i=N+1}^{N+m} \left(1+\frac{1}{p_i-1}\right) \geq \sum_{i=N+1}^{N+m} \frac{1}{p_i-1}.$$

Бидејќи $\sum_{i=N+1}^{N+m} \frac{1}{p_i-1} \to \infty$ кога $m \to \infty$, постои m таков, што $\frac{x_m}{\varphi(x_m)} > 4\frac{a_1}{\varphi(a_1)}$. Сега доволно е да земеме $x = x_m$.

Да забележиме дека од $\frac{a_1x}{\varphi(a_1x)} > 4$ следува, дека за природниот број t таков што $2^{t-2} < \varphi(a_1x) < 2^{t-1}$ важи $\varphi(a_1x) < 2^{t-1} < 2^t < a_1x$. Сега, доволно е земеме $y = 2^t$ и низата $y < a_1x < a_2x < ... < a_nx$ го има саканото својство.

26. Нека $n \geq 2$ е природен број. Со $f(n)$ да го означиме збирот на сите природни броеви кои се помали или еднакви на n и кои не се заемно прости со n. Докажи, дека $f(n+p) \neq f(n)$, за секој $n \geq 2$ и за секој прост број p.

Решение. Ненегативни цели броеви кои не се заемно прости со n и кои се помали или еднакви на n има $n+1-\varphi(n)$. Понатаму, ако r е таков број, тогаш и $n-r$ е таков број, па затоа важи $f(n) = \frac{1}{2}n(n+1-\varphi(n))$. Нека претпоставиме дека $f(n+p) = f(n)$. Јасно, n и $n+p$ се делители на бројот $2f(n) < n(n+p)$, па затоа тие не се заемно прости. Според тоа, $n = kp$, за некој $k \in \mathbb{N}$, па затоа равенството $f(n) = f(n+p)$ го добива обликот

$$k(kp+1-\varphi(kp)) = (k+1)(kp+p-1+\varphi(kp+p)),$$

од каде добиваме

$$kp+1-\varphi(kp) = (k+1)x \text{ и } kp+p+1-\varphi(kp+p) = kx, \qquad (1)$$

за некој $x \in \mathbb{N}, x < p$. Сега (1) добиваме $x = \varphi(kp+p) - \varphi(kp) - p$. Бидејќи $\varphi(kp)$ и $\varphi(kp+p)$ се деливи со $\varphi(p) = p-1$, од последното равенство следува дека $x \equiv -1(\bmod p-1)$.

Ако $p = 2$ или $p = 3$, тогаш $x = 1$, што во првиот случај во (1) дава $\varphi(2k+2) = k+3$, а во вторито случај $\varphi(3k+3) = 2k+4$. Јасно, и двата случаи не се можни бидејќи $\varphi(2k+2) \leq k+1$ и $\varphi(3k+3) \leq 2k+2$. Значи, $p \geq 5$ и $x = p-2$, па ако замениме во (1) добиваме

$$\varphi(kp) = 2k+3-p \text{ и } \varphi(kp+p) = 2k+1+p. \qquad (2)$$

Ако $p \mid k$, тогаш $p \mid \varphi(kp)$, па затоа $p \mid 2k+3$ и оттука $p \mid 3$, што не е можно. Значи, $p \nmid k$. Слично, $p \nmid k+1$. Оттука

$$\varphi(pk) = (p-1)\varphi(k) \text{ и } \varphi(kp+p) = (p-1)\varphi(k+1),$$

па од (2) следува

$$\varphi(k)+1 = \varphi(k+1)-1 = \tfrac{2k+2}{p-1}.$$

Барем еден од броевите $\varphi(k)$ и $\varphi(k+1)$ не е делив со 4 (зошто?). Овој број да го означиме со $\varphi(t)$. Последното е можно ако $t \in \{1,2,4\}$ или $t \in \{q^i, 2q^i\}$ за некој прост број $q > 2$ и $i \in \mathbb{N}$. Случаите $t = 1,2,4$ ги исклучуваме со непосредна проверка. Од друга страна, ако на пример $t = k = q^i$, тогаш

$$\varphi(q^i)+1 = q^{i-1}(q-1)+1$$

е делител на $2q^i + 2$, а тоа не е можно бидејќи

$$q^i + 1 > q^{i-1}(q-1)+1 > \tfrac{2}{3}(2q^i+2).$$

Аналогно се покажува дека и останатите три случаи не се можни.

27. На правата се запишани неколку природни броеви. Во еден чекор ги избираме сите парови од последователни броеви на правата и за парот (a,b) во средината на отсечката меѓу броевите a и b го запишуваме бројот $a+b$. Колку пати по 2013 чекори е запишан бројот 2013, ако:

а) дадените броеви се 1 и 1000,

б) дадените броеви се 1, 2, ..., 1000 запишани во растечки редослед од лево на десно.

Решение. а) Да забележиме, дека бројот 2013 не може да се појави на правата за парот (a,b), ако $a+b>2013$. Лесно се покажува дека по 2013 чекори бројот 2013 се запишува само двапати и тоа во $8-$миот и $2013-$ тиот чекор.

б) Да го додадеме на правата бројот 1 по бројот 1000. Ќе преброиме колку пати се среќава бројот 2013 на новата права по 2013 чекори. Конструираме индуктивно низа A од парови броеви. Прво избираме

$$A=\{(1,2),\{2,3),...,(999,1000),(1000,1)\}$$

и на секој чекор при запишување на бројот $k=a+b$ за парот (a,b) во множеството A додаваме два нови парови (a,k) и (k,b).

Со индукција по $a+b$ ќе докажеме дека подредениот пар (a,b) се појавува во множеството A само кога $\mathrm{NZD}(a,b)=1$ и секогаш кога $\mathrm{NZD}(a,b)=1$ парот (a,b) се појавува точно еднаш во множеството A. Базата на индукцијата се проверува директно. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за $a+b<k$. Ќе докажеме дека тоа е точно за $a+b=k$. Парот (a,b) се додава во A кога го запишуваме бројот b меѓу броевите од парот $(a,b-a)$. Бидејќи $a+(b-a)= \ b<k$, добиваме дека парот $(a,b-a)$ е во множеството само ако $\mathrm{NZD}(a,b-a)=1$ и ако $\mathrm{NZD}(a,b-a)=1$, тогаш парот $(a,b-a)$ се појавува точно еднаш. Бидејќи $\mathrm{NZD}(a,b)=\mathrm{NZD}(a,b-a)$ твдењето е точно и за $a+b=k$, со што доказот е завршен.

Според тоа, бројот на запишувања на бројот 2013 е еднаков на паровите $(a,2013-a)$ за кои $\mathrm{NZD}(a,2013-a)=1$. Тоа значи, дека 2013 се запишува точно $\varphi(2013)=1200$ пати.

Од а) имаме дека 2013 меѓу 1 и 1000 се запишува двапати. Значи, на почетната права 2013 е запишан $1200-2=1198$ пати.

28. Нека $n\in\mathbb{N}$ и $S_n=1!+2!+...+n!$. Докажи, дека постои n за кој бројот S_n има прост делител поголем од 10^{2012}.

Решение. За прост број p и природен број n со $v_p(n)$ да го означиме степенот на p во каноничното разложување на прости множители на бројот n. Притоа, ако $v_p(n)\neq v_p(k)$, тогаш $v_p(n\pm k)=\min\{v_p(n),v_p(k)\}$.

Нека го претпоставиме спротивното и нека $P=10^{2012}$. Тогаш сите прости делители на броевите од видот S_n не се поголеми од P. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Ако за некој $n \in \mathbb{N}$ важи $v_p(S_n) < v_p((n+1)!)$, тогаш $v_p(S_k) = v_p(S_n)$, за секој $k \geq n$.

Доказ. Ако $a = v_p(S_n), b = v_p((n+1)!)$, тогаш $b \geq a+1$. Имаме

$$S_k = S_n + (n+1)! + \ldots + k!,$$

при што во овој збир првиот собирок е делив со p^a, но не е делив со p^{a+1}, а сите останати собирци се деливи со p^{a+1}. Според тоа, S_k е делив со p^a, но не е делив со p^{a+1}, па затоа $v_p(S_k) = a = v_p(S_n)$. ■

Да разгледаме прост број $p \leq P$. Според лемата, ако $v_p(S_n) < v_p((n+1)!)$, за некој n, тогаш постои број a_p таков што $v_p(S_n) \leq a_p$ за секој природен број n. Простиот број со ова својство ќе го наречеме *мал.* Сите останати прости броеви кои се помали од P ќе ги наречеме *големи.* Бидејќи имаме конечно многу мали прости броеви, постои природен број M кој е поголем од секој број од видот p^{a_p}, каде p е мал прост број.

Да разгледаме голем прост број p и нека n е таков што $n+2$ е делив со p. Од лемата следува

$$v_p(S_{n+1}) \geq v_p((n+2)!) > v_p((n+1)!)$$

и затоа

$$v_p(S_n) = v_p(S_{n+1} - (n+1)!) = v_p((n+1)!) = v_p(n!),$$

при што последното равенство е точно бидејќи $n+1$ не е делив со p.

Да го разгледаме бројот $N = P!M - 2$. Од претходно изнесеното следува дека $v_p(S_N) = v_p(N!)$, за секој голем прост број p. Освен тоа, бидејќи $N \geq M$, важи $v_p(S_N) \leq v_p(p^{a_p}) \leq v_p(N!)$, за секој прост број p. Бидејќи сите прости делители на S_N се или мали или големи, добиваме дека $S_N \leq N!$, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува, дека постои природен број n за кој бројот S_n има прост делител поголем од 10^{2012}.

29. Определи ги сите парови природни броеви (n, p) такви што

1) p е прост број,
2) $n \leq 2p$ и
3) $n^{p-1} \mid (p-1)^n + 1$.

Решение. Единствени решенија за $n < 3$ или $p < 3$ се $(2,2)$ и $(1, p)$ за произволен прост број p. Понатаму, ќе сметаме дека p, а со само тоа и n е непарен број.

Нека q е најмалиот прост делител на бројот n. Од $q \mid (p-1)^n + 1 \mid (p-1)^{2n} - 1$ следува дека редот k на бројот $p-1$ по модул q е делител на $2n$. Од друга страна, знаеме дека $k \mid q-1$, па затоа $k \mid \text{NZD}(2n, q-1) = 2$. Според тоа,

$q\,|\,(p-1)^2-1=p(p-2)$. Притоа не е можно $q\,|\,p-2$, бидејќи тогаш

$$(p-1)^n+1\equiv 2(\operatorname{mod} q)\,.$$

Значи, $q=p$ и бидејќи $n<2p$ заклучуваме дека $n=p$. Сега, од 3) следува дека

$$p^{p-1}\,|\,(p-1)^p+1=p^p-\binom{p}{1}p^{p-1}+\binom{p}{2}p^{p-2}-...-\binom{p}{p-2}p^2+\binom{p}{p-1}p\,. \qquad (1)$$

Меѓутоа, на десната страна во (1) сите собирци освен последниот се деливи со p^3, па затоа $p^3 \nmid (p-1)^p+1$. Затоа $p=3$. Навистина, парот $(n,p)=(3,3)$ ги задоволува условите на задачата.

30. Даден е прост број p. Докажи, дека постои прост број q таков што за секој цел број n бројот n^p-p не е делив со q.

Решение. Нека претпоставиме дека за секој прост број q постои цел број n таков што $n^p\equiv p(\operatorname{mod} q)$. Знаеме дека за $q\not\equiv 1(\operatorname{mod} p)$ степените на n^p ги даваат сите можни остатоци по модул q. Затоа бројот q ќе го побараме во облик $q=kp+1, k\in\mathbb{N}$. Бидејќи $p^k\equiv n^{kp}=n^{q-1}\equiv 1(\operatorname{mod} q)$, добиваме дека $q\,|\,p^k-1$ за секој таков q.

Нека q е прост делител на бројот $N=\frac{p^p-1}{p-1}=p^{p-1}+p^{p-2}+...+p+1$. Бидејќи $q\nmid p-1$ од $N\equiv p\equiv 1(\operatorname{mod} p-1)$, следува дека редот на бројот p по модул q е p, па навистина $q=kp+1$ за некој k. Сега од $q\,|\,\text{NZD}(p^k-1,p^p-1)$ следува дека $q\,|\,p^{\text{NZD}(p,k)}-1$, па затоа $\text{NZD}(p,k)>1$, т.е. $p\,|\,k$. Понатаму, од $q=kp+1$ и $p\,|\,k$ следува дека $q\equiv 1(\operatorname{mod} p^2)$. Последното значи дека сите прости делители на бројот N се од видот p^2x+1, што не е можно бидејќи $N\not\equiv 1(\operatorname{mod} p^2)$.

31. Докажи, дека меѓу произволни 100000 последователни природни 100-цифрени броеви постои број n за кој периодот на дропката $\frac{1}{n}$ е поголем од 2011.

Решение. Да забележиме дека ако $n=2^a5^bt$, каде $\text{NZD}(t,10)=1, t>1$, тогаш периодот на дропка од видот $\frac{m}{n}$ е делив со 10 по модул t. Според тоа, доволно е да најдеме број $t<100000$ за кој степенот на 10 по модул t е поголем од 2011. Еден таков број е $7^4=2401$. Навистина, степенот на 10 по модул 7^4 е $\varphi(7^4)=7^3\cdot 6=2058$ (провери!).

Забелешка. Горното кратко решение се базира на фактот, дека 10 е примитивен корен по модул $7^4=2401$. Последното може да се види со непосредна проверка, но тоа следува и од општото тврдење, дека ако g е примитивен корен по модул p (p е непарен прост број) и $g^{p-1}\not\equiv 1(\operatorname{mod} p^2)$, тогаш g е примитивен корен по модул p^k, за секој $k\in\mathbb{N}$. Нашиот случај е $p=7, g=10$ и $k=4$. Изборот на 7^4 не е неприроден, бидејќи тоа е првиот степен на мал непарен прост број, кој е поголем од 2011 и ги задоволува условите.

32. Даден е прост број $p > 3$. За произволно множество $S \subseteq \mathbb{Z}$ и $a \in \mathbb{Z}$, нека

$$S_a = \{x \in \{0,1,2,...,p-1\} \mid (\exists s \in S),\ x \equiv as(\text{mod}\ p)\}.$$

а) Определи го бројот на множествата $S \subseteq \{1,2,...,p-1\}$ такви што низата $S_1, S_2, ..., S_{p-1}$ содржи точно два различни члена.

б) Определи ги сите вредности на бројот $k \in \mathbb{N}$ за кои постои множество $S \subseteq \{1,2,...,p-1\}$ такво што низата $S_1, S_2, ..., S_{p-1}$ содржи точно k различни членови.

Решение. Нека g е примитивен корен по модул p. Множествата $S_1, S_2, ..., S_{p-1}$ се множествата $S_1, S_g, ..., S_{g^{p-2}}$ во некој редослед. Низата $S_1, S_g, S_{g^2}, ...$ има период $p-1$, па затоа нејзиниот минимален период е делител на $p-1$. Притоа множествата $S_1, S_g, ..., S_{g^{d-1}}$ се по парови различни (ако $S_{g^i} = S_{g^j}$, тогаш $S_1 = S_{g^{|i-j|}}$). Понатаму, сите множења се по модул p.

б) Од претходно изнесеното следува дека $k \mid p-1$. Од друга страна, ако $k \mid p-1$ тогаш можеме да земеме $S = \{1, g^k, g^{2k}, ...\}$.

а) Минималниот период на низата $S_1, S_g, S_{g^2}, ...$ е 2, па затоа $S_0 = S_2 \neq S_1$. Тоа значи, дека од $x \in S$ следува $q^2 x \in S$. Ако $a, ga \in S$, тогаш од претходно изнесеното следува дека $g^n a \in S$, за секој $n \in \mathbb{N}_0$, т.е. $S = \{1,2,...,p-1\}$ што не е можно. Според тоа, од $x \in S$ следува $gx \notin S$ и $q^2 x \in S$. Оттука следува дека S е едно од множествата $\{1, g^2, g^4, ..., g^{p-3}\}$ и $\{g^3, g^5, ..., g^{p-2}\}$, т.е. постојат две такви множества.

VII КОМБИНАТОРИКА

1. БОЕЊА И ПОКРИВАЊА

1. Дали може табла 11×11, од која е отстрането едно аголно поле, да се покрие со прави тетраминакои не се преклопуваат и не излегуваат надвор од таблата?

Решение. Да ја обоиме таблата во чеири бои 1, 2, 3 и 4, како што е прикажано на цртежот десно. Тогаш како и да се постави секое тетрамино покрива точно по едно поле обоено со секоја од четирите бои. Затоа за да се покрие таблата од секоја боја треба да имаме по $120:4=30$ бои. Меѓутоа, со бојата 1 се обоени 29 полиња, па затоа бараното покривање не е можно.

1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	1
4	1	2	3	4	1	2	3	4	1	2
1	2	3	4	1	2	3	4	1	2	3
2	3	4	1	2	3	4	1	2	3	4
3	4	1	2	3	4	1	2	3	4	

2. Табла со диманзии 6×6 е покриена со домина кои не се преклопуваат и не излегуваат од таблата. Да се докаже дека меѓу петтте хоризонтални и петте вертикални прави со кои е поделена таблата постои права која не пресекува ниту едно домино.

Решение. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека таква права не постои, односно дека секоја од правите сече барем едно домино. Да забележиме дека ако некоја права пресекува едно домино тогаш таа мора да пресекува барем уште едно домино (Зошто?). Затоа секоја од правите пресекува најмалку по 2 домина, т.е. 10-те прави пресекуваат најмалку $10\cdot2=20$ домина, Според тоа, домината покриваат најмалку $20\cdot2=40$ полиња, што не можно бидејќи таблата има 36 полиња.

Конечно, од добиената противречност следува дека постои права која не сече ниту едно домино.

3. Квадратна табла со димензии 2004×2004 е покриена со домина од облик 1×4 кои не се преклопуваат и не излегуваат надвор од таблата. Дали постои покривање во кое бројот на хоризонтално поставени домина е еднаков на бројот на вертикално поставени домина?

Решение. Нека претпоставиме дека е дадено покривање во кое бројот на хоризонтално поставени домина и бројот на вертикално поставени домина е еднаков, т.е. имаме 502002 домина кои се хоризонтално и 502002 домина кои се вертикално поставени.

Почнувајќи од првиот најгорен ред секој четврти ред ќе го обоиме со црвена боја. Според тоа, бројот на полиња кој е обоен во црвено е еднаков на $501\cdot2004$, што значи дека овој број е делив со 4. Секое хоризонтално поставено домино покрива или 0 или 4 црвени полиња. Според тоа, бројот на црвени полиња кој е препокриен со хоризонтално поставените домина е делив со 4. Секое вертикално поставено домино покрива едно црвено поле. Бројот на вертикално поставените домина е еднаков на 502002, па според тоа, бројот на вертикално поставени домина покрива 502002 црвени полиња. Бројот 502002 не е делив со 4. Според тоа, бројот на црвени полиња кој е препокриен со доминатa е број делив кој не е делив со 4, што противречи на фактот дека бројот на црвените полиња е делив со 4. Конечно, од добиената противречност следува дека не постои покривање со еднаков број хоризонтално и вертикално поставени полиња.

4. Секој природен број е обоен во една од две бои, црна или бела. Збирот на било кои два различно обоени броеви е обоен во црна боја, додека нивниот производ е број кој е обоен во бела боја. Во каква боја е обоен производот на два бело обоени броја. Определи ги сите вакви боења?

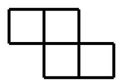
Решение. Нека a и b се два бели броја. Ќе докажеме дека ab е бел број.

Нека c е произволен црн број. Тогаш бројот $a+c$ е црн и $ab+bc=(a+c)b$ е бел број. Јасно bc е бел број. Нека претпоставиме дека ab е црн број, тогаш според условот $ab+bc$ е црн број, што противречи на тоа што $(a+c)b$ е бел број . Значи ab е бел број.

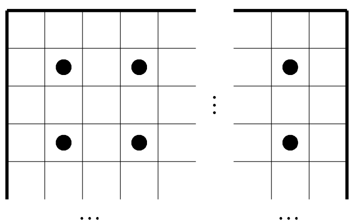
Нека c е најмалиот бел број, тогаш според условот и претходно кажаното имаме дека сите броеви од облик kc, $k\in\mathbb{N}$ се исто така бели броеви. Ќе докажеме дека други бели броеви не постојат.

Нека претпоставиме дека x е бел број и $x=kc+r$, $0\le r<c$. Ако $r\ne 0$, тогаш бидејќи c е најмал бел број следува дека r е црн број. Тогаш според условот $kc+r$ е црн број, што е противречи на претпоставката. Значи, $r=0$, т.е. единствени бели броеви се броевите од облик kc, каде c е најмалиот бел број.

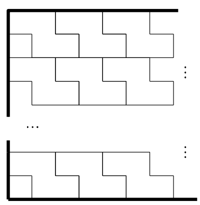
5. Определи го најголемиот можен број на тетрамина од обликот прикажан на цртежот десно кои може да се поставaт на квадратна табла со димензии 2003×2003 (не се дозволени ротации) така да без преклопувања секое од нив да покрива точно четири квадратчиња од таблата.



Решение. Со бришење на последниот ред и последната колона од таблата се добива квадратна табла која може да се подели на квадрати со димензии 2×2, и во секое единечно квадратче од таквиот квадрат кое се наоѓа долу и десно ќе ставиме црна точка. Секое тетрамино од дадениот облик ако го поставиме на квадратната шема со димензии 2003×2003 ќе препокрие точно една црна точка. Според тоа, на таблата може да се стават најмногу $[\frac{2003}{2}]\cdot[\frac{2003}{2}]=$ 1002001 тетрамина. Еден таков начин на поставување е даден на цртеж 2.

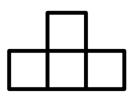


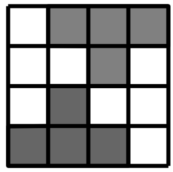
цртеж 1



цртеж 2

6. За кои $n\in\mathbb{N}$, квадрат со должина на страна n може целосно да се покрие со фигури како на цртежот (без поклопување), ако квадратчињата од кои е составена фигурата имаат страна 1.





Решение. Очигледно бројот на квадратчиња мора да е делив со 4 за да се покрие целосно со вакви фигури. Значи n мора да е парен број. Ако n е делив со 4 квадратот може да се подели на квадрати со страна 4, а тие може да се покријат како на цртежот десно.

Ќе докажеме дека ако n не е делив со 4 квадратот не може да се покрие со вакви фигури. Да претпоставиме дека квадратот може да се покрие со вакви фигури. Ако го обоиме квадратот како шаховска табла црно – бело, тогаш секоја фигура ќе покрива 3 црни и 1 бело или 3 бели и 1 црно квадратче. Нека $n=2(2k+1)$, тогаш има $(2k+1)^2$ фигури и нека нека m од нив имаат 3 црни и 1 бело квадратче. Тогаш $(2k+1)^2-m$ фигури се со 3 бели и 1 црно квадратче. Се добива дека има вкупно

$$3m+(2k+1)^2-m=2m+(2k+1)^2$$

црни и

$$m+3((2k+1)^2-m)= \ 3(2k+1)^2-2m$$

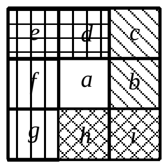
бели квадратчиња. Од друга страна знаеме дека има по $\frac{n^2}{2}=2(2k+1)^2$ црни и бели квадратчиња. Значи,

$$2m+(2k+1)^2=3(2k+1)^2-2m=2(2k+1)^2 \ ,$$

од каде добиваме дека $2m=(2k+1)^2$, што не е можно. Значи квадрат со страна n, таква што n не е делив со 4 не може целосно да се покрие со дадените фигури.

7. Правоаголна табла со димензија $M\times N$ е поделена на 1×1 квадратчиња. Располагаме со доволно многу домина со димензија 1×2. Таблата е покриена со домината така што ниту едно домино не излегува надвор од таблата и ниту едно домино не може да се лизне по таблата така што да покрива две квадратчиња од таблата. Докажи дека бројот на непокриените квадратчиња не е помал од:

а) $\frac{1}{4}MN$, б) $\frac{1}{5}MN$.



Решение. Ако на таблата нема непокриени квадратчиња, тогаш неравенствата се исполнети. Заради тоа ќе разгледаме случаи кога има непокриени квадратчиња.

Јасно е дека две непокриени квадратчиња немаат заедничка страна (во спротивно таквите квадратчиња ќе ги покриеме со домино).

Нека a е непокриено квадратче и b е соседно квадратче на a (под соседни квадратчиња ќе подразбираме квадратчиња кои имаат заедничка страна), кое покриено со домино B. Со c ќе го означиме второто квадратче покриено со B. Ако центрите на квадратчињата a,b и c лежат на една права, доминото B може да се лизне така што тоа ќе ги покрива квадратчињата a и b, што според условот на задачата, не е можно.

Значи, a и c немаат заедничка страна. Со d да го означиме квадратчето кое е соседно со a и c. Јасно е дека тоа е покриено со домино D. Со аналогни размислувања како и во претходниот случај, заклучуваме дека околу a ќе имаме поставено четири домина како на цртежот.

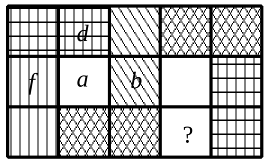
Од досега изнесеното следува:

1) непокриени квадратчиња нема на крајот (границите) на таблата;
2) две непокриени квадратчиња не само што немаат заедничка страна, туку немаат ниту заедничко теме.

а) На секое непокриено квадратче да поставиме 2×2 квадрат така што непокриеното квадратче да се наоѓа во неговиот долен лев агол.

Јасно, секои два такви квадрати не се сечат и не излегуваат надвор од таблата. Освен тоа, тие не ја покриваат целата табла, бидејќи долниот ред на таблата не се сечи со ниту еден квадрат.

Од претходно изнесеното следува дека бројот на непокриени квадратчиња е помал од $\frac{1}{4}MN$.



б) На секое непокриено квадратче ќе поставиме „крст“ од пет квадратчиња, така

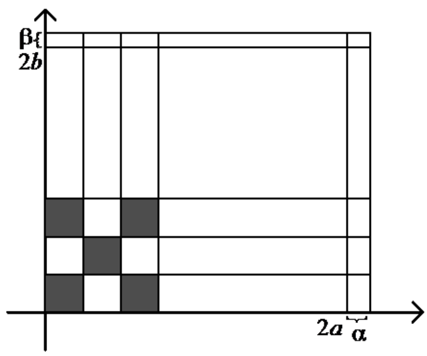
што секое непокриено квадратче е во неговиот центар. Ќе покажеме дека два такви „крста“ не се сечат. Секако дека тие не можат да се преклопат по две квадратчиња. Ако пак два такви “крста” имаат заедничко квадратче, кое е најлево за едниот „крст“, а најдесно за другиот „крст“, тогаш ако се има предвид начинот на поставување на домината се добива противречност (види цртеж; останатите случаи, различни од тој на цртежот се разгледуваат аналогно).

Со аналогни размислувања како под а) се добива дека бројот на непокриените квадратчиња е помал од $\frac{1}{5}MN$.

8. Даден правоаголник е поделен на помали правоаголници. Ако секој од малите делбени правоаголници го има својството: една од неговите страни има целобројна парна должина, докажи дека и почетниот правоаголник го има истото својство (страната која не е парен број може да е произволен реален број).

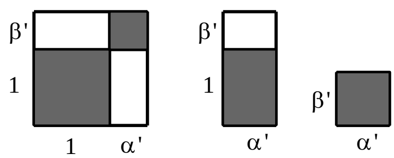
Решение. Избираме координатен систем со центар во едно од темињата на дадениот правоаголник, а две негови соседни страни лежат на избраните координатни оски.

Рамнината ја делиме (разбиваме) на единечни квадрати и нив ги биоме со црна и бела боја како што е обоена шаховската табла. Ако една од страните на некој правоаголник (чии страни се паралелни со координатните оски) има целобројна парна должина, тогаш јасно е дека половина негова површина е обоена со бела боја, а другата половина е обоена со црна боја. Бидејќи тоа важи за секој од малите (делбените) правоаголници, добиваме дека половина од почетниот правоаголник е обоена со бела боја, а половина е обоена со црна боја. Користејќи го ова, ќе докажеме дека една од страните на почетниот правоаголник има целобројна парна должина.



Нека страните на правоаголникот се $2a+\alpha$ и $2b+\beta$ каде a и b се цели броеви а $0\le\alpha,\beta<2$. Со правите $x=2a$ и $y=2b$ дадениот правоаголник е разделен на 4 правоаголници. Три од нив имаат една целобројна парна должина, па според тоа половина од нивните плоштини е обоена со бела, а половина е обоена со црна боја. Бидејќи тоа својство го има и почетниот правоаголник добиваме дека и правоаголникот со страни α и β го има тоа својство, половина од неговата површина е обоена во бела, а половина е обоена во црна боја. Од начинот на боење и од $0\le\alpha,\beta<2$, доволно е да ги разгледаме следните три случаи:

1) $\alpha=1+\alpha'$, $\beta=1+\beta'$, $0\le\alpha',\beta'<1$. Во овој случај ќе имаме плоштина $1+\alpha'\beta'$ со црна боја и плоштина $\alpha'+\beta'$ со бела боја. Но тогаш $1+\alpha'\beta'=\alpha'+\beta'$ од каде добиваме $(1-\alpha')(1-\beta')=0$. Последното равенство е можно само во случај кога $\alpha'=1$ или $\beta'=1$ што е во спротивност со претпоставката.
2) $\alpha=\alpha'$, $\beta=1+\beta'$, $0\le\alpha',\beta'<1$ Во овој случај $\alpha'=\alpha'\beta'$, т.е. $\alpha'(1-\beta')=0$ од што следува дека $\alpha'=0$ или $\beta'=1$. Но $\beta'<1$ па $1-\beta'>0$, па според тоа $\alpha'=0$. Тогаш една страна на правоаголникот има целобројна парна должина.
3) $\alpha=\alpha'$, $\beta=\beta'$, $0\le\alpha',\beta'<1$. Во овој случај, при $\alpha',\beta'>0$ имаме само еден правоаголник кој е обоен со црна боја, за кој нема бел правоаголник со истите димензии. Затоа $\alpha'=0$ или $\beta'=0$ од што следува тврдењето на задачата.

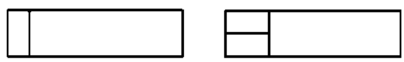


9. Нека A е бројот на начините на покривање на табла со димензии $2\times n$ со 2×1 домина, B е бројот на низи од единици и двојки чиј збир е еднаков на n и

$$C=\begin{cases}\binom{m}{0}+\binom{m+1}{2}+...+\binom{2m}{2m}, & n=2m\\ \binom{m+1}{1}+\binom{m+2}{3}+...+\binom{2m+1}{2m+1}, & n=2m+1.\end{cases} \qquad (1)$$

Докажи, дека $A=B=C$.

Решение. Очигледно $A=B$. Навистина, покривањето на табла со димензии $2\times n$ можеме да го направиме со поставување на 2×1 домината на два начина, или едно домино вертикално или две домина хоризонтално (види цртеж). Притоа се потребни n домина. Сега на секое вертикално домино го придружуваме бројот 1, а на секои две хоризонтални домина го придружваме бројот 2. Притоа добиваме низа од единици и двојки чиј збир е еднаков на n. Јасно, на секоја низа од единици и двојки чиј збир е еднаков на n соодветствува покривање од дадениот вид (за единицата поставуваме вертикално домино, а за двојката две хоризонтални домина).



Ќе докажеме дека $B=C$. Нека r е бројот на низите од единици и двојки чиј збир е еднаков на n. Нека k е бројот на двојките во дадена низа. Тогаш $k\le[\frac{n}{2}]$ и имаме $r-k$ единици. Притоа $n=2k+(r-k)=k+r$. Низата е определена ако во неа е познат распоредот, на пример, на двојките. Бројот на различните низи со должина r е еднаков на $\binom{r}{k}=\binom{n-k}{k}$. Според тоа, бројот на сите низи ќе биде еднаков на $\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-k}{k}$. Притоа, за $n=2m$ имаме

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-k}{k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{2m-k}{k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{2m-k}{2m-2k},$$

а за $n=2m+1$ добиваме

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n-k}{k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1-k}{k}=\sum_{k=0}^{m}\binom{2m+1-k}{2m+1-2k}.$$

Забелешка. Да означиме $A=A_n$. Ќе докажеме дека A_n е $n-$тиот Фибоначиев број, т.е. дека

$$A_n=A_{n-1}+A_{n-2},\ A_0=A_1=1. \tag{2}$$

Навистина, покривањето на таблата со димензии $2\times n$ можеме да го започниме на еден од следните два начина: или ќе почнеме со вертикално домино или че почнеме со две хоризонтални домина (види цртеж). Во првиот случај треба да покриеме табла со димензии $2\times(n-1)$, а во вториот табла со димензии $2\times(n-2)$, што значи дека во првиот случај имаме A_{n-1}, а во вториот A_{n-2} различни покривања. Според тоа, точна е фомрулата (2). Да забележиме дека од претходно изнесеното следува дека со (1) е даден израз за пресметување на $n-$тиот Фибоначиев број.

10. Во рамнината се дадени 109 точки такви што меѓу нив нема три точки кои лежат на една права. Секоја точка е обоена во една од седум можни бои и во секоја боја се обоени најмалку осум точки. За еден триаголник ќе велиме дека е еднобоен ако сите темиња му се обоени со иста боја. Докажи, дека со дадените точки се определени најмалку 2015 еднобојни разнострани триаголници.

Решение. Ако има n точки обоени со иста боја тогаш тие формираат $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ триаголници. На симетралата на секоја пар од дадените точки може да има најмногу две од дадените точки, па затоа рамнокраките триаголници кои се обоени во таа боја се најмногу $\frac{n(n-1)}{2}\cdot 2=n(n-1)$. Според тоа, имаме најмалку $\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-n(n-1)=\frac{n(n-1)(n-8)}{6}$ разнострани триаголници со темиња обоени во таа боја. Да означиме

$$S(n)=\frac{n(n-1)(n-8)}{6}.$$

Нека претпоставиме дека во друга боја се обоени m точки и $n-1>m$. Ќе докажеме дека

$$S(n)+S(m)>S(n-1)+S(m+1).$$

Со еквивалентни трансформации добиваме

$$S(n)-S(n-1)>S(m+1)-S(m)$$

$$n(n-1)(n-8)-(n-1)(n-2)(n-9)>(m+1)m(m-7)-m(m-1)(m-8)$$

$$(n-1)(n-6)>m(m-5).$$

Последното неравенство непосредно следува од тоа што $n-1>m>0$ и $n-6>m-5$. Според тоа, доволно е тврдењето да го докажеме во случај кога броевите точки кои се обоени во различни бои се разликуваат најмногу за 1. Бидејќи $109=7\cdot15+4$, во тој случај ќе имаме по 16 точки обоени во 4 од боите и по 15 точки обоени во останатите три бои. Сега тврдењето следува од тоа што $S(15)=245, S(16)=320$ и $4\cdot320+3\cdot245=2015$

11. Дадена е шаховска табла со димензии $m\times n$, каде $m,n\geq2$ се природни броеви. За боењето на единечните полиња на таблата во боите бела, зелена, црвена и сина (секое поле е обоено со една боја) ќе велиме дека е *шарено,* ако четирите полиња во секој 2×2 квадрат се обоени во различни бои. Определи го бројот на шарените боења на таблата.

Решение. Да ги нумерираме колоните на таблата S со $1,2,...,m$, а редовите со $1,2,...,n$. Нека (i,j) е полето во $i-$тата колона и $j-$тата редица.

Да разгледаме едно произволно шарено боење на S. Ќе докажеме дека секој ред на S содржи само две различни бои или секоја колона на S содржи само две различни бои.

Нека претпоставиме дека S не содржи правоаголник со хоризонтална подолга страна, кој содржи три различн бои. Тогаш во секој ред на S се менуваат две различни бои, што и се бараше.

Нека сега полињата $(u,v),(u+1,v)$ и $(u+2,v)$ се обоени во три различни бои a,b и c, соодветно. Последователно добиваме дека $(u+1,v+1)$ е обоено во четвртата боја d, $(u,v+1)$ во c, $(u+2,v+1)$ во a, $(u+1,v+2)$ во b, $(u+2,v+1)$ во c итн. Аналогно добиваме дека $(u+1,v-1)$ е обоено во d, $(u,v-1)$ во c, $(u+2,v-1)$ во a итн. Продолжувајќи ја постапката добиваме дека колоната u ги содржи само боите a и c, колоната $u+1$ само боите b и d, и колоната $u+2$ само боите a и c. Сега, лесно се гледа дека секоја колона чиј број има иста парност како u ги содржи само боите a и c, и секоја колона чиј број има спротивна парност од бројот u ги содржи само боите b и d, што и требаше да се докаже.

Од претходно изнесеното следува дека во секое шарено боење или во секој ред или во секоја колона се менуваат две различни бои.

Бројот на шарените боења во кои во секоја колона со непарен број се менуваат две бои, а во секоја колона со парен број – другите две бои, е еднаков на $\binom{4}{2}\cdot2^m$. Бројот на шарените боења во кои во секој ред со непарен број се менуваат две бои, а во секој ред со парен број – другите две бои е еднаков на $\binom{4}{2}\cdot2^n$. Боењата во кои имаме менување на две бои како во секој ред, така и во секоја колона се броени двапати (со други зборови, тоа се боењата во кои бојата на полето (i,j) зависи само од парностит на i и j). Вакви боења имаме $4!=24$ (зошто?).

Конечно, вкупниот број на шарени боења е еднаков на

$$\binom{4}{2}\cdot2^m+\binom{4}{2}\cdot2^n-4!=6(2^m+2^n-4).$$

12. Нека $n\geq2$ е природен број и $N=n^2+n-1$. Полињата на таблата $N\times N$ се обоени во n бои. Докажи дека постои подтабла 2×2 во која сите четири полиња се обоени во иста боја.

Решение. Дадената табла има N^2 полиња кои се обоени во n бои, па со некоја боја се обоени најмалку $k=[\frac{N^2+n-1}{n}]=n^3+2n^2-n-1$ полиња. Ќе докажеме дека постои подтабла со димензии 2×2 чии полиња се обоени со оваа боја. Пар колони од дадената табла може да се избере на $\binom{N}{2}$ начини. Нека $a_i \geq 0$ е бројот на полињата во $i-$тиот ред кои се обоени со воочената боја. Тогаш

$$a_1+a_2+...+a_N \geq k,$$

а во $i-$тиот ред има $\binom{a_i}{2}$ парови полиња обоени со оваа боја. Нека не постои подтабла со димензии 2×2 чии полиња се обоени со воочената боја. Тогаш

$$\binom{a_1}{2}+\binom{a_2}{2}+...+\binom{a_n}{2} \leq \binom{N}{2}. \tag{1}$$

Функцијата $\binom{x}{2}$ е конвексна, па од неравенството на Јенсен следува

$$\frac{\binom{a_1}{2}+\binom{a_2}{2}+...+\binom{a_N}{2}}{N} \geq \binom{\frac{a_1+...+a_N}{N}}{2} \geq \binom{\frac{k}{N}}{2}. \tag{2}$$

Од (1) и (2) следува $N\binom{\frac{k}{N}}{2} \leq \binom{N}{2}$, од каде добиваме $\frac{k}{N}(\frac{k}{N}-1) \leq N-1$, т.е.

$$\begin{aligned}
&k(k-N) \leq N^2(N-1)\\
&(n^3+2n^2-n-1)(n^3+2n^2-n-1-(n^2+n-1)) \leq (n^2+n-1)^2(n^2+n-1-1)\\
&(n^3+2n^2-n-1)(n^3+n^2-2n) \leq (n^2+n-1)^2(n^2+n-2)\\
&n^4+2n^3-n^2-n \leq n^4+2n^3-n^2-2n+1\\
&n \leq 1,
\end{aligned}$$

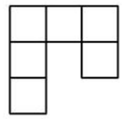
што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

13. Трака со ширина w го нарекуваме множеството точки во рамнината кои се наоѓаат на или меѓу две паралелни прави кои се на растојание w една од друга. Нека S е множество од n точки во рамнината такво што било кои три точки од множеството S може да се покријат со трака со ширина 1. Докажи, дека S може да се покрие со трака со ширина 2.

Решение. Меѓу сите триаголници со темиња во S, го разгледуваме триаголникот кој има најголема плоштина, и нека тоа е $\triangle ABC$. Нека A',B',C' се симетричните точки на точките A,B,C во однос на средините на страните BC,CA,AB, соодветно. Тврдиме дека сите точки на множеството S лежат внатре или на страните на $\triangle A'B'C'$. Навистина, ако $X\in S$ е надвот од $\triangle A'B'C'$, тогаш без ограничување на општоста можеме да земеме дека X и BC се на различни страни од правата $B'C'$, па затоа $\triangle BCX$ има поголема плоштина од $\triangle ABC$, што е противречност.

Триаголникот ABC може да се покрие со трака со ширина 1, па затоа триаголникот $A'B'C'$ може да се покрие со трака со ширина 2, која всушност го покрива множеството S.

14. Кука ќе ја наречеме фигурата прикажана на цртежот десно, која е составена од шест единечни квадрати, или било која друга фигура која е добиена од оваа фигура со примена на ротации и осни симетрии. Определи ги сите $m\times n$ правоаголници кои можат да се покријат со куки така што

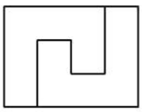


1) правоаголникот е покриен без празнини и преклопувања,

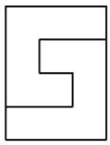
2) ниту еден дел од некоја кука не е надвор од правоаголникот.

Решение. Одговор. Сите правоаголници $m\times n$ за кои $12\,|\,mn$, барем еден од броевите m,n е делив со 4 и $m,n\in\{1,2,5\}$.

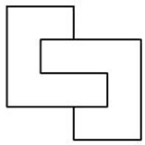
Нека претпоставиме дека правоаголникот $m\times n$ може да се покрие со куки. За секоја кука H нејзиниот „внатрешен" квадрат е покриен точно со една кука K. Од друга страна, H го покрива внатрешниот квадрат на K, па затоа сите куки можат да се поделат на парови $\{H,K\}$ кои формираат една од следниве фигури со плоштина 12.



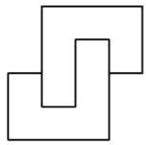
A_1



A_2



B_1



B_2

Значи, нашиот правоаголник е покриен со вакви фигури. Тоа значи дека $12\,|\,mn$.

Нека претпоставиме дека $4\nmid m$ и $4\nmid n$. Тогаш броевите m и n се парни, а вкупниот број фигури составен од две куки (цртеж горе) е непарен. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека вкупниот број фигури A_1,B_1 е непарен. Да ја обоиме секоја четврта колона на таблата $m\times n$ во црно. Тогаш секоја од фигурите A_1,B_1 покрива по три црни полиња, додека секоја од фигурите A_2,B_2 покрива по 2 или 4 црни полиња. Значи, бројот на покриените црни полиња е непарен, што не е можно, бидејќи има парен број црни полиња.

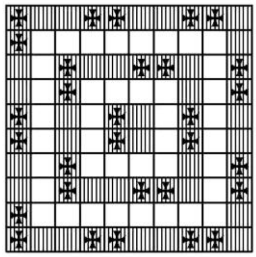
Сега нека претпоставиме дека, на пример, $4\,|\,m$. Ако $3\,|\,n$, тогаш праволникот $m\times n$ може да се подели на 4×3 правоаголници. Исто така, ако $12\,|\,m$ и $n\in\{1,2,5\}$, тогаш $n=3k+4l$, за некои $k,l\in\mathbb{N}_0$, па затоа правоаголникот $m\times n$ може да се подели на правоаголници 12×3 и 12×4, и оттука на правоаголници 4×3 и 3×4. Од друга страна, ако $12\,|\,m$ и $n\notin\{1,2,5\}$ лесно се гледа дека покривањето не е можно.

15. Дадена е квадратна табла со димензија $n\times n$, каде n е парен број. Таблата е поделена на n^2 единечни квадрати. Два различни единечни квадрати на таблата се соседни ако имаат заедничка страна.

Означени се N единечни квадрати така што секој единечен квадрат (означен или неозначен) е соседен со барем еден означен квадрат.

Определи ја најмалата можна вредност на бројот N.

Решение. Нека $n=2k$. Множеството квадратни полиња чии центри се на растојание $i-\frac{1}{2}$ од најблиската страна на квадратот ($i=1,2,\ldots,k$) го нарекуваме



$i-$та рамка. Полињата на $i-$тата рамка ги боиме во црно за непарно i, а во бело за парно i. Сега секое поле на таблата (обоено во било која боја) е соседно со точно две црни полиња. Бидејќи имаме $2k(k+1)$ црни полиња, мораме да означиме најмалку $k(k+1)$ поле. Останува да докажеме дека овој број може да се достигне. Во секоја црна рамка да го означиме полето во долниот лев агол и полето непосредно над него, а потоа одејќи долж оваа рамка во насока на движењето на стрелката на часовникот, наизменично прескокнуваме и означуваме по две полиња. Лесно се гледа дека секое поле има точно по едно означено соседно поле, а се означени

$$2(2k-1)+2(2k-5)+2(2k-9)+...=k(k+1)$$

полиња.

Според тоа, одговорот на задачата е $k(k+1)$.

Забелешка. На сличен начин може да се решат случаите кога $n=4k-1$ и $n=4k+1$. Во општ случај одговорот е $(2[\frac{n}{4}]+1)(n-2[\frac{n}{4}])$.

16. Полињата на бесконечна шаховска табла се стандардно обоени во црна и бела боја. Потоа сите бели полиња се преобоени во црвена и сина боја така што полињата кои имаат соседен агол се разнобојни. Нека l е произволна права, која не е паралелна со страните на полињата. За секој отсечка I која е паралелна на l ја пресметуваме разликата од збировите на црвените и сините делови на I. Докажи, дека постои број C, кој зависи само од правата l, таков што сите добиени разлики се помали или еднакви на C.

Решение. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека на бесконечна табла сместена во правоаголен кординатен систем непарните колони се обоени со зелена, а парните со жолта боја. За секоја отсечка паралелна на правата l разликата меѓу збировите на нејзините жолти и зелени делови е помала или еднаква на некој број D, кој зависи само од l.

Доказ. Со вертикалните прави правата l е поделена на отсечки со еднаква должина F. За секоја отсечка со должина $2F$ збирот на зелените (соодветно жолтите) делови е еднаков на F. Бидејќи секоја отсечка паралелна на l може да се подели на неколку отсечки со должина $2F$, при што останува отсечка со должина помала од $2F$, добиваме дека разликата на збировите на нејзините жолти и зелени делови е помала или еднаква на $D=2F$. ■

На почетната табла да ги пребоиме црните полиња во розова и кафеава боја така што розовите полиња да се во колоните со црвена, а кафеавите во колоните со сини полиња. Да разгледаме отсечка паралелна на правата l и со r,b,r',b' да ги означиме збировите на нејзините црвени, сини, розови и кафеави делови, соодветно. Според лемата постојат броеви D_1 и D_2, кои зависат само од l, за кои

$$|(r+r')-(b+b')|\le D_1,$$
$$|(r+b')-(r'+b)|\le D_2.$$

Затоа

$$\begin{aligned}2|r-b| &= |(r+r')-(b+b')+(r+b')-(r'+b)|\\ &= |(r+r')-(b+b')|+|(r+b')-(r'+b)|\\ &\le D_1+D_2,\end{aligned}$$

т.е. $|r-b|\le \frac{D_1+D_2}{2}$, што и требаше да се докаже.

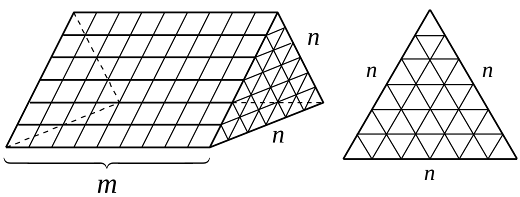
17. Во рамнината се дадени n точки $A_1, A_2, ..., A_n$ кои се обоени со црвена боја и даден е ненулти вектор $\vec{a}$. Точките $B_1, B_2, ..., B_n$ се такви што $\overrightarrow{A_iB_i}=\vec{a}$ и секоја од нив е обоена со плава боја. Повлечени се n отсечки такви што секоја црвена точка е поврзана со една плава точка, и секоја плава точка е поврзана со една црвена точка. Определи го начинот на поврзување, така што збирот на должините на добиените отсечки биде најмал.

Решение. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ се црвените точки и $B_1, B_2, ..., B_n$ се нивните слики (слика на A_i е B_i) со векторот $\vec{a}$, односно $\overrightarrow{A_iB_i}=\vec{a}$. Нека $i_1, i_2, ..., i_n$ е произволна пермутација на броевите $1, 2, ..., n$ која е различна од идентичната пермутација, т.е. $i_1, i_2, ..., i_n$ е запис на броевите $1, 2, ..., n$ кој не е идентичен со природниот распоред во растечки редослед. Нека ги разгледаме векторите $\overrightarrow{A_jB_{i_j}}$, $j=1,2,...,n$. За произволна точка O од рамнината имаме $\overrightarrow{A_jB_{i_j}}=\overrightarrow{OB_{i_j}}-\overrightarrow{OA_i}$. Ако за два вектори $\vec{a}$ и $\vec{b}$ го искористиме неравенството $|\vec{a}|+|\vec{b}|\ge|\vec{a}+\vec{b}|$, или за n-вектори го искористиме неравенството $|\overrightarrow{a_1}|+|\overrightarrow{a_2}|+...+|\overrightarrow{a_2}|\ge|\overrightarrow{a_1}+\overrightarrow{a_2}+...+\overrightarrow{a_n}|$ (непосредно се докажува со помош на математичка индукција), добиваме

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{A_1B_{i_1}}|+|\overrightarrow{A_2B_{i_2}}|+...+|\overrightarrow{A_nB_{i_n}}| &= |\overrightarrow{OB_{i_1}}-\overrightarrow{OA_1}|+|\overrightarrow{OB_{i_2}}-\overrightarrow{OA_2}|+...+|\overrightarrow{OB_{i_n}}-\overrightarrow{OA_n}|\\ &\ge|\overrightarrow{OB_{i_1}}-\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_{i_2}}-\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OB_{i_n}}-\overrightarrow{OA_n}|\\ &=|\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OB_2}-\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OB_n}-\overrightarrow{OA_n}|\\ &=|\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{A_2B_2}+...+\overrightarrow{A_nB_n}|=|n\vec{a}|=n|\vec{a}|\end{aligned}$$

Значи, за било кој избор на редослед на индекси $i_1, i_2, ..., i_n$ кој е добиен од реедоследот $1, 2, ..., n$, добиваме $|\overrightarrow{A_1B_{i_1}}|+|\overrightarrow{A_2B_{i_2}}|+...+|\overrightarrow{A_nB_{i_n}}|\ge n|\vec{a}|$. Равенство се добива само во случајот $i_1=1, i_2=2, ..., i_n=n$.

18. Правилна тристрана призма со основен раб n и бочен раб m (m и n се природни броеви) прво е обоена а потоа разделена на слични призми со основен раб и бочен раб со должини 1 (како



на цртежот). Пресметај го бројот на призмите на кои сите ѕидови им се необоени.

Решение. Во триаголникот со страна n има n^2 мали триаголници. Навистина, тргнувајќи од основата кон врвот има

$$n+(n-1)+(n-2)+...+3+2+1=\frac{n(n+1)}{2}$$

триаголници свртени со врвот кон внатрешноста и

$$(n-1)+(n-2)+...+3+2+1=\frac{n(n-1)}{2}$$

триаголници свртени со врвот нанадвор. Според тоа, призмата е разделена на

$$p_{vk}=m\cdot(\frac{n(n-1)}{2}+\frac{n(n+1)}{2})=m\cdot n^2$$

мали призми.

Од сите мали призми, барем еден обоен ѕид ќе имаат оние што се наоѓаат на двете основи и на на бочните страни на призмата, т.е.

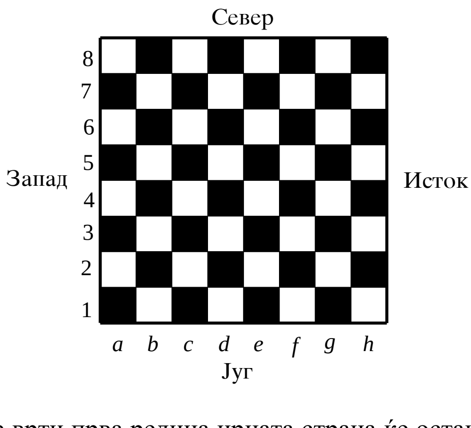
$$p_{ob}=2n^2+(m-2)\cdot n+(m-2)(n-1)+(m-2)(n-2)=2n^2+(m-2)(3n-3)$$

Според тоа, бројот p на необоените призми е

$$p=p_{vk}-p_{ob}=(m-2)(n^2-3n+3).$$

19. На секое поле на шаховска 8×8 табла е поставена коцка (работ на поставените коцки е еднаков на страната на полињата на шаховската табла). Една од шесте страни на секоја од поставените коцки е обоена црно, а останатите пет страни се обоени бело. Цел ред или цела колона коцки може да ротира за $90^\circ, 180^\circ$ или 270° (ротира како паралелопипед со основа квадрат и висина осум пати поголема од страната на неговата основа). Дали постои редослед на ротации по кој сите црно обоени полиња се на горната страна на поставените коцки (страната која е обоена црно е поставена нагоре).

Решение. Редовите од долу нагоре ќе ги означиме редоследно со броевите од 1 до 8 (види цртеж). Колоните од лево на десно ќе ги означиме редоследно со буквите од абецедата од a до h како на цртежот. Таблата ќе ја ориентираме како страните на светот. Најдолниот ред, т.е. редот 1 ќе биде југ, а колоната a ќе биде запад (види цртеж).



Коцката $a1$ со вртење на само редот број 1 и колоната a можеме да ја наместиме така што нејзината црна страна да е на југ. Со понатамошно вртење на прва колона, без да се врти прва редица црната страна ќе остане на југ.

Коцката $a2$ со вртење на првата колона и вториот ред (без вртење на првата редица) можеме да ја наместиме така што нејзината црна страна е на југ. Со понатамошно вртење на прва колона, без да се вртат првиот и втори ред црните страни на $a1$ и $a2$ ќе останат на југ. Истата постапка ја повторуваме за коцките

$a3, a4, a5, a6, a7$ и $a8$ при што во секој нареден чекор од вртење ги исклучуваме од вртење претходните редови (при местење на црната страна на југ од коцката ai редовите $1, 2, ..., i-1$ не ги вртиме). Со оваа постапка сите црни страни на коцките од првата колона ќе бидат насочени кон југ. Потоа сите редици ги ротираме за 90° така што црните страни на коцките од прва колона да бидат поставени нагоре, и на крај прва колона ја вртиме за 90° така што црните страни на коцките од првата колона да бидат на запад. Со вртење на било кој редица или било која следна колона црните страни на коцките од првата колона ќе бидат на запад.

Претходната постапка ја повторуваме за останатите колони b, c, d, e, f, g, h последователно во запишаниот редослед. При што кога црните страни на коцките од една колона ги наместиме на запад, претходните колони, лево од неа, не ги ротираме.

По конечен број на чекори, црните страни на сите коцки ќе бидат завртени кон запад. На крај, секоја колона ја ротираме за 90° во насока на стрелките на часовникот, со што црните страни на сите коцки ќе бидат завртени нагоре.

20. Секоја точка од рамнината е обоена во сино или црвено. Докажи дека постојат две сини точки на растојание 1 или четири црвени точки A_1, A_2, A_3, A_4 такви што $\overline{A_1A_2} = \overline{A_2A_3} = \overline{A_3A_4}$.

Решение. Нека претпоставиме дека тврдењето на задачата не е точно. Тогаш постои барем една точка P која е обоена во сино. Во спротивно, тривијално е исполнет условот од задачата. Околу точката P ќе опишеме кружница k со радиус 1. Сите точки од кружницата се обоени во црвена боја. Во спротивно постојат две точки кои се на растојание 1 и се обоени во сино. Нека $ABCDEF$ е правилен шестаголник впишан во кружницата, $AB \cap CD = X$, $BC \cap EF = Y$ и $EF \cap AB = Z$ (точките X, Y, Z се темиња на рамностран триаголник). Барем две од точките X, Y, Z се обоени во сино. Во спротивно, ако имаме две црвени, заедно со двете црвени од шестаголникот кои припаѓаат на отсечката определена со тие точки се четири црвени точки кои го исполнуваат условот на задачата.

Ќе направиме ротација, така што $\overline{XX'} = \overline{YY'} = \overline{ZZ'} = 1$. Шестаголникот $A'B'C'D'E'F'$ е обоен црвено, бидејќи тој е впишан во кружницата K . Ако две точки од X', Y', Z' се црвени тогаш од точките $A', B', C', D', E', F', X', Y', Z'$ може да се изберат четири црвени кои го задоволуваат условот од задачата, што противречи на на претпоставката. Според тоа, најмалку две точки од X', Y', Z' се обоени во сино. Конечно, барем една од отсечките XX', YY', ZZ' има крајни точки кои се обоени во сино, што повторно противречи на претпоставката. Значи, претпоставката дека нема две точки кои се на растојание 1 и се обоени сино и нема четири колинеарни точки кои се обоени црвено и се на еднакво растојание доведува до противречност.

21. Низата $u_1, u_2, ..., u_k, ...$ е определена со следните услови:

i) $u_1 = 3;$

ii) $u_{k+1} = (k+1)u_k - k + 1$ ако $k > 0$.

Нека $n \geq u_k$ и нека се дадени n точки. Докажи дека, ако секоја од отсечките што ги поврзува овие точки е обоена со една од k дадени бои, тогаш постојат три точки, кои се темиња на триаголник чии страни се обоени со иста боја.

Решение. Ќе користиме индукција по k. Ако $k=2$ тогаш $u_2 = 2u_1 - 1 + 1 = 6$ па тврдењето следува од претходниот проблем. Нека тврдењето е точно за некој k и нека се дадени $n \geq u_{k+1}$ точки кои се поврзани со отсечки и кои се обоени со $k+1$ боја.

Нека A е една од дадените точки. Оваа точка е крајна за $n-1$ отсечки и бидејќи

$$\frac{n-1}{k+1} \geq \frac{u_{k+1}-1}{k+1} = u_k - \frac{k}{k+1} > u_k - 1$$

од принципот на Дирихле следува дека барем u_k отсечки чија крајна точка е A се обоени со иста боја. Нека $B_1, B_2, ..., B_{u_k}$ се другите (различни од A) крајни точки на овие отсечки. Ако меѓу отсечките $B_i B_j$ постои барем една која е обоена со иста боја како и отсечките $AB_1, AB_2, ..., AB_{u_k}$, тогаш постои бараниот триаголник. Ако не постои таква отсечка, тогаш отсечките $B_i B_j$ се обоени со k бои и тврдењето следува од индуктивната претпоставка.

22. Дадени се две пирамиди со заеднички основи $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ и врвови B и C. Рабовите BA_i, $CA_i, i=1,2,...,7$ дијагоналите на основата и отсечката BC се обоени црвено или сино. Докажи дека постои триаголник чии страни се обоени со иста боја.

Решение. Да претпоставиме дека отсечката BC е црвена. Можни се два случаи:

I. Барем три од рабовите $BA_i, i=1,2,...,7$ се црвени. На пример рабовите BA_k, BA_s, BA_t се црвени. Барем една страна од триаголникот $A_kA_sA_t$ е дијагонала на основата и е обоена. Нека A_kA_s е дијагонала. Го разгледуваме триаголникот A_kA_sC. Ако една од неговите страни е црвена, тогаш оваа страна заедно со точката B определува црвен триаголник. Ако таква страна не постои, тогаш триаголникот A_kA_sC е син.

II. Најмногу два од рабовите $BA_i, i=1,2,...,7$ се црвени. Најпрво да претпоставиме дека точно два од овие раба се црвени и нека тоа се рабовите BA_k и BA_s. Ако A_kA_s е дијагонала на основата, го разгледуваме триаголникот A_kA_sC и постапуваме аналогно како во претходниот случај. Ако A_kA_s не е дијагонала, можеме да претпоставиме дека $k=1$ и $s=2$, т.е. дека рабовите BA_1 и BA_2 се црвени, а рабовите $BA_i, i=1,2,...,7$ се сини. Го разгледуваме триаголникот $A_3A_5A_7$. Ако една од страните на овој триагоник е сина, тогаш оваа страна заедно со точката B формира син триаголник. Во спротивно, триаголникот $A_3A_5A_7$ е црвен.

Конечно, да го разгледаме случајот кога најмногу еден од рабовите $BA_i, i=1,2,...,7$ е црвен, т.е. барем шест од овие рабови се сини. Можеме да претпоставиме дека рабовите $BA_i, i = 1, 2, ..., 7$ се сини. Го разгледуваме триаголникот $A_3 A_5 A_7$ и постапуваме како претходно.

2. МЕРЕЊА

1. Еден трговец имал 4 тегови со целобројни тежини. Со нив може да се измери било која тежина од $1\ kg$ до $40\ kg$. Кои се тежините на теговите, ако сите се различни и збирот им е 40?

Решение. Имаме

$$40 = 1 + 3 + 9 + 27 = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3,$$

па $40 = 1111_3$ (во систем со основа 3). Секој број од 1 до 40 може да го претставиме во csстем со основа 3 користејќи ги 0, 1 и 2 како цифри. Бидејќи vo system so osnova 3 va\i $2 = -1$, следува дека секој број може да се претстави како број со цифри 1 и 0 или како разлика на броеви со цифри 1 и 0. Јасно, бројот на цифрите на секој број помал од 40 е најмногу 4.

Следствено, тежините на теговите биле: $1kg$, $3kg$, $9kg$ и $27kg$.

2. Која е најголемата маса, изразена во килограми, која што не можеме да ја измериме, ако располагаме само со тегови од 6 kg, 9 kg, 20 kg?

Решение. Јасно, ако располагаме само со по еден од дадените тегови, тогаш не можеме да ја измериме секоја маса која е поголема или еднаква на $35\ kg$.

Нека претпоставиме дека располагаме со доволен број од секој од дадените тегови. Ќе разгледаме два случаи, и тоа:

- теговите можеме да ги ставаме и на двата таса,
- теговите можеме да ги ставаме само на едниот тас.

Ако искористиме $n = 5 \cdot 6n - 9n - 20n$, заклучуваме дека во првиот случај можеме да ја измериме секоја маса.

Во вториот случај, со употреба на тегови од 6 и 9 kg, можеме да измериме маса чии килограми се броевите од облик

$$6a + 9b = 3(2a + 3b) = 3k,\ k \geq 2. \tag{1}$$

Додавајќи еден тег од 20 kg, можеме да измериме маса чии килограми се броевите од облик

$$20 + 3k = 3(6 + k) + 2 = 3m + 2,\ m \geq 8, \tag{2}$$

т.е. броевите од облик 26, 29, 32, 35, ... кои при делење со 3 даваат остаток 2 и не се помали од 26.

Аналогно, додавајќи два тега од 20 kg ги добиваме броевите од облик

$$40 + 3k = 3(13 + k) + 1 = 3n + 1,\ n \geq 15, \tag{3}$$

т.е. броевите од облик 46, 49, 52, ... кои при делење со 3 даваат остаток 1 и не се помали од 46.

Бидејќи секој природен број може да се запише во еден од облиците: $3q$, $3q + 1$ или $3q + 2$, заклучуваме дека за секој природен број $n \geq 46$, равенката

$$6a + 9b + 20c = n \tag{*}$$

ќе има решение по $a,b,c \in \mathbb{N}_0$.

Имајќи ги предвид (1), (2), (3) и (*) заклучуваме дека бараниот број е 43. Навистина, ако во (*) ставиме $c=0$ или $c=1$, лесно се гледа дека равенката

$$6a+9b+20c=43$$

нема решение во $\mathbb{N}_0$.

3. Народната банка сака да пушти во употреба 12 различни монети, секоја со номинална вредност природен број. Дали може монетите да имаат номинални вредности така што секоја сума од 1 до 6543 денари да се плати со најмногу 8 монети. (При плаќањето на сумата може да се користат неколку монети со една иста нпминална вредност.)

Решение. Да забележиме дека $9^4 = 6561 > 6543$. Ќе докажеме дека може да се изберат 12 различни видови монети така што со помош на најмногу осум монети може да се плати секоја сума до 6560 денари.

Со монети од 1, 3 и 4 денари може да се плати секоја сума од 1 до 8 денари, при што ќе се користат најмногу две монети

$$1=1,\quad 2=1+1,\quad 3=3,\quad 4=4,$$
$$5=1+4,\ 6=3+3,\quad 7=4+3 \text{ и } 8=4+4\,.$$

Да разгледаме монети од 9^k, $3\cdot 9^k$ и $4\cdot 9^k$ денари, за $k=0,1,2,3$. Секој број n од 1 до 6560 на единствен начин може да се претстави во видот

$$n = a_3\cdot 9^3 + a_2\cdot 9^2 + a_1\cdot 9 + a_0,\text{ каде } a_i \in \{0,1,2,...,9\},\text{ за } i=0,1,2,3,$$

(тоа е разложувањето на бројот n во систем со основа 9). Но, збирот $a_k\cdot 9^k$ може да се добие со најмногу две монети, па затоа бројот n може да се добие со најмногу $4\cdot 2 = 8$ монети.

4. Нека N е природен број. Дадено е множество тегови кое ги задоволува следниве услови:

1) Секој тег од множеството има некоја од масите $1,2,...,N$;

2) За секој $i \in \{1,2,...,N\}$ постои тег со маса i.

3) Збирот на масите на сите тегови од даденото множество е парен број.

Докажи дека даденото множество тегови може да се разбие на две подмножества кои имаат еднакви маси.

Решение. Нека $2S$ е збирот на масите на сите тегови. Нека T е најголем збир на маси кој можеме да го добиеме во едната група, но таков што $T \le S$. Ако $T=S$, тогаш тврдењето е докажано. Нека $T<S$. Нека A е група која има збир на маси T, а нека B е групата која има збир на маси $2S-T$. Ако некој тег со маса 1 се наоѓа во групата B, тогаш можеме да го префрлиме во групата A, па тогаш групата A ќе има маса поголема од T која и понатаму е помала или еднаква на S, што противречи на претпоставката дека T е најголемиот збир на кој е помал или еднаков на S. Значи, сите тегови со маси 1 се наоѓаат во групата A. Понатаму, ако некој тег со маса 2 се наоѓа во групата B, тогаш овој тег го префрламе во A и еден од теговите со маса 1 од групата A го префрламе во групата B, и повторно групата A ќе има маса поголема од T која е помала или еднаква на S, што е противречност. Значи, сите тегови со маса 2 се наоѓаат во

групата A. Продолжувајќи ја постапката, после $N-1$ чекори, добиваме дека сите тегови со маса $N-1$ се наоѓаат во групата A, па затоа во групата B се наоѓаат само тегови со маса N. Ако сега тег со маса $N-1$ од групата A замениме со тег со маса N од групата B, повторно групата A ќе има маса поголема од T која е помала или еднаква на S, што е противречност со претпоставката дека T е најголемиот збир на маси кој е помал или еднаков на S. Конечно, претпоставката дека $T < S$ доведува до противречност, па затоа $T = S$.

5. Во земјата на математичарите избрале реален број $\alpha > 2$ и во оптек пуштиле монети со вредност 1 денар и α^k денари за секој природен број k. Притоа бројот α бил избран така што сите вредности на монетите, без најмалата, биле ирационални броеви. Дали може да се случи, секоја сума на пари од природен број денари да се исплати со такви монети, при што секој вид монета се користи не повеќе од 6 пати?

Решение. Ќе докажеме дека бројот $\alpha = \frac{-1+\sqrt{29}}{2}$, кој е корен на равенката $\alpha^2 + \alpha = 7$ го задоволува условот на задачата.

Јасно, $\alpha > 2$. За секој природен број m имаме

$$(2\alpha)^m = a_m + b_m\sqrt{29},$$

каде a_m и b_m се цели броеви такви што $a_m < 0 < b_m$ за непарно m и $a_m > 0 > b_m$ за шарно m. Во случајов, бројот α^m е ирационален.

Останува да докажеме, дека за секој природен број n сумата од n денари може да се исплати на саканиот начин. Да ги разледаме сите можности за исплаќање на n денари со дадените монети (барем еден начин постои – со n монети од по 1 денар). Меѓу сите можности на исплаќање да ја избереме онаа, при која се користи најмал број монети.

Да претпоставиме, дека во тој момент некоја монета со вредност α^i, i е ненегативен цел број се користи 7 и повеќе пати. Тогаш од дефиницијата на α, т.е. од $\alpha^{i+2} + \alpha^{i+1} = 7\alpha^i$ следува, дека овие 7 монети со вредност α^i можеме да ги замениме со две монети со вредности α^{i+2} и α^{i+1}. Притоа сумата останува иста, а вкупниот број монети се намалува за 5, што противречи на претпоставката дека сме искористиле најмал број монети.

Забелешка. Од условот следува дека сумата од 7 монети на саканиот начин може да исплати само во видот $7 = \alpha^2 + \alpha$. Оттука следува единственоста на бројот α.

6. Марко има 100 јаболки со вкупна тежина од $10kg$, такви што секоја јаболка не тежи помалку од $25g$. Марко треба да ги расече јаболките на делови и да ги подели на 100 гости, така што секој гостин да добие по $100g$. Докажи, дека Марко може да го направи расекувањето така што секое парче да тежи најмалку $25g$.

Решение. Сите тежини во решението се во грамови. За едно парче јаболко (или цело јаболко) ќе велиме дека е *големо*, ако неговата тежина е најмалку $25g$. Со индукција по n ќе докажеме дека секогаш е можно да поделиме n големи јаболки со вкупна тежина $100n$ подеднакво на n лица.

Случајот $n=1$ е очигледен. Нека $n>1$ и да ги разгледаме двете најтешки јаболки со тежини a и b, $a\geq b$. Да забележиме дека $a+b\geq 200$ (во спротивно просечната тежина на јаболките е помала од $\frac{200}{2}=100$ и нема да имаме вкупна тежина $100n$). Да ги замениме овие две јаболки со едно јаболко со вкупна тежина $c=a+b-100\geq 100$. Согласно индуктивната претпоставка добиениот „комплет" јаболки може да се раздели на големи парчиња и да се подели подеднакво на $n-1$ лица. Ако во таа поделба има парче со тежина поголема од 50, да го расечеме на две големи парчиња и после оваа постапка да сметаме дека јаболките се расечени на парчиња со тежини $c_1, c_2, ..., c_k$ чии тежини се помали или еднакви на 50. Да означиме $s_d = c_1 + c_2 + ... + c_d$, за $d=1,2,...,k$ и да ставиме $s_0 = 0$.

Сега да го разгледаме почетниот комплет јаболки. Да ги расечеме сите јаболки без a и b како во новиот комплет. За забележиме дека $a\geq \frac{200}{2}=100$. Со t да го означиме минималниот индекс за кој $a-s_t \leq 75$ и од a да отсечеме парчиња $c_1, c_2, ..., c_t$, а од b последователно отсекуваме парчиња $c_{t+1}, c_{t+2}, ...$ Бидејќи $a-s_{t-1}>75$, заклучуваме дека од a останало парче $a'=a-s_t=(a-s_{t-1})-c_t$ за кое важи $75\geq a'>75-c_t\geq 25$. Од b останало парче b' за кое важи $a'+b'=a+b-c=100$, па затоа $25\leq b'\leq 75$. Сега a' и b' можеме да ги дадеме на еден човек и останатите парчиња да ги распределиме како во новиот комплет.

7. Дадени се n еднакви топки, три од кои се радиоактивни. Располагаме со уред, кој го определува количеството на радиоактивност. Притоа со едно мерење на произволно множество топки може да се определи дали во него има 0, 1 или повеќе од 1 радиоактивни топки. Ако со $L(n)$ да го означиме минималниот број мерења, потребни за наоѓање на трите радиоактивни топки:

а) определи го $L(6)$,

б) докажи, дека $L(n)\leq [\frac{n+5}{2}]$.

Решение. а) Ќе докажеме дека 4 мерења се доволни. Топките да ги означиме со 1, 2, 3, 4, 5, 6. Последователно да измериме $\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}$ и $\{1,5\}$.

1) Ако при сите мерења има радиоактивност, тогаш 1 е радиоактивна (во спротивен случај сите четири 2, 3, 4 и 5 се радиоактивни, што не е можно). Ако во $\{1,a\}, a=2,3,4,5$ има повеќе од една радиоактивна, тогаш a е радиоактивна, а ако има само една тогаш a не е радиоактивна. Според тоа, можеме да разбереме кои од 2, 3, 4, 5 се радиоактивни, па оттука знаеме и за 6.
2) Ако при некое мерење нема радиоактивност, тогаш 1 не е радиоактивна. Според тоа, можеме да определиме кои од 2, 3, 4, 5 се радиоактивни, па оттука знаеме и за 6.

Нека претпоставиме дека $L(6)\leq 3$, т.е. можеме да сметаме дека 3 мерења се доволни. Резултатите од секое мерење се три: нема радиоактивни топки, има само една радиоактивна топка или има повеќе од една радиоактивна топка. Според тоа, при две мерења имаме $3^2=9$ можни резултати. При првото мерење може да се изберат 1, 2, 3, 4, 5 или 6 топки. Јасно, меѓу секои 5 или 6 топки секогаш има повеќе од една радиоактивна топка, па така ова мерење не дава никаква информација.

Нека првото мерење е на множество од $x, x \le 4$ топки. При $x=1$ и резултат *има една радиоактивна топка* можностите за радиоактивните топки се 10 (меѓу останатите 5 топки има две радиоактивни и $\binom{5}{2}=10$), а во исто време можните резултати од останатите две мерења се $3^2=9$. Аналогно, при првото мерење на:

- две топки и одговор *има една радиоактивна* можностите се $\binom{2}{1}\binom{4}{2}=12>9$,
- три топки и *има повеќе од една радиоактивна* можностите се $\binom{3}{2}\binom{3}{1}+\binom{3}{3}=10>9$,
- четири топки и одговор *има повеќе од една радиоактивна* можностите се $\binom{4}{2}\binom{2}{1}+\binom{4}{3}=13>9$.

Според тоа, три мерења не се доволни и $L(6)=4$.

б) Ќе докажеме дека $[\frac{n+5}{2}]$ мерења се доволни за определувањена трите радиоактивни топки, од каде ќе следува бараното неравенство. Нека $n=2t-e$, каде $e\in\{0,1\}$. Сите топки да ги поделиме на t множества од по две топки (кога $e=0$) или на $t-1$ множество од по две топки и едно множество со една топка (кога $e=1$). И во двата случај да ја провериме радиоактивноста на $t-1$ множество со две топки. Во зависност од резултатите од тие мерења за сите t множества имаме два случаја:

1) Наоѓаме едно множество со две радиоактивни топки и едно множество со 1 радиоактивна топка.
2) Наоѓаме три множества со по една радиоактивна топка.

И во двата случаја уште три мерења се доволни за наоѓање на радиоактивните топки. Вкупниот број на мерење е $t-1+3=t+2$. Бидејќи

$$[\tfrac{n+5}{2}]=[\tfrac{2t-e+5}{2}]=t+2+[\tfrac{1-e}{2}]=t+2,$$

добиваме $L(n)\le[\frac{n+5}{2}]$.

8. Дадени се n тегови со маси природни броеви $w_1\le w_2\le\ldots\le w_n$. Едно такво множество од тегови се нарекува *комплетно*, ако секој природен број, кој е помал од $w_1+w_2+\ldots+w_n$, може да се претстави како збир од неколку од дадените маси. Докажи, дека ако од комплетно множествосе отстрани најголемата маса, тогаш останатите маси повторно формираат комплетно множество.

Решение. Ќе ја користиме ознаката $\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}\to a$, ако бројот a може да се претстави како збир на некои од броевите $w_1,w_2,\ldots,w_n$. Притоа ќе велиме дека $\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$ го генерира бројот a. Ќе докажеме дека $\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$ е комплетно множество ако и само ако

$$w_1=1,\ w_i\le w_1+\ldots+w_{i-1}+1,\ \text{за секој } i\in\{2,3,\ldots,n\}. \qquad (1)$$

Ако $w_1>1$ или $w_i>w_1+\ldots+w_{i-1}+1$, за некој $i\in\{2,3,\ldots,n\}$, тогаш соодветно масите 1 или $w_1+\ldots+w_{i-1}+1$ не може да бидат генерирани од множеството $\{w_1,w_2,\ldots,w_n\}$.

Обратно, нека претпоставиме дека $w_1, w_2, ..., w_n$ го задоволуваат условот (1). Со индукција ќе докажеме дека овие броеви формираат комплетно множество. За $n=1$ тврдењето е точно и нека претпоставиме, дека тоа е точно за $n-1$.

Бидејќи $w_1, w_2, ..., w_n$ го задоволуваат условот (1), добиваме дека броевите $w_1, w_2, ..., w_{n-1}$ исто така го задоволуваат условот (1). Затоа за секој

$$W \leq w_1 + w_2 + ... + w_{n-1}$$

важи $\{w_1, w_2, ..., w_{n-1}\} \to W$. Ако

$$w_1 + w_2 + ... + w_{n-1} < W \leq w_1 + w_2 + ... + w_{n-1} + w_n$$

тогаш

$$W - w_n \leq w_1 + w_2 + ... + w_{n-1} .$$

За $W = w_n$ е јасно, дека $\{w_1, w_2, ..., w_n\} \to W$, а ако $W > w_n$, тогаш од

$$1 \leq W - w_n \leq w_1 + w_2 + ... + w_{n-1}$$

следува дека $\{w_1, w_2, ..., w_{n-1}\} \to W - w_n$, па затоа $\{w_1, w_2, ..., w_{n-1}, w_n\} \to W$.

Конечно, од претходно изнесеното следува тврдењето на задачата.

9. Емилија и Весна го пребарувале таванот на дедо Марко и нашле вага и кутија со тегови. Кога теговите ги распределиле по маси, констатирале дека има 5 различни групи тегови. Играјќи се со вагата и теговите, констатирале дека ако на едната страна на вагата стават било кои два тега, тогаш е можно во кутијата да се најдат други два тега такви што со нивно ставање на другата страна на вагата, вагата е во рамнотежа.

Определи го најмалиот можен број тегови во кутијата.

Решение. Според условот на задачата, за секој пар тегови (x, y) постои пар тегови (u, v) таков што $x + y = u + v$. Во овој случај ќе велиме дека парот (u, v) го *урамнотежува* парот (x, y) .

Нека a, b, c, d, e се различни тежини на теговите од ова множество. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $a < b < c < d < e$. Да го разгледаме парот (a, b) . Бидејќи $2a < a + b < 2b$ и $a + b < x + y$ за секои x и y различни од a и b , заклучуваме дека овој пар го урамнотежува само ист таков пар, т.е. парот (a, b) . Затоа во множеството од сите тегови S мора да има два тега со маса a и два тега со маса b .

Бидејќи во S постојат најмалку два тега со маса a , треба да го разгледаме парот (a, a) . Вкупната маса на овој пар е $a + a = 2a$. Секој пар $(x, y) \neq (a, a)$ има поголем збир на маси од парот (a, a) . Според претпоставката постои пар тегови кој го урамнотежува, а тоа единствено е можно ако урамнотежувачкиот пар е (a, a) . Тоа значи дека имаме најмалку 4 тегови со маса a .

Сега да го разгледаме парот (d, e) . Единствен пар кој го урамнотежува е ист таков пар, што значи дека имаме 2 тега со маса d и 2 тега со маса e . Парот (e, e) има најголема вкупна маса, па единствен пар кој го урамнотежува е ист таков пар. Значи, имаме 4 тегови со маса e .

Според условот на задачата постои тег чија маса е поголема од b и е помала од d . Масата на тој тег ја означивме со c .

Од досега изнесеното следува дека бројот на теговите не може да биде помал од $4+2+1+2+4=13$. Ќе докажеме дека тоа е најмалиот број елементи на множеството S. Последното може да го докажеме, ако конструираме множество S со 13 елементи кои го задоволуваат условот на задачата. Такво множество се состои од 4 тегови со маса 1, 2 тега со маса 2, 1 тег со маса 3, 2 тега со маса 4 и 4 тегови со маса 5.

10. Дадени се n торби и во секоја торба има по 100 монети. Во една од торбите секоја монета тежи по 9 грама, а во останатите $n-1$ торби секоја монета тежи по 10 грама. Располагаме со вага која покажува тежини до 1 килограм. Определи го најмалиот можен број мерења, со кои може се определи торбата со полесните монети.

Решение. Со $f(k)$ да го означиме максималниот број торби, за кои k мерења се доволни. Јасно, функцијата $f(k)$ е моното растечка.

Ќе докажеме, дека $f(1)=14$. Ако $n=14$, на вагата поставуваме по $i-1$ монета от i-тата торба за $i=1,2,...,14$. Тогаш ќе биде покажана тежина $910-k$ и тоа ќе значи дека торбата со полесните монети е $k+1$-вата. Според тоа, $f(1)\geq 14$. Нека имаме некој број на торби и право на едно мерење. Нека a_i е бројот на торбите, од кои сме зеле по i монети. Тогаш

$$a_1+2a_2+\ldots+ma_m\leq 100 \ , \qquad (1)$$

каде $a_i\leq 1$ за секој $i\geq 0$, бидејќи ако земеме еднаков број монети од две различни торби и една од тие торби е со полесните монети, нема да можеме да направиме разлика меѓу тие торби. Треба да најдеме максимум на бројот на торбите $\sum_{i=0}^{m} a_i$. Ова се постигнува, кога прво се ќе се најде максимум на a_0, потоа на a_1 итн. Имајќи го предвид неравенството (1) добиваме дека максимумом е 14, т.е. $f(1)\leq 14$.

Во вториот чекор ќе докажеме, дека $f(2)=60$. Неравенството (1) одново е исполнето и од $f(1)=14$ следува, дека $a_i\leq 14$ за секој $i\geq 0$. Сега максимиумот на $\sum_{i=0}^{m} a_i$ се добива за $a_0=a_1=a_2=a_3=14$ и $a_4=4$, па затоа $f(2)=4\cdot 14+4=60$.

На сличен начин се докажува, дека $f(3)=140$. На крајот, ако $k>3$, тогаш бидејќи $a_i\leq 100$ треба да имаме $a_0\leq f(k-1)$ и добиваме максимум кога $a_0=f(k-1)$ и $a_1=100$. Според тоа,

$$f(k)=f(k-1)+100,$$

што заедно со најдените $f(1), f(2)$ и $f(3)$, ја определува функцијата $f(k)$.

11. Определи го најмалиот позитивен реален број α, за кој е точно следново тврдење: ако вкупната маса на конечен број тикви е еден тон и секоја од тиквите има маса најмногу α тони, тогаш тиквите може да се распределат во 50 вреќи (некои од вреќите може да бидат и празни) така што во секоја вреќа има најмногу α тони тикви.

Решение. Ќе докажеме дека бараниот број е $\alpha=\frac{2}{51}$. Нека претпоставиме дека $\alpha<\frac{2}{51}$ и нека избереме ненегативен цел број k таков што

$$\frac{1}{51\cdot 2^k}\le\alpha<\frac{1}{51\cdot 2^{k-1}}.$$

Да го разгледаме множеството од $51\cdot 2^k$ тикви, секоја од кои има маса $\frac{1}{51\cdot 2^k}$ тони. Тогаш како и да ги распределиме тиквите во 50 вреќи, барем една од вреќите содржи најмалку две тикви и затоа таа вреќа ќе има маса $\frac{1}{51\cdot 2^{k-1}}\ge\alpha$ тони.

Ќе докажеме дека условот на задачата е исполнет за $\alpha=\frac{2}{51}$. Да ја ставиме секоја тиква во посебна вреќа и потоа додека е можно да ја применуваме следнава операција: ако двете најлесни вреќи заедно содржат најмногу $\frac{2}{51}$ тони тикви, тогаш содржината од едната вреќа ја претураме во другата вреќа и се ослободуваме од празната вреќа. Нека во првиот момент, во кој оваа операција не може повеќе да се применува имаме n вреќи, кои содржат $x_1\le x_2\le...\le x_n$ тони тикви, соодветно. Тогаш $x_1+x_2>\frac{2}{51}$, па затоа $x_2>\frac{1}{51}$. Оттука добиваме

$$1=x_1+x_2+...+x_n>\frac{2}{51}+\frac{n-2}{51},$$

па затоа $n<51$. Така, тиквите се распределени во најмногу 50 вреќи и секоја вреќа содржи најмногу $\frac{2}{51}$ тони тикви. Останува само да го додадеме потребниот број празни вреќи и да добиеме вкупно 50 вреќи.

12. Разгледуваме комплет тегови, секој од кои тежи цел број грамови, а заедно тежат $200g$. Таков комплет го нарекуваме правилен, ако секој предмет со целобројна маса од 1 до 200 грама може да се измери со определен број тегови и тоа на единствен начин, при што предметот се поставува на едниот тас, а теговите на другиот тас и две мерења кои се разликуваат со замена на неколку тегови со други, но со иста маса, ќе ги сметаме за еднакви.

а) Да се најде пример за правилен комплет во кој не сите тегови се по $1g$.

б) Колку различни правилни комплети постојат? (Два комплети се различни, ако некој тег учетвува различен број пати).

Решение. Да разгледаме еден правилен комплет тегови. Нивните маси да ги означиме со $a_1<a_2<...<a_n$, а бројот на теговите од соодветните маси со $k_1,k_2,...,k_n$. Јасно, јасно $a_1=1$, бидејќи во спротивно масата од $1g$ не би можеле да ја измериме.

Ќе докажеме дека $a_2=k_1+1$. Навистина, ако $a_2>k_1+1$, тогаш масата k_1+1 не може да се измери, а ако $a_2<k_1+1$, масата може да се измери на два начини:

а) со еден тег од a_2 грама,

б) со a_2 тегови од по 1 грам.

Со индукција ќе покажеме дека

$$a_i=(k_{i-1}+1)a_{i-1},\text{ за } i=2,3,4,... . \qquad (1)$$

Ова равенство означува дека секој тег има 1 грам поголема маса од збирот на масите на сите тегови полесни од него. Навистина,

$$\begin{aligned} a_i &= (k_{i-1}+1)a_{i-1} = k_{i-1}a_{i-1} + a_{i-1} = k_{i-1}a_{i-1} + (k_{i-2}+1)a_{i-2} = \dots \\ &= k_{i-1}a_{i-1} + k_{i-2}a_{i-2} + \dots + k_2a_2 + a_2 \\ &= k_{i-1}a_{i-1} + k_{i-2}a_{i-2} + \dots + k_2a_2 + k_1a_1 + 1 \end{aligned}$$

За $i = 2$ равенството (1) е докажано. Да претпоставиме дека $a_q = (k_{q-1}+1)a_{q-1}$, за $q < i$. Значи, за секој тег до $(i-1)-$ от важи: секој тег има за 1 грам поголема маса од збирот на сите тегови полесни од него. Значи, секоја маса од x грама каде

$$x < k_{i-1}a_{i-1} + k_{i-2}a_{i-2} + \dots + k_2a_2 + k_1a_1 + 1 = (k_{i-1}+1)a_{i-1}$$

може да се измери со тегови чија маса е помала или еднаква на a_{i-1} на единствен начин (индуктивна претпоставка). Ако $a_i < (k_{i-1}+1)a_{i-1}$, масата a_i може да се измери на два начини. Еден начин според индуктивната претпоставка со тегови со помала маса од масата a_i, а еден со тег со маса a_i, па затоа $a_i \geq (k_{i-1}+1)a_{i-1}$. Но, масата $a_i = (k_{i-1}+1)a_{i-1}$ не може да се измери со маси кои не се поголеми од a_{i-1}, и затоа $a_i = (k_{i-1}+1)a_{i-1}$ (според условот на задачата). Сега, равенството (1) следува од принципот на математичка индукција.

Бидејќи вкупната маса е 200 грама, наоѓаме

$$201 = k_na_n + k_{n-1}a_{n-1} + \dots + k_2a_2 + k_1a_1 + 1 = (k_{n-1}+1)a_{n-1} = a_n.$$

Значи, 201 е еднаков на $(k_{n-1}+1)a_{n-1}$, од каде наоѓаме дека 201 е делив со a_{n-1} итн. Лесно се гледа дека 201 е делив со секој a_i, за $i = 1,2,\dots,n-1$. Бидејќи $201 = 1\cdot 3\cdot 67$ добиваме три различни правилни комплети:

1) $a_n = 1$, комплет од 200 тегови, секој по 1 грам;

2) $a_n = 3$, комплет од 2 тега по 1 грам и 66 тегови од по 3 грама;

3) $a_n = 67$, комплет од 66 тегови по еден грам и 2 тега по 67 грама.

3. ТУРНИРИ

1. На математички турнир учествувале 21 момче и 21 девојче. Секој од нив решил најмногу 6 задачи. За секое момче и за секое девојче постои барем една задача која и двајцата ја решиле. Докажи, дека постои задача која ја решиле барем три момчиња и барем три девојчиња.

Решение. За една задача ќе велиме дека е *тешка за момчињата* ако ја решиле најмногу две момчиња, а *тешка за девојчињата* ако ја решиле најмногу две девојчиња.

Ќе го оцениме бројот на паровите момче-девојче такви што и двајцата решиле некоја задача тешка за момчињата. Да разгледаме произволно девојче. Според условот, меѓу шесте задачи кои ги решила, најмногу 5 се тешки за момчињата, т.е. решени се од најмногу 2 момчиња. Според тоа, бројот на разгледуваните парови е помал или еднаков на $21\cdot 5\cdot 2 = 210$.

Слично, има најмногу 210 парови момче-девојче такви што и двајцата решиле некоја задача која е тешка за девојчињата. Меѓутоа, вкупниот број парови момче-девојче е $21^2 = 441$. Значи, во најмалку 21 пар задачата која и двајцата ја решиле не е тешка ниту за девојчињата ниту за момчињата.

2. На шаховски турнир учествуваат две ученички и неколку ученици, и секој одиграл по една партија со секого. Ученичките заедно освоиле 8 бода. Колку ученици имало на натпреварот, ако се знае дека тие освоиле по еднаков број на бодови?

Решение. Да го означиме бројот на учениците со x. Тогаш вкупниот број на учесници на натпреварот е $x+2$. Бројот на сите одиграни партии е $\frac{(x+2)(x+1)}{2}$. Учениците освоиле по еднаков број бодови, по y; тогаш е $\frac{(x+2)(x+1)}{2}-8=xy$ или

$$x^2-(2y-3)x-14=0 \qquad (1)$$

Бидејќи $x,y\in\mathbb{N}$, дискриминантата на равенката (1) треба да биде точен квадрат, т.е.

$$(2y-3)^2+56=n^2.$$

Од $(n+2y-3)(n-2y+3)=56$, добиваме:

$$\begin{cases} n+2y-3=28 \\ n-2y+3=2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} n+2y-3=14 \\ n-2y+3=4 \end{cases}$$

од каде што добиваме $y=8$ или $y=4$, па $x=14$ или $x=7$.

3. На тениски турнир учествуваат 14 тенисери и секој со секого одиграл точно по еден меч. Тројката тенисери (a,b,c) ја нарекуваме *триаголник* ако a го победил b, b го победил c и c го победил a. Кој е најголемиот можен број на триаголници на овој турнир?

Решение. Вкупно има $\binom{14}{3}=364$ тројки. Ќе ги преброиме тројките кои не се триаголници. Со a_i да го означиме бројот на победите на $i-$тиот играч. Имаме

$$a_1+a_2+...+a_{14}=\binom{14}{2}=91.$$

Ако тројката не е триаголник, тогаш еден од тие три играчи победник (ги победил другите два играчи). Така тројки кои не се триаголници, а во кои е победник $i-$тиот играч има точно $\binom{a_i}{2}$. Значи, вкупно имаме $S=\sum_i \binom{a_i}{2}$ тројки кои не се триаголници. Јасно, бројот триаголници е максимален кога S е минимален (заедно со условот $\sum_i a_i=91$).

Од

$$\binom{a_i-1}{2}+\binom{a_j+1}{2}=\binom{a_i}{2}+\binom{a_j}{2}-(a_i-a_j-1),$$

за $a_i-a_j>1$, следува дека збирот S е најмал кога сите a_i се разликуваат точно за 1, т.е. кога меѓу нив има по седум еднакви на 6 и 7. Тогаш $S=7\binom{6}{2}+7\binom{7}{2}=252$, па имаме $364-252=112$ триаголници.

Овој број навистина може да се постигне, на пример, кога $i-$тиот играч ги победил играчите $i+1,i+2,...,i+6$, за $i=1,2,...,14$ (индексите се по модул 14). Тогаш по седум играчи имаат по 6 и 7 победи.

4. На тениски турнир учествувале 2^n тенисери. Секој тенисер одиграл по еден меч со секој од останатите тенисери. Докажи, дека можеме да избереме $n+1$ тенисери и да ги подредиме во низа така што секој од нив ги победил сите тенисери кои во низата се наоѓаат по него.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n.

Ако $n=1$, тогаш на турнирот има точно два тенисера, па прв во низата е победникот од нивниот меѓусебен меч.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за некој природен број n, т.е. дека меѓу 2^n тенисери кои играле секој со секој можеме да избереме $n+1$ тенисери и да ги подредиме во низа така што секој од нив ги победил сите тенисери кои во низата се наоѓаат по него.

Понатаму, победникот на турнир со 2^{n+1} тенисери победил најмалку 2^n тенисери. Имено, ако секој тенисер има помалку од 2^n победи, тогаш вкупниот број победи е најмногу $2^{n+1}(2^n-1)$. Меѓутоа, бројот на победите е еднаков на бројот на мечевите, т.е. еднаков е на $\frac{1}{2}2^{n+1}(2^{n+1}-1)=2^n(2^{n+1}-1)>2^{n+1}(2^n-1)$. Значи, не е можно сите играчи да имале помалку од 2^n победи. Според претпоставката, меѓу 2^n тенисери кои ги победил победникот на турнирот можеме да избереме $n+1$ тенисер и да ги подредиме во низа така што секој од нив ги победил сите тенисери кои во низата се наоѓаат после него. Сега, доволно е победникот на турнирот да го додадеме на почетокот на низата.

5. Една математичка олимпијада се спроведува во два натпреварувачки дена. Бројот на натпреварувачки задачи во првиот ден е еднаков на бројот на натпреварувачки задачи во вториот ден. Бројот на ученици што точно решиле задачи со ист реден број од првиот и вториот натпреварувачки ден се разликува за два. За секој ученик, бројот на задачи кои точно ги решил во првиот ден се разликува за 1 од бројот на задачи кои точно ги решил вториот ден.

Докажи дека на олимпијадата учествувале парен број ученици.

Решение. Задачите што биле зададени на олимпијадата ќе ги групираме по парови. Задачи со ист реден број, една од првиот натпреварувачки ден, а друга од вториот натпреварувачки ден формираат пар.

Ќе разгледаме еден пар задачи. Ако едната задача од парот ја решиле n натпреварувачи, тогаш другата задача од парот ја решиле $n\pm2$ натпреварувачи. Двете задачи од парот ги решиле вкупно $2n\pm2$ натпреварувачи. Ако за секоја точно решена задача се добива по 1 поен, тогаш за сите решени задачи, од сите натпреварувачи заедно е парен број.

Бројот на поени што ги освоил еден натпреварувач е непарен број (според условот од задачата). За да вкупниот број на освоени поени е парен, мора бројот на натпреварувачи да е парен.

6. На еден шаховски турнир на кој немало нерешени резултати, учествувале два ученика и неколку студенти. Играле секој со секого. Двата ученика освоиле заедно 8 поени, додека секој студент освоил по еднаков број на поени. Колку студенти учествувале на турнирот и колку поени освоиле. Да се најдат сите решенија.

Решение. Нека x е бројот на студенти што учествувале на турнирот и k е бројот на поени што секој од нив го освоил. Тогаш

$$\binom{x+2}{2} = kx+8\text{, т.е. } x^2-(2k-3)x-14=0\,.$$

Бидејќи $x,k\in\mathbb{N}$, дискриминантата на горната равенка мора да е точен квадрат, т.е.

$$(2k-3)^2+56=n^2,$$

односно $(2k-3)^2-n^2=-56$. Ова може да се запише во следниот облик

$$(n-2k+3)(n+2k-3)=56=1\cdot2\cdot2\cdot2\cdot7\,.$$

Ги имаме следните можности:

1° $n-2k+3=1$ и $n+2k-3=56$

2° $n-2k+3=2$ и $n+2k-3=28$

3° $n-2k+3=4$ и $n+2k-3=14$

4° $n-2k+3=8$ и $n+2k-3=7$

5° $n-2k+3=56$ и $n+2k-3=1$

6° $n-2k+3=28$ и $n+2k-3=2$

7° $n-2k+3=14$ и $n+2k-3=4$

8° $n-2k+3=7$ и $n+2k-3=8$

Со непосредна проверка се гледа дека само системите 2° и 3° даваат решенија кои соодветствуваат на дадените услови.

Од 2° се добива $n=15$, $k=8$ и $x=14$

Од 3° се добива $n=9$, $k=4$ и $x=7$.

7. По завршувањето на еден шаховски турнир, на кој секој учесник одиграл по една партија со секој друг учесник, се констатирало дека секој учесник освоил точно половина од своите поени играјќи со натпреварувачите кои се пласирале на последните три места. Колку учесници имало на турнирот? (Во шахот за победа се добива по еден поен, за реми половина поен, а за пораз не се добива ниту еден поен.)

Решение. Нека на турнирот учествувале n шахисти. Последнопласираните три шахисти одиграле меѓусебно три партии и поделиле три поени. Тие три поени се половина од поените кои ги освоиле на крајот, па половината од нивните поени ги освоиле во партиите со останатите $n-3$ шахисти. Значи во партиите со останатите $n-3$ шахисти последните тројца освоиле три поени. Според тоа останатите $n-3$ учесници одиграле со последните тројца $3(n-3)$ партии и освоиле вкупно $3(n-3)-3$ поени. Од условот на задачата тој број на поени е еднаков на бројот на поените кои тие ги поделиле меѓусебно, односно на $\frac{1}{2}(n-3)(n-4)$.

Значи ја добиваме равенката

$$3(n-3)-3=\tfrac{1}{2}(n-3)(n-4)\,.$$

Нејзините решенија се

$$n_1=4 \text{ и } n_2=9\,.$$

Случајот $n_1 = 4$ не ги исполнува условите на задачата бидејќи првиот натпреварувач нема со кого да ги освои половината од своите поени. Според тоа, на турнирот имало девет учесници.

8. На еден тениски турнир учествувале n тенисери и секои два тенисера меѓусебно одиграле точно еден натпревар. Тенисерот A добива награда ако за секој друг тенисер B важи: A го победил B или A победил некој друг тенисер C кој го победил B. Докажи, дека ако само еден тенисер добил награда, тогаш тој ги победил останатите тенисери.

Решение. Да претпоставиме дека само тенисерот A добил награда. Со S_0 да го означиме множеството тенисери кои го победиле A. Нека $S_0 \neq \varnothing$ и нека $B_0 \in S_0$. Тогаш не е можно B_0 да ги победил сите тенисери од S_0, бидејќи во тој случај B_0 ќе добие награда, што противречи на претпоставката дека само тенисерот A добил награда. Со $S_1 \subset S_0$ да го означиме множеството тенисери кои го победиле B_0. Од претходните разгледувања следува дека $S_1 \neq \varnothing$. Секој тенисер B_1 од S_1 ги победил A и B_0. Со $S_2 \subset S_1$ да го означиме множеството тенисери кои го победиле B_1. Јасно, $S_2 \neq \varnothing$. Ако ја продолжиме постапката, добиваме бесконечна низа од непразни множества $S_0 \supset S_1 \supset S_2 \supset S_3 \supset \dots$, што противречи на фактот на турнирот учествувале конечен број тенисери.

9. На еден тениски турнир секои двајца играчи играле еден против друг. На крајот на турнирот играчот A имал k, $k \geq 2$ победи повеќе од играчот B. Докажи, дека постои група S од играчи, $|S| \geq k-1$, таква што секој играч од S е поразен од A и секој играч од S го победил B.

Решение. Нека R_A е множеството играчи кои се поразени од A и нека b е бројот на играчите кои на турнирот се поразени од B. Тогаш $|R_A| = k+b$. Можни се два случаја:

1) $B \in R_A$. Нека V е подмножество играчи од R_A кои што го победиле B. Јасно, $V \neq \varnothing$. Ако претпоставиме дека $|V| < k-1$, тогаш
$$b \geq |R_A| - 1 - |V| > (b+k) - 1 - (k-1) = b,$$
што е противречност.

2) $B \notin R_A$. Нека V е подмножество играчи од R_A кои што го победиле B. Јасно, $V \neq \varnothing$. Ако претпоставиме дека $|V| < k-1$, тогаш
$$b \geq |R_A| - |V| > (b+k) - (k-1) = b+1,$$
што е противречност.

10. На одбојкарскиот турнир на Евро-африканскиот куп учествувале екипи од Европа и Африка. Од Европа учествувале 9 пати повеќе екипи отколку од Африка и тие освоиле 9 пати повеќе бодови од африканските екипи (секоја екипа играла со секоја друга екипа по еден натпревар, при што за победа се добива 1 бод, а за загубен натпревар се добиваат 0 бодови). Колку најмногу бодови може да освои најдобрата африканска екипа?

Решение. Нека x е бројот на африканските екипи. Тогаш бројот на европските екипи е $x+9$. Африканските екипи меѓу себе одиграле $\frac{x(x-1)}{2}$ натпревари и освоиле $\frac{x(x-1)}{2}+k$ бодови, каде k е бројот на победите на африканските екипи над европските. Тоа значи дека бројот на освоените бодови на европските екипи е $\frac{(x+8)(x+9)}{2}+x(x+9)-k$. Според тоа,

$$9(\frac{x(x-1)}{2}+k)=\frac{(x+8)(x+9)}{2}+x(x+9)-k,$$

од каде наоѓаме

$$3x^2-22x+10k-36=0.$$

Последната равенка треба да има корен природен број, па затоа дискриминантата треба да е точен квадрат, т.е.

$$121-3(10k-36)=229-30k$$

е точен квадрат. Значи, $k\leq 7$ и со непосредна проверка добиваме дека точен квадрат се добива само за $k=2$ или $k=6$. За $k=2$ имаме $x=8$ и затоа најдобрата африканска екипа може да освои најмногу $7+2=9$ бодови. За $k=6$ имаме $x=6$ и затоа најдобрата африканска екипа може да освои најмногу $5+6=11$ бодови и тоа е случајот кога ги победува сите африкански екипи и победува уште 6 европски екипи.

Конечно, најдобрата африкаснка екипа може најмногу да освои 11 бодови.

11. На испит учествувале 25 студенти. Испитот се састои од неколку прашања и за секое прашање се понудени пет одговори. Се покажало дека одговорите на секои два студента се поклопуваат на најмногу едно прашање. Докажи дека на испитот имало најмногу 6 прашања.

Решение. Бројот на прашањата да го означиме со n. Ако на едно прашање 6 студенти дале ист одговор, барем двајца од нив исто одговориле и на некое друго прашање, што противречи на условот на задачата. Според тоа, на секое прашање, секој од од петте понудени одговори го дале точно 5 студенти. Набљудуваме еден студент, да го наречеме Павел. На секое од n прашања уште 4 студенти дале ист одговор. Ако, на пример, Марко се наоѓа во две такви четворки, тогаш неговите одговори и одговорите на Павел ќе се поклопуваат на две прашања, што е спротивно на условот на задачата. Следува дека сите овие четворки се дисјунктни, па затоа имаме најмалку $4n+1$ студенти. Оттука следува дека $4n+1\leq 25$, односно $n\leq 6$.

12. На едно тестирање учествувале $n, (n\geq 3)$ ученици. Тестот се состоел од 15 прашања и на секое прашање се понудени повеќе одговори од кои само еден е точен. На прашање се одговара со заокружување на точниот одговор. За секој точен одговор се добива по 1 бод, а за неточен одговор или неодговорено прашање не се добиваат бодови. По тестирањето се покажало дека збирот на освоените бодови на било кои 12 ученици е поголем или еднаков на 36 и има најмалку три ученици, за кои постојат три прашања на кои овие ученици точно одговориле. Определи ја најмалата можна вредност на n.

Решение. Ќе докажеме дека бараната најмала вредност е $n=911$.

Нека $n=911$. Ако секој ученик одговорил точно на најмалку три прашања, тогаш за секој ученик ќе има $\binom{15}{3}=455$ начини точно да одговорил на точно три прашања. Затоа од принципот на Дирихле следува, дека постојат барем три ученици, за кои постојат три прашања на кои ови ученици точно одговориле.

Ако постои ученик X со помалку од три точни одговори, тогаш бројот на учениците со помалку од четири точни одговори не е поголем од 10. Во спротивно, ако земеме 11 такви ученици, тие заедно со ученикот X вкупно ќе освојат помалку од 36 бодови, што противречи на условот на задачата. Според тоа, постојат повеќе од $911-11=900$ ученици кои освоиле најмалку 4 бодови. Бидејќи $900\cdot\binom{4}{3}>2\cdot\binom{15}{3}$, заклучуваме дека постојат три ученици, за кои постојат три прашања на кои овие ученици дале точен одговор.

Ако на тестирањето учествувале 910 ученици, тогаш учениците ќе ги поделиме во $\binom{15}{3}=455$ групи од по 3 ученика. Во секоја група двајцата ученици одговараат точно само на трите прашања од соодветната група. Тоа значи, дека секоја група од 12 ученици ќе освои точно 36 бодови, но за секои три ученици не постојат три прашања на кои овие ученици точно одговориле.

13. На еден натпревар учениците решавале пет задачи. Не постојат два ученика кои решиле исти задачи, но ако избереме било кои четири задачи, тогаш за секој ученик постои најмалку уште еден ученик кој ги решил токму истите од тие четири избрани задачи. Колку ученици учествувале на натпреварот.

Решение. На секој ученик можеме да му придружиме низа од нули и единици со должина 5 така што единицита на $k-$тото значи дека ученикот ја решил $k-$тата задача, а нулата дека не ја решил $k-$тата задача. Бидејќи не постојат два ученика кои решиле исти задачи заклучуваме дека ваквто придружување е биекција. Сега доволно е да ги преброиме низите.

Јасно, на натпреварот учествувале најмногу $2^5=32$ ученика. Ќе докажеме дека имало точно 32 ученика. Нека $ABCDE$ е произволна низа од нули е единици. На натпреварот учествувал најмалку еден ученик и нека $abcde$ е низата од нули и единици која му соодветствува.

Ако $ABCDE=abcde$, тогаш доказот е завршен, бидејќи ученикот $abcde$ учествувал на натпреварот, а $ABCDE$ е произволна низа.

Нека $e\neq E$. Според условот на задачата за ученикот $abcde$ постои барем уште еден ученик за кој неговата низ започнува со $abcd$. Бидејќи $e\neq E$, на овој ученик му е придружена низата $abcdE$. Со други зборови на натпреварот учествувал и ученикот $abcdE$. Ако $ABCDE=abcdE$, тогаш доказот е завршен. Во спротивно да претпоставиме дека $d\neq D$. За ученикот $abcdE$ постои барем уште еден ученик чија низа започнува со abc и завршува со E. Бидејќи $d\neq D$, тоа е низата $abcDE$, т.е. на натпреварот учествувал и ученикот $abcDE$. Со аналогни размислувања се докажува дека на натпреварот учествувале и учесниците $abCDE, aBCDE$ и $ABCDE$, т.е. дека за низата $ABCDE$ постои ученик на кој истата му е придружена.

Конечно, од произволноста на низата $ABCDE$ следува дека на натпреварот учествувале 32 ученика.

4. РАСПОРЕДУВАЊА И ПОЗНАНСТВА

1. Во низа се распоредени броевите од 1 до 9 така што збирот на секој број на непарна позиција со неговите соседи (сосед) е еднаков на S. Определи ги сите можни вредности на S.

Решение. Ако редоследот на запишаните броеви е a,b,c,d,e,f,g,h,i, тогаш од условот следува дека $5S=45+b+d+f+h$. Бидејќи $10\le b+d+f+h\le 30$, добиваме дека S е еден од броевите 11, 12, 13, 14, 15. Од друга страна,

$$3S=a+b+d+e+f+h+i=45-(c+g),$$

од каде следува дека $S\ne 15$.

Лесно се гледа дека при подредувањето 925461738 важи $S=11$, при подредувањето 941832567 важи $S=13$ и при подредувањето 592347168 важи $S=14$.

Да претпоставиме дека $S=12$. Тогаш $c+g=9$. Ако низата a,b,c,d,e,f,g,h,i ја запишеме во обратен редослед, таа го има истото својство, па затоа без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $c<g$. Ќе ги разгледаме сите можности.

1) Ако $c=1,g=8$, тогаш $f+h=4$, што не е можно.
2) Ако $c=2,g=7$, тогаш $f+h=5$, т.е. $\{f,h\}=\{1,4\}$. Ако $h=1$, тогаш $i=11$, што не е можно. Ако $f=1,h=4$, тогаш $i=8$, $b+d=10$, што не е можно, бидејќи веќе е искористен по еден број од сите можни парови броеви чиј збир е 10.
3) Ако $c=3,g=6$, тогаш $f+h=6$, т.е. $\{f,h\}=\{1,5\}$ или $\{2,4\}$. Ако $h\le 2$, тогаш $i\ge 10$, што е противречност. Ако $f=1,h=5$, тогаш $i=7$, $b+d=9$, што не е можно, бидејќи веќе е искористен по еден број од сите можни парови броеви чиј збир е 9. Ако $f=2,h=4$, тогаш $i=8,b+d=9$, што не е можно, бидејќи веќе е искористен по еден број од сите можни парови броеви чиј збир е 9.
4) Ако $c=4,g=5$, тогаш $f+h=7$, т.е. $\{f,h\}=\{1,6\}$. Ако $h=1$, тогаш $i=11$, што не е можно. Ако $h=6$, тогаш $i=6$, што повторно епротивречност.

Конечно, бараните вредности се $S=11,S=13$ и $S=14$.

2. На еден математички натпревар секој од натпреварувачите има најмногу $d\ge 1$ познаници. Нека d_1 и d_2 се ненегативни цели броеви такви што $d_1+d_2=d-1$. Докажи, дека натпреварувачите можат да бидат распределени во две простории така што секој ученик од првата просторија има најмногу d_1 познаници во неговата просторија и секој ученик од втората просторија има најмногу d_2 познаници во неговата просторија.

Решение. Учениците ќе ги поделиме во две групи V_1 и V_2. Нека $e_i, i=1,2$ е бројот на паровите познаници во $V_i, i=1,2$, соодветно. Меѓу сите можни поделби по простории, кои ги има конечно многу, да разгледаме таква поделба (таа може и да не е единствена), за која бројот $e_1(d_2+1)+e_2(d_1+1)$ е најмал.

Ќе докажеме, дека ваквата поделба (разбивање) го задоволува условот на задачата. Нека го претпоставиме спротивното, т.е. дека во една од групите, да кажеме V_1, има натпреварувач x кој има $d_x^{'} \geq d_1 + 1$ познаници во групата. Со $d_x^{''}$ да го означиме бројот на познаниците на x во V_2. Ако x го преместиме во V_2, тогаш за бројот на познанствата во V_1 и V_2 добиваме

$$e_1^{'} = e_1 - d_x^{'} \leq e_1 - d_1 - 1 \text{ и}$$

$$e_2^{'} = e_2 + d_x^{''} \leq e_2 + d - d_x^{'} \leq e_2 + (d_1 + d_2 + 1) - (d_1 + 1) = e_2 + d_2,$$

соодветно. Според тоа,

$$e_1^{'}(d_2 + 1) + e_2^{'}(d_1 + 1) - e_1(d_2 + 1) - e_2(d_1 + 1) \leq -d_1 - 1 < 0,$$

што е противречност со минималноста на $e_1(d_2 + 1) + e_2(d_1 + 1)$. Со тоа доказот е завршен.

3. Чета од $n(n+2)$ војници е построена во n колони и $n+2$ реда на еднакви растојанија од еден метар. По команда при која секој војник се придвижува за еден метар во еден од четирите правци или останува на место, четата е построена во $n+2$ колони и n редови на еднакви растојанија. Докажи, дека n е парен број.

Решение. Нека четирите правци се горе, долу, лево и десно. После командата најгорниот ред се придвижува надолу, најдолниот ред – нагоре, најлевата колона (без двајцата крајни војници) – налево, а најдесната колона (исто без двајцата крајни војници) – надесно. Останатите војници, кои на почетокот се построени во $n-2$ колони и n реда, се придвижуваат така што се постројуваат во n колони и $n-2$ редици. Така од n преминавме на $n-2$. Ако постапката ја продолжиме доаѓаме до $n=1$ или $n=2$. Бидејќи за $n=1$ условот не може да биде исполнет добиваме дека n е парен број.

4. Во една група ученици се исполнети следниве услови:

- секој ученик познава најмногу N други ученици и
- за секој $k \in \{1, 2, ..., N\}$ бројот на учениците кои имаат k познаници е еднаков на k.

Определи ги сите можни вредности на N. (Познанството е симетрична релација, ако A го познава B, тогаш B го познава A.)

Решение. Бидејќи постои еден ученик кој има едно познанство, два ученика со две познанства итн. N ученици со N познанства, заклучуваме дека во групата има $1 + 2 + ... + N = \frac{N(N+1)}{2}$ ученици. Понатаму, $1^2 + 2^2 + ... + N^2$ е парен број, бидејќи во овој број секое познанство се брои двапати (за секој пар познаници по еднаш за секој ученик). Според тоа, бројот $\frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$ е парен, па затоа бројот $N(N+1)$ е делив со 4. Но, броевите N и $N+1$ се заемно прости, па затоа $N = 4q, q \geq 1$ или $N = 4q + 3, q \geq 0$.

Ќе докаѓеме дека и во двата случаја постои група ученици кои ги задоволуваат условите на задачата.

Нека $N = 4q, q \geq 1$ и нека S е група од $\frac{N(N+1)}{2}$ ученици кои меѓусебно не се познаваат. Бидејќи $1+2+...+N=\frac{N(N+1)}{2}$, учениците можеме да ги поделиме во N групи $S_i, i=1,2,...,N$ така што групата S_i има i ученици, $i=1,2,...,N$. Сите ученици кои се во иста група ги запознаваме меѓусебно. На овој начин за секој $i=1,2,...,N$ имаме група S_i од i ученици секој од кои има по $i-1$ познаници. Останува секој ученик да се запознае со точно еден ученик. Учениците ги делиме во две групи R_1 и R_2 на следниов начин:

$$R_1=(S_1\cup S_2\cup...\cup S_q)\cup(S_{3q+1}\cup S_{3q+2}\cup...\cup S_{4q})$$

$$R_2=(S_{q+1}\cup S_{q+2}\cup...\cup S_{2q})\cup(S_{2q+1}\cup S_{2q+2}\cup...\cup S_{3q}).$$

Бројот на учениците во групата R_2 е еднаков на $\frac{2q(3q+1)}{2}=\frac{N(N+1)}{4}$, што значи дека тој е еднаков на бројот на учениците во групата R_1. Сега секој ученик од групата R_1 го запознаваме со различен ученик од групата R_2, со што секој ученик добива точно уште по едно познанство.

Нека $N=4q+3, q\geq 0$ и S егрупа од $\frac{N(N+1)}{2}$ кои меѓусебно не се познаваат. Постапуваме како во птетходниот случај со тоа што групите R_1 и R_2 се дефинираат со:

$$R_1=(S_1\cup S_2)(S_4\cup S_5\cup...\cup S_{q+3})\cup(S_{3q+4}\cup S_{3q+5}\cup...\cup S_{4q+3})$$

$$R_2=S_3\cup(S_{q+4}\cup S_{q+5}\cup...\cup S_{2q+3})\cup(S_{2q+4}\cup S_{2q+5}\cup...\cup S_{3q+3}).$$

5. Природните броеви k и n се поголеми од 1. Во една група од kn луѓе, секој член на групата се познава со повеќе од $(k-1)n$ од преостанатите луѓе од групата. Дали постојат $k+1$ луѓе од групата кои попарно се познаваат меѓу себе? (Да се докаже за било кои k и n кои ги поседуваат дадените својства).

Решение.Тврдењето ќе го докажеме со принципот на математичка индукција. За $k=2$ групата на луѓе има $2n$ членови. Било кој човек од групата се познава со повеќе од $(2-1)n=n>1$ членови на групата, па според тоа, постојат барем двајца кои се познаваат меѓу себе. Секој од нив се познава со повеќе од n членови на групата. Нека множеството на луќе со кои се познава едниот го означиме со A а множеството луѓе со кои се познава другиот го означиме со B.Според тоа $|A|>n$ и $|B|>n$. Користејќи ја формулата $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$, добиваме

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|>n+n-|A\cap B|=2n-|A\cap B|.$$

Ако $|A\cap B|=0$, тогаш $|A\cup B|>2n$, што не е можно. Значи, $|A\cap B|>0$, односно $A\cap B\neq\varnothing$. Значи, постои барем еден член на групата кој припаѓа на множеството A и кој припаѓа на множеството B. Значи, тој се познава и со едниот и со другиот избран член на групата кои што ги избравме. Бидејќи двата члена на групата ги избравме да се познаваат, добиваме дека тројцата се познаваат меѓу себе. Според тоа тврдењето е точно за $k=2$.

Нека тврдењето е точно за $k=m$, односно во група во која има mn луѓе во која сечкој човек од групата се познава со повеќе од $(m-1)n$, постојат барем $m+1$ од нив кои попарно се познаваат меѓу себе.

За $k=m+1$, нека имаме група од $(m+1)n$ луѓе, во која секој од нив се познава со повеќе од mn луѓе од групата. Ќе избереме еден член на групата, кој според претпоставката се познава со повеќе од mn членови на групата. Значи, можеме да избереме точно mn членови од групата со кои тој се познава. Од новата група составена од mn членови секој од нив се познава со повеќе од $(m-1)n$ од нив (од почетната група се отстранети најмногу $n-1$ член со кои тој се познава, па според тоа тој се познава со не помалку од $mn-(n-1)$ член од избраната груп;а. Или од групата од mn членови кои се избрани, секој од нив се познава со повеќе од mn членив од почетната група од $(m+1)n$ луѓе. Бидејќи се отстранети n членови од почетната група, тој се познава со повеќе од $mn-n$ членови од избраната група). Значи, во избраната група од mn членови на групата, секој од нив се познава со повеќе од $(m-1)n$ од нив. Според индуктивната претпоставка, постојат $m+1$ луѓе од избраната група од mn луѓе кои попарно се познаваат. Тие заедно со на почеток избраниот човек, формираат група од $m+2$ луѓе во која секои двајца се познаваат.

Според принципот на математичка индукција, тврдењето е точно, односно во група од kn луѓе во која секој познава повеќе од $(k-1)n$ од преостанатите, постојат $k+1$ член од групата така што било кои два од нив попарно се познаваат.

6. Маѓионичар има 100 карти нумерирани со броевите од 1 до 100. Тој ги става сите карти во три кутии – црвена, бела и сина, така што секоја кутија содржи барем една карта. Гледач од публиката прво избира две кутии, а потоа избира по една карта од секоја од избраните кутии и го соопштува збирот на броевите на избраните карти. Знаејќи го тој збир маѓионичарот ја определува кутијата од која не е избрана карта.

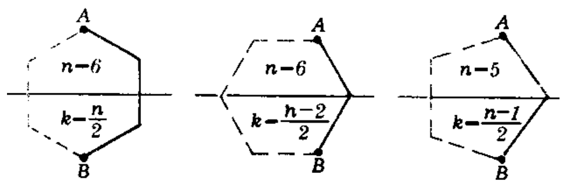
На колку начини маѓионичарот може да ги распореди картите во кутиите така што овој трик секогаш биде успешен? (Два распореди се различни ако барем една карта не е двата пати ставена во иста кутија.)

Решение. Нека a,b,c и d се карти такви што a,b,c се во различни кутии и $c+d=a+b$. Тогаш картите c и d мора да се во иста кутија, бидејќи во спротивно ако гледачот го соопшти збирот $a+b$ маѓионичарот нема да може да даде сигурен одговор.

Нека претпоставиме дека за некој i картите $i,i+1,i+2$ се во различни кутии. Бидејќи $i+(i+3)=(i+1)+(i+2)$, заклучуваме дека картите i и $i+3$ се во иста кутија. Слично, $i-1$ е во иста кутија како $i+2$ (ако $i>1$). Со едноставна индукција се докажува дека картите 1, 4, 7, ..., 100 се во една кутија, картите 2, 5, ..., 98 во друга и картите 3, 6, ..., 99 во трета кутија. Така во овој случај имаме 6 можни распореди.

Да претпоставиме дека не постојат три последователно нумерирани карти кои не се во различни кутии. Нека картата 1 е во кутијата A и нека b и c се картите со најмали броеви кои се во кутиите B и C, соодветно, при што на пример $b<c$. Картата $b-1$ е во кутијата A, па по претпоставка $b+1$ не е во C, што значи $c>b+1$. Ако сега $c<100$, тогаш од $b+c=(b-1)+(c+1)$ следува дека $c+1$ е во A, но тогаш од $b+(c+1)=(b+1)+c$ следува дека $b+1$ е во C, што е противречност. Според тоа, $c=100$, и тоа е единствената карта во C . Понатаму, од $99+b=100+(b-1)$ следува дека 99 е во B . Сега, кутијата A не може да содржи ниту една од картите k за $2\leq k\leq 99$, бидејќи во спротивно од $99+k=100+(k-1)$ ќе следува дека $k-1$ е во C , што не е можно. Според тоа, во A е само картата 1, а картите 2, 3, ..., 99 се во B .И во овој случај имаме 6 можни распореди, па затоа вкупнот број распореди е 12.

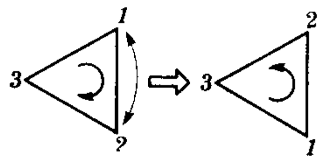
7. На тркалезна маса седат n , $n\geq 3$ луѓе. Секоја минута еден пар соседи ги менува своите места. Кое е најмалото време за кое сите луѓе ќе седат во спротивна насока, (левиот сосед на секој човек ќе стане десен и обратно)?



Решение. Со t_n да го означиме најмалото време изразено во минути. Ќе докажеме дека за $n\geq 4$ важи

$$t_n\geq t_{n-1}+[\tfrac{n-1}{2}] \qquad (1)$$

каде со $[a]$ е означен целиот дел од бројот a. Да земеме дека луѓето се наоѓаат во темиња на правилен $n-$аголник. Тогаш новиот распоред може да се добие со симетрија во однос на некоја оска. Нека A е еден од луѓето кои се најоддалечени од оската, а B е човекот симетрична на него.

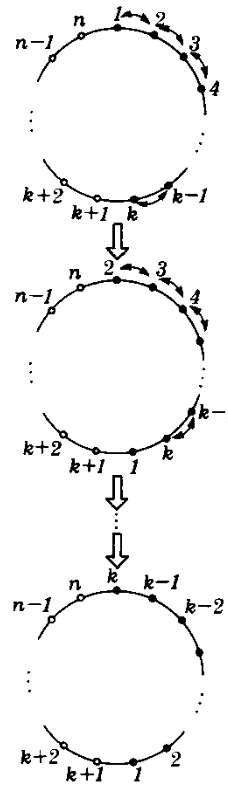


Најкусиот пат од A до B по страните на многуаголникот (полната линија на цртеж горе) содржи $k\geq[\frac{n-1}{2}]$ страни, па затоа A за да дојде на местото на B мора да помине најмалку k страни, т.е. треба да имаме најмалку k менувања на местата. Но при овие менувања на местата распоредот на останатите луѓе не се менува, па затоа за да се постигне целта треба да се направат уште t_{n-1} менување на местата, што значи дека точна е оценката (1).

Бидејќи $t_3=1$, (цртеж горе лево), од оценката (1) наоѓаме

$$\begin{aligned} t_{2k} &\geq 1+[\tfrac{3}{2}]+...+[\tfrac{2k-1}{2}] \\ &= 2(1+2+...+(k-1))=k^2-k \end{aligned} \qquad (2)$$

$$t_{2k+1}\geq 1+[\tfrac{3}{2}]+...+[\tfrac{2k-1}{2}]+[\tfrac{2k}{2}]=k^2 \qquad (3)$$



Ќе докажеме дека најдените броеви на менување на местата на соседите се и доволни, т.е. дека во (2) и (3) знакот $\geq$ може да се замени со знакот $=$. Да ги нумерираме луѓето со броевите од 1 до n и да ги поделиме во две групи, од првата до $k-$та и од $(k+1)-$та до $n-$та. За да го смениме редоследот во првата група првиот човек ќе го смени местото со вториот, па со третиот, итн. со $k-$тиот; потоа вториот човек ќе го смени местото со третиот па со четвртиот итн со $k-$та, итн (цртеѓ десно3). На тој начин имаме

$$(k-1)+(k-2)+...+2+1=\frac{k(k-1)}{2}=\frac{k^2-k}{2}$$

менување на местата. Аналогно за да останатите $n-k$ луѓе го променат редоследот на седење ќе имаме $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ менување на местата. Сега за $n=2k$, односно $n=2k+1$, т.е. $k=[\frac{n+1}{2}]$, добиваме дека се потребни k^2-k, односно k^2 менувања на местата.

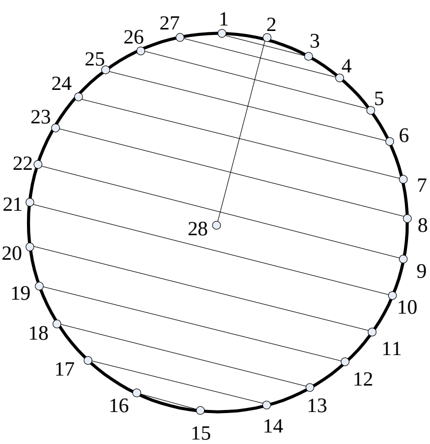
8. Еден клас има точно 28 ученици кои учат во училница која има точно 14 клупи. Во секоја клупа седат точно по два ученика. По истекот на месецот класниот раководител ги прераспоредува учениците, така што двајца ученици кои претходно седеле еден до друг не може да седат еден до друг во некој од наредните месеци. Колку месеци редоследно такви распореди на учениците може да направи класниот раководител?

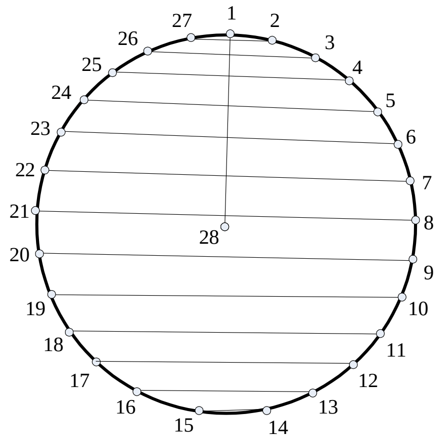
Решение. Еден ученик може да седи со најмногу 27 други различни ученици во една клупа. Според тоа, добиваме дека бројот на месеци во кои такви распореди може да направи класниот раководител не е поголем од 27.

Доволно да докажеме дека тоа може да се направи точно во 27 последователни месеци.

Учениците ќе ги означиме со броевите од 1 до 28 (на секој ученик по еден број и во текот на понатамошните разгледувања тој распоред е фиксен). Броевите од 1 до 27 ќе ги запишеме во тмињата на еден правилен 27-аголник, а во центарот на кружницата опишана околу него ќе го запишеме бројот 28.

За парот броеви 28 и 1 ќе повлечеме радиус. Од секој од броевите 2, 3, 4, ..., 27 ќе повлечеме отсечка нормална на правата која минува низ точките 28 и 1, а краевите и се на опишаната кружница. На тој начин, заедно со парот 28 и 1 ќе добиеме уште 13 пара броеви поврзани со отсечки кои се темиња на 27-аголникот. Според паровите броеви поврзани со отсечки класниот раководител може да направи еден распоред на учениците во клупите.





Потоа, центарот на кружницата ќе ги поврзиме со темето во кое е запишан бројот 2. Од секоја од преостанатите темиња 1, 3, 4, ..., 27 ќе повлечеме отсечка со крајни точки во опишаната кружница и која е нормална на правата која минува низ 2 и 28.

Секоја таква отсечка (тетива), поврзува два броја. Како и претходно, паровите броеви(пар формираат броевите кои се поврзани со отсечка) определуваат 14 пара ученици кои класниот раководител може да ги распореди на клупите. Овој распоред не може да е ист со претходниот заради нормалноста на повлечените тетиви кои поврзуваат две темиња од 27-аголникот.

Понатаму ќе направиме поврзување последователно на 28 со 3, па со 4 и на крајот во 27-миот месец со бројот 27. Бидејќи нема два радиуси (што го поврзува цнтарот со теме на 27-аголникот) кои формираат рамен агол, сите добиени распореди што ќе ги направи класниот раководител ќе бидат различни.

Значи, класниот раководител може 27 месеци последоватлно да прави распореди кои ќе го исполнуваат условот од задачата.

9. За дадено множество S од 2014 точки во рамнината нека l е најмалиот природен број за кој постојат l прави такви што секоја точка од S лежи на некоја од тие прави. Нека c е најмалиот природен број за кој постојат c кружници такви што секоја точка од S лежи на некоја од тие кружници. Дали постои множество S за кое

а) $l=15$ и $c=67$,

б) $l=19$ и $c=53$.

Решение. а) Да разгледаме едно покривање на S со c кружници. Тогаш на кружницата со најмногу точки од S има барем $\frac{2014}{c}$ точки и за да ги покриеме овие точки со прави, потребни ни се најмалку $\frac{2014}{2c}=\frac{1007}{c}$ прави (секоја права покрива најмногу две од точките). Според тоа, треба да важи $l\geq\frac{1007}{c}$, односно $cl\geq 1007$. Но, $15\cdot 67=1005<1007$, па затоа не постои множество S за кое $l=15$ и $c=67$.

б) Да разгледаме 19 паралелни прави и 53 кружници, секоја од кои ја сече секоја од деветнаесетте прави во по две различни точки и не постојат две кружници кои се сечат на правите. Добиваме множество од вкупно $19\cdot 53\cdot 2=2014$ точки, за кои ќе докажеме дека го има саканото својство.

Нека претпоставиме дека $c<53$. Тогаш ќе постои кружница на која лежат повеќе од 38 точки и некоја од деветнаесетте паралелни прави треба таа кружница да ја сече во најмалку три точки, противречност. Аналогно, ако претпоставиме дека $l<19$, тогаш постои права која содржи повеќе од 111 точки, па затоа некоја од педесет и трите кружници треба оваа права да ја сече во најмалку три точки, што повторно е противречност.

10. Определи ги сите природни броеви n за кои во рамнината постојат n точки, секоја од кои припаѓа на точно $\frac{1}{3}$ од правите определени со тие точки.

Решение. Ќе докажеме, дека единствено решение е $n=6$. Ако имаме 6 точки во општа положба (никои три не лежат на една права), тогаш имаме 15 прави и секоја точка лежи на 5 прави, т.е. $n=6$ е решение.

Нека k е бројот на правите определени од дадените n точки. Нека има права на која лежат 4 од дадените точки. Секоја од дадените точки лежи на уште $\frac{k}{3}-1$ прави, што значи дека има најмалку $4(\frac{k}{3}-1)+1$ различни прави. Според тоа,

$4(\frac{k}{3}-1)+1\leq k$, т.е. $k\leq 9$. Од друга страна, бидејќи секоја точка, која не лежи на разгледуваната права, лежи на барем 4 различни прави (правите низ таа точка и четирите точки на правата), добиваме дека $k\geq 12$, што е противречност. Според тоа, на секоја од правите има најмногу 3 точки. Нека на a од правите има точно по 2 точки. Тогаш на секоја од останатите $k-a$ прави има по 3 точки.

Бројот на точките (секоја броена $\frac{k}{3}$ пати) е еднаков на $2a+3(k-a)$, па затоа $2a+3(k-a)=\frac{nk}{3}$. Од друга страна, бидејќи n точки определуваат $\frac{n(n-1)}{2}$ прави (некои од кои се совпаѓаат) и секоја права со три точки на неа е броена три пати, добиваме $a+3(k-a)=\frac{n(n-1)}{2}$. Од последните две равенства наоѓаме $a=\frac{n(n-1)(9-n)}{2(2n-9)}$ и $k=\frac{3n(n-1)}{2(2n-9)}$. Бидејќи $k\leq\frac{n(n-1)}{2}$, добиваме $2n-9\geq 3$, т.е. $n\geq 6$. Од дрога страна $a\geq 0$, па затоа $n\leq 9$. За $n=7$ вредностите на a и k не се целобројни, па затоа $n=8$ или $n=9$. За $n=8$ имаме $k=12, a=4$, а за $n=9$ добиваме $k=12, a=0$.

Со l да го означиме најголемиот број точки меѓу дадените n точки, такви што никои три од нив не се колинеарни. Тогаш сите останати точки лежат на правите, определени од овие l точки.

1) $l=3$ и нека тоа се точките A_1, A_2, A_3. Секоја од останатите точки лежи на една од правите A_1A_2, A_2A_3 и A_3A_1. Бидејќи на една права нема повеќе од 3 точки, добиваме најмногу 6 точки, што е противречност.
2) $l=4$ и нека тоа се точките A_1, A_2, A_3, A_4. Бидејќи имаме најмалку 8 точки, добиваме дека постои точка, која лежи точно на една од правите, определени од точките A_1, A_2, A_3, A_4. Без ограничување на општоста нека тоа е точката A_5 и $A_5\in A_1A_2$. Тогаш четворките точки A_1, A_3, A_4, A_5 и A_2, A_3, A_4, A_5 се во општа положба. Според тоа, сите точки треба да лежат на правите определени од A_1, A_2, A_3, A_4; A_1, A_3, A_4, A_5 и A_2, A_3, A_4, A_5. Единствените заеднички прави се A_3A_4 и $A_1A_2\equiv A_1A_5\equiv A_2A_5$, т.е. сите точки лежат на две прави, што противречи на фактот дека на права нема повеќе од три точки.
3) $l=5$ и нека тоа се точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Од секоја од точките A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 излегуваат по точно 4 прави. Тоа значи дека A_6A_i, $i=1,2,...,5$ треба да е меѓу веќе постојните прави. Без ограничување на општоста можеме да сметаме, дека $A_6\in A_1A_2$. Тогаш A_6A_3 треба да се совпадне со некоја од правите A_3A_4, A_3A_5 или A_4A_5. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $A_6\in A_3A_4$ и тогаш A_6A_5 е нова права, што е противречност.

11. Во еден парламент секој пратеник има најмногу тројца непријатели. Да се докаже дека парламентот може да се подели на две групи така што секој пратеник има најмногу еден непријател во групата кај што се наоѓа.

Решение. Произволно го делиме парламентот на два дела.

Нека S е збирот на непријателите што ги има секој од пратениците во групата кај што се наоѓа.

Нека претпоставиме дека A има најмалку двајца непријатели во својата група при почетната поделба, тогаш во другата група тој има најмногу еден непријател. Ако A ја промени групата, бројот S ќе се намали. Ова опаѓање на S не може да се врши бесконечно, т.е. во даден момент S ќе достигне минимум, и тогаш ќе биде направена бараната поделба.

12. Дадени се природни броеви n и k, $n \geq k$. Во група од n луѓе секој човек е член на точно еден од k клубови, означени со $C_1, C_2, ..., C_k$, при што секој клуб има барем еден член. Докажи дека меѓу сите n луѓе може да се распределат n^2 парчиња торта, така што се исполнети следниве услови:

1) Секој човек добива барем едно парче торта,
2) За секој $i, 1 \leq i \leq k$, секој член на клубот C_i добива a_i парчиња торта,
3) Ако $1 \leq i < j \leq k$, тогаш $a_i > a_j$.

Решение. За секој $i, 1 \leq i \leq k$ со x_i да го означиме бројот на членовите на клубот C_i. Ќе докажеме дека броевите $a_i = x_i + 2(x_{i+1} + x_{i+2} + ... + x_{i+k})$ ги задоволуваат условите на задачата. Јасно, условот $a_i > 0$ е исполнет. За секој i, $1 \leq i \leq k-1$ имаме $a_i = x_i + x_{i+1} + a_{i+1} > a_{i+1}$, па затоа $a_i > a_j$ кога $1 \leq i < j \leq k$. Вкупно се разделени

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + 2\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} x_i x_j = (\sum_{i=1}^{k} x_i)^2 = n^2$$

парчиња торта.

13. Во летна школа се предаваат 9 предмети на 512 ученици, кои се сметени во 256 двокреветни соби. Учениците кои се наоѓаат во иста соба ги нарекуваме соседи. Познато е дека за секои два ученика множеството од предмети кои им се интересни се различни (во случајов, точно на еден ученик не му е ништо интересно). Докажи, дека е можно сите ученици да бидат подредени во круг така што секои два соседи да седат еден до друг, а за секои двајца кои не се соседи и се еден до друг за едниот ученик се интересни сите предмети кои се интересни и за другиот ученик и точно уште еден предмет.

Решение. Тврдењето, со индукција по n, ќе го докажеме во општ случај, т.е. за $n \geq 2$ предмети и 2^n ученици, произволно поделени на 2^{n-1} парови соседи. Бидејќи од n предмети може да се формираат точно 2^n подмножества, заклучуваме дека предметите содржани во едно подмножество се интересни точно за еден ученик.

За $n = 2$ непосредно се проверува дека тврдењето е точно. Нека $n > 2$ и да разгледаме произволни два соседа, при што избираме предмет за кој тие имаат различен интерес (на пример, математика), и да ги поделиме учениците на две групи од по 2^{n-1} ученици – во групата A се учениците на кои математиката им е интересна, а во групата B се останатите ученици.

Да ја преселиме групата A во друг хотел со 2^{n-2} соби. Притоа, учениците кои претходно биле соседи ќе ги оставиме да бидат соседи и во новиот хотел. Останатите (согледајте дека такви има и нивниот број е парен) ќе ги сместиме произволно и овие парови ќе ги наречеме нови.

Согласно индуктивната претпоставка групата A може да биде распоредена во круг K на саканиот начин. Нека $(x_1,x_2),...,(x_{2k-1},x_{2k})$ се сите нови парови во K, распоредени во насока на движење на стрелката на часовникот (x_{2i-1} е пред x_{2i} и сметаме дека $x_{2k+1}=x_1$). Со $x_i^{'}$ да го означиме претходниот сосед на x_i. Јасно, $x_i^{'} \in B$ и паровите $(x_2^{'},x_3^{'}),...(x_{2k-2}^{'},x_{2k-1}^{'}),(x_{2k}^{'},x_1^{'})$ да ги наречеме нови во групата B. Јасно, новите парови, заедно со старите даваат разбивање на групата B на парови соседи.

Да ја примениме индуктивната претпоставка за групата B со ова разбивање, распоредувајќи ја во круг на саканиот начин. Сега во тој круг да ги ставиме меѓу секои двајца од новиот пар $(x_{2i}^{'},x_{2i+1}^{'})$ учениците од кругот K од x_{2i} до x_{2i+1} заклучнолно. Не е тешко да се види дека добиениот круг ги има саканите својства.

14. Определи ги сите природни броеви n за кои постои пермутација $(i_1,i_2,...,i_n)$ на броевите $1,2,...,n$ таква што ако околу тркалезна маса со n столици седнат n луѓе и $k-$тиот човек се помести за i_k столици надесно, за секој $k=1,2,...,n$, тогаш сите луѓе ќе седнат на различни столици.

Решение. Нека луѓето со броеви $1,2,...,n$ се поместиле за $i_1,i_2,...,i_n$ столици надесно. Тогаш $k-$тиот човек ќе седи на столицата со број $k+i_k$ ако $k+i_k \le n$ или на столицата $k+i_k-n$ ако $k+i_k>n$. Значи, постои број p со својство

$$(i_1+1)+(i_2+2)+...+(i_n+n)-pn=1+2+...+n,$$

т.е.

$$i_1+i_2+...+i_n \equiv 0(\mathrm{mod}\, n).$$

Но, $i_1+i_2+...+i_n=\frac{n(n+1)}{2}$, па затоа $\frac{n(n+1)}{2}\equiv 0(\mathrm{mod}\, n)$, што е можно ако и само ако $n=2k+1,\ k\in\mathbb{N}$.

15. Дали може во темињата на правилен осумаголник да се запишан броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 (секој број по еднаш), така што збирот на броевите запишани во секои три последователни темиња на осумаголникот да е:

а) поголем од 13, б) поголем од 11, в) поголем од 12.

Решение. а) Не е можно. Навистина нека претпоставиме дека броевите се запишани во редослед $a_1,a_2,a_3,...,a_8$. Тогаш

$$a_1+a_2+a_3\ge 14,\ a_2+a_3+a_4\ge 14,\ ...,\ a_7+a_8+a_1\ge 14,\ a_8+a_1+a_2\ge 14$$

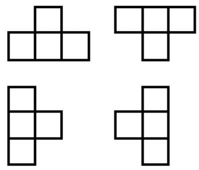
Ако ги собереме добиените неравенства добиваме

$$108=3\cdot(1+2+3+...+8)=3(a_1+a_2+a_3+...+a_8)\ge 8\cdot 14=112,$$

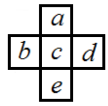
што е противречност.

б) Да. На пример $a_1=1,\ a_2=5,\ a_3=6,\ a_4=2,\ a_5=4,\ a_6=7,\ a_7=3,\ a_8=8$.

в) Не. Да претпоставиме дека таков распоред постои. Лесно се гледа дека броевите 2 и 3 не може да се распоредени во соседни темиња, бидејќи во спротивен случај и од лево и од десно треба да има број поголем или еднаков на 8, што не е можно. Од друга страна, броевите 2 и 3 треба да се запишани во барем три темиња од местото во кое е запишан бројот 1. Последното е можно само при следнава конфигурација $a_1 = 1, a_4 = 2, a_6 = 3$ (со точност до насоката на обиколување). Тогаш меѓу 2 и 3 треба да биде запишан бројот 8. Но, сега каде и да биде запишан бројот 4 (во некое од останатите четири темиња) ќе биде потребна уште една осумка, што не е можно.

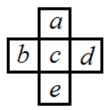


16. Дали е можно во единечните квадратчиња на табла со димензии 6×6 да се запишат броевите од 1 до 36, во секое квадратче по еден број, така што збирот на броевите запишани во секоја од фигурите дадени на цртежот десно е делив со бројот 2?



Решение. Нека претпоставиме дека бараното запишување е можно. Да ја разгледаме фигурата дадена на цртежот десно во која се запишани броевите a,b,c,d и e. Од условот на задачата следува дека збировите $a+b+c+d$ и $a+c+d+e$ се парни, па затоа броевите b и e се со иста парност. Аналогно се добива дека броевите a и e и броевите b и d се со иста парност. Значи, броевите a,b,d,e се со иста парност, па бидејќи збирот $a+c+d+e$ е делив со 2 добиваме дека и бројот e со иста парност. Бидејќи дадената фигура на таблата може да се постави така што може да се покрие секое нејзино поле, освен четирите аголни полиња, добиваме дека во сите полиња освен во четирите аголни полиња мора да се запишани броеви со иста парност. Но, меѓу броевите од 1 до 36 има 18 парни и 18 непарни, а треба да се запишат 32 броја со иста парност, што е противречност.

17. Во рамнината е даден правоаголен координатен систем xOy. Во секоја точка $(k,0), k\in\mathbb{Z}$ е повлечена права паралелна со $y-$оската и во секоја точка $(0,n), n\in\mathbb{Z}$ е повлечена права паралелна со $x-$оската, со што е добиена бесконечна табла. Во секое единечно квадратче на таблата се запишани ненегативни цели броеви такви што секој број е еднаков на аритметичката средина на броевите запишани во соседните квадратчиња (соседни се квадратчињата кои имаат заедничка страна). Докажи дека сите запишани броеви се еднакви.

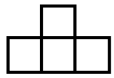


Решение. Бидејќи се запишани цели ненегативни броеви, постои број c кој е помал или еднаков од сите запишани броеви. Да ја разгледаме фигурата на цртежот десно, во која во централното квадратче е запишан бројот c, а во соседните квадратчиња се запишани броевите a,b,d и e. Ако броевите a,b,c,d,e не се сите еднакви меѓу себе, тогаш меѓу нив постои најголем. Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a\geq b\geq d\geq e\geq c$, при што во едно од првите три неравенства имаме строго неравенство. Тогаш

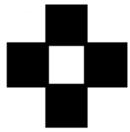
$$c<\tfrac{1}{4}(a+b+d+e)=c,$$

што е противречност. Според тоа, $a=b=c=d=e$. Сега лесно заклучуваме дека сите запишани броеви се еднакви меѓу себе.

18. Во секое единечно квадратче на квадратна табла со димензии 50×50 е запишан по еден број. Притоа каде и да ја поставиме фигурата прикажана на цртежот десно (дозволени се ротации), таа покрива четири полиња за кои збирот на запишаните броеви е еднаков на 4. Докажи, дека сите запишани броеви се еднакви меѓу себе.



Решение. Лесно се докажува дека во секој крст прикажан на цртежот десно броевите во црните квадратчиња се еднакви меѓу себе. Последното значи дека ако таблата ја обоиме шаховски, тогаш во сите црни полиња е запишан ист број a и во сите бели полиња е запишан ист број b .



Да ги разгледаме фигурите прикажани на цртежот лево. Од претходно изнесеното следува дека

$$3a+b=4=3b+a, \text{ т.е. } a=b=1.$$

Според тоа, во сите квадратчиња е запишан бројот 1.

19. Во секое поле на 103×103 таблица се впишани реални броеви кои што по апсолутна вредност не се поголеми од 1. Во произволен 2×2 квадрат од таа таблица збирот на броевите е еднаков на нула. Докажи дека збирот на сите броеви од таблицата не е поголем од 103.

Решение. Да ја разделиме таблицата на 52 области: првата е полето од левиот горен агол, втората е 3×3 квадратот во левиот горен агол без полето во аголот. Третата е 5×5 квадратот без првите две области итн.(види го цртежот за 8×8 квадрат). Во секоја од 51-та област почнувајќи од втората, збирот не е поголем од 2, бидејќи: ако во секоја област формираме 2×2 квадрати(на цртежот тоа е прикажано за четвртата област), едно поле од областа, да го означиме со a ќе се јави во два квадрати, а друго поле, да го означиме со b , нема да се јави во ниеден квадрат. Бидејќи збирот на броевит во секој 2×2 квадрат е еднаков на 0, збирот на броевите од секоја област ќе биде $b-a\le2$. Така збирот на броевите во таблицата не е поголем од $1+51\cdot2=103$.

20. Во секое поле на табела со димензии $n\times n$ е запишан еден од броевите $-1,0$ или 1. Дали може збировите на запишаните броеви по редици и колони да бидат различни $2n$ броеви, ако

а) $n=4$, б) $n=5$.

Решение. а) Да, на пример, тоа може да се постигне со следнава табела

1	0	1	1
1	–1	–1	–1
1	–1	1	0
1	–1	1	–1

б) Не. Имаме 11 можности за $10-$те збирови: $0,\pm1,\pm2,\pm3,\pm4,\pm5$. Со a_i да го означиме збирот на броевите во $i-$от ред, а со b_j збирот на броевите во $j-$тата колона. Очигледно

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5,$$

што значи дека бројот на непарните броеви a_i и бројот на непарните броеви b_j имаат иста парност. Според тоа, сите непарни збирови мора да се реализираат.

Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $b_1 = 5$. Тогаш ниту еден a_i не може да биде еднаков на -5, па затоа можеме да земеме дека $b_2 = -5$. Од можните збирови 4 и -4 треба да се реализира барем еден и нека тоа е 4 (во спротивно доволно е да ги замениме знаците на запишаните броеви во табелата). Тој се реализира само ако во една колона има 4 единици и 1 нула. Нека $b_3 = 4$ и нулата е во последната редица. Според тоа, $a_i \neq -3$ за секој i и можеме да сметаме дека $b_4 = -3$. Тогаш во третата колона има најмалку три броја -1.

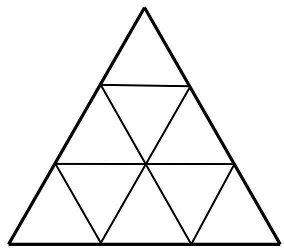
Ако тие се во првите четири редици, можеме да сметаме дека се во првите три редици и добиваме дека a_1, a_2 и a_3 е пермутација на броевите $-1, 0$ и 1. Според тоа, $b_5 \neq 3$ и бидејќи $a_5 \neq 3$, добиваме дека $a_4 = 3$, т.е. во двете последни полиња на четвртата редица се запишани единици. Бидејќи $b_4 = -3$, заклучуваме дека бројот во последното поле на четвртата колона е -1. Сега за секоја вредност на бројот во петтата редица и петтата колона добиваме противречност.

Останува да го разгледаме случајот кога во првите четири редици на четвртата колона има најмногу два броја -1. Можеме да сметаме дека броевите во четвртата колона се последователно $-1, -1, 0, 0, -1$. Бидејќи збировите на првите четири броеви по редици се $0, 0, 1, 1$ и -1, заклучуваме дека ниту еден од збировите не може да биде еднаков на 3, па затоа $b_5 = 3$. Последното е можно само кога во петтата колона се запишани броевите $1, 0, 1, 0, 1$ и тогаш $a_1 = a_4 = 1$, што е противречност.

21. Рамностран триаголник со страна 3 е разделен на девет рамнострани триаголници со страна 1, со три пара паралелни прави паралелни со неговите страни (види цртеж).

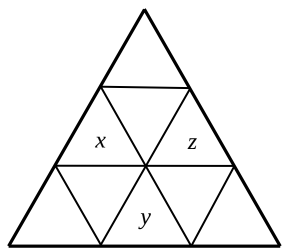
а) Запиши ги броевите од 1 до 9, во секое триаголниче по еден број, така што збирот на броевите во трите триаголници со должина на страна 2 е еднаков.

б) Колку вредности може да има тој збир?



Решение. Бараната сума ќе ја означиме со S. Тогаш (види цртеж) $3S-(x+y+z)=45$, односно

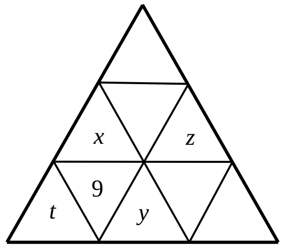
$$S = 15 + \frac{x+y+z}{3}. \qquad (1)$$



Според тоа, S има минимална вредност ако $x+y+z = 1+2+3 = 6$, а максимална вредност кога $x+y+z = 7+8+9 = 24$. Значи, $S_{\min} = 17$ и $S_{\max} = 23$.

Ќе покажеме дека S не може да биде 18. Ако $S = 18$, тогаш од равенството (1) добиваме $x+y+z = 9$ Ќе го избереме триаголникот со страна 2, во кој е запишан бројот 9. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека тоа е како на триаголникот на цртежот. Но тогаш

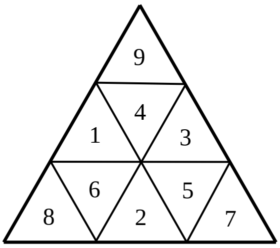
$$x+y+9+t=18$$
$$x+y+z+9+t=18+z$$
$$18+t=18+z\ ,$$



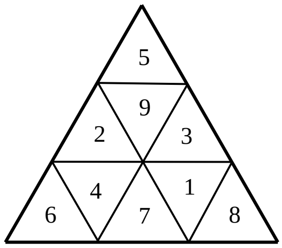
односно $t=z$, што е во контрадикција со претпоставките од задачата.

Распоредите за $S=17,19,20$ се дадени на цртежот. Распоредите за $S=23$ и $S=21$ се добиваат од распоредите за $S=17$ и $S=19$ со замена на бројот n со $10-n$.

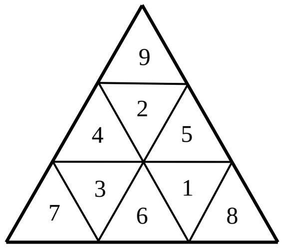
Распоред за $S=22$ не постои како што не постои ни за $S=18$.



$S=17$



$S=19$



$S=20$

22. Дадена е табела со димензиии $n\times n$ во која со ѕвездички се обележани $n-1$ квадратче. Докажи, дека со меѓусебно разместување на редовите и меѓусебно разместување на колоните може ѕвездичките да се поставаат само во квадратчињата кои се наоѓаат под дијагоналата која ги поврзува горниот лев и долниот десен агол.

Решение. Бидејќи се обележани $n-1$ квадратче, во некоја од $n-$те колони нема обележано квадратче и таа ја заменуваме со крајната десна колона. Сега ги разгледуваме редовите. Сите нивни десни квадратчиња се необележани и постои ред во кој е обележано најмалку едно квадратче. Овој ред ќе го замениме со најдолниот ред. Тогаш во најдолниот ред има најмалку едно обележано квадратче и сите квадратчиња од овој ред се наоѓаат под дијагоналата. Сега постапката ќе ја повториме прво за квадратот со димензии $(n-1)\times(n-1)$ кој не ја содржи крајната десна колона и најдолниот ред од табелата, потоа за квадратот со димензии $(n-2)\times(n-2)$ кој не ги содржи двете крајни десни колони и најдолните два реда итн. Јасно, во секој следен чекор обележаните квадратчиња во исфрлените редови ќе се наоѓаат под дијагоналата на квадратот со димензии $n\times n$, а постапката ќе заврши после конечен број чекори, со што тврдењето е докажано.

23. На бесконечна шаховска табла разгледуваме агли составени од едно аголно квадратче, 2012 хоризонтални и 2012 вертикални соседни квадратчиња (соседни се квадратчињата кои имаат заедничка страна). Колку агли можат да се поставаат на таблата така што секои два агли да имаат најмалку едно заедничко квадратче?

Решение. Да ги разгледаме аглите кои се сечат нагоре и надесно. Ќе докажеме дека има најмногу 4023 агли такви што секои два агли имаат најмалку едно заедничко квадратче. Во рамнината да ги воведеме стандардните координати и да ги разгледаме темињата на сите агли. Ако за координатите (a,b) и (c,d) на темињата на два агли важи $a<c$ и $b<d$ (или соодветно $a>c$ и $b>d$), тогаш овие два агли не се сечат.

Нека најгорниот и најлев агол е со координата (i,j) и најдолниот и најдесен агол е со координата (p,q). За да се сечат овие два агли потребно и доволно е $p-i\le 2011$ и $j-q\le 2011$. Понатаму, сите други темиња се со кординати (a,b), каде $i\le a\le p$ и $j\le b\le q$. Од сите овие темиња да го избереме темето со со најголема втора координата. Ако ова теме го поместиме едно квадратче налево, тогаш условот за сечење на аглите е исполнет. Тоа значи, дека можеме да земеме дека сите темиња со најголема втора координата се наоѓаат едно до друго, почнувајќи од тенето (i,b). Аналогно, можеме да сметаме, дека сите темиња со најголема прва координата се наоѓаат едно до друго, почнувајќи од темето со координати (c,q)

24. Шаховската фигура крал може да се придвижи само на соседно поле на таблата (поле кое има барем една заедничка точка со полето на кое се наоѓа кралот), што значи дека може да нападне само фигура која се наоѓа на едно од осумте соседни полиња. Определи го максималниот број на кралеви кои можат да се постават на шаховска табла со димензии 12×12 така што секој крал да напаѓа само еден друг крал.

Решение. Дадената шаховска табла да ја дополниме до табла со димензии 13×13 додавајќи нулти ред и нулта колона. На новата табла, на кралот поставен на полето (i,j), $i,j\in\{1,2,...,12\}$ да му ги придружиме полињата $(i,j),(i-1,j)$, $(i,j-1),(i-1,j-1)$.

Лесно се гледа дека на два крала кои се напаѓаат вкупно им се придружени најмногу 6 полиња, т.е. најмалку две полиња се придружени и со други два крала. Понатаму, ниту едно поле не е придружено со два пара кралеви кои меѓусебно се напаѓаат. Значи, бараниот минимален број е помал или еднаков на $2[\frac{13^2}{6}]=56$.

Обиди се да прикажеш конструкција на 56 кралеви секој од кои напаѓа точно еден друг крал.

25. Дадена е квадратна шема со димензии $n\times n$ и дадени се m топови (шаховски фигури), $n\ge m$. На колку начини може да се распоредат топовите, за да тие не се напаѓаат.

Решение. Целата табла има n^2 полиња, и еден топ можеме да го ставиме на било кое од нив. Значи еден топ може да се стави на квадратната шема на n^2 начини.

Ако е ставен еден топ, тогаш втор топ не може да се стави на било кое поле од хоризонталата и вертикалата на која се наоѓа првиот топ. Но тој може да се стави на било кое од преостанатите

$$n^2-(2n-1)=(n-1)^2$$

полиња, и нема да го напаѓа првопоставениот топ.

Според тоа, два топа може да се стават на на квадратната шема, а тие да не се напаѓаат на

$$n^2 \cdot (n-1)^2 .$$

Истиот чекор ќе го повториме за третиот, и секој нареден топ од m-те топови кој во претходните чекори не е поставен. Според тоа, бројот на поставувања на топови, кој ги исполнува условите од задачата е еднаков на

$$n^2 \cdot (n-1)^2 (n-2)^2 ... (n-m+1)^2 .$$

26. На колку начини на шаховската табла 8×8 може да се постават црн и бел коњ, така да тие не се напаѓаат (според правилата на шаховската игра)?

Решение. Во секое поле од таблицата е запишан бројот на полиња на кои може да се наоѓа белиот коњ а да не го напаѓа црниот коњ, кога тој се наоѓа на тоа поле.

На пример, ако црниот коњ се наоѓа на полето a_1 тогаш белиот коњ не може да се наоѓа на три полиња a_1, b_3, c_2. Според тоа, во полето a_1 ќе го запишеме бројот 61.

Исто така, ако црниот коњ се наоѓа во полето b_2, тогаш белиот коњ не може да се наоѓа на полињата b_1, a_3, c_3 и d_2. Значи, белиот коњ може да се наоѓа на 60 полиња, па заради тоа во полето b_2 ќе го запишеме бројот 60.

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*	*g*	*h*
1	61	60	59	59	59	59	60	61
2	60	59	57	57	57	57	59	60
3	59	57	55	55	55	55	57	59
4	59	57	55	55	55	55	57	59
5	59	57	55	55	55	55	57	59
6	59	57	55	55	55	55	57	59
7	60	59	57	57	57	57	59	60
8	61	60	59	59	59	59	60	61

Ако опишаната постапка ја направиме за секое поле од шаховската табле ќе го добиеме прикажаниот цртеж.

Сега, бараниот број е

$$4 \cdot 61 + 8 \cdot 60 + 20 \cdot 59 + 16 \cdot 57 + 16 \cdot 55 = 3696 .$$

Значи, белиот и црниот коњ на шаховската табле може да се постават на 3696 начини а тие да не се напаѓаат.

27. Колку најмногу ловци можат да се постават на шаховска табла со димензии $n \times n$ така што било кои два од нив да не се напаѓаат (според правилата на шаховската игра).

Решение. Најголемиот број на дијагонали кои попарно не се сечат на шаховска табла со димензии $n \times n$ е $2n-1$. Значи, на таблата не може да се постават повеќе од $2n-1$ ловци кои не се напаѓаат. Од друга страна, во било кој распоред на ловците на овие дијагонали, ловецот поставен на 1 и ($2n-1$)-та дијагонала ќе се напаѓаат. Случајот $n=8$ е разгледан на цртежот. Според тоа, тој број не може да е поголем од $2n-2$. Еден распоред, за случајот $n=8$, т.е. на $2n-2=16-2=14$ е даден на другиот цртеж.

Аналогно е за секој природен број n.

28. Во квадратчињата на шаховска табла со димензии 10×10 се запишани броевите од 1 до 100, така што секој број е запишан точно по еднаш. За секои два броја поврзани со движењето на скокачот, ја пресметуваме нивната разлика така што од поголемиот број го одземаме помалиот. Колку најмалку различни броеви може да има меѓу добиените разлики?

Решение. Да ги нумерираме колоните на таблата одлево надесно и редовите одгоре надолу. Секое квадратче ќе го означиме со подредениот пар од бројот на редот и бројот на колоната во кои се наоѓа.

Оценка. Да разгледаме квадратче од кое можат да се направат 8 скокови (такви се сите квадратчиња во централниот 6×6 квадрат). Ако во разгледуваното квадратче е запишан бројот m, а во останатите 8 квадратчиња се запичани броевите a,b,c,d,e,f,g,h, тогаш меѓу разликите

$$a-m,b-m,c-m,d-m,e-m,f-m,g-m,h-m$$

има најмалку четири кои се со ист зна и се различни меѓу себе (зошто?). Значи, меѓу добиените разлики има најмалку четири различни броеви.

Конструкција. Точно четири разлики имаме ако, на пример, квадратчињата се нумерирани одлево надесно и одгоре надолу, т.е. кога квадратчето (i,j) го содржи бројот $10(i-1)+j$.

29. Броевите $1,2,3,...,n^2$ се запишани во единечните квадрати во квадратна шема со димензии $n\times n$, во секој квадрат по еден број. Потоа се пресметани збировите на запишаните броеви во единечните квадратчиња за секоја редица и секоја колона одделно.

Дали постои природен број n така што добиените $2n$ збирови да се последователни природни броеви?

Решение. Нека таков запис постои, односно пресметаните збирови по редици и колони одделно се $2n$ последователни природни броеви

$$m,m+1,m+2,...,m+2n-1.$$

Збирот на броевите во квадратната таблица е

$$1+2+3+...+n^2=\frac{n^2(n^2+1)}{2}.$$

Значи,

$$m+(m+1)+(m+2)+...+(m+2n-1)=2\frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

$$2nm+\frac{(2n-1)2n}{2}=2\frac{n^2(n^2+1)}{2}$$

$$2m+2n-1=n(n^2+1).$$

Бројот на левата страна на последното равенствое секогаш непарен, а бројот на десната страна на последното равенство е секогаш парен.

Според тоа, таков природен број n не постои.

30. Нека n е непарен природен број. Докажи дека броевите $0,1,2,3,...,n^2-1$ може да се распоредат во таблица со n редици и n колони така што секој количник и секој остаток добиени при делењето на тие броеви со бројот n ќе се сретнува точно по еднаш во ред и колона.

Решение. Во полето кое се наоѓа во $i-$тиот ред и $j-$тата колона го запишуваме бројот

$$n\cdot((i+j)\pmod n)+(i-j)\pmod n).$$

Јасно, секој количник и секој остаток се среќава точно по еднаш во ред и колона. Нека претпоставиме дека во полињата (i,j) и (k,l), $(i,j)\neq(k,l)$ има запишано еден и ист број. Тогаш $i+j\equiv k+l(\mathrm{mod}\,n)$ и $i-j\equiv k-l(\mathrm{mod}\,n)$, од каде следува

$i=k,\ j=l$, што е противречност.

31. Дали постои природен број n кој има точно 49 природни делители и тие делители да може да се подредат во табела со димензии 7×7, но така што збировите на броевите запишани во секој ред и секоја колона да бидат еднакви?

Решение. Нека претпоставиме дека постои природен број со бараното својство. Со S да го означиме збирот на броевите запишани во секој ред. Бидејќи бројот n е запишан во табелата добиваме дека $S>n$. Сега, S е збир на седум различни броеви, па затоа во секој ред постои број кој е поголем од $\frac{S}{7}>\frac{n}{7}$. Меѓутоа, најмногу шест делители на n може да бидат поголеми од $\frac{n}{7}$ (такви може да бидат само броевите $\frac{n}{q}, q=1,2,3,4,5,6$). Конечно, од добиената противречност следува дека не постои природен број со саканото својство.

32. Табела $n\times 2^n$ е пополнета со нули и единици така што нема две еднакви колони. Со a_{ij} да го означиме бројот запишан во $i-$тиот ред и $j-$тата колона. Ако збировите $\sum_{j=1}^{2^n} ja_{ij}$, за секој $i=1,2,...,n$ се еднакви, определи ја нивната најмала можна вредност, кога:

а) $n=3$, б) $n=4$.

Решение. Јасно, ако колоните на $n\times 2^n$ табелата се различни, тогаш тие се сите подредени $n-$торки од броевите 0 и 1. Според условот имаме $t=\sum_{j=1}^{2^n} ja_{ij}$, за секој $i=1,2,...,n$. Ако со v_j го означиме бројот на единиците во $j-$тата колона, тогаш

$$nt=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2^n} ja_{ij}=\sum_{j=1}^{2^n} kv_k .$$

Од неравенството за преуредување следува дека најмалата можна вредност се достигнува кога $v_1\geq v_2\geq ...\geq v_{2^n}$.

а) За $n=3$ и $v_1\geq v_2\geq ...\geq v_8$ имаме

$$\sum_{j=1}^{2^n} kv_k =1\cdot 3+(2+3+4)\cdot 2+(5+6+7)\cdot 1+8\cdot 0=39,$$

па затоа $3t\geq 39$, т.е. $t\geq 13$. Во табелата десно е даден пример кога вредноста $t=13$ се достигнува.

1	1	1	0	0	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	1	0	0	0

б) Аналогно на а) наоѓаме $t\geq\frac{1\cdot 4+14\cdot 3+51\cdot 2+54\cdot 1+16\cdot 0}{4}=\frac{202}{4}$, т.е. $t\geq 51$. Во долната табела е даден пример за 4×16 табела со $t=51$.

1	1	1	1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0
1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0

33. Во секое поле на квадратна $n\times n$ табела, $n\geq 2$, е запишан еден од броевите $+1$ или -1. Полето кое се наоѓа во $i-$тиот ред и $j-$тата колона го означуваме со $(i,j), i,j=0,1,...,n-1$. Соседни полиња на полето (i,j) се полињата $(i,j-1),(i,j+1),(i-1,j),(i+1,j)$ каде собирањето и одземањето е по модул n. Во еден чекор го заменуваме бројот запишан во секое поле со производот на броевите во четирите соседни полиња. На пример,

$$\begin{array}{|c|c|c|}\hline +1 & -1 & +1 \\ \hline +1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & +1 & -1 \\ \hline \end{array} \longrightarrow \begin{array}{|c|c|c|}\hline +1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & +1 & +1 \\ \hline -1 & +1 & +1 \\ \hline \end{array}$$

Определи ги сите вредности на n, за кои од произволна табела после конечен број чекори може да се добие табела составена само од $+1$.

Решение. Прво ќе докажеме дека, за секој непарен број $n\geq 3$j, постојат почетни положби од кои не можеме да добиеме табела составена само од $+1$. Да разгледаме произволна $n\times n$ табела составена само од $+1$ и со $P_i, i=1,2,...,n$ да го означиме производот на броевите во $i-$тиот ред во претпоследниот чекор. Тогаш $P_1P_2=P_2P_4=...=P_{n-1}P_1=P_nP_1=1$ и бидејќи n е непарен број, лесно се добива дека $P_1=P_2=...=P_n$. Аналогно заклучуваме дека во почетната табела сите производи по редови се еднакви. Според тоа, од почетна табела во која не се сите производи по редови не може да се добие табела составена само од $+1$.

Сега да разгледаме рабела од ред $n=2^k m$, каде m е непарен број и $k\geq 1$. После два чекори бројот во полето (i,j) ќе биде еднаков на производот на бровите во полињата $(i-2,j),(i,j-2),(i,j+2),(i+2,j)$. Според тоа, резултатот во табелата добиен во секој парен чекор може да се добие со примена на операциите на следните четири табели од ред $2^{k-1}m$:

- табела составена од сите полиња (i,j) такви што $i\equiv j\equiv 0(\bmod 2)$,
- табела составена од сите полиња (i,j) такви што $i\equiv 0(\bmod 2), j\equiv 1(\bmod 2)$,
- табела составена од сите полиња (i,j) такви што $i\equiv 1(\bmod 2), j\equiv 0(\bmod 2)$,
- табела составена од сите полиња (i,j) такви што $i\equiv j\equiv 1(\bmod 2)$.

Сега по индукција добиваме дека табела од ред $n=2^k m$, составена само од $+1$, може да се добие од секоја произволна положба ако и само ако тврдењето важи и за табела од ред $2^{k-1}m$. Оттика и од претходно изнесеното следува дека $m=1$. Понатаму, лесно се гледа дека тврдењеo важи за табела од 2. Конечно, бараните броеви се од видот $n=2^k, k\geq 1$.

34. Множеството клетки на таблица со димензии $n\times n, n\geq 5$ го нарекуваме *убаво,* ако секој ред и секоја колона на таблицата содржи барем по две клетки од тоа множество. Определи го наголемиот број m со следното својство: постои убаво множество со m клетки, кое престанува да биде убаво ако од него отстраниме произволна клетка.

Решение. Множеството од сите клетки во првите два реда без последните по две во ред и сите клетки во последните две колони без првите по две во колона го има саканото својство и има $4(n-2)=4n-8$ клетки.

Нека M е убаво множество кое престанува да биде убаво ако од него отстраниме произволна клетка. Една линија (ред или колона на таблицата) ја нарекуваме *базна* за M, ако содржи точно две клетки од M. Значи, секоја клетка од M се содржи во барем една базна линија (во спротивно ќе ја отстраниме таа клетка и новото множество исто така ќе биде убаво).

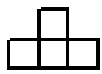
Нека t_r и t_k се соодветно бројот на базните редици и бројот на базните колони. Од претходно изнесеното следува $|M|\le 2(t_r+t_k)$.

Ако $\max\{t_r,t_k\}\le n-2$, тогаш $|M|\le 2(t_r+t_k)\le 4(n-2)$, а ако $\max\{t_r,t_k\}=n$, имаме $|M|=2n\le 4(n-2)$, кога $n\ge 5$.

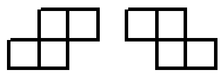
Нека $\max\{t_r,t_k\}=n-1$, при што, на пример, $t_k=n-1$. Ако не сите клетки од единствената колона на таблицата, која не е базна, се во M, тогаш $|M|\le 2(n-1)+n-1=3n-3\le 4(n-2)$, кога $n\ge 5$. Ако пак сите клетки од таа колона се во M, тогаш во некој ред на аблицата не може да има повеќе од една клетка надвор од таа колона, т.е. $|M|\le n+n-1<4(n-2)$, кога $n\ge 4$.

Според тоа, $m\le 4(n-2)$ и како имаме пример на убаво множество со $4(n-2)$ клетки, заклучуваме дека $m=4(n-2)$.

35. Дали е можно во шаховска табла 8×8 да се запишат броевите од 1 до 64 (секој број е запишан точно еднаш) така да збирот на броевите во секоја фигура F е делив со 4.



Цртеж 1

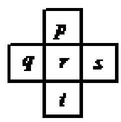


Цртеж 2

а) фигурата F е од облик како на цртеж 1

б) фигурата F е од облик како на цртеж 2.

Решение. Збирот на броевите запишани во фигурата F о делив со 4 ако и само ако збирот на остатоците при делењето на овие броеви со 4 е делив со 4. Според тоа, наместо да го разгледуваме запишувањето на броевите од 1 до 64, доволно е да го разгледуваме распоредувањето на броевите 0,1,2 и 3 и деливост на соодветните збирови со 4.



Цртеж 3

Да забележиме дека точно по 16 броеви од множеството броеви $\{1,2,3,....,64\}$ имаат еден ист остаток при делење со 4 кој може да е еден од броевите $0,1,2,3$

1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3
1	0	3	2	1	0	3	2
2	3	0	1	2	3	0	1
3	2	1	0	3	2	1	0
0	1	2	3	0	1	2	3

а) Нека имаме стандардно црно-бело боење на шаховската табла. Ќе разгледаме дел од таблата прикажан на цртежот 3, при што сметаме дека во неа се запишани броеви $p,q,r,s,t\in\{1,2,3,....,64\}$. Според условот на задачата имаме

$$p+q+r+s \equiv p+r+s+t \equiv q+r+s+t \equiv q+p+r+t \pmod 4$$

Од својствата на на конгруенции следува

$$p \equiv q \equiv r \equiv s \equiv t \pmod 4 .$$

Според тоа, броевите кои се наоѓаат во белите полиња, освен оние кои се наоѓаат во ќошевите на таблата, имаат еден ист остаток при делење со 4. Но такви броеви има $30>16$, а ние треба да имаме најмногу 16 исти остатоци. Според тоа, не постои запишување на броевите од 1 до 64 кое го задоволува бараниот услов.

б) Можно е. Еден таков распоред е даден на цртежот десно.

36. На колку начини табела $m \times n$ може да се потполни со броевите 1 и -1, така што производот на броевите во секоја редица да биде еднаков на 1, а производот на броевите во секоја колна да биде еднаков на -1?

Решение. Нека $x_{ij} \in \{-1,1\}$ е бројот кој се наоѓа во пресекот на i-тата редица и j-тата колона од табелата. За да производот на броевите во секоја од првите $m-1$ редица е еднаков на 1, потревно и доволно е да

$$x_{in} = \prod_{j=1}^{n-1} x_{ij} \text{ , за } i=1,\dots,m-1.$$

За да производот на броевите во секоја од првите $n-1$ колона е еднаков на -1, потребно и доволно е да

$$x_{mj} = -\prod_{i=1}^{m-1} x_{ij} \text{ , за } j=1,2,\dots,n-1.$$

За да производот на броевите во m-тата редица е еднаков на 1, потребно и доволно е за

$$x_{mn} = \prod_{j=1}^{n-1} x_{mj} = \prod_{j=1}^{n-1} (-\prod_{i=1}^{m-1} x_{ij}) = (-1)^{n-1} \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{i=1}^{m-1} x_{ij} .$$

За да производот на броевите во n-тата колона е еднаков на -1, потребно и доволно е да

$$x_{mn} = -\prod_{i=1}^{m-1} x_{in} = -\prod_{i=1}^{m-1} (\prod_{j=1}^{n-1} x_{ij}) - \prod_{i=1}^{m-1} \prod_{j=1}^{n-1} x_{ij} .$$

Тоа е можно само ако $(-1)^{n-1} = -1$, односно ако n е парен. Во тој случај табелата се пополнува така што прво се пополнуваат полињата кои се во пресекот на првите $m-1$ редици и првите $n-1$ колони на произволен начин, а потоа еднозначно се пополнуваат полињата кои лежат во последната редица и последната колона со користење на претходните формули. Затоа, табелата може да се пополни на 0 начини, ако n е непарен и на $2^{(m-1)(n-1)}$ начини, ако n е парен.

37. Нека n е природен број. На колку начини може табела со димензии $n \times n$ да се пополни со броевите $1, 2, -1, -2$ така што производот на броевите во секој ред биде еднаков на -2 и производот на броевите во секоја колона биде еднаков на -2?

Решение. За $n=1$ очигледно ито постои само еден начин на пополнување.

Нека $n>1$. Во секој ред и во секоја колона мора да има точно еден од броевите 2 или -2. Можеме одделно да определиме на кои места во табелата ќе се наоѓаат броеви чија апсолутна вридност е 2 и на кои места во табелата ќе се наоѓаат негативни броеви. Места за броевите кои имаат апсолутна вредност 2 можеме да одбереме на $n!$ начини.

Во секој ред (односно колона) можеме произволно да избереме предзнак за $n-1$ броеви, а преостанатиот број има еднозначно определен предзнак, бидејќи производот треба да биде негативен. Нека P е делот од разгледуваната табела кој се состои од $(n-1)^2$ полиња во првите $n-1$ редови и $n-1$ колони. Понатаму, со x да го означиме бројот кој е во пресекот на $n-$тиот ред и $n-$тата колона, со $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ преостанатите броеви во $n-$тиот ред, а со $b_1, b_2, ..., b_{n-1}$ преостанатите броеви во $n-$тата колона. Секој распоред на предзнаците за кој производот во секоја колона и секоја и секој ред е негативен наполно е определен со предзнаците на броевите во P. Обратно, ако на произволен начин ги распределиме предзнаците на броевите во P, тогаш од претходно изнесеното следува дека еднозначно се определени предзнаците на броевите $a_1, a_2, ..., a_{n-1}, b_1, b_2, ..., b_{n-1}$. Треба уште да утврдиме дали може предзнакот на бројот x да го наместиме така што производите во $n-$тиот ред и $n-$тата колона бидат негативни. Предзнакот на бројот x мора да биде спротивен од предзнакот на производот $a_1 a_2 ... a_{n-1}$ и мора да биде спротивен од предзнакот на производот $b_1 b_2 ... b_{n-1}$. Значи, потребно е да провериме дека предзнаците на производите $a_1 a_2 ... a_{n-1}$ и $b_1 b_2 ... b_{n-1}$ се еднакви.

Ако n е парен број (односно непарен број), тогаш производот на сите броеви во првите $n-1$ колони е негативен (односно позитивен). Затоа производот $a_1 a_2 ... a_{n-1}$ и производот на сите броеви од P се со спротивен (односн ист) предзнак ако n е парен број (односно непарен број). Исто важи за производот $b_1 b_2 ... b_{n-1}$, што значи дека предзнакот на бројот x може да го наместиме така што производите во $n-$тиот ред и $n-$тата колона бидат негативни.

Значи, бројот на бараните распореди на предзнаците во целата табела е еднаков на бројот на произволните распореди на предзнаците во P, т.е. на $2^{(n-1)^2}$. Конечно, бројот на можните пополнувања на табелата е еднаков на $2^{(n-1)^2} n!$.

38. На полица се наоѓаат n книги означени со броевите 1, 2, ..., n, подредени во некој редослед. Библиотекар во секој чекор избира некоја книга k која е на $\ell-$тото место одлево, така што важи $\ell > k$ (ако таква постои), ја вади од редицата, сите книги од $k-$тото до $(\ell-1)-$то место во редицата ги поместува за едно место надесно, а извадената книга ја става на $k-$тото место. (На пример, ако на полицата редоследно се книгиге 4, 3, 1, 2, тој може да ја извади и премести, на пример, книгата 2, со што го добива редпследот 4, 2, 3, 1.)

а) Докажи дека по најмногу $2^{n-1}-1$ чекори книгите може да распоредат во правилниот распоред, т.е. 1, 2, ..., n одлево- надесно.

b) Докажи дека за некој почетен распоред на кигите, може по $2^{n-1}-2$ чекори книгиге да не се во правилниот распоред.

Решение. а) Книга 1 библиотекарот може да ја премести најмногу еднаш. Со индукција се докажува дека киигата k $(1 \le k \le n-1)$ може да биде преместена најмногу 2^{k-1} пати. Навистина, по првото преместување на кигата k, нејзината позициха може да се наруши само при преместување на некоја книга i за $i < k$, што според индуктивната претпоставка може да се случи најмногу

$$\sum_{i=1}^{k-1} 2^{i-1} = 2^{k-1} - 1$$

пати. Притоа книгата n никогаш нема да биде преместаена, па затоа вкупниот број чекори е најмногу

$$\sum_{i=1}^{n-1} 2^{i-1} = 2^{n-1} - 1.$$

b) Ако почетниот распоред на книгите е $n, 1, 2, ..., n-1$ и библиотекарот секога ја избира најдесната дозволена книга, тогаш мо требаат точно $2^{n-1}-1$ чекори. Со индукција по k ќе докажеме дека ако во некој момент последните $k+1$ книга се редоследно $x, n-k, n-k+1, ..., n-1$, тогаш по $2^k - 1$ чекори нивниот редослед ќе биде $n-k, n-k+1, ..., n-1, x$, додека редоследот на кигите лево од нив нема да се промени. Ова е точно за $k=1$. Ако $k>1$, тогаш според индуктивната претпоставка по $2^{k-1}-1$ чекори имаме редослед $x, n-k+1, ..., n-1, n-k,$ по следниот чекор $n-k,\ x, n-k+1, ..., n-1$, па така по уште $2^{k-1}-1$ (вкупно укупно $2^k - 1$) добиваме редослед $n-k, n-k+1, ..., n-1, x$.

39. Шаховска табла $n \times n$ нумерирана е со броевите $1, 2, ..., n^2$. Докажи дека постојат соседни квадратчиња (со заедничка страна) такво што разликата на броевите запишани во нив е најмалку n.

Решение. Да претпоставиме дека разликата на броевите од било кои соседни квадратчиња е најмногу $n-1$. За $k = 1, 2, ..., n^2 - n,$ со A_k ќе го означиме множеството од квадратчињата нумерирани со $1, 2, ..., k,$ со B_k множеството од квадратчиња нумерирани со $k+n, ..., n^2$ и со C_k множеството од преостанатите квадратчиња. Јасно, квадратчињата од множествата A_k и B_k немаат заедничка страна, и C_k има точно $n-1$ елементи. Значи, постои редица и колона која што не содржи елементи од C_k. Сите квадратчиња од оваа редица или оваа колона припаѓаат или во A_k или во B_k. Инаку, ќе постојат две соседни квадратчиња, едно во множеството A_k, а едно во множеството B_k. Како и да е, ова не е можно ниту за A_1 ниту за B_{n^2-n}.

Значи, постои индекс $k \in \{1, ..., n^2 - n - 1\}$ така што $B_1, B_2, ..., B_k$ пополнуваат цел ред и цела колона, додека B_{k+1} го нема ова својство. Следува дека A_{k+1} пополнува цел ред или цела колона. Следува дека A_{k+1} има пресек со B_k, што е контрадикција.

40. Табелата со димензии $n \times n$, на чии единечни полиња се броевите $1, 2, ..., n^2$ (на секое поле точно по еден број и секој број се наоѓа на точно едно поле) ја нарекуваме *добра* ако сите производи од по n броеви кои се наоѓаат на n „расфрлени“ полиња даваат ист остаток при делење со n^2+1. Дали постои добра табела за:

а) $n=8$, б) $n=10$?

(n полиња се „расфрлени“ ако ниту една редица и ниту една колона не содржи две од овие полиња.)

Решение. а) Нека претпоставиме дека постои табела со димензии 8×8 таква што производот на секои 8 расфрлени броеви дава остаток r по модул $8^2+1=5\cdot 13$. Сите броеви во табелата можеме да ги поделиме на 8 дисјунктни множества од по 8 расфрлени броеви. Меѓу овие множества постои едно кое содржи множител 13 и едно кое не содржи таков множител. Производот на броевите во првото множество е делив со 13, а во второто не е делив со 13, противречност. Според тоа, добра табела со димензии 8×8 не постои.

g^0	g^1	g^2	$\cdots$	g^9
g^{10}	g^{11}	g^{12}	$\cdots$	g^{19}
g^{20}	g^{21}	g^{22}	$\cdots$	g^{29}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
g^{90}	g^{91}	g^{92}	$\cdots$	g^{99}

б) За $n=10$ бројот $n^2+1=101$ е прост. Да ја пополниме табелата како на цртежот десно, каде q е примитивен корен по модул 101. Лесно се проверува дека производот на броевите во било кои 10 расфрлени полиња е конгруентен со q^{495} по модул 101. Според тоа, ова е пример на добра 10×10 табела.

41. Дадени се конечно многу точки во рамнината, такви што сите не припаѓаат на една права. На секоја точка и е придружен еден реален број. Збирот на броевите придружувани на точките што и припаѓаат на секоја права, која содржи барем две од дадените точки, е нула. Докажи дека сите придружени броеви на дадените точки се еднакви на нула.

Решение. Нека на некоја точка X и е придружен број a_x. Да претпоставиме дека $a_x\neq 0$. Без губење на општоста можеме да претпоставиме дека $a_x>0$. Низ X ги повлекуваме сите прави кои содржат барем уште една точка од дадените. Нека n_x е бројот на сите прави низ X, а S е збирот на сите броеви придружени на дадените точки. Бидејќи збирот на броевите придружени на точките кои што припаѓаат на права која содржи барем две од дадените точки е нула, следува дека збирот на броевие на сите n_x прави е нула. Оттука добиваме

$$n_x a_x + S - a_x = 0,$$

т.е.

$$(n_x-1)a_x + S = 0. \qquad (1)$$

Бидејќи $a_x>0$, постои точка Y различна од X, така што $a_y<0$ (збирот на броевите од една права е еднаков на нула). И за точката Y како и за точката X, важи

$$(n_y-1)a_y + S = 0 \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме:

$$(n_x-1)a_x = (n_y-1)a_y. \qquad (3)$$

Бидејќи сите точки не припаѓаат на една права, следува дека $n_x>1$ и $n_y>1$. Левата страна во (3) е позитивна а десната страна е негативна. Добиената контрадикција со претпоставката дека постои точка X на која и е придружен број различен од нула. Значи, сите придружени броеви на дадените точки се нула.

42. Во внатрешноста на кружница со радиус 1 или на неа се наоѓаат 212 точки. Докажи дека постојат барем 2001 парови точки чие растојание е најмногу 1.

Решение. Да ја поделиме единичната кружница на шест еднакви делови, така да на секој дел соодветствува централен агол од 60°. Притоа растојанието на секои две точки од ови делови е помало или еднакво на 1. Нека $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ се броевите на точките во секој од шесте делови (ако точката припаѓа на заедничката граница на два дела ќе земеме дека припаѓа на еден од овие делови, кој било). Притоа важи $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 212$. Според тоа, за секој $i = 1,2,3,4,5,6$ во $i-$от дел постојат точно $\frac{a_i(a_i-1)}{2}$ парови точки, чие најголемо меѓусебно растојание е помало или еднакво на 1. Значи, дадените 212 точки формираат најмалку $\sum_{i=1}^{6} \frac{a_i(a_i-1)}{2}$ парови точки чие растојание е најмногу 1.

Да ја разгледаме функцијата $f(x) = \frac{x(x-1)}{2}$. Оваа функција е конвексна на целата реална права, па од неравенството на Јенсен следува

$$\sum_{i=1}^{6} \frac{a_i(a_i-1)}{2} = f(a_1) + f(a_2) + f(a_3) + f(a_4) + f(a_5) + f(a_6)$$

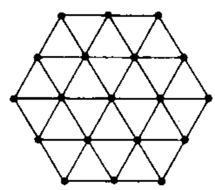
$$\geq 6f\left(\frac{a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6}{6}\right) = 6f\left(\frac{212}{6}\right)$$

$$= 6 \cdot \frac{\frac{106}{3} \cdot \left(\frac{106}{3}-1\right)}{2} = \frac{106 \cdot 103}{3} = \frac{10918}{3} > 2001,$$

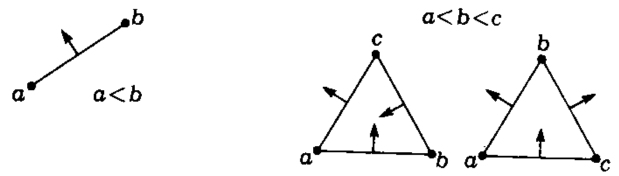
што и требаше да се докаже.

5. РАСЕКУВАЊА

1. Правилен шестаголник е поделен на 24 рамнострани триаголници како што е прикажано на цртежот десно. На 19-те темиња на триаголниците им се придружени 19 различни броеви. Докажи, дека меѓу 24-те триаголници постојат најмалку 7 такви, што за броевите a, b, c придружени на темињата на овие триаголници и земени во редослед спротивно од движењето на стрелките на часовникот важи $a < b < c$.



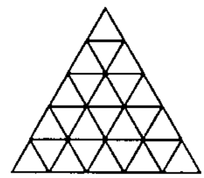
Решение. На секоја страна на триаголник од дадената поделба и придружуваме стрелка насочена лево од страната, ако по страната се движиме од теме со помал број кон теме со поголем број (цртеж долу лево). Ако броевите, запишани во темињата на некој триаголник, растат кога темињата ги обиколуваме во насока спротивна од насоката на движењето на стрелките на часовникот, тогаш кон внатрешноста на тој триаголник се насочени две стрелки, а ако се движиме во насока на стрелките на часовникот тогаш кон внатрешноста на триаголникот е насочена една стрелка (цртеж дол десно).



Нека имаме n триаголници од првиот тип и m триаголници од вториот тип, $m+n=24$. Бидејќи вкупниот број на стрелки насочени кон внатрешноста на шестаголникот е $N=2n+m=24+n$ доволно е да докажеме дека $N\geq 31$.

Стрелките кои соодветствуваат на 30 внатрешни отсечки на поделбата на шестаголникот лежат во внатрешноста на шестаголникот. Од останатите дванаесет стрелки, соодветни на страните на триаголниците кои лежат на контурата на шестаголникот барем една мора да е насочена кон внатрешноста на шестаголникот. Во спротивно, за броевите $a_1,a_2,...,a_{12}$ соодветни на темињата кои лежат на контурата треба да важи $a_1<a_2<...<a_{12}<a_1$, што не е можно. Значи, $N\geq 30+1=31$.

2. Рамностран триаголник со должина на страна $n, n\in\mathbb{N}$ е поделен со прави паралелни на страните на рамнострани триаголници со должина на страна 1 (за $n=5$ види цртеж).

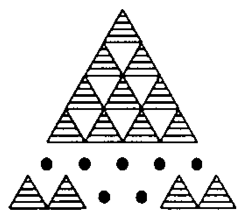


Колку најмногу отсечки со должина 1 и крајни точки во темињата на малите триаголници може да се отстранат така што да не постои триаголник со страни кои се наоѓаат меѓу отстранетите отсечки?

Решение. Бројот на отсечките со должина 1, паралелни на секоја страна од триаголникот е еднаков на

$$1+2+...+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

што значи дека вкупниот број на отсечки со должина 1 е еднаков на $\frac{3n(n+1)}{2}$. Секои две отсечки, паралелни со две страни на почетниот триаголник не формираат мал триаголник, бидејќи секој мал триаголник се состои од три отсечки кои се паралелни на сите три страни. Според тоа, сигурно може да се отстранат $\frac{2}{3}\cdot\frac{3n(n+1)}{2}=n(n+1)$ отсечки со должина 1.



Ќе докажеме дека повеќе отсечки не може да се отстранат. Да штрафираме триаголници со должина на страна 1 како на цртежот. Овие триаголници ги содржат сите отсечки со должина 1, при што секоја отсечка припаѓа само на еден триаголник. Затоа, за да не може да се состави ниеден од штрафираните триаголници, во секој може да се отфрлат најмногу 2 отсечки. Според тоа, бројот на отстранетите отсечки не е поголем од $\frac{2}{3}$ од вкупниот број отсечки, т.е. не е поголем од $\frac{2}{3}\cdot\frac{3n(n+1)}{2}=n(n+1)$.

3. Во внатрешноста на $\triangle ABC$ со плоштина еднаква на 1 е избрана произволна точка, која е поврзана со неговите темиња. Потоа во еден од добиените три триаголници одново е избрана произволна точка и е поврзана со неговите темиња. Во секој чекор се избира произволна точка од внатрешноста на некој од до тој момент добиените триаголници и таа се поврзува со темињата на тој триаголник. Со n да го означиме бројот на избраните точки.

а) Докажи, дека $\triangle ABC$ е поделен на $2n+1$ триаголници.

б) За секои два триаголника од поделбата кои имаат заедничка страна пресметан е збирот на нивните плоштини. Докажи, дека максималниот од добиените збирови е поголем или еднаков на $\frac{2}{2n+1}$.

Решение. а) Во секој чекор триаголникот од кој се избира точка се дели на три нови триаголници, т.е. вкупниот број триаголници се зголемува за 2. Бидејќи во почетокот имаме само еден триаголник, после n чекори вкупно ќе имаме $2n+1$ триаголници.

б) Со индукција ќе докажеме дека ако извадиме произволен триаголник, тогаш останатите триаголници може да бидат групирани по парови така што триаголниците во еден секој пар имаа заедничка страна.

1) За $n=1$ тврдењето е очигледно.
2) Нека тврдењето е точно за $n=k$. Ќе докажеме дека тоа е точно и за $n=k+1$. Нека во $k+1-$ от чекор сме додале точка O во $\triangle MNP$. Од добиената поделба да извадиме произволен $\triangle XYZ$. Ако $\triangle XYZ$ е некој од $\triangle OMN, \triangle OMP$ или $\triangle ONP$ (без ограничување на општоста можеме да сметаме дека тоа е $\triangle OMN$), тогаш да ја разгледаме конфигурацијата во $k-$ от чекор со изваден $\triangle MNP$.
   Согласно индуктивната претпоставка остнатите триаголници можат да бидат групирани во парови со заедничка страна. Останува да го додадеме парот $(\triangle OMP, \triangle ONP)$. Ако $\triangle XYZ$ е различен од $\triangle OMN, \triangle OMP$ и $\triangle ONP$, тогаш ја разгледуваме конфигурацијата во $k-$ от чекор со изваден $\triangle XYZ$. Согласно индуктивната претпоставка останатите триаголници може да бидат групирани во парови со заедничка страна. Нека $\triangle MNP$ е во пар со $\triangle QMN$. Тогаш парот $(\triangle QMN, \triangle MNP)$ го заменуваме со паровите $(\triangle OMN, \triangle QMN)$ и $(\triangle OMP, \triangle OPN)$. Значи и во овој случај тврдењето важи, со што доказот е завршен.

Бидејќи плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на 1, заклучуваме дека постои делбен триаголник со минимална плоштина која не е поголема од $\frac{1}{2n+1}$. Да ги разгледаме сите триаголници од поделбата без тој со минимална плоштина. Согласно претходно докажаното останатите триаголници може да се групираат во парови со заедничка страна. Бидејќи имаме n такви паровисо вкупна плоштина поголема или еднаква на $1-\frac{1}{2n+1}=\frac{2n}{2n+1}$, добиваме дека максималниот збир на плоштините на два триаголника во еден пар е најмалку

$$\frac{1}{n}\frac{2n}{2n+1}=\frac{2}{2n+1}.$$

4. Во рамнината се дадени n прави такви што секои две прави се сечат и никои три немаат заедничка точка (прави во општа положба). На колку делови овие прави ја делат рамнината?

Решение. Нека x_n е бројот на деловите на кои $n-$те прави ја делат рамнината. Тогаш важат следниве равенства $x_1 = 2, x_n = x_{n-1} + n$, за $n \geq 2$.

Навистина, нека $p_1, p \ ,..., p_n$ се прави во рамнината за кои важат условите на задачата. Правите $p_1, p \ ,..., p_{n-1}$ ја делат рамнината на x_{n-1} деловии ја сечат правата p_n во $n-1$ точка. Овие $n-1$ точка ја делат правата p_n на n делови, а секој од нив дели еден од претходно воочените x_{n-1} делови на рамнината на два нови дела. Затоа со додавање на правата p_n бројот на деловите во рамнината се зголемува за n. Конечно, ако ги собереме равенствата $x_k = x_{k-1} + k$, за $k = 2,...,n$ добиваме

$$x_n = 2+2+3+4+...+n = 1+\tfrac{n(n+1)}{2} = \tfrac{n^2+n+2}{2}.$$

5. Во просторот се дадени n рамнини такви што секои три рамнини се сечат и никои четири немаат заедничка точка (рамнини во општа положба). На колку делови овие рамнини го делат просторот?

Решение. Нека x_n е бројот на деловите на кои $n-$те рамнини го делат просторот. Тогаш $x_1 = 2$. Нека се дадени n рамнини за кои се исполенти услвоите на задачата. Првите $n-1$ рамнини го делат просторот на x_{n-1} делови и ја сечат $n-$тата рамнина во $n-1$ права. Според претходната задача овие $n-1$ ја делат $n-$тата рамнина на $\frac{n^2-n+2}{2}$ делови и секој од овие делови го дели просторот на два нови дела. Затоа со додавање на новата рамнина бројот на деловите во просторот се зголемува за $\frac{n^2-n+2}{2}$. Значи, $x_n = x_{n-1} + \frac{n^2-n+2}{2}$, за $n \geq 2$. Конечно, ако ги собереме равенствата $x_k = x_{k-1} + \frac{k^2-k+2}{2}$, за $k = 2,...,n$ добиваме

$$x_n = 2 + \tfrac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(k^2 - k + 2) = \tfrac{1}{6}(n+1)(n^2 - n + 6).$$

6. Дадена е точка T во просторот. На колку најмногу делови може да биде поделен просторот со n рамнини кои минуваат низ точката T?

Решение. Даземеме дека низ точката T минуваат n рамнини кои просторот го делат на најголем број можни делови и да земеме една од овие рамнини, која ќе ја означиме со σ.

Заради центраЛната сметрија на целата конфигурација во однос на T добиваме дека секој од двата дела на кои просторот е поделен со σ има еднаков број делови $M(n)$ определени со дадените n рамнини.

Повлекуваме рамнина ρ паралелна на σ, $(\sigma \not\equiv \rho)$. Според условот на задачата рамнината ρ, освен σ, ги сече сите дадени рамнини, при што добиваме $n-1$ пресечна права. Јасно, со овие прави рамнината ρ ќе биде поделена на еднаков број делови колку што има делови просторот од онаа страна на σ на која се наоѓа ρ, т.е. на $M(n)$. Очигледно, важи и обратнот, т.е. со задавање на T, σ и ρ каде ρ е поделена со $n-1$ права секогаш може да се најдат $n-1$ рамнини низ

T кои ρ ќе ја сечат точно во зададените прави.

Значи, задачата се сведува на тоа да се определи на колку најмногу делови рамнината може да биде поделена со $n-1$ права. Тој број да го означиме со $N(n-1)$. Според задача ** имаме

$$N(n-1)=1+\tfrac{n(n-1)}{2}.$$

Конечно, бараниот број е еднаков на

$$2M(n)=2N(n-1)=2(1+\tfrac{n(n-1)}{2})=n^2-n+2.$$

7. Во рамнината се дадени n кружници такви што секои две се сечат во две точки и било кои три немаат заедничка точка. На колку делови ја делат рамнината овие n кружници?

Решение. Нека x_n е бројот на деловите на кои е поделена рамнината со n кружници кои го задоволуваат условот на задачата. Бидејќи $n-$те кружници ја сечат $(n+1)-$та кружница во n парови точки и тие истата ја делат на $y_n=2n$ делови, добиваме дека $(n+1)-$та кружница сече $y_n=2n$ од x_n деловите на кои е поделена рамнината со $n-$те кружници. Затоа,

$$x_{n+1}=x_n+y_n=x_n+2n. \tag{1}$$

Ако во равенството (1), наместо n последователно ставиме $n-1,...,2,1$ и ги собереме добиените равенства наоѓаме $x_n=n^2-n+2$.

8. Даден е конвексен $n-$аголник таков што било кои три негови дијагонали не се сечат во една точка. Определи го бројот на отсечките на кои сите дијагонали на $n-$аголникот се поделени со пресечните точки.

Решение. Нека $A_1A_2...A_n$ е конвексен $n-$аголник. Дијагоналата A_1A_k, каде $3\le k\le n-1$, останатите дијагонали ги сече во $(k-2)(n-k)$ точки и притоа се добиваат $(k-2)(n-k)+1$ отсечка. Според тоа, бараниот број отсечки е еднаков на

$$\tfrac{n}{2}\sum_{k=3}^{n-1}((k-2)(n-k)+1)=\tfrac{n(n-3)(n^2-3n+8)}{12}.$$

9. На колку начини со своите дијагонали е поделен конвексен $n-$аголник таков што било кои три негови дијагонали не се сечат во една точка.

Решение. *Прв начин.* Конвексниот $(n+1)-$аголник $A_1A_2...A_nA_{n+1}$ со дијагоналата A_1A_n е поделен на $n-$аголникот $A_1A_2...A_n$ и триаголникот $A_1A_nA_{n+1}$. Нека x_n е бројот на деловите на кои од своите дијагонали е поделен $n-$аголникот $A_1A_2...A_n$. Лесно се докажува дека

$$x_{n+1}=x_n+(n-1)+1\cdot(n-2)+2\cdot(n-3)+...+(n-3)\cdot 2+(n-2)\cdot 1.$$

Понатаму, последната формула можеме да ја запишеме во видот

$$x_{n+1}=x_n+(n-1)+\tfrac{n(n-1)(n-2)}{6}=x_n+\tfrac{n^3}{6}-\tfrac{n^2}{2}+\tfrac{4n}{3}-1. \tag{1}$$

Ако со помош на (1) последователно ги изразиме $x_n,x_{n-1},...,x_3$ и ги собереме добиените равенства после средувањето добиваме

$$x_n = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}.$$

Втор начин. Конвексниот $n-$аголникот има $\frac{n(n-3)}{2}$ дијагонали. Меѓу множеството S_1 на пресечните точки на дијагоналите на конвексниот $n-$аголник кои се наоѓаат во внатрешноста на $n-$аголникот и множеството комбинации од четврта класа од n елементи постои биекција. Затоа $|S_1| = \binom{n}{4}$. Да ги конструираме сите дијагонали на конвексниот $n-$аголник една по друга. Со конструкцијата на секоја нова дијагонала се добиваат онолку нови области колку што е бројот на деловите на кои таа дијагонала ја делат веќе конструираните дијагонали, а тој број е за еден поголем од бројот на пресеците на новата дијагонала со претходно конструираните дијагонали. Според тоа, бројот на областите, кој на почетокот беше еднаков на 1, со конструкцијата на сите дијагонали се зголемува за збирот на бројот сите дијагонали и бројот на сите пресечни точки, што значи дека тој е еднаков на

$$1+\frac{n(n-3)}{2}+\binom{n}{4} = \frac{12(n^2-3n+2)+n(n-1)(n-2)(n-3)}{24} = \frac{(n-1)(n-2)(n^2-3n+12)}{24}.$$

10. Конвексен n-аголник е разделен на триаголници со дијагонали кои не се сечат меѓу себе. Секое теме на n-аголникот е теме на непарен број на делбени триаголници. Определи ги сите можни вредности за n.

Решение. Јасно е дека $n=3$ е тривијално решение на задачата. За $n=4$ може да се повлече најмногу една дијагонала која не се сече со останатите негови дијагонали. Но тогаш постојат две темиња на четириаголникот кои се темиња на по два делбени триаголници.

Во случајот $n=5$ секоја повлечена дијагонала го дели петаголникот на два многуаголници од кои едниот е триаголник а едниот е четириаголник Ако имаме поделба што го задоволува условот на задачата имаме и една дијагонала. Во четириаголникот, што се добива со повлекување на таа дијагонала, е повлечена најмногу уште една дијагонала која е делбена. Не е тешко да се провери дека во сите претходно опишани можни случаи секогаш ќе се јави теме од 5-аголникот, кое е теме на парен број на делбени триаголници.

Според тоа $n>5$. Во даден n-аголник секоја негова дијагонала го дели на два многуаголници. Ако имаме поделба што го задоволува условот на задачата, не постои дијагонала која го дели n-аголникот на два многуаголници од кои едниот е четириаголник. Нека претпоставиме спротивно, т.е. дека имаме поделба на n-аголникот кој го задоволува условот од задачата, при што постои делбена дијагонала која n-аголникот го дели на два многуаголници од кои едниот е четириаголник. Тој четириаголник е поделен на два триаголници со една од двете негови дијагонали. Не е тешко да се види дека едно од темињата на четириаголникот е теме на парен број на триаголници кои се делбени за n-аголникот. Тоа не е можно, па според тоа таква дијагонала не постои.

Од друга страна секогаш постои триаголник формиран од една делбена дијагонала (зошто?).

Нека d е делбена дијагонала таква што еден од двата многуаголници $A_1A_2...A_k$ е со најмал број на страни во однос на сите други многуаголници што се добиваат кога делбена дијагонала го дели n-аголникот на многуаголници. Значи $d = A_1A_k$ и секоја друга делбена дијагонала d' го дели n-аголникот на два многуаголници кои што немаат помалку страни од $A_1A_2...A_k$.

Од почетната дискусија јасно е дека $k \geq 5$. Нека претпоставиме дека $k > 5$. Бидејќи $A_1A_2...A_k$ е разделен на триаголници, на една негова делбена дијагонала крај е или A_1 или A_k. Во тој случај $A_1A_2...A_i$, $i < k$ или $A_kA_{k-1}...A_{k-i}$, $1 < i < k-2$ е многуаголник кој е добиен со делбена дијагонала на n-аголникот. Тоа е во спротивност со минималноста на $A_1A_2...A_k$. Значи, $k \leq 5$, односно $k = 5$.

Отсечката A_1A_5 е страна на делбен триаголник на $A_1A_2A_3A_4A_5$, и заради изборот на $A_1A_2A_3A_4A_5$ тој не може да е $A_1A_5A_4$ или $A_1A_5A_2$. Единствена можност е $A_1A_3A_5$. Во тој случај делбени триаголници се $A_1A_2A_3$, $A_1A_3A_5$ и $A_5A_4A_3$.

Темињата A_1 и A_5 во $A_1A_2A_3A_4A_5$ се темиња на по 2 делбени триаголника. Заради тоа, ако ги исфрлиме темињата A_2, A_3, A_4 ќе добиеме ($n-3$)-аголник кој е разделен на триаголници според условот на задачата, односно условот за непарност на A_1 и A_5 нема да се наруши.

Оваа постапка можеме да ја повторуваме последователно при што во секој следен чекор n ќе се намалува за 3. Во крајниот можен чекор ќе го добиеме бројот 3. Не може да се добие ниту 5 ниту 4 бидејќи тоа би значело дека постои 5-аголник или 4-аголник кој го исполнува условот на задачата. Но тоа е во спротивност со првиот дел на решението. Значи за некое p ќе имаме $n-3p=3$, т.е. $n = 3(p+1)$. Конечно потребен услов е $3|n$, а не е тешко да се докаже дека тој услов е и доволен.

11. Во рамнината е даден квадрат, чии страни се хоризонтални и вертикални. Во квадратот се наоѓаат неколку отсечки, паралелни со страните и такви што никои две отсечки не лажат на иста права и не се сечат во точка, која е внатрешна и за двете отсечки. Се покажало, дека отсечките го разбиваат квадратот на правоаголници, при што секоја вертикална права, која го сече квадратот и не содржи отсечки од разбивањето пресекува точно k правоаголници од разбивањето, а секоја хоризонтална права, која го сече квадратот и не содржи отсечки од разбивањето пресекува точно l правоаголници од разбивањето. Определи го бројот на правоаголниците во разбивањето.

Решение. Да фиксираме една хоризонтална отсечка I и нека I учествува во a правоаголници над неа и во b правоаголници под неа. Ќе докажеме дека $a = b$. Нека h е хоризонтална права, која на почетокот минува низ горната страна на квадратот и да почнеме да ја движиме паралелно надолу. Во моментот, кога правата минува низ I (според условот во тој момент таа минува само низ I), бројот на правоаголниците пресечен од h се намалува за a и се зголемува за b. Бидејќи според условот бројот на пресечените правоаголници е константен, добиваме дека $a = b$.

Со индукција по k, ќе докажеме дека бараниот број е kl. За $k=1$ тврдењето е очигледно. Нека $k>1$. Да ги разгледаме правоаголниците од разбивањето, кои имаат една страна врз долната страна на разбивањето. Јасно, вакви правоаголници има точно l (хоризонтална права, која е доволно блиска до долната страна, ги сече само нив). Разгледуваните правоаголници да ги разбиеме на групи од соседи со еднакви висини. Секоја таква група има за горна граница некоја од дадените отсечки.

Да разгледаме една таква група чија горна граница е отсечката I. Да забележиме, дека вертикалните отсечки, кои ја ограничуваат групата, продолжуваат нагоре над I. Навистина, ако е точно обратнмото, на пример ако горниот крај на левата вертикална отсечка J лежи на I, тогаш оддесно на J се допира еден правоаголник, а одлево се допираат повеќе правоаголници, бидејќи J е граница на групата. Последното противречи на претходно докажаното.

Да ја отсраниме разгледуваната група и да ги продолжиме правоаголниците над I до долната страна на квадратот. Бидејќи под I и над I имаме еднаков број на правоаголници, секоја хоризонтална права се уште пресекува точно l правоаголници.

Да ја извршиме опишаната операција со сите групи. На таков начин отстранивме точно l правоаголници, а притоа секоја вертикална права ќе пресекува по еден правоаголник помалку, т.е. ќе пресекува $k-1$ правоаголници. Од индуктивната претпоставка следува дека бројот на преостанатите правоаголници ќе биде $(k-1)l$ и ако ги додадеме првично отстранетите правоаголници, добиваме дека имаме $(k-1)l+l=kl$ правоаголници.

12. Да се најде максималниот број на правоаголници со страни 1 и $10\sqrt{2}$ кои може да се исечат од правоаголник со страни 50 и 90 со сечења, паралелни на страните на почетниот правоаголник.

Решение. Правоаголникот $ABCD$ да го поставиме во координатен систем, така што неговите темиња да имаат кординати $A(0,0), B(0,50),\ C(90,50),\ D(90,0)$. Прво ќе докажеме како од правоаголникот може да се исечат 315 правоаголници со страни 1 и $10\sqrt{2}$. Бидејќи $90>6\cdot 10\sqrt{2}$. Можеме да го поделиме $ABCD$ на два правоаголника со димензии $50\times 60\sqrt{2}$ и $(90-60\sqrt{2})\times 50$. Од првиот четириаголник со хоризонтални прави на растојание 1 една од друга можеме да исечиме 50 ленти со димензија $1\times 60\sqrt{2}$, после што од секоја лента можеме да исечиме по шест правоаголници со димезии $1\times 10\sqrt{2}$. Според тоа, првиот правоаголник ќе го поделиме на $50\cdot 6=300$ правоаголници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$. Бидејќи $90-60\sqrt{2}>5$ и $50>3\cdot 10\sqrt{2}$ од вториот правоаголник можеме да исечиме правоаголник со димензии $5\times 30\sqrt{2}$ од кој потоа сечиме $5\cdot 3=15$ правоаголници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$, што значи дека исековме 315 правоаголници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$.

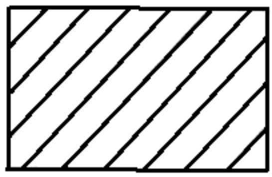
Ќе докажеме дека 315 е максималниот број правоаголници со димнзии $1\times 10\sqrt{2}$ кои можеме да ги исечиме од дадениот правоаглник со димензии 50×90. Да ги разгледаме пресеците на правите со равенки

$$L_1 : x+y=10\sqrt{2}\,,\ L_2 : x+y=20\sqrt{2}\,,\ ...,\ L_9 : x+y=90\sqrt{2}$$

со правоаголникот $ABCD$. Да забележиме, дека од $100\sqrt{2}-90>50$ следува дека правата чија равенка е $x+y=100\sqrt{2}$ не го сече правоаголникот $ABCD$.

Бидејќи секоја од горните прави зафаќа агол од 45^0 со координатните оски, не е тешко да се докаже дека збирот на отсечките од овие прави, кои лежат во правоаголник $1\times 10\sqrt{2}$ со страни паралелни на координатните оски, е $\sqrt{2}$. Да ја означиме должината на отсечката од правата L_i, која лежи во внатрешноста на правоаголникот $ABCD$ со l_i. Со елементарни пресметувања наоѓаме дека

$$l_1=20, l_2=40, l_3=60, l_4=l_5=l_6=50\sqrt{2},$$
$$l_7=140\sqrt{2}-140, l_8=140\sqrt{2}-160, l_9=140\sqrt{2}-180$$



Со собирање наоѓаме, дека вкупната должина во внатрешноста на правоаголникот $ABCD$ е еднаква на $570\sqrt{2}-360$. Бидејќи еден правоаголник со димензии $1\times 10\sqrt{2}$ во себе содржи отсечка со вкупна должина $\sqrt{2}$, ако имаме t правоаголници, тогаш

$$t\sqrt{2}\le 570\sqrt{2}-360,$$

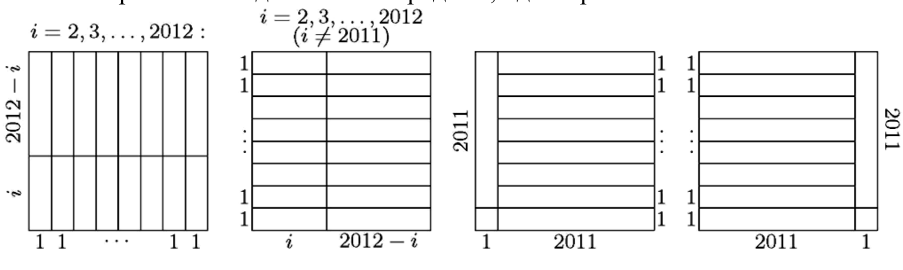
што значи дека

$$t\le [\tfrac{570\sqrt{2}-360}{\sqrt{2}}]=315,$$

што и требаше да се докаже.

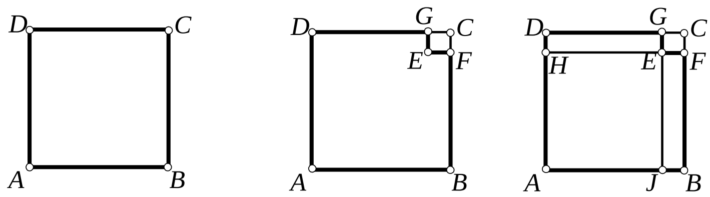
13. Разгледуваме разбивања на квадрат со должина на страна 2012 на правоаголници кај кои едната страна е со должина 1, а другата е со целобројна должина. Колку најмногу такви разбивања може да се направат така што никои две разбивања немаат идентични правоаголници на исто место?

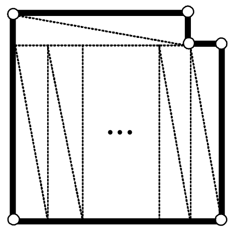
Решение. За правоаголникот кој го покрива долниот лев агал има 4023 можности. Од друга страна, пример на 4023 разбивања кои ги задоволуваат условите е прикажан на долниот. Според тоа, одговорот е 4023.



14. Од квадрат со димензии $n\times n$ е отстранет еден квадрат со димензии 1×1 кој содржи едно теме на квадратот. Определи го најмалиот број на складни меѓу себе триаголници на кои може да се раздели добиената фигура.

Решение. Нека темиња на квадратот се $ABCD$ и нека е отстрането едно квадратче кое содржи теме на квадратот. Нека е тоа во темето C, т. е. нека е отстрането квадратче $EFCG$ како на цртежот долу. Бидејќи фигурата е разделена на еднакви триаголници, тогаш отсечките EF и EG се или страни на некои од тие триаголници или се делови од страни од делбените триаголници. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека EF е дел од страна на триаголник. Тогаш таа страна е дел од отсечката FH. Во тој случај отсечката EG е страна на триаголник. Значи, една страна на делбените триаголници има должина 1. Најголема висина на делбените триаголници, во тој случај е $n-1$, а најголема можна плоштина на делбените триаголници е $P=\frac{1(n-1)}{2}$.



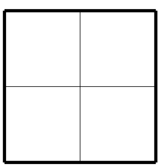


Ако бројот на делбени триаголници е N и нивната плоштина е S, тогаш $N\cdot S=n^2-1$, каде n^2-1 е плоштината на фигурата која ја разделуваме. Според тоа $S=\frac{n^2-1}{N}$ и $\frac{n^2-1}{N}\le\frac{n-1}{2}$. Конечно $N\ge 2(n+1)$. Значи, бројот на делбени триаголници не е помал од $2(n+1)$. Равенството $N=2(n+1)$ лесно се реализира, т. е. постои поделба на $2(n+1)$ триаголник. Една таква поделба е дадена на цртежот десно.

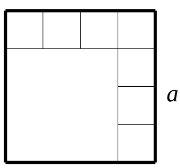
15. Да се определи најмалиот природен број n, таков што за секој природен број p, $p\ge n$ даден квадрат може да се раздели на p квадрати (не мора делбените квадрати да се еднакви).

Решение. Најмалиот природен број n, на кој може да се раздели даден квадрат на $p, p\ge n$ квадрати е $n=6$.

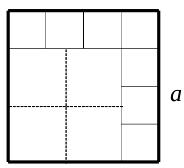
Јасно е дека секој квадрат може да се раздели на четири квадрати (види црт. 1).



цртеж 1



цртеж 2



цртеж 3

За секој природен број k, $k\ge 2$ даден квадрат може да се раздели на $2k$ квадрати, односно на $2k+3$ квадрати. Навистина, на две страни на квадратот со страна a кои што имаат заедничко теме, ќе конструираме по k еднакви квадрати во внатрешноста на дадениот квадрат (секоја од страните ќе ја поделиме на k еднакви отсечки и над секоја отсечка ќе конструираме квадратче во внатрешноста на дадениот квадрат). На тој начин ќе имаме $2k-1$ мали квадрати со страни $\frac{a}{k}$, и еден квадрат со страна $\frac{(k-1)a}{k}$. На пример за $k=4$ види цртеж 2. Ако големиот квадрат го поделиме на четири еднакв квадрати, тогаш квадратот со страна a ќе биде разделен на $2k+3$ квадрати. За случајот $k=4$ види цртеж 3. Според тоа, поделба е можна за секој природен број од низите

$$4, 6, 8, 10, 12, ..., 2k, ... \text{ и } 7, 9, 11, 13, 15, ..., 2k+3, ...$$

Јасно е дека поделба на два и три квадрати не е можна.

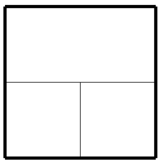
Ќе покажеме дека не е можна поделба на даден квадрат на 5 квадрати. Тоа ќе го направиме во неколку чекори. Нека претпоставиме дека квадратот со страна a е подлен на пет квадрати.

1° Нека претпоставиме дека над една страна на почетниот квадрат се конструирани два квадрати со еднаква должина на страна (види цртеж 4). Преостанатиот дел од квадратот кој не е препокриен е правоаголник со страни a и $\frac{a}{2}$.

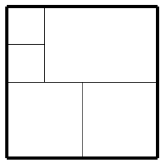
Ако над помалата страна на правоаголникот се конструирани два квадрати со еднаква должина на страна, тогаш квадратот е поделен на пет дела од кои еден е правоаголник со страни $\frac{a}{2}$ и $\frac{3a}{4}$ (види цртеж 5).

Ако над помалата страна се конструирани два квадрати со различни страни, тогаш квадратот е разделен на пет дела од кои едниот дел не е квадрат (види цртеж 6).

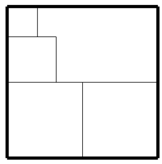
Ако над помалата страна од правоаголникот се конструирани повеќе од два квадрати, тогаш почетниот квадрат е поделен на повеќе од пет дела.



цртеж 4



цртеж 5

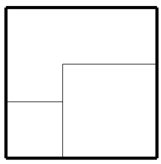


цртеж 6

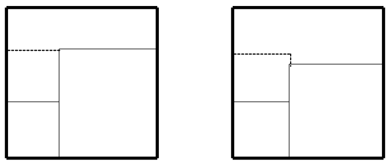
Според тоа ваква поделба не е можна.

2° Нека претпоставиме дека над една страна на почетниот квадрат, во неговата внатрешност, се конструирани два квадрати со различни должини на страни (види цтреж 7).

Ако над страната на најмалиот квадрат конструираме еден квадрат, тогаш преостанатиот дел на квадратот со една линија не може да се подели на два квадрати дури и во случајот кога почетните конструирани квадрати се со страни $\frac{2}{3}a$ и $\frac{1}{3}a$ (види цртеж 8).



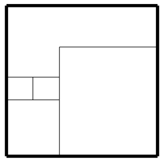
цртеж 7



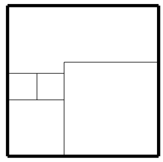
цртеж 8

Ако над страната на најмалиот квадрат се конструирани два квадрати(без разлика дали се со еднаква или различна страна) тогаш квадратот е разделен на пет дела од кои едниот не е квадрат (види цртеж 9 и цртеж 10).

Според тоа, поделба на пет квадрати во која над една страна на квадратот се конструирани два квадрати не е можна.

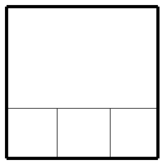


цртеж 9



цртеж 10

3° Нека над една страна на квадратот се конструирани три еднакви квадрати (види цртеж 11). Преостанатиот дел од квадратот е правоаголник со страни $\frac{2}{3}a$ и a. Во овој случај, очигледно преостанатиот правоаголник не може да се подели на два квадрати. Според тоа ваква поделба не е можна.



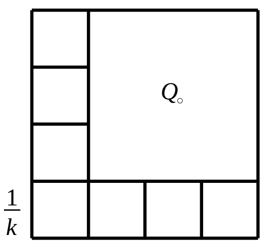
цртеж 11

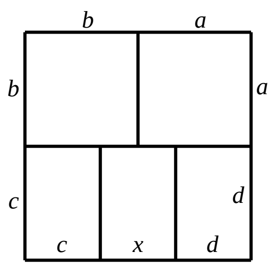
Останатите случаи кога се конструирани три квадрати од кои два имаат еднакви страни и сите три страни се различни се разгледуваат и дискутираат аналогно како во претходните случаи. Направи го тоа сам и увери се!

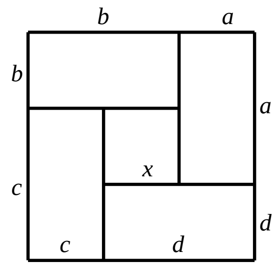
Конечно, најмалиот природен број со бараното својство е $n=6$.

16. Докажи дека за секој природен број n, $n \geq 6$, квадрат може да се раздели на n помали квадрати (така што плоштината на квадратот е збир од плоштините на помалите квадрати), но не може да се раздели на 5 помали квадрати.

Решение. Можеме да претпоставиме дека квадратот Q има должина на страна







1. Ако $k \geq 2$, тогаш лентите со ширина $\frac{1}{k}$ до две соседни страни на квадратот можеме да ги поделиме на $2k-1$ квадрати со страна $\frac{1}{k}$, како на цртежот. Остатокот од површината на Q е пак квадрат (означен на цртежот со Q_0). Со ова покажавме дека квадратот може да се подели на $2k$ ($k \geq 2$) квадрати.

Понатаму, ако квадратот Q_0 го поделиме на 4 еднакви квадрати, тогаш тие заедно со квадратите со страна $\frac{1}{k}$ ќе дадат поделба на квадратот Q на $2k+3$ квадрати ($k \geq 2$). Со ова покажавме дека Q може да се подели и на произволен непарен број (≥ 7) квадрати.

Сега да претпоставиме дека квадратот Q може да се подели на 5 помали квадрати. Јасно е дека овие квадрати мора да имаат страна паралелна со страните на квадратот. Можни се следниве два случаи:

1) Ниту еден од квадратите да не биде целосно во внатрешноста на Q како што е прикажано на цртежот. Ова не е возможно бидејќи

$$a+b=b+c=d+a=c+d+x,$$

повлекува дека страната на средниот квадрат е $x=0$.

2) Некој од квадратите (а можно е само еден) да биде исцело во внатрешноста на квадратот Q (како на цртежот) што повторно не е можно бидејќи

$$a+b=b+c=c+d=d+a$$

повлекува дека $a=c$ и $b=d$, па понатаму бидејќи плоштината на квадратот Q е еднаква на збирот од плоштините на помалите квадраати имаме

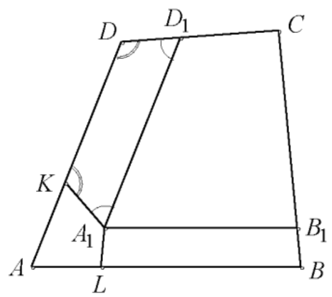
$$(a+b)^2=a^2+b^2+a^2+b^2+x^2,$$

т.е. $x^2=-(a-b)^2$, од каде $x=0$.

17. Нека $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 4$. Докажи дека секој тетивен четириаголник може да се подели на n тетивни четириаголници.

Решение. Нека A е најмалиот агол на четириаголникот, а останатите темиња се B, C и D. Низ точката A, во внатрешноста на аголот $\angle DAB$ повлекуваме полуправа. На таа полуправа постои точка A_1 таква што правите низ точката A_1 паралелни со страните AB и AD ги сечат страните BC и CD соодветно. Да ги означиме пресечните точки со B_1 и D_1. Четириаголникот $A_1B_1CD_1$ е тетивен, бидејќи има агли еднакви со соодветните агли на четириаголникот $ABCD$. Понатаму, бидејќи $\angle DAB$ е најмалиот агол на четириаголникот $ABCD$ тогаш $\measuredangle DAA_1<\measuredangle D_1DA$. На страната AD постои точка K, таква што $\measuredangle DKA_1=\measuredangle D_1DK$. Слично, на страната AB постои точка L, таква што $\measuredangle A_1LB=\measuredangle LBB_1$. Четириаголникот ALA_1K е тетивен, бидејќи

$$\begin{aligned}\measuredangle ALA_1+\measuredangle A_1KA&=(\pi-\measuredangle ABC)+(\pi-\measuredangle CDA)\\&=2\pi-(\measuredangle ABC+\measuredangle CDA)=\pi.\end{aligned}$$



Четириаголникот A_1D_1DK е исто така тетивен, затоа што е рамнокрак трапез (како и LBB_1A_1). Конечно, рамнокракиот трапез LBB_1A_1 го делиме на $n-3$ рамнокраки трапези од кои секој е теивен.

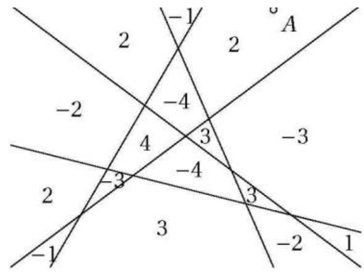
18. Рамнината е поделена на области со конечен број прави, такви што не постојат три прави кои минуваат низ иста точка. За две области ќе велиме дека се соседни ако нивната заедничка граница е отсечка, полуправа или права. Во секоја област е запишан цел број така што се исполенти следниве услови:

1) производот на броевите во соседните области е помал од нивниот збир,
2) збирот на сите броеви од секоја страна на произволна права е еднаков на нула.

Докажи дека тоа е можно ако и само ако сите прави не се паралелни.

Решение. Ако сите прави се паралелни, тогаш од условот 2) следува дека сите броеви мора да бидат еднакви на нула, но тогаш не важи условот 1), па значи не е можно да се запишат цели броеви така што се исполенти условите 1) и 2).

Сега ќе го конструираме бараното запишување на броевите при кое се исполнети условите 1) и 2). На почетокот во рамнината да фиксираме точка A која не лежи ниту на една од дадените прави. За произволна област R земаме точка B внатре во областа. Јасно, бројот k_R на прави кои ја сечат отсечката AB не зависи од изборот на точката B. Освен тоа, за секои две соседни области R и S важи $k_R = k_S \pm 1$.



На областа R и го доделуваме бројот $u_R(-1)^{k_R}$, каде u_R е бројот на аглите на областа R (на пример, види цртеж). Ќе докажеме дека ова доделување на целите броеви ги задоволува условите на задачата.

1) По конструкција, броевите a и b доделени на две соседни области се со различен знак, да кажеме $a < 0 < b$, па затоа $ab \le a < a + b$.
2) Во секој агол на секоја област R го запишуваме бројот $(-1)^{k_R}$. Збирот на броевите во областите од една страна на права p е еднаков на збирот на броевите во сите агли на таа страна на правата. Бидејќи во секоја пресечна точка збирот на броевите во аглите (имаме 2 или 4 броја) е еднаков на 0, добиваме дека вкупниот збир исто така е еднаков на 0.

19. Дадени се $n \ge 5$ рамнини, такви што било кои три имаат точно една заедничка точка и не постојат четири рамнини кои минуваат низ една точка. Докажи дека меѓу деловите на кои просторот е разделен со дадените рамнини има барем $\frac{2n-3}{4}$ тетраедри.

Решение. Секој дел од просторот заграден со рамнини од дадените n рамнини а кој не е пресечен со рамнина од преостанатите рамнини го нарекуваме клетка на поделбата. Според условите од задачата било кои четири рамнини од дадените n рамнини определуваат единствен тетраедар. Бројот на тетраедри определени со овие n рамнини е еднаков на $\binom{n}{4}$. Ако секој од овие тетредри е делбена клетка на просторот, тогаш задачата е решена, бидејќи за $n \ge 5$ важи $\binom{n}{4} > \frac{2n}{4}$. Меѓутоа може да се случи некој од овие тетраедри определен со четири рамнини, петта рамнина да го дели на два дела при што и двата дела да не се тетредри, а да се делбени клетки на простор (нацртај цртеж).

Единствената заедничка точка на три рамнини избрани од дадените n рамнини ќе ја нарекуваме врв. За секоја рамнина α од дадените n рамнини ќе го разгледаме врвот A кој е најмало растојание до неа. Таквиот врв е определен со три рамнини кои заедно со дадена рамнина α определуваат тетраедар $ABCD$ ($B, C, D \in \alpha$).

Ако некоја рамнина β различна од дадените четири рамнини го сече тетраедарот $ABCD$, тогаш тоа сече некое од ребрата AB, AC, AD со што би добиле врв S кој е поблиску до α од врвот A. Тоа е во спротивност со изборот на точката A. Значи, таква рамнина β не постои. Според тоа $ABCD$ е делбена клетка.

Рамнината α го дели просторот на два полупростори. Ако точката A припаѓа на еден од полупросторите, тогаш постои точка W која е врв и е на најмало растојание од сите врвови кои се наоѓаат во полупросторот во кој не лежи A. Трите рамнини кои го определуваат W заедно со рамнината α определуваат тетраедар $WXYZ$ кој не го сече ниту една од преостанатите рамнини. Според тоа и тој тетраедар е делбена клетка.

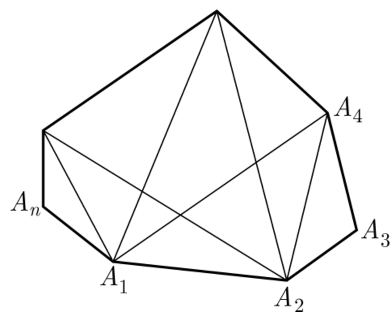
Ако се случи во некој од полупросторите определен со рамнина од дадените n -рамнини да нема врв, тогаш таа рамнина ќе ја нарекуваме крајна.

Не е можно да има повеќе од три крајни рамнини. Ако има четири крајни рамнини, тогаш тие определуваат единствен тетраедар кој ќе го наречеме “краен”. Било која друга рамнина од n -те рамнини различна од четирите крајни рамнини, не може сите шест ребра на “крајниот” тетраедар да ги пресече во точки кои ќе лежат на иста страна од крајните рамнини како и најблискиот врв до неа. Според тоа, барем една од крајните рамнини нема да е крајна. Значи, може да има најмногу три крајни рамнини.

Значи, секоја рамнина генерира два тетраедри кои се клетки на просторот, освен трите крајни рамнини кои генерираат по еден . Секој од нив го броиме по четири пати (за секоја рамнина која го определува по еднаш). Според тоа, бројот на тетраедри е еднаков на $\frac{2n-3}{4}$.

20. Најди правило за пресметување на бројот $P(n)$ на начините, со кои конвексен $n-$аголник може да биде поделен на триаголници со негови дијагонали кои не се сечат.

Решение. За триаголник овој број очигледно е еднаков на еден, т.е. $P(3)=1$.



Нека претпоставиме дека сме ги определиле броевите $P(k)$, $k<n$. За да го определиме бројот $P(n)$ ќе го разгледаме конвексниот $n-$аголник $A_1A_2...A_n$. При секоја негова поделба на триаголници страната A_1A_2 ќе биде страна на еден од добиените триаголници, чие трето теме може да се совпадне со секоја од точките $A_3, A_4, ..., A_n$. Притоа, бројот на начините на поделба на $n-$аголникот, при кои третото теме на триаголникот ќе се совпадне со точката A_3 е еднаков на бројот на начините на поделбата на $(n-1)-$аголникот $A_1A_3A_4...A_n$, т.е. тој е еднаков на $P(n-1)$. Бројот на начините на поделба, при кои третото теме ќе се совпадне со точката A_4 е еднаков на бројот на начините $P(n-2)$ на поделба на $(n-2)-$аголникот $A_1A_4...A_n$ помножен со бројот на поделба $P(3)$ на триаголникот $A_2A_3A_4$ (зошто?). Бројот на начините на поделба, при кои третото теме се совпаѓа со точката A_5 е еднаков на

$P(n-3)P(4)$, бидејќи секоја поделба на $(n-3)-$аголникот $A_1A_5...A_n$ се комбинира со секоја поделба на четириаголникот $A_2A_3A_4A_5$. Продолжувајќи ја постапката ја наоѓаме релацијата:

$$P(n)=P(n-1)+P(n-2)P(3)+P(n-3)P(4)+...+P(4)P(n-3)+P(3)P(n-2)+P(n-1) \quad (3)$$

Ако ја искористиме релацијата (3) последователно наоѓаме:

$$P(4)=P(3)+P(3)=2,$$

$$P(5)=P(4)+P(3)P(3)+P(4)=5,$$

$$P(6)=P(5)+P(4)P(3)+P(3)P(4)+P(5)=14,$$

$$P(7)=P(6)+P(5)P(3)+P(4)P(4)+P(3)P(5)+P(6)=42,$$

$$P(8)=P(7)+P(6)P(3)+P(5)P(4)+P(4)P(5)+P(3)P(6)+P(7)=132 \quad \text{итн.}$$

21. а) На колку делови n точки ја делат правата.

б) На колку делови ја делата рамнината n прави такви, што секои две од нив се сечат и никои три немаат заедничка точка (прави во општа положба)

в) На колку делови го делат просторот n рамнини такви, што секои три размнини се сечат и никои четири рамнини немаат заедничка точка (рамнини во општа положба).

Решение. а) Ако со $F_1(n)$ го означиме бараниот број, тогаш очигледно $F_1(n)=n+1$.

б) Една права ја дели рамнината на два дела.

Нека претпоставиме,дека е познат бројот $F_2(n)$ на деловите, на кои n прави во општа положба ја делат рамнината и нека се дадени $n+1$ права во општа положба. Првите n прави ја делат рамнината на $F_2(n)$ делови, а според условот $(n+1)-$та права p ги сече останатите n прави во n различни точки. Според задачата под а) овие n точки ја делат правата p на $F_1(n)=n+1$ делови. Според тоа, правата p сече $F_1(n)=n+1$ од веќе добиените делови на кои првите n прави ја делат рамнината и истите ги удвојува, што значи дека таа на веќе добиените $F_2(n)$ додава нови $F_1(n)=n+1$ делови. Значи, за бројот на деловите на кој $n+1$ права во општа положба ја делат рамнината важи

$$F_2(n+1)=F_2(n)+F_1(n)=F_2(n)+(n+1)\,. \quad (1)$$

Ако во (1), наместо n последователно ставиме $n-1, n-2, n-3, ..., 2, 1$ добиваме

$$F_2(n)=F_2(n-1)+n,$$
$$F_2(n-1)=F_2(n-2)+n-1,$$
$$F_2(n-2)=F_2(n-3)+n-2,$$
$$\text{...}$$
$$F_2(3)=F_2(2)+3,$$
$$F_2(2)=F_2(1)+2.$$

Ако ги собереме последните равенства и земеме предвид дека $F_2(1)=2$ наоѓаме

$$F_2(n)=F_2(1)+[n+(n-1)+...+3+2]=1+[n+(n-1)+(n-2)+...+2+1]=1+\frac{n(n+1)}{2}\,.$$

в) Една рамнина го дели просторот на на два дела.

Нека претпоставиме,дека е познат бројот $F_3(n)$ на деловите, на кои n рамнини во општа положба го делат просторот и нека се дадени $n+1$ рамнини во општа положба. Првите n рамнини го делат просторот на $F_3(n)$ делови, а според условот $(n+1)-$та рамнина π ги сече останатите n рамнини во n различни прави, кои се наоѓаат во општа положба (зошто?). Според задачата под б) овие n прави ја делат рамнината π на $F_2(n)=1+\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n^2+n+2}{2}$ делови. Според тоа, рамнината π сече $F_2(n)=\frac{n^2+n+2}{2}$ од веќе добиените делови на кои првите n рамнини го делат просторот и истите ги удвојува, што значи дека таа на веќе добиените $F_3(n)$ додава нови $F_2(n)=\frac{n^2+n+2}{2}$ делови. Значи, за бројот на деловите на кој $n+1$ рамнина во општа положба го делат просторот важи

$$F_3(n+1)=F_3(n)+F_2(n)=F_3(n)+\frac{n^2+n+2}{2}. \qquad (2)$$

Ако во равенството (2), наместо n последователно ставиме $n-1, n-2, n-3, ..., 2, 1$ добиваме

$$F_3(n)=F_3(n-1)+\frac{(n-1)^2+(n-1)+2}{2},$$

$$F_3(n-1)=F_3(n-2)+\frac{(n-2)^2+(n-2)+2}{2},$$

....

$$F_3(3)=F_3(2)+\frac{2^2+2+2}{2}$$

$$F_3(2)=F_3(1)+\frac{1^2+1+2}{2}.$$

Ако ги собереме последните равенства и земеме предвид дека $F_3(1)=2$ наоѓаме

$$F_3(n)=F_3(1)+\tfrac{1}{2}[(n-1)^2+...+2^2+1^2]+\tfrac{1}{2}[(n-1)+(n-2)+...+2+1]+\tfrac{1}{2}[\underbrace{2+2+...+2+2}_{(n-1)-\text{на двојка}}]$$

$$=2+\frac{n(n-1)(2n-1)}{12}+\frac{(n-1)n}{2}+(n-1),$$

од каде после средувањето наоѓаме

$$F_3(n)=\frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}.$$

22. Најди го бројот на деловите на кои е поделена рамнината од n кружници кои лежат на неа и такви, што секои две од нив се сечат меѓу себе.

Решение. Нека е даден бројот $\Phi_2(n)$ на делови на кои е поделена рамнината со n кружници кои лежат на неа и такви, што секои две од нив се сечат меѓу себе. Бидејќи n кружници ја сечат $(n+1)-$та кружница во n парови точки и тие истата ја делат на $\Phi_1(n)=2n$ (задача 6), добиваме дека $(n+1)-$та кружница сече $\Phi_1(n)=2n$ од $\Phi_2(n)$ деловите на кои е поделена рамнината со n кружници кои лежат на неа и такви, што секои две од нив се сечат меѓу себе. Оттука го добиваме равенството

$$\Phi_2(n+1)=\Phi_2(n)+\Phi_1(n)=\Phi_2(n)+2n. \qquad (3)$$

Ако во равенството (3), наместо n последователно ставиме $n-1, n-2, n-3, ..., 2, 1$, лесно добиваме дека наоѓаме $\Phi_2(n) = n^2 - n + 2$.

23. На колку делови го делат просторот n сфери такви, што секои две се сечат меѓу себе.

Решение. Бидејќи n сфери ја сечат $(n+1)-$та сфера во n кружници и како тие нејзината површина ја делат на $\Phi_2(n) = n^2 - n + 2$ делови (докажи!), добиваме дека ако n сфери од кои секои две се сечат меѓу себе го делат просторот на $\Phi_2(n)$ делови, тогаш $n+1$ сфера просторот го делат на

$$\Phi_3(n+1) = \Phi_3(n) + \Phi_2(n) = \Phi_3(n) + (n^2 - n + 2)$$

делови. Сега постапувајќи аналогно како во претходните задачи наоѓаме

$$\Phi_3(n+1) = \frac{n(n^2-3n+8)}{3}.$$

24. Дадени се n различни точки на кружницата k. Било кои три отсечки со крајни точки во дадените не се сечат во една точка, која е внатрешна точка за кружницата. На колку области отсечките со крајни точки во дадените го делат кругот?

Решение. Со a_n ќе го означиме бројот на дисјунктни области на кој е поделен кругот кога се дадени n точки.

Нека бројот на точки е $n+1$, односно на множеството од n точки додаваме уште една точка. Со додавање на една отсечка која поврзува една од n-те стари точки со додадената точка се добиваат нови $(m+1)$-на делбена област. При тоа m е бројот пресеци на дадените отсечки со додадената отсечка (бројот на пресечни точки е m, а бројот на отсечки на кои е разделена додадената отсечка е еднаков на $m+1$). Секоја од тие ($m+1$)-на отсечка дели постоечка област на два дела.

Останува да се пресмета бројот на пресеци на дадените отсечки со една нова делбена отсечка. Додадената делбена отсечка го дели множеството на точки на два дела и тоа $(k-1)$-на точка што се наоѓаат на една страна од делбената отсечка и $(n-k)$-точки кои се наоѓаат од другата страна од делбената отсечка. Според тоа, новата делбена отсечка сечи $(k-1)(n-k)$ отсечки при што се добиваат $[(k-1)(n-k)+1]$-на нова област. При тоа k има вредности $k = 1, 2, 3, ..., n$. Според тоа

$$a_{n+1} = a_n + \sum_{k=1}^{n} [(k-1)(n-k)+1].$$

Ако искористиме

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},$$

добиваме

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= a_n + \sum_{k=1}^{n} [-k^2 + n(k-1) + 1 - n] \\ &= a_n - \sum_{k=1}^{n} k^2 + n\sum_{k=1}^{n}(k-1) + n(1-n) . \\ &= a_n + \tfrac{1}{6}(n^3 - 3n^2 + 8n) \end{aligned}$$

Со повеќекратна примена на ова равенство добиваме

$$\begin{aligned} a_n &= a_1 + \tfrac{1}{6}\left(\sum_{k=1}^{n-1} k^3 - 3\sum_{k=1}^{n-1} k^2 + 8\sum_{k=1}^{n-1} k\right) \\ &= 1 + \tfrac{1}{6}\left(\tfrac{n^2(n-1)^2}{4} - 3\tfrac{(n-1)n(2n-1)}{6} + 8\tfrac{(n-1)n}{2}\right) \\ &= \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24). \end{aligned}$$

Формулата $a_n = \frac{1}{24}(n^4 - 6n^3 + 23n^2 - 18n + 24)$ е точна и за $n = 0$ и $n = 1$ односно е точна за секој $n \in \mathbb{N}_0$.

25. Во конвексен $n-$аголник се повлечени неколку дијагонали. Една од повлечените дијагоналите се нарекува *добра*, ако во внатрешна точка сече точно една од другите повлечени дијагонали. Определи го најголемиот можен број на добри дијагонали.

Решение. Ќе го искористиме познатото

Тврдење. Во конвексен $n-$голник може да се повлечат најмногу $n-3$ дијагонали кои немаат заеднички внатрешни точки.

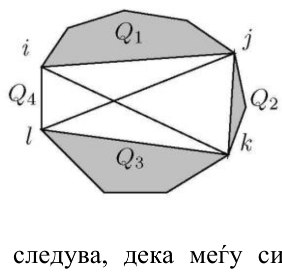
Прво со индукција по n ќе докажеме дека бројот на добрите дијагонали е помал или еднаков на $n-2$, ако n е парен број, и е помал или еднаков на $n-3$ ако n е непарен број. Отсечката ќе ја сметаме за $2-$аголнк без дијагонали. Јасно, за $n = 2,3$ тврдењето е точно. Нека $n \geq 4$ и нека многуаголникот е $P := A_1A_2...A_n$.

Ако никои две добри дијагонали не се сечат, од тврдењето следува дека нивниот број е помал или еднаков на 3. Нека A_iA_k и A_jA_l, $i < j < k < l$, се две добри дијагонали кои се сечат. Тогаш секоја од тие дијагонали не се сече со другите повлечени дијагонали.

На момент да заборавиме на A_iA_k и A_jA_l. Секоја од останатите повлечени дијагонали d е дијагонала или страна точно на еден од многуаголниците

$Q_1 := A_i...A_j$, $Q_2 := A_j...A_k$,

$Q_3 := A_k...A_l$ или $Q_4 := A_l...A_nA_1...A_i$.



Притоа, ако d е страна на некој од нив, тогаш d не се сече со други дијагонали, па значи не е добра.

Нека n е парен. Од индуктивната претпоставка следува, дека меѓу сите дијагонали, кои припаѓаат на некој од многуаголниците Q_s, $s = 1,2,3,4$ бројот на добрите дијагонали е помал или еднаков на бројот на темињата на Q_s намален за 2. Затоа, заедничкиот број на добри дијагонали на P е помал или еднаков на

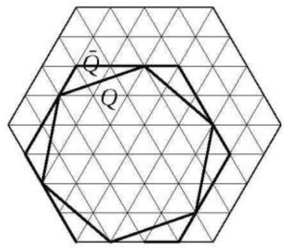
$$2+(j-i-1)+(k-j-1)+(l-k-1)+(n-l+i-1)=n-2. \quad (1)$$

Кога n е непарен, вкупниот број на темиња на многуаголниците Q_s, $s=1,2,3,4$ е еднаков на непарниот број $n+4$. Тоа значи дека барем еден од нив има непарен број темиња. Тогаш, соодветниот собирок во збирот (1) се намалува за 1 и вкупниот број на добри дијагонали е еднаков на $n-3$.

Останува на читателот да најде примери кои ја покажуваат точноста на оценката.

26. Нека n е природен број. Правилен шестаголник со должина на страна еднаква на n е поделен со прави, кои се паралелни на неговите страни, на рамнострани триаголници чии страни се со должина 1. Определи го вкупниот број правилни шестаголници чии темиња воедно се и темиња на делбените рамнострани триаголници.

Решение. Нека P е дадениот шестаголник. Темињата на разгледуваните рамнострани триаголници ќе ги нарекуваме *јазли*. За секој шестаголник Q со темиња во јазлите го разгледуваме шестаголникот $\overline{Q}$ опишан околу Q со страни паралелни на страните на P (види цртеж десно). Темињата на $\overline{Q}$ се исто така јазли.



За $0 \le m < n$ шестаголникот $\overline{Q}$ со должина на страна $n-m$ може да се избере на

$$3m^2+3m+1=(m+1)^3-m^3$$

начини. За дадениот шестаголник $\overline{Q}$, шестаголникот Q може да се избере на $n-m$ начини. Според тоа, вкупниот број можни шестаголници Q е еднаков на

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n-1}(n-m)((m+1)^3-m^3) &= \sum_{m=0}^{n-1}(n-m)(m+1)^3-\sum_{m=0}^{n-1}(n-m)m^3\\ &= \sum_{m=1}^{n}(n-m+1)m^3-\sum_{m=0}^{n-1}(n-m)m^3\\ &= \sum_{m=1}^{n}m^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

6. БИНОМНИ КОЕФИЦИЕНТИ И ИДЕНТИТЕТИ

1. Најди го членот кој не го содржи x во развојот (според биномната формула) на $(2x+\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x})^n$ ако збирот на сите биномни коефициенти во тој развој е 256.

Решение. Збирот на сите биномни коефициенти е

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n,$$

па $2^n=256=2^8$. Според тоа $n=8$. Натаму, $k+1-$ от член во развојот е

$$\binom{8}{k}(2x)^{8-k}(x^{\frac{2}{3}-1})^k=\binom{8}{k}2^{8-k}x^{8-k-\frac{k}{3}},$$

а тој не го содржи x ако и само ако $8-k-\frac{k}{3}=0$. Оттука добиваме дека $k=6$. Значи, бараниот член е седмиот и тој е еднаков на $\binom{8}{6}2^{8-2}=112$.

2. Колку рационални членови има во развојот на биномот $(\sqrt{3}+\sqrt[3]{2})^{100}$?

Решение. Општиот член во развојот на биномот е

$$T_{k+1}=\binom{100}{k}3^{\frac{100-k}{2}}2^{\frac{k}{3}},\ k\in\{0,1,...,100\}.$$

За да биде членот рационален треба $\frac{100-k}{2}$ и $\frac{k}{3}$ да се цели броеви. Бидејќи $\frac{100-k}{2}$ е цел број ако 2 е делител на k, а $\frac{k}{3}$ е цел број ако 3 е делител на k добиваме дека k треба да е цел број делив со 6. Значи рационални членови има колку што има цели броеви деливи со 6 од 0 до 100, а нив ги има вкупно $[\frac{100}{6}]+1=17$.

3. Дадени се три позитивни броеви a,b,c такви што за секој $k\in\mathbb{N}$ од должините a^k,b^k,c^k може да се формира триаголник. Докажи дека меѓу броевите a,b,c има барем два еднакви.

Решение. Нека $a\neq b\neq c\neq a$ и нека $a<b<c$ (не се губи од општоста ако се претпостави тоа). Од условот a^k,b^k,c^k се должини на страните на триаголник следува

$$c^k<a^k+b^k,\ k=1,2,3. \tag{1}$$

Но

$$c^k=(b+(c-b))^k=b^k+kb^{k-1}(c-b)+\underbrace{\binom{k}{2}b^{k-2}(c-b)^2+...+(c-b)^k}_{\geq 0}\geq b^k+kb^{k-1}(c-b)$$

Последново неравенство важи за секој $k\in\mathbb{N}$. Постои $k_0\in\mathbb{N}$ така што $k_0(c-b)>b$. За k_0 важи

$$c^{k_0}\geq b^{k_0}+k_0b^{k_0-1}(c-b)>b^{k_0}+b^{k_0-1}(k_0(c-b))>b^{k_0}+b^{k_0}>b^{k_0}+a^{k_0},$$

што е во контрадикција со (1). Значи меѓу броевите a,b,c има барем два еднакви.

4. Пресметај го збирот

$$S=1\binom{n}{1}^2+2\binom{n}{2}^2+...+n\binom{n}{n}^2.$$

Решение. Да забележиме дека од особините на биномните коефициенти е исполнето равенството

$$\binom{n}{i}=\binom{n}{n-i}. \tag{1}$$

Според тоа,

$$n\binom{n}{i}^2=(i+n-i)\binom{n}{i}^2=i\binom{n}{i}^2+(n-i)\binom{n}{i}^2=i\binom{n}{i}^2+(n-i)\binom{n}{n-i}^2 \tag{2}$$

Од последното равенство добиваме

$$2S = 2\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} [i\binom{n}{i}^2 + (n-i)\binom{n}{n-i}^2] = \sum_{i=0}^{n} n\binom{n}{i}^2 = n\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2 . \qquad (3)$$

Ќе го искористиме равенството

$$(1+x)^n (1+x)^n = (1+x)^{2n} . \qquad (4)$$

Доволно е да го пресметаме корфициентот пред x^n на левата страна од равенството. Да забележиме дека x^n се добива кога ги помножиме x^i со x^{n-i}, при што првиот множител е од првиот збир од производот $(1+x)^n(1+x)^n$ а вториот множител е од вториот збир. Заради равенството (1) бараниот коеифциент пред x^n е $\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$.

Коефициентот пред x^n во десната страна на (4) е $\binom{2n}{n}$. Според теоремите за еднаквост на полиноми имаме

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n} .$$

Сега е јасно дека $S = \frac{n}{2}\binom{2n}{n}$.

5. Нека $r,s,t \in \mathbb{N}$ и $t \geq r+s$. Докажи дека

$$\sum_{k=0}^{s} \frac{\binom{s}{k}}{\binom{t}{r+k}} = \frac{t+1}{(t+1-s)\binom{t-s}{r}} .$$

Решение. Да означиме $F(r,s,t) = \sum_{k=0}^{s} \frac{\binom{s}{k}}{\binom{t}{r+k}}$. За $m,n \in \mathbb{N}$ и $m<n$ важи $\binom{n}{m} = \binom{n-1}{m-1} + \binom{n-1}{m}$. Користејќи го ова добиваме

$$\begin{aligned} F(r,s,t) &= \frac{\binom{s-1}{0}}{\binom{t}{r}} + \sum_{k=0}^{s} \frac{\binom{s-1}{k-1}+\binom{s-1}{k}}{\binom{t}{r+k}} + \frac{\binom{s-1}{s-1}}{\binom{t}{r+s}} = \sum_{k=0}^{s-1} \frac{\binom{s-1}{k}}{\binom{t}{r+k}} + \sum_{k=0}^{s} \frac{\binom{s-1}{k}}{\binom{t}{r+1+k}} \\ &= F(r,s-1,t) + F(r+1,s+1,t) \end{aligned}$$

за $r,s,t \in \mathbb{N}$, $s \neq 1$, $r+s \leq t$.

Бараното равенство ќе го докажеме со математичка индукција по s . За $s=1$ имаме

$$\begin{aligned} F(r,1,t) &= \frac{\binom{1}{0}}{\binom{t}{r}} + \frac{\binom{1}{0}}{\binom{t}{r+1}} = \frac{r!(t-r)!}{t!} + \frac{(r+1)!(t-r-1)!}{r!} \\ &= \frac{r!(t-r-1)!}{t!}(t-r+r-1) = \frac{t+1}{t\binom{t-1}{r}} = \frac{t+1}{(t+1-1)\binom{t-1}{r}} , \end{aligned}$$

за секои $r,t \in \mathbb{N}$ за кои $r+1 \leq t$.

Да претпоставиме дека тврдењето е точно за $s-1$ и произволни $r,t \in \mathbb{N}$ за кои $r+s \leq t$. Тогаш

$$F(r,s-1,t) = \frac{t+1}{(t+1-s+1)\binom{t-s+1}{r}} \text{ и } F(r+1,s-1,t) = \frac{t+1}{(t+1-s+1)\binom{t-s+1}{r+1}} ,$$

па добиваме

$$F(r,s,t)=F(r,s-1,t)+F(r+1,s-1,t)=\frac{t+1}{(t+2-s)\frac{(t-s+1)!}{r!(t+1-r-s)!}}+\frac{t+1}{(t+2-s)\frac{(t-s+1)!}{(r+1)!(t-r-s)!}}$$

$$=\frac{(t+1)r!(t-r-s)!}{(t+2-s)!}(t+1-r-s+1)=\frac{t+1}{(t+1-s)\frac{(t-s)!}{r!(t-s-r)!}}=\frac{t+1}{(t+1-s)\binom{t-s}{r}}.$$

6. Во една кутија се наоѓаат n топчиња кои се еднакви меѓу себе по големина, тежина и боја. На колку различни начини може да се изберат (извлечат) парен број топчиња?

Решение. Бројот на можности да се изберат едно, две, три, четири, … топчиња е

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n},$$

додека бројот на можности да се изберат парен број на топчиња е

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+...+\binom{n}{2k}+...,$$

збир кој треба да го пресметаме. Од друга страна

$$2^n=(1+1)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n} \qquad (1)$$

од каде добиваме

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}=2^n-1.$$

Исто така

$$0=(1-1)^n=\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-...+(-1)^{n-1}\binom{n}{n}, \qquad (2)$$

па според тоа

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+...=\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{4}+....$$

Ако сега ги собереме равенствата (1) и (2) добиваме

$$2^n=2[\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+...].$$

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+...=2^{n-1}$$

$$\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+...+\binom{n}{2k}+...=2^{n-1}-1,$$

што требаше да се определи.

7. Докажи ги идентитетите:

а) $\binom{n}{n}+\binom{n+1}{n}+\binom{n+2}{n}+...+\binom{n+k}{n}=\binom{n+k+1}{n}$;

б) $\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+...+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$;

в) $\sum\limits_{i=k-3}^{n-3}\binom{i}{k-3}\binom{n-i-1}{2}=\binom{n}{k}$;

г) $\sum\limits_{i=m}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{m}=\binom{n}{m}2^{n-m}$

Решение. а) Искористи го принципот на математичка индукција по k.

б) Збирот ќе го означиме со S. Да забележиме дека

$$\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k} \text{ и } 2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{n}.$$

Јасно,

$$\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+3\binom{n}{2}+4\binom{n}{3}+\ldots+(n+1)\binom{n}{n}=S+2^n \tag{1}$$

Од

$$\binom{n}{0}+2\binom{n}{1}+3\binom{n}{2}+4\binom{n}{3}+\ldots+(n+1)\binom{n}{n}=\binom{n}{n}+2\binom{n}{n-1}+3\binom{n}{n-2}+4\binom{n}{n-3}+\ldots+(n+1)\binom{n}{0}$$

Следува дека

$$\binom{n}{n}+2\binom{n}{n-1}+3\binom{n}{n-2}+4\binom{n}{n-3}+\ldots+(n+1)\binom{n}{0}=S+2^n \tag{2}$$

Со собирање на (1) и (2) имаме

$$(n+2)[\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{n}]=2(S+2^n)$$

Односно

$$(n+2)\cdot 2^n=2S+2^{n+1} \tag{3}$$

Со средување на (3) се добива

$$S=n\cdot 2^{n-1}.$$

в) Да забележиме дека бројот на „растечки“ зборови $c_1c_2...c_k$ каде што

$$c_1<c_2<\ldots<c_k \text{ и } c_j\in\{1,2,\ldots,n\},\ 1\le j\le k\ ,$$

е еднаков на $\binom{n}{k}$. Јасно, $c_{k-2}\in\{k-2,k-1,\ldots,n-2\}$. Да го означиме со A_q множеството од "растечки" зборови каде што $c_{k-2}=q$. Тогаш

$$|\cup_{q=k-2}^{n-2}A_q|=\sum_{q=k-2}^{q=n-2}|A_q|=\binom{n}{k} \tag{*}$$

Бидејќи бројот на „растечките“ зборови $c_1c_2...c_{k-3}$ е $\binom{q-1}{k-3}$, а бројот на „растечките“ зборови $c_{n-1}c_n$ е $\binom{n-q}{2}$, следува дека

$$|A_q|=\binom{q-1}{k-3}\binom{n-q}{2} \tag{**}$$

Од (*) и (**) следува бараниот идентитет.

г) Од $\binom{n}{i}\binom{i}{m}=\frac{n!}{m!}\cdot\frac{1}{(i-m)!(n-1)!}=\binom{n}{m}\binom{n-m}{n-i}$ следува

$$\sum_{i=m}^{n}\binom{n}{i}\binom{i}{m}=\binom{n}{m}2^{n-m}=\sum_{i=m}^{n}\binom{n}{m}\binom{n-m}{n-i}=\binom{n}{m}\sum_{i=m}^{n}\binom{n-m}{n-i}=\binom{n}{m}2^{n-m}\ .$$

8. Нека n и k се ненегативни цели броеви. Најди го коефициентот пред x^k во полиномот $(1+x+x^2+\ldots+x^n)^2$.

Решение. Јасно е дека ако $k>2n$ коефициентот пред x^k е нула. Затоа нека $k\le 2n$. Да го означиме со $a_{k,n}$ коефициентот пред x^k. Со математичка индукција по n ќе докажеме дека $a_{k,n}=n+1-|n-k|$. За $n\in\{0,1\}$ тврдењето важи. Да претпоставиме дека тврдењето важи за $n\in\mathbb{N}$ и $k\le 2n$. Тогаш

$$(1+x+\ldots+x^n+x^{n+1})^2=(1+x^2+\ldots+x^n)^2+2(1+x^2+\ldots+x^n)x^{n+1}+x^{2n+2}$$

$$=\sum_{k=0}^{2n}a_{k,n}x^k+2(x^{n+1}+\ldots+x^{2n+1})+x^{2n+2}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n}(n+1-|n-k|)x^k + \sum_{k=n+1}^{2n}(n+1-|n-k|+2)x^k + 2x^{2n+1} + x^{2n+2} \\
&= \sum_{k=0}^{2n}(n+1-n+k)x^k + \sum_{k=n+1}^{2n}(2n-k+3)x^k + 2x^{2n+1} + x^{2n+2} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}(n+2-|n+1-k|)x^k + \sum_{k=n+2}^{2n+2}(n+2-|n+1-k|)x^k \\
&= \sum_{k=0}^{2n+2}(n+1+1-|n+1-k|)x^k
\end{aligned}
$$

од каде $a_{k,n+1} = n+1+1-|n+1-k|$, што требаше да се докаже.

Конечно,

$$
a_{k,n} = \begin{cases} a_{k,n} = n+1-|n-k|, \ k \le 2n \\ 0, \ k > 2n \end{cases}.
$$

7. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

1. Четири цели броеви се запишани во четири различни точки на една кружница. За еден број, негов соседен е бројот што е прв до него во насока обратна од насоката на вртење на стрелките на часовникот. Во еден чекор секој од броевите се заменува со разликата меѓу него и неговиот соседен број. Дали по 4 чекори може да се добијат четири броеви a,b,c и d, такви што броевите $|bc-ad|$, $|ac-bd|$ и $|ab-cd|$ се прости?

Решение. Нека на почетокот во четирите точки на кружницата се запишани броевите x,y,z,u, редоследно во насока обратна од насоката на вртење на стрелките на часовникот. Тогаш во првите четири чекори на кружницата ќе бидат запишани броевите:

x	y	z	u	
$x-y$	$y-z$	$z-u$	$u-x$	(1)
$x-2y+z$	$y-2z+u$	$z-2u+x$	$u-2x+y$	(2)
$x-3y+3z-u$	$y-3z+3u-x$	$z-3u+3x-y$	$u-3x+3y-z$	(3)
$2x-4y+6z-4u$	$2y-4z+6u-4x$	$2z-4u+6x-4y$	$2u-4x+6y-4z$	(4)

Секој запишан број во четвртиот чекор е парен број. Бидејќи разлика на два парни броја е парен број во секој нареен чекор запишаните броеви ќе бидат парни. Ако a,b,c,d се запишаните броеви во 2010 чекор, тогаш

$$a = 2n, b = 2m, c = 2k, d = 2l,$$

и

$$bc - ad = 4(mk - nl)$$
$$ac - bd = 4(nk - ml)$$
$$ab - cd = 4(mn - kl)$$

Значи, ниту еден од броевите $|bc-ad|, |ac-bd|$ и $|ab-cd|$ не е прост.

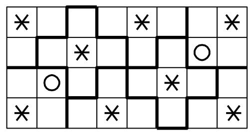
Ако пак само еден од p и q е непарен тогаш A го трга непарното купче а преостанатото парно купче го дели на две непарни итн. стратегијата е иста како во претходниот случај.

Ако двата броја p и q се непарни тогаш истата стратегија е победничка за играчот B.

2. На една конференција по логика учествувале 32 учесници. Нив ги сместиле во една сала која имала 4 реда по 8 места во ред. Некои од учесниците биле лажговци, кои секогаш лажеле, а останатите секогаш ја зборувале вистината. Лажговците формирале своја партија а и учесниците кои секогаш ја зборувале вистината формирале партија. Двајца учесници се соседи ако седат е ден до друг или ако седат еден позади друг.

Секој од нив изјавил, дека негови соседи се членови од двете партии. Кој е најмалиот број на лажговци за да таква ситуација е можна?

Решение. Ако во салата има барем еден од оние кои ја зборувале вистината, тогаш во салата има барем уште еден учесник кој ја зборува вистината и барем еден лажго. Бидејќи лажговците секогаш лажат, а до лажгото седи учесник кој секогаш ја зборува вистината, до лажгото ќе седат учесници кои ја зборуваат вистината. Уште повеќе, во овој случај, до секој лажго ќе седат учесници кои ја зборуваат вистината. Ако $* \equiv$ лажго и $\circ \equiv$ лажго, еден таков распоред е даден на цртежот (на цртежот има две варијанти, да се разгледува во еден случај само со $*$, а во друг случај со $*$ и $\circ$ заедно (решение на задачата се само *).



Ако два лажговци седат еден до друг, бидејќи лажговците секогаш лажат, целата сала ќе биде исполнета со лажговци. Со други зборови сите триесет и двајца учесници би биле лажговци.

3. Во текот на три месеци еден шахист играл најмалку една партија дневно, но притоа играл најмногу дванаесет партии неделно. Да се покаже дека можат да се најдат последователни денови во кои шахистот изиграл точно дваесет и една партија.

Решение. Да претпоставиме дека првиот ден шахистот одиграл a_1 партии, заклучно со вториот ден одиграл a_2 партии, заклучно со третиот ден одиграл a_3 партии, итн заклучно со 77-тиот ден одиграл a_{77} партии. Да ја разгледаме низата броеви

$$a_1, a_2, ..., a_{77}, a_1+21, a_2+21, ..., a_{77}+21.$$

Во ова низа имаме $2 \cdot 77 = 154$ елементи, секој од нив е поголем од $11 \cdot 12 + 21 =$ 153 (бројот a_{77} не е поголем од $11 \cdot 12 = 132$, бидејќи во 77 дена има точно 11 недели во секоја од кои шахистот играл најмногу по 12 партии). Според тоа, барем два од овие 154 броеви се еднакви меѓу себе. Но, помеѓу броевите $a_1, a_2, ..., a_{77}$ нема еднакви броеви (шахистот играл најмалку една партија дневно), што значи дека и помеѓу броевите $a_1+21, a_2+21, ..., a_{77}+21$ нема еднакви броеви.

Според тоа, постојат броеви k и l за кои е исполнето $a_k = a_l + 21$, односно $a_k - a_l = 21$, т.е. од $(l+1)$-от до k-от ден шахистот изиграл точно 21 партија.

4. Множеството природни броеви дисјунктно е разбиено на следниот начин:

$$A_1 = \{1\},\ A_2 = \{2,3\},\quad A_3 = \{4,5,6\},\quad A_4 = \{7,8,9,10\},\ldots$$

Определи го збирот на членовите од n-тото по ред множество.

Решение. За секој природен број m, точно е равенството

$$1+2+...+m = \tfrac{m(m+1)}{2}.$$

Од дефиницијата на низата множества $A_1, A_2, ..., A_k, ...$ следува дека бројот на елементи на k-тото множество A_k е $|A_k| = k$. Во унијата

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_{n-1}$$

се содржат сите природни броеви од бројот 1 до бројот

$$1+2+3+...+(n-1) = \tfrac{n(n-1)}{2}.$$

Според тоа, n-тото множество A_n се состои од наредните n природни броеви поголеми од $\frac{n(n-1)}{2}$, односно од броевите:

$$\tfrac{n(n-1)}{2}+1, \tfrac{n(n-1)}{2}+2, ..., \tfrac{n(n-1)}{2}+n.$$

Нивниот збир е еднаков на

$$\tfrac{n(n-1)}{2}+1+\tfrac{n(n-1)}{2}+2+....+\tfrac{n(n-1)}{2}+n = n\tfrac{n(n-1)}{2}+(1+2+3+...+n) = n\tfrac{n(n-1)}{2}+\tfrac{n(n+1)}{2}$$
$$= \tfrac{n}{2}[n(n-1)+n+1] = \tfrac{n}{2}(n^2+1).$$

5. Нека n е природен број и нека $P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, ..., 2\cdot 3^{n-1}, 3^n\}$. За секое подмножество X од множеството P_n со S_X да го означиме збирот на сите елементи од множеството X, при што $S_\varnothing = 0$, каде $\varnothing$ е празното множество. Нека y е реален број таков што $0 \le y \le 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Докажи, дека постои подмножество Y на множеството P_n такво што $0 \le y - S_Y < 2^n$.

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по N. Очигледно тврдењето важи за $n=1$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n-1$. Нека е даден y таков што $0 \le y \le 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Можни се следниве случаи:

1) $0 \le y \le 2\cdot 3^n - 2^{n+1}$. Од индуктивната претпоставка следува дека постои множество $Y' \subseteq P_{n-1}$ такво што $0 \le \frac{y}{2} - S_{Y'} < 2^{n-1}$. Тогаш можеме да земеме $Y = 2Y' = \{2t \mid t \in Y'\}$.

2) $2\cdot 3^n - 2^{n+1} \le y \le 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Тогаш $0 < 3^n - 2^{n+1} \le y - 3^n \le 2\cdot 3^n - 2^{n+1}$, па од индуктивната претпоставка следува дека постои множество $Y' \subseteq P_{n-1}$ такво што $0 \le \frac{y-3^n}{2} - S_{Y'} < 2^{n-1}$. Тогаш можеме да земеме $Y = 2Y' \cup \{3^n\}$.

Според тоа, тврдењето важи и за n. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој природен број.

6. Дадено е множеството $E=\{1,2,...,n\}$. Докажи дека:

а) постојат 3^n парови (A,B) од подмножества на E такви што $A\cup B=E$,

б) постојат 7^n тројки (A,B,C) од подмножества на E такви што $A\cup B\cup C=E$.

Решение. а) Нека E_k е подмножество на E со k елементи (ако $k=0$, тогаш $E_k=\varnothing$). Подмножеството B на E за кое важи $E_k\cup B=E$ може да се добие како унија на $E\setminus E_k$ со произволно подмножество на E_k. Бидејќи E_k има 2^k подмножества следува дека постојат 2^k подмножества B. Бидејќи бројот на k-елементни подмножества на E е $\binom{n}{k}$, следува дека постојат $2^k\binom{n}{k}$ начини да се формира парот (E_k,B). Значи постојат $\sum\limits_{k=0}^{n}2^k\binom{n}{k}=3^n$ парови (A,B) такви што $A\cup B=E$.

б) Нека E_k е подмножество на E со k елементи (ако $k=0$, тогаш $E_k=\varnothing$). Подмножествата B и C за кои важи $E_k\cup B\cup C=E$ се од обликот $B=X_1\cup B_1$ и $C=X_2\cup C_1$, каде што $X_1,X_2\subseteq E_k$ и $B_1\cup C_1=E\setminus E_1$. E_k може да се избере на $\binom{n}{k}$ начини, секое од множествата X_1 и X_2 може да се избере на 2^k начини, додека од а) следува дека постојат 3^{n-k} парови (B_1,C_1) т.ш. $B_1\cup C_1=E\setminus E_1$. Значи тројката (E_k,B,C) може да се формира на $\binom{n}{k}\cdot 2^k\cdot 2^k\cdot 3^{n-k}=\binom{n}{k}\cdot 4^k\cdot 3^{n-k}$ и постојат вкупно $\sum\limits_{k=0}^{k=n}\binom{n}{k}\cdot 4^k\cdot 3^{n-k}=\left(4+3\right)^n=7^n$ тројки (A,B,C) такви што $A\cup B\cup C=E$.

7. Множеството природни броеви $\{1,2,...,9\}$ е разбиено на три групи (Разбивање значи поделба на дадено множество на подмножества кои меѓу себе се дисјунктни, а нивната унија е самото множество). Да се докаже дека постои барем една група чиј производ на броеви е помал од 72.

Решение. Нека P_1 е производот на броевите од првата група, P_2 е производот на броевите од втората група и P_3 е производот на броевите од третата група. Нека претпоставиме спротивно т.е. дека $P_1,P_2,P_3\geq 72$.

Тогаш имаме

$$1\cdot 2\cdot ...\cdot 9=P_1P_2P_3\geq 72^3\;\Leftrightarrow\; 35\geq 36,$$

што не е точно.

Од добиената контрадикција следува дека производот на броевите во барем една група е помал од 72.

8. а) Множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ е разбиено (разделено) на две дисјунктни подмножества A и B. Докажи дека барем во едно од нив постојат три различни броја x,y и z такви што $x+y=z$.

б) Дали за множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ е точно тврдењето од задачата под а).

Решение. а) Нека тврдењето на задачата не е исполнето. Значи множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ не може да се разбие на две дисјунктни подмножества за кој е исполнет условот на задачата.

Од условот $A\cup B=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ добиваме дека бројот 5 припаѓа на едно од множествата. Без ограничување на општоста ќе претпоставиме дека $5\in A$. Аналогно, бројот 4 припаѓа на точно на едно од множествата A и B и бројот 6 припаѓа точно на едно од множествата A и B. Во зависност од броевите 4,5 и 6 и направената претпоставка, ги имаме следните случаеви.

Случај 1. $5\in A, 4\in A$. Тогаш $9\in B$ и $1\in B$. Според тоа $8\in A$. Бидејќи $5,8\in A$ добиваме дека $3\in B$. Но, од $1,3\in B$ добиваме $2\in A$, а од $2,4\in A$ имаме $6\in B$. Значи во овој случај $1,3,6,9\in B$, што не е можно и е спротивно од претпоставката на доказот.

Случај 2. $5,6\in A, 4\in B$. Од $5,6\in A$ добиваме дека $1\in B$, а од $1,4\in B$ добиваме дека $3\in A$. Но од $3,5\in A$ добиваме дека $8\in B$. Сега, од $1,8\in B$ имаме $9\in A$. Значи, $3,5,6,9\in A$, што е спротивно на претпоставката од доказот.

Случај 3. $5\in A; 4,6\in B$. Од $4,6\in A$ добиваме дека $2\in A$, а од $5,2\in A$ добиваме дека $3\in B$. Но сега, од $3,4\in B$ имаме $7\in A$. Значи, $2,5,7\in A$ што е спротивно на претпоставката од доказот.

Конечно, во било кое разбивање на множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ на две дисјунктни подмножества A и B исполнет е условот од задачата.

б) Множеството $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ може да се разбие на дисјунктни подмножества $A=\{1,2,4,8\}$ и $B=\{3,5,6,7\}$ за кои не е исполнет условот од задачата од делот а).

9. Најди го бројот на сите подмножества од три различни елементи од множеството $\{2,2^2,2^3,...,2^{2000}\}$ така што тие елементи се последователни членови на растечка геометриска прогресија.

Решение. Нека трите броеви од множеството се $2^a,2^b,2^c$, каде $1\le a<b<c \le 2000$. За да овие броеви формираат растечка геометриска прогресија потребно е $\frac{2^b}{2^a}=\frac{2^c}{2^b}$, односно $2^{b-a}=2^{c-b}$, $b-a=c-b$, т.е. $c=2b-a$. Од овде заклучуваме дека за $1\le a<b$, можеме да најдеме c, така да трите избрани броеви формираат растечка геометриска прогресија со дополнителните услови: $b<c\le 2000$, $b<2b-a\le 2000$, $0<b-a<2000-b$. Но $b>a$, па затоа $b-a>0$, и горните услови се еквивалентни со $b-a\le 2000-b$, односно $a\ge 2b-2000$, од каде $2b\le 2000$, па $b\le 1000$. Значи, за секои a,b, за кои $1\le a<b\le 1000$, можеме да најдеме c такво да $1\le a<b<c\le 2000$ и $2^a,2^b,2^c$ формираат растечка геометри-

ска прогресија. За секој избор на b, каде $2 \le b \le 1000$ имаме $b-1$ избори на a, па така вкупниот број на избори на a и b е

$$\sum_{b=2}^{1000}(b-1)=\sum_{b=1}^{999}(b-1)=\tfrac{999\cdot 1000}{2}=499500\,.$$

Значи бројот на такви триелементни подмножества е 499500.

10. За пресликувањето $f: X \to X$ ќе велиме дека е идемпотентно ако $f(f(x))=f(x)$, за секој $x \in X$. Ако $|X|=n$, определи го бројот на идемпотетмтните пресликувања $f: X \to X$.

Решение. Нека $|f(X)|=k$, $1 \le k \le n$. Бидејќи на множество $f(X)$ функцијата f се совпаѓа со идентичното пресликување, а на секој елемент од $X \setminus f(X)$ можеме да му ставиме во соодветствие произволен елемент од $f(X)$, од $|X \setminus f(X)|=n-k$ следува дека за секое множество $f(X)$, $|f(X)|=k$ функцијата f може да се избере на k^{n-k} начини. Понатаму, за секој $k \in \{1,2,...,n\}$ множеството $f(X)$, $|f(X)|=k$ може да се избере на $\binom{n}{k}$ начини, па затоа бројот на сите идемпотентни пресликувања $f: X \to X$ е еднаков на $\sum\limits_{k=1}^{n}\binom{n}{k}k^{n-k}$.

11. Нека m е природен број, $A=\{-m,-m+1,...,m-1,m\}$ и $f: A \to A$ е пресликување такво што $f(f(n))=-n$ за секој $n \in A$.

а) Докажи, дека m е парен број.

б) Определи го бројот на сите функции со даденото својство.

Решение. а) Нека $n \in A$ и $O_n=\{n, f(n), -n, f(-n)\}$. Бидејќи $f(f(n))=-n$ и $f(f(-n))=n$, лесно се докажува дека ако $k \in A$, тогаш или $O_k=O_n$ или $O_k \cap O_n=\varnothing$. Од овие равенства уште следува дека $f(n)\ne f(-n)$ кога $n \ne 0$.

Понатаму, ако $f(\pm n)=\pm n$, тогаш $\mp n=f(f(\pm n))=f(\pm n)=\pm n$, т.е. $n=0$. Исто така, ако $f(\pm n)=\mp n$, тогаш $\mp n=f(f(\pm n))=f(\mp n)=\pm n$, па затоа $n=0$. Според тоа, $|O_n|=4$, кога $n \ne 0$. Од претходните разгледувања следува дека $A\setminus\{0\}$ се разбива на дисјунктни четворки броеви, т.е. m е парен број.

б) Нека $m=2k$, $f: A \to A$ е пресликување со даденото својство и $A_+=\{1,2,...,m\}$. Да забележиме дека $f(-n)=f(f(f(n)))=-f(n)$, па затоа $f(0)=0$. Според тоа, за $n \ne 0$ важи или $f(n)>0$ или $f(-n)<0$. Значи, за четворката O_n соодветствува пар $(n', f(n'))$ од различни броеви од A_+: $(n, f(n))$ или $(f(-n), n)$. Така f индуцира разбивање на A_+ на подредени парови броеви.

Обратнно, на секое разбивање на A_+ на подредени парови броеви (n,k) соодветствува (непарна) функција со дадените својства:

$$f(0)=0,\ f(n)=k,\ f(k)=-n,\ f(-n)=-k,\ f(-k)=n\,.$$

Останува да ги преброиме овие разбивања. Ако ги наредиме сите парови од даденото разбивање еден после друг, добиваме пермутација на броевите од 1 до m. Подредеувањето на паровите може да се направи на $k!$ начини, па затоа вкупниот број од $m!$ пермутации се разделува на $k!$ „еквивалентни“ пермутации. Според тоа, бараниот број е еднаков на $\frac{m!}{k!}$.

12. Нека n е природен број, а $f:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$ е пермутација. Множествата A,B,C и D се дефинирани како што следува

$$A=\{i \mid i>f(i)\},$$
$$B=\{(i,j) \mid i<j\le f(j)<f(i) \text{ или } f(j)<f(i)<i<j\},$$
$$C=\{(i,j) \mid i<j\le f(i)<f(j) \text{ или } f(i)<f(j)<i<j\} \text{ и}$$
$$D=\{(i,j) \mid i<j \text{ и } f(i)>f(j)\}.$$

Докажи, дека $|A|+2|B|+|C|=|D|$.

Решение. Ќе спроведеме индукција по $|D|$. Ако $|D|=0$, тогаш пермутацијата е идентична, па затоа $|A|=|B|=|C|=0$. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за сите пермутации со $|D|<k$, $k\in\mathbb{N}$. Нека f е пермутација, за која $|D_f|=k$ (индексот ќе го користиме за да укажеме за која функција е соодветното множество) и i е таков што $f(i)>f(i+1)$.

Да ја разгледаме функцијата $g:\{1,2,...,n\}\to\{1,2,...,n\}$, определена со равенствата $g(j)=j$, за $j\notin\{i,i+1\}$, $g(i)=f(i+1)$ и $g(i+1)=f(i)$. Тогаш g е пермутација, за која $|D_g|=k-1$ и од индуктивната претпоставка следува дека $|A_g|+2|B_g|+|C_g|=|D_g|=k-1$. За да комплетираме доказот, ќе ги определиме множествата (и соодветно бројот на нивните елементи) A_g,B_g,C_g во зависност од A_f,B_f,C_f. Можни се пет различни случаи.

Прв случај. Ако $f(i+1)>i$ и $f(i)>i+1$, тогаш

$$(|A_f|,|B_f|,|C_f|)=(|A_g|,|B_g|+1,|C_g|-1).$$

Втор случај. Ако $f(i+1)=i$ и $f(i)>i$, тогаш заради својството

$$|\{j \mid j<i, i+1<f(j)\}|=|\{j \mid f(j)<i, i+1<j\}|$$

имаме

$$(|A_f|,|B_f|,|C_f|)=(|A_g|+1,|B_g|,|C_g|).$$

Трет случај. Ако $f(i+1)<i$ и $f(i)>i$, тогаш

$$(|A_f|,|B_f|,|C_f|)=(|A_g|,|B_g|,|C_g|+1).$$

Четврт случај. Ако $f(i+1)<i$ и $f(i)=i$, тогаш заради својството

$$|\{j \mid j<i, i+1<f(j)\}|=|\{j \mid f(j)<i, i+1<j\}|$$

имаме

$$(|A_f|,|B_f|,|C_f|)=(|A_g|-1,|B_g|+1,|C_g|).$$

Петти случај. Ако $f(i+1)<i$ и $f(i)<i$, тогаш

$$(|A_f|,|B_f|,|C_f|)=(|A_g|,|B_g|+1,|C_g|-1).$$

Во сите случаи, заради индуктивната претпоставка добиваме

$$|A_f|+2|B_f|+|C_f|=|D_f|.$$

13. Треба да избереме група од 6 луѓе од група од 8 луѓе, при што ако го избереме лицето A, мора да го избереме и лицето B. На колку начини може да се направи овој избор?

Решение. Ако не е избрано лицето A, тогаш од преостанатите 7 лица, можеме да избереме 6 лица на $\binom{7}{6}$ начини**.** Ако е избрано лицето A, тогаш мора да го избереме и лицето B, па од преостанатите 6 лица, треба да избереме 4 лица, што може да се направи $\binom{6}{4}$ начини**.** Конечно, изборот на луѓето според условите на задачата може да се направи на $\binom{7}{6}+\binom{6}{4}=22$ начина.

14. Десет ученици решиле од својот состав да формираат спортски екипи со следниве услови:

1) секој може да членува во произволна екипа:

2) ниту една екипа не смее да се содржи во друга екипа или да се совпаѓа со друга екипа, но делумно совпаѓање е можно.

Колку најмногу екипи можат да формираат учениците при дадените услови?

Решение. Нека M е множеството екипи што ги исполнуваат условите 1) и 2) со најголем можен број на елементи, а M_i подмножество од M кое ги содржи екипите со по i елементи, $i\in\{1,2,...,10\}$. Тогаш M може да се претстави како $\bigcup\limits_{i=m}^{n-1} M_i$, каде $m\le n$ и $M_m\ne\varnothing\ne M_n$.

1° Да претпоставиме дека $n\ge 6$. Да го разгледаме множеството N составено од сите екипи кои можат да се добијат од M_n со исклучување на еден учесник. Јасно, во секоја екипа од N има по $n-1$ член, и лесно се проверува дека множеството $M'=\bigcup\limits_{i=m}^{n-1} M_i\cup N$ ги исполнува условите 1) и 2). Притоа $(\bigcup\limits_{i=m}^{n-1} M_i)\cap N=\varnothing$ (ако постои екипа E во пресекот, тогаш таа има $n-1$ член, па е во $M_{n-1}\cap N$. Но тогаш E е добиено со исклучување на учесник од M_n, па е содржана во екипа од M_n), од што следува дека $|M'|=|M|+|N-|M_n|$. Секоја екипа од M_n содржи точно n екипи од N, а секоја екипа од N е содржана во најмногу $11-n$ екипи од M_n. Според тоа $(11-n)|N|\ge n|M_n|$ т.е. $|N|\ge\frac{n}{11-n}|M_n|\ge\frac{6}{11-6}|M_n|>|M_n|$, од каде $|M'|>|M|$, што не е можно заради максималниот број елементи во M. Добивме дека $n\le 5$.

2° Ако $m\le 4$, се добива слична контардикција, од каде $m\ge 5$. Според тоа $m=n=5$, односно M се состои од сите можни екипи со по 5 члена. Нив ги има вкупно $\binom{10}{5}=252$.

15. Нека $1\le k<n$. Ги конструираме сите конечни низи од позитивни цели броеви чиј збир е *n*. Најди го бројот $T(n,k)$ на вакви низи што го содржат бројот *k*.

Решение. Да напишеме n точки во една редица. Меѓу нив има $n-1$ празни места. Во овие празни места можеме да поставиме вертикални црти на 2^{n-1} начини. Овие вертикални црти ги определуваат сите можни низи од броеви чии збир е n. За да го најдеме бројот $T(n,k)$ од сите конечни низи што го содржат бројот k, пишуваме n точки во една редица и k последователни точки ги ставаме во средни згради

$$\bullet\bullet\bullet\,\big|\,\bullet\,\big|\,\bullet\big[\bullet\bullet\bullet\big]\bullet\bullet \Leftrightarrow (3, 1, 1, 3, 2)$$

Разгледуваме два случаи:

I. Средната заграда не содржи крајна точка. Ова поставување на средните загради може да се направи на $n-k-1$ начини. Остануваат $n-k-2$ празнини меѓу точките надвор од средната заграда. Во овие празнини можеме да поставиме најмногу по една вертикална црта на 2^{n-k-2} начини.

II. Средните загради содржат крајна точка. Ова може да се направи на два начина. Меѓу точките надвор од средните загради остануваат $n-k-1$ празни места, па вертикалните црти можат да се поставaт на 2^{n-k-1} начини.

Добиваме

$$T(n,k)=(n-k-1)\cdot 2^{n-k-2}+2\cdot 2^{n-k-1}=(n-k+3)\cdot 2^{n-k-2}.$$

16. Ламјата Огненка има една глава. Нејзиното родословно стебло се состои од неа самата, нејзините родители, нивните родители итн. Ако една ламја има n глави, тогаш нејзината мајка има $3n$ глави, а нејзиниот татко има $3n+1$ глави. За еден природен број ќе велиме дека е *змејски* ако на единствен начин може да се претстави како збир од број на глави на две различни ламји од родословното стебло. Докажи, дека бројот 2003 е змејски и определи колкав е бројот на змејските броеви помали од 2003.

Решение. Ќе велиме дека Огненка е од ред 1, нејзините родители се од ред 2, нивните родители се од ред 3 итн. Да го запишеме бројот на главите на секоја ламја во систем со основа 3. Огненка има 1 глава, нејзината мајка има 10 глави, нејзиниот татко 11 глави, нејзината баба по линија на мајка и има 100 глави итн. Со индукција по редот на ламјите лесно се гледа дека главите на ламјите од $n-$ти ред се сите $n-$цифрени броеви во систем со основа 3 во кои не учествува цифрата 2 (различните ламји имаат различен број на глави). При собирањето на два такви броја не може да има пренос. Тогаш ако две ламји вкупно имаат $a+b=k, (a>b)$ глави и го запишеме k восистем со основа 3, добиваме дека a и b треба да имаат 0 на позицијата на која k има 0, 1 на позицијата на која k има 2, а на позицијата на која k има 1 едниот собирок треба да има 0, а другиот 1. Така, ако во систем со основа 3 записот на k се состои само од 0 и 2, тогаш $a=b$, т.е. станува збор за една иста ламја, а не за две ламји и k не е змејски број. Ако записот на k во систем со основа 3 има барем две единици ($k=...1...1...$), имаме барем две разлини можности: $a=...1...1...$, $b=...0...0...$ и $a=...1...0...$, $b=...0...1...$. Таков k не е змејски број, освен во случај кога k има точно две единици, а сите останати цифри се нули. Бидејќи не постои ламја со 0 глави во случајов се реализира само втората можност.

Ако k има точно една цифра 1, тогаш на таа позиција a ќе има 1, b ќе има 0, а останатите позиции се еднозначно определени. Исклучок е случајот во кој сите останати цифри на k се нули, бидејќи треба да е $b=0$, што не е можно. Според тоа, сите броеви со точно една цифра 1 и барем една цифра 2 се змејски.

Бидејќи $2003=2202012_3$, заклучуваме дека бројот 2003 е змејски.

Да ги преброиме сите змејски броеви со најмногу 7 цифри. Имаме $\binom{7}{2}=21$ броеви со точно две единици и другите цифри се нули. Броеви со најмногу 6 цифри 0 или 2, од кои барем една е 2 има $2^6-1=63$. Сега можеме да ја поставиме единицата скаде меѓу, пред или после цифрите на таков број, т.е. има 7 можности. Вкупно имаме $7\cdot 63=441$ таков број и ако ги додадеме горните 21 имаме 462 змејски броеви со најмногу 7 цифри.

Да ги преброиме змејските броеви поголеми од $2003=2202012_3$. Во систем со основа 3 тоа се броевите: 2202021, 2202100, 2202102, 2202120, 2202122, 2202201, 2202210, 2202212, 2202221, уште 16 броеви од видот $\overline{221mnpq}$, каде $m,n,p,q\in\{0,2\}$ и уште $4\cdot 8=32$ броеви од видот $\overline{222mnpq}$ каде една од цифрите m,n,p,q е 1, а останатите се 0 или 2. Вкупно имаме $1+9+16+32=58$ седумцифрени змејски броеви поголеми или еднакви на $2003=2202012_3$. Значи, змејски броеви помали од 2003 има $462-58=404$.

17. Диск-џокеј за забава предлага песни класифицирани во десет жанрови, такви што секоја песна припаѓа на точно еден жанр. Песните се пуштаат една по друга: првите 17 песни се избираат од организаторот на забавата, но почнувајќи од осумнаесеттата песна диск-џокејот сам определува која песна ќе ја пушти. Елена забележала дека ако направиме рангирање (според бројот на песните) на жанровите секогаш по последните 17 песни следува песна на жанрот кој е на прво место (ако има неколку жанра кои се на прво место, тогаш песната припаѓа на еден од нив). Докажи дека од некој момент па натаму сите песни припажаат на еден ист жанр.

Решение. Прво нека претпоставиме дека во некој момент имаме жанр A кој е единствен на прво место. Тогаш следната песна е од A, а за останатите жанрови бројот на песните меѓу последните 17 или се намалува за 1 или останува ист. Според тоа, A повторно е единствен на прво место и индуктивно тоа важи и за понатаму. Аналогно се гледа дека ако некој жанр не е на прво место во некој момент, тогаш тој тоа место не го достигнува и понатаму.

Ако при првите 17 песни имаме жанр на прво место, задачата е решена. Во спротивно треба да докажеме дека бројот на жанровите на прво место се намалува. Ако допуштиме дека од некој момент па натаму бројот на жанровите на прво место е еден и ист, тогаш тој треба да е делител на 17. Ако тоа е бројот 1, тогаш задачата е решена, а не може да е 17, бидејќи сите жанрови се 10. Според тоа, бројот на жанровите кои се на прво место од некој момент или строго опаѓа и ќе достигне 1, или се зголемува. Останува да докажеме дека овој број никогаш не се зголемува.

Да ги разгледаме 17-те песни $i,i+1,i+2,...,i+16$, при што $i-$тата песна е од жанрот C. Ако C не е на прво место, тогаш $i+17$-тата песна е од жанрот на прво место и тој останува сам на тоа место, противречност. Ако C е на прво место и $i+17$-тата песна е од C, тогаш бројот на песните во секој од жанровите на прво место не се менува, па затоа бројот на жанровите на тоа место останува ист, пак противречност.

18. На тренинг на кои има n фудбалери, од кои некои се напаѓачи, а останатите се голмани, се вежбало изведување пенали. Вкупно се постигнати k голови. Докажи дека тренерот на фудбалерите може да им додели броеви од 1 до n така што за секој постигнат гол, броевите на напаѓачот и голманот се разликуваат најмалку за $n-k$.

Решение. *Прв начин.* Тврдењето ќе го докажеме со индукција по k. За $k=0$ тврдењето е тривијално. Да претпоставиме дека $k>1$. Голманите кои примиле гол да ги означиме со броевите 1, 2, ..., а напаѓачите кои дале гол со броевите $n, n-1, \dots$. Играчите кои ниту дале ниту примиле гол засега ги оставаме неозначени. Според индуктивната претпоставка, играчите можеме да ги означиме така што за секој од првите $k-1$ голови, броевите на напаѓачот и голманот се разликуваат најмалку за $n-k+1$. Го разгледуваме $k-$тиот гол. Нека голманот кој го примил е означен со бројт ℓ; ако тој уште не е означен, за ℓ го земаме најмалиот слободен број. Ако напаѓачот кој го дал тој гол уште не е означен, нему му го доделуваме најголемиот слободен број, кој секако не е помал од $n-k+1$. Сега голманот ℓ го пренумерираме со бројот 1, додека на сите голмани со броевите $1,2,\dots,\ell-1$ ги пренумерираме со броеви поголеми за 1. Така при секој од првите $k-1$ голови броевите на напаѓачот и голманот се разликуваат најмалку за $n-k$, што значи дека условот на задачата е исполнет. Неозначените играчи ги означуваме произволно.

Втор начин. Нека има m голмани и истите да ги подредиме во опаѓачки поредок според бројот на примените голови и да ги означиме редоследно со броевите од 1 до m. Останува на напаѓачите редоследно да им ги доделиме броевите од $m+1$ до n, еден по еден, така што условот на задачата нема да се наруши. Ќе докажеме дека последното е можно. Нека претпоставиме дека броевите од $m+1$ до $m+r-1$ успешно сме ги доделиле, но за бројот $m+r$ тоа не можеме да го направиме. Последното значи дека секој од неозначените $n-m-r+1$ напаѓачи дал гол на некој голман чиј број не е помал од $m+r-(n-k-1)$, а такви голмани има $n-k-r$ (значи $n-k-r\geq 1$). Следува дека и секој од останатите $m-(n-k-r)$ голмани (тоа се оние кои примиле најмногу голови; да забележиме дека $n-m-r+1\leq k$, т.е. $m-(n-k-r)\geq 1$) примил гол. Значи, вкупно имаме најмалку $(n-m-r+1)+m-(n-k-r)=k+1$ дадени голови, што е противречност.

19. Комисија составена од 3366 филмски критичари гласа за Оскар. Секој критичар гласа за еден глумец и една глумица. После гласањето се констатирало дека за секој природен број n помал или еднаков на 100 постои глумец или глумица кој добил/ла точно n гласови. Докажи, дека постојат двајца критичари кои гласале за ист глумец или глумица.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното. За секој $i=1,2,\dots,100$ да фиксираме еден кандидат A_i кој добил i гласови.

Бројот на критичарите кои двата пати гласале за некој од кандидатите од множеството $A=\{A_{34},A_{35},...,A_{100}\}$ е помал или еднаков на бројот парови глумец-глумица меѓу овие кандидати, а овој број е помал или еднаков на $33\cdot 34=1122$.

Од друга страна, вкупно има $2\cdot 3366=6732$ гласови кои критичарите ги доделиле. Од овие гласови кандидатите од множеството A добиле

$$34+35+...+100=4489$$

гласови. Затоа има најмногу $6732-4489=2243$ критичари кои двата пати не гласале за кандидатите од множеството A.

Според тоа, вкупниот број критичари е помал или еднаков на

$$1122+2243=3365,$$

што е противречност.

20. Нека $a_i,b_i,c_i,\ i=1,2,...,N$ се цели броеви такви што за секоја тројка (a_i,b_i,c_i) барем еден од броевите е непарен. Докажи дека постојат цели броеви x,y и z такви што барем $\frac{4N}{7}$ од броевите $xa_i+yb_i+zc_i$, $i=1,2,...,N$ се непарни.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $x,y,z\in\{0,1\}$, при што $x+y+z>0$. Тоа значи дека имаме седум можности за тројката (x,y,z). Оние четири од нив, во кои единицата соодвествува на непарен број во (a_i,b_i,c_i), а останатите се произволни, го даваат саканиот непарен резултат. Според тоа, за барем една од седумте тројки барем $\frac{4N}{7}$ од броевите $xa_i+yb_i+zc_i$, $i=1,2,...,N$ се непарни.

21. Нека n е даден природен број. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 10^n и во чиј декаден запис се содржи цифрата 5.

Решение. Нека $A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и $B=\{0,1,2,3,4,6,7,8,9\}$, т.е. A е множеството од сите цифри, а B е множеството цифри во кои не се содржи цифрата 5. Понатаму, на броевите кои имаат $k<n$ цифри од лево ќе им допишеме $n-k$ нули и така броевите кои се помали од 10^n (вклќиучувајќи ја и нулата) ги сведовме на подредени $n-$торки од елементи на множеството A, т.е. на варијациии со повторување од 10 елементи од класа n. Бараниот број броеви да го означиме со x_n.

Прв начин. Бројот на природните броеви кои се помали од 10^n (вкулучвајќи ја и нулата) е еднаков на бројот на варијациите со повторување од елементите на множеството $A\,(|A|=10)$ од класа n, т.е. е еднаков на 10^n. Бројот на природните броеви кои се помали од 10^n (вклучувајќи ја и нулата) и кои во својот запис не ја содржат цифрата 5 е еднаков на бројот на варијациите со повторување од елементите на множеството $B\,(|B|=9)$ од класа n, т.е. е еднаков на 9^n. Значи, бројот на броевите кои се помали од 10^n и во чиј запис се содржи цифрата 5 е еднаков на 10^n-9^n.

Втор начин. Броевите кои во записот k пати ја имаат цифрата 5 ги добиваме така што од n места ќе избереме k места на кои ќе ја запишеме цифрата 5, а на останатите $n-k$ цифри произволно ги запишуваме останатите цифри. Според тоа, нивниот број е еднаков на $\binom{n}{k}\cdot 9^{n-k}$, бидејќи секоја од останатите $n-k$ произволно ја избираме од множеството B кое има 9 елементи. Бидејќи во бараните броеви цифрата 5 може да се јавува $1,2,3,...,n$ пати и настаните се дисјунктни од принципот на збир и од Њутновата биномна формула следува

$$x_n = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\cdot 9^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 9^{n-k} - 9^n = (9+1)^n - 9^n = 10^n - 9^n .$$

Трет начин. Ако првата цифра од лево е 5, тогаш на останатите места може да е било која цифра од $A\,(|A|=10)$, па такви броеви има 10^{n-1}. Ако цифрата 5 прв пат се јавува на второт место од лево, тогаш првата цифра од лево може да биде било која цифра од множеството $B\,(|B|=9)$, а на останатите $n-2$ места било која цифра од множеството $A\,(|A|=10)$, па такви броеви има $9\cdot 10^{n-2}$ итн. ако цифрата 5 прв пат се јавува на $k-$тото место, тогаш на првите $k-1$ место може да биде било која цифра од множеството $B\,(|B|=9)$, а на останатите $n-k$ места може да биде било која цифра од множеството $A\,(|A|=10)$, па такви броеви има $9^{k-1}\cdot 10^{n-k}$. Бидејќи цифрата 5 прв пат може да се јави на $1,2,3,...,n-$тото место и настаните се дисјунктни, ако ја искористиме формулата

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}),$$

од принципот на збир следува дека

$$\begin{aligned} x_n &= 10^{n-1} + 9\cdot 10^{n-2} + ... + 9^{k-1}\cdot 10^{n-k} + ... + 9^{n-1} \\ &= (10-9)(10^{n-1} + 9\cdot 10^{n-2} + ... + 9^{k-1}\cdot 10^{n-k} + ... + 9^{n-1}) \\ &= 10^n - 9^n. \end{aligned}$$

Четврт начин. Нека x_{n+1} е бројот на $(n+1)-$цифрените броеви кои го задоволуваат условот на задачата. Ќе ја најдеме врската меѓу броевите x_{n+1} и x_n. Ако во последните n цифри се наоѓа цифрата 5 (такви броеви има x_n) тогаш за новата $(n+1)-$ва цифра можеме да ја избереме било која цифра од множеството $A\,(|A|=10)$, т.е. имаме $10x_n$ броеви кои го задоволуваат условот на задачата. Ако во последните n цифри не е цифрата 5 (такви броеви има 9^n), тогаш $(n+1)-$вата цифра мора да биде 5, па затоа такви броеви има 9^n. Бидејќи разгледуваните два настани се дисјунктни од принципот на збир следува

$$x_{n+1} = 10x_n + 9^n . \tag{1}$$

Ако во (1) наместо n ставиме $n+1$ добиваме

$$x_{n+2} = 10x_{n+1} + 9^{n+1} . \tag{2}$$

Равенката (1) ја множиме со 9 и ја одземаме од равенката (2), со што ја добиваме равенката

$$x_{n+2} - 19x_{n+1} + 90x_n = 0 , \tag{3}$$

која е хомогена диференцна равенка од втор ред. Притоа, јасно е дека $x_1 = 1$ и

$$x_2 = 10 \cdot 1 + 9^1 = 19.$$

Карактеристичната равенка на равенката (3) е $t^2 - 19t + 90 = 0$ и нејзини решенија се $t_{1/2} = \frac{19 \pm \sqrt{19^2 - 4 \cdot 90}}{2} = \frac{19 \pm 1}{2}$, т.е. $t_1 = 9$ и $t_2 = 10$. Според тоа, решенија на равенката (3), т.е. на равенката (1) е $x_n = 10^n M + 9^n N$, при што константите M и N ги определуваме од почетните услови, т.е. од системот

$$\begin{cases} 10M + 9N = 1 \\ 10^2 M + 9^2 N = 19 \end{cases}$$

Решението на последниот систем е $M = 1,\ N = -1$, што значи дека $x_n = 10^n - 9^n$.

Петти начин. Со C_i да го означиме множеството $n-$цифрени броеви ка кои на $i-$тото место има цифра 5. Бидејќи цифрата 5 не се појавува прв пат на $i-$тото место множествата C_i, $i = 1, 2, ..., n$ не се дисјунктни. Бидејќи на $i-$тото место е финсирана цифрата 5, а на останатите $n-1$ место може да е било која цифра од множеството $A(|A| = 10)$ добиваме $|C_i| = 10^{n-1}$. Понатаму, ако $i \neq j$, тогаш на две места е фиксирана цифрата 5, а на останатите е било која цифра од множеството $A(|A| = 10)$, па затоа за $i \neq j$ важи $|C_i \cap C_j| = 10^{n-2}$. Слично, за $i_1, i_2, ..., i_k$, $i_j \neq i_t$ важи $|C_{i_1} \cap C_{i_2} \cap ... \cap C_{i_k}| = 10^{n-k}$. Според тоа, бидејќи пресек на k множества од фамилијата множества C_i, $i = 1, 2, ..., n$ може да се направи на $\binom{n}{k}$ начини, а бројот 5 може да биде на било кое од $n-$те места од принципот на вклучување и исклучување следува

$$\begin{aligned} x_n &= |C_1 \cup C_2 \cup ... \cup C_n| \\ &= \sum_{1 \le i \le n} |C_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |C_i \cap C_j| + ... + (-1)^{n-1} \sum |C_1 \cap C_2 \cap ... \cap C_n| \\ &= \binom{n}{1} \cdot 10^{n-1} - \binom{n}{2} \cdot 10^{n-2} + \binom{n}{3} \cdot 10^{n-3} + ... + (-1)^{n-1} \binom{n}{n} \cdot 1 \\ &= 10^n - (\binom{n}{0} \cdot 10^n - \binom{n}{1} \cdot 10^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot 10^{n-2} - \binom{n}{3} \cdot 10^{n-3} + ... + (-1)^n \binom{n}{n} \cdot 1) \\ &= 10^n - (10-1)^n \\ &= 10^n - 9^n. \end{aligned}$$

22. Во p точки од кружницата се запишани знаци плус, а во m точки се запишани знаци минус (во секоја точка по еден знак). Кружницата ја обиколуваме обратно од движењето на стрелките на часовникот. Нека x е бројот на знаци плус кои следуваат по знак плус, а y е бројот на знаци минус кои следуваат по знак минус. Докажи дека $p - m = x - y$.

Решение. Со d ќе го означиме бројот на премини од знак плус кон знак минус. Јасно, бројот d е еднаков и на бројот на премини од знак минус кон знак плус. Бројот x на знаци плус кои следуваат по знак плус собрани со бројот на премини d од знак плус кон знак минус го дава бројот p на знаци плус запишани во точките од кружницата (бројот на знаци плус кои се први во низа знаци плус и кои не следуваагт по знак плус е еднаков на бројот од премини од знак плус кон знак минус).

Истото е точно и за бројот на знаци минус. Значи $p=x+d$ и $m=y+d$. Според тоа, $d=p-x$ и $d=m-y$, од каде добиваме $p-x=m-y$, односно $p-m=x-y$.

23. Дадени се 10 отсечки чии должини се поголеми од 1 а помали од 55. Да се докаже дека меѓу овие 10 отсечки, постојат три од кои може да се формира триаголник.

Решение. Нека должините на отсечките се $a_i, i=1,2,...,10$. Без губење на општоста можеме да земеме дека $a_i < a_{i+1}, i=1,2,...,9$.

Да претпоставиме спротивно т.е. дека не постојат три отсечки од кои може да се формира триаголник. Тогаш имаме

$$a_3 \geq a_1+a_2 > 1+1=2\,,\ a_4 \geq a_2+a_3 > 1+2=3 \text{ итн. } a_{10} > 55,$$

што е во спротивност со условот.

Од добиената контрадикција следува решението на задачата.

24. Парен број на луѓе дискутираат на тркалезна маса. По паузата, повторно седнале на масата, но со различен редослед. Докажи дека постојат барем двајца така што бројот на учесници што седеле меѓу нив пред паузата и после паузата е ист.

Решение. Да разгледаме $2n$ вектори со почеток во центарот на масата и краеви по границата на масата, така што границата на масата ја делат на $2n$ еднакви кружни лаци. Претпоставуваме дека краевите на овие вектори ги определуваат местата каде што седат дискутантите и обратно, секое место на седење на луѓето определува крајна точка на овие вектори.

После паузата, секој вектор е заротиран за позитивен агол околу центарот на кругот. Збирот на аглите за кои овие $2n$ вектори се заротирани е $2k\pi$ каде што k ненегативен цел број.

Ако било кои два вектори се завртени за ист агол, тогаш јасно е дека бројот на дискутанти што седеле меѓу овие двајца (определени со овие два вектори) пред паузата и после неа е ист.

Да го разгледаме случајот кога аглите на ротација на овие вектори се различни меѓу себе. Но тогаш овие агли се :

$$0, \alpha, 2\alpha, ..., (2n-1)\alpha$$

каде што $\alpha=\frac{\pi}{n}$ и збирот на овие агли е $(2n-1)\pi$, а овој број е различен од $2k\pi$. Значи овој случај не е можен.

Да забележиме дека ако имаме непарен број на учесници во дискусијата, тогаш ова не мора да важи. На пример, ако дискутантите се нумерирани со $1,2,...,2n+1$, тогаш

$$(1,3,5,...,2n+1,2,4,...,2n)$$

е еден ваков распоред на дискутантите.

25. Во рамнината се дадени $2n$ точки, меѓу кои нема три колинеарни. „Медијана“ на овие точки ја нарекуваме секоја права која минува низ две од точките и во двете полурамнини определени со правата има ист број на точки. Кој е најмалиот број медијани?

Решение. Ќе покажеме дека низ секоја точка A од системот од $2n$ точки минува барем една “медијана”. Нека l е права која минува низ точката A. Ќе допуштиме да на левата страна (едната страна) од правата l има помалку точки од системот отколку од десната страна (другата страна). Ја ротираме правата l околу точката A. При оваа ротација покрај точката A во даден момент на правата l може да се најде најмногу уште една точка од системот точки. При секое допирање до нова точка, во процесот на ротација бројот на точки на левата и десната страна се променува за една точка. Промената не е наизменична, туку е во некој редослед.

Притоа, кога правата ќе ротира во избраната насока на ротација за 180°, десно од неа ќе се наоѓаат онолку точки колку што биле на почетокот лево од неа, и обратно. Затоа во процесот на ротација во еден момент на двете страни од правата ќе имаме еднаков број на точки. Во тој момент правата ќе биде “медијана” на системот точки, бидејќи во спротивно бројот на точките лево и десно би бил непарен, што не е можно.

На секоја “медијана” лежат точно по две точки од системот точки. Затоа, бројот на медијани не може да биде помал од n. Пример на систем со точно n “медијани” се темињата на правилен $2n$ аголник.

26. Најди го најмалиот природен број n, за кој можат да се изберат n точки од рамнината $A_1, A_2, ..., A_n$ така што за секоја точка B од рамнината, барем едно од растојанијата $\overline{A_i B}$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, е ирационален број.

Решение. Очигледно, $n = 1$ не го исполнува условот на задачата. Ако $n = 2$, тогаш постојат кружници со рационални радиуси и центри во точките A_1 и A_2 кои се сечат. Пресечните точки на двете кружници се на рационално растојание од A_1 и A_2. Затоа $n \geq 3$. Ќе докажеме дека $n = 3$. Точките A_1 и A_2 ги избираме така што растојанието меѓу нив е ирационален број. Да го означиме со S множеството пресечни точки на кружниците со центри во A_1 и A_2 и радиуси рационални броеви, а со T множеството кружници со рационални радиуси и центри во точките од S. Ако точката $B \notin S$ тогаш од конструкцијата на S јасно е дека барем од растојанијата $\overline{A_1 B}$, $\overline{A_2 B}$ е ирационален број. Ако, пак, $B \in S$, тогаш $\overline{A_1 B}, \overline{A_2 B} \in \mathbb{Q}$. Значи точката A_3 мора да се избере така што растојанието од A_3 до произволна точка од S е ирационален број. За таа цел доволно е A_3 да се избере да не лежи на ниту една кружница од T.

27. На една кружница се дадени 18 точки. Може да се повлечат 9 отсечки со краеви меѓу дадените точки (тетиви во кружницата), така што две од нив немаат иста крајна точка. На колку начини ова може да се направи?

Решение. Ќе разгледаме наместо 18 точки, парен број на точки $2n$, односно во општ случај. Со x_n ќе го означиме бројот на начини на кои може да се направи бараното поврзување, односно да се повлечат n отсечки (тетиви) што го исполнуваат условот од задачата.

Нека е даден еден од x_n -те начини на кој е направено поврзувањето. За две точки кои се поврзани со отсечка, од тоа поврзување, ќе ја повлечеме правата која минува низ крајните точки на таа отсечка.

Преостанатото множество од $2n-2$ точки е разделено на две множества. Во секое од нив има парен број на точки (доколку во секое од нив има непарен број на точки, тогаш мора една точка од едното множество да е поврзана со точка од другото множество, а тоа е отсечка која ќе ја пресече фиксно избраната отсечка). Според тоа, начинот на поврзување во секое од делбените множества е решение на задачата за множества со парен број на точки помал од $2n$.

Ќе избереме една точка со парен, а друга со непарен индекс. Тие формираат една отсечка, и една права која минува низ нив. Таа права го дели даденото множество точки на две множества во секое од кои има парен број точки. Решението на задачата за секое од тие множества, земени заедно, дава решение на почетната задача. Нека во едното множество има $2k$ а во другото множество $2p$ точки. Тогаш $2k+2p=2n$. Бројот на решенија за множеството од $2k$ точки е x_k, а бројот на решенија за множеството од $2p$ точки е x_p, тогаш вкупниот број на начини на поврзување во ваков случај е $x_k \cdot x_p$.

Сега, ќе ја фиксираме точката A_1 и ќе ги разгледаме отсечките (тетивите) $A_1A_2, A_1A_4,..., A_1A_{2n}$.

Според претходната дискусија, за отсечката A_1A_2 има x_{n-1} начини на поврзување.

За отсечката A_1A_4 има x_1x_{n-2} начини на поврзување. За отсечката A_1A_6 има x_2x_{n-3} начини наповрзување,…, за отсечката A_1A_{2n} има x_{n-1} начини на поврзување.

Со ваквиот начин на поврзување, и ваквиот начин на пребројување се опфатени сите x_n начини на поврзување на точките, при што

$$x_n = x_{n-1} + x_1x_{n-2} + x_2x_{n-3} + x_3x_{n-4} + ... + x_{n-2}x_1 + x_{n-1}.$$

Сега не е тешко да се види дека

$$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 5, x_4 = 14, x_5 = 42, x_6 = 132, x_7 = 429, x_8 = 1430, x_9 = 4858,....$$

28. Во рамнината се дадени 5 различни точки и 5 различни прави. Докажи дека постојат две различни точки и две различни прави такви што никоја од точките не лежи на никоја од правите.

Решение. Нека точките ги обележиме со $A_1, A_2,..., A_5$ а правите со $p_1, p_2,..., p_5$. Да претпоставиме дека некоја од правите, на пример p_1, минува низ три од точките, на пример A_1, A_2, A_3. Секоја од правите p_2, p_3, p_4, p_5 минува низ најмногу една од точките A_1, A_2, A_3, т.е. за секоја од тие прави постои двоелементно подмножество на $\{A_1, A_2, A_3\}$ кое нема заеднички точки со неа. Но бидејќи има 4 прави, а $\{A_1, A_2, A_3\}$ има 3 двоелементни подмножества, следува дека постои двоелементно подмножество на $\{A_1, A_2, A_3\}$ кое нема заеднички точки со две од правите. Така во овој случај се одредени бараните две различни точки и две различни прави.

Нека ниту една од правите не содржи повеќе од две точки. Ако имаме точка A_i и прави p_j и p_k што минуваат низ A_i, тогаш p_j и p_k содржат уште најмногу по една од дадените точки и заедно со последните две точки го имаат бараното својство. Ако пак не постои точка A_i и прави p_j и p_k низ неа, тогаш секоја точка лежи на најмногу една права и секои две точки и секои две прави од другите три го задоволуваат бараното својство.

29. Дадени се n точки во рамнина ($n \geq 2$). Некои од овие точки се поврзани со отсечки. Докажи дека постојат две точки кои се краеви на еднаков број на отсечки.

Решение. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ се дадените точки и со $\upsilon(A_i)$ да го означиме бројот на сите отсечки за кои точката A_i е крајна точка. Јасно е дека $0 \leq \upsilon(A_i) \leq n-1$. Ако постои точка A_j така што $\upsilon(A_j)=0$, тогаш $\upsilon(A_i) \neq n-1$ за секој $i \in \{1,2,...,n\}$. Навистина, ако претпоставиме дека постои $k \in \{1,2,...,n\}$ така што $\upsilon(A_k)=n-1$ тогаш точката A_k е поврзана со сите други точки, вклучувајќи ја и точката A_j. Но, тоа е во спротивност со претпоставката дека $\upsilon(A_j)=0$. Слично, ако $\upsilon(A_k)=n-1$ за некое k, тогаш $\upsilon(A_i) \neq 0$ за секое i.

Така, или $0 \leq \upsilon(A_i) \leq n-2$ или $1 \leq \upsilon(A_i) \leq n-1$. Оттука следува дека множеството $\{\upsilon(A_1), \upsilon(A_2), ..., \upsilon(A_n)\}$ има најмогу $n-1$ различни елементи.

Значи, имаме n броеви: $\upsilon(A_1), \upsilon(A_2), ..., \upsilon(A_n)$ (овие се $n-$те топчиња) и нивните вредности се $n-1$ различни цели позитивни броеви (топчињата се сместени во $n-1$ кутија). Од принципот на Дирихле следува дека постојат барем две топчиња сместени во иста кутија, т.е. постојат барем два броја $\upsilon(A_k)$ и $\upsilon(A_l)$ што имаат иста вредност. Според тоа, постојат барем две точки кои се краеви на еднаков број отсечки.

30. Во една земја има n градови, секои два града се поврзани со двонасочна железничка линија. Цените на билетите се еднакви во двете насоки за секои два града, но се различни за секоја линија, која директно поврзува два града. Докажи, дека патник може да тргне од некој од градовите и последователно да патува по $n-1$ линија, плаќајќи за секое патување помалку, отколку за претходното. (Патникот има право да минува низ еден ист град повеќе од еднаш.)

Решение. Возот кој директно поврзува два града ќе го наречеме експрес. Да ги пуштиме експреси меѓу градовите еден по друг според цената на билетите за соодветните линии во растечки редослед, т.е. прво да го пуштиме најефтиниот експрес, вториот е најефтин од останатите итн. Во секој момент во секој град ќе го запишуваме максималниот број на експресите, со кои може да се патува последователно, почнувајќи од тој град, така да цените на патувањата монотоно се намалуваат.

Во почетниот момент сите броеви во градовите се еднакви на нула. Да разгледаме дадем момент во кој пуштаме нов експрес, кој ги соединува градовите A

и B, во кои точно пред тоа соодветно биле запишани броевите a и b. После пуштањето на новиот експрес во A ќе се појави број кој не е помал од $b+1$ (бидејќи новиот експрес е поскап од сите досегашни и тогаш со него можеме да отидеме од A до B, а оттаму имаме маршрута со саканото својство со должина b). Аналогно, во B ќе биде запишан број кој не е помал од $a+1$. Тогаш збирот на броевите во A и B ќе се зголеми барем за 2, а броевите во останатите градови нема да се намалат. Според тоа, збирот на сите запишани броеви ќе се зголемува барем за 2.

Да ја разгледаме финалната ситуација, кога се пуштени сите $\frac{n(n-1)}{2}$ експреси. Тогаш збирот на броевите во градовите ќе биде барем $2\cdot\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)$. Според тоа, барем во еден град ќе биде запишан број кој не е помал од $n-1$, што значи дека бараната маршрута за патникот постои.

31. Нека $p\equiv 3(\text{mod}\,4)$ е прост број. Нека N е бројот на правоаголниците со плоштина $2p^2$, чии темиња имаат целобројни координати (x,y) за кои важи $0\le x,y\le 2p^2$. Определи го остатокот од делењето на бројот N со бројот p.

Решение. Прво ќе го определиме бројот на правоаголниците со страни паралелни со координатните оски. Очигледно, бројот на правоаголниците со страни со должини a и b, кои се паралелни со координатните оски и чии темиња имаат целобројни координати (x,y), за кои важи $0\le x,y\le 2p^2$ е

$$(2p^2-a+1)(2p^2-b+1)\equiv(a-1)(b-1)\ (\text{mod}\,p).$$

Правоаголници со плоштина $2p^2$ имаат страни

$$2p^2\times 1,\ p^2\times 2,\ 2p\times p,\ p\times 2p,\ 2\times p^2,\ \ 1\times 2p^2.$$

Според тоа, ако нивниот број е K, тогаш $K\equiv 0(\text{mod}\,p)$.

Сега ќе го определиме бројот L на правоаголниците чии страни не се паралелни со координатните оски. Да разгледаме три последователни темиња на таков правоаголник, кои имаат координати $(0,a),(b,0),(b+c,d)$. Очигледно, $c=ka, d=kb$ и $k(a^2+b^2)=2p^2$ за некој цел број k (зошто k е цел број?). Решенијата на оваа равенка се $k=1, a=b=p$ и $k=p^2, a=b=1$.

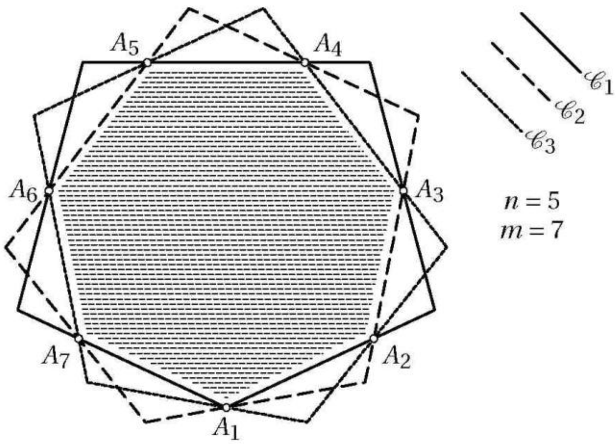
Во првиот случај имаме квадрат со страна $\sqrt{2}p$ и неговата положба е еднозначно определена од опишаниот околу него квадрат со страна $2p$. За второто решение имаме два правоаголника со плоштина $2p^2$, впишани во квадрат со страна p^2+1. Според тоа, за L добиваме

$$L\equiv(2p-1)^2+2p^4\equiv 1(\text{mod}\,p).$$

Конечно, $N=K+L\equiv 1(\text{mod}\,p)$.

32. Даден е цел број $n\ge 3$. Нека ℓ_1,ℓ_2 и ℓ_3 се границите на три конвексни $n-$аголници во рамнината такви да пресекот на секои две од нив е конечно множество точки. Определи го најголемиот можен број точки на $\ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3$.

Решение. Точките во $\ell_1 \cap \ell_2 \cap \ell_3$ се темиња на конвексен многуаголник P. Да разгледаме една негова страна AB. Таа припаѓа најмногу на една од границите на $n-$аголниците ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 (пресекот на било кои две граници не содржи отсечка), што значи дека правата AB отсекува од останатите два $n-$аголници барем по едно теме. Така секоја страна на P отсекува барем две од вкупно $3n$ темиња на ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3, па затоа P не може да има повеќе од $\frac{3n}{2}$ страни.

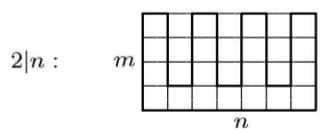


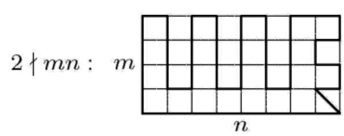
Бројот $m = [\frac{3n}{2}]$ може да се достигне. Нека $A_1A_2...A_m$ е конвексен $m-$аголник, a_k $(1 \le k \le m)$ права низ темињата A_k, A_{k+1} и b_k $(1 \le k \le 3n-m)$ произволна права низ A_k која со $m-$аголникот нема други заеднички точки ($A_{n+1} = A_1, b_{n+1} \ne b_1$). Доволно е да се дефинира $\ell_i, (i = 1,2,3)$ како многуаголник определен со сите прави a_k и b_q, каде $k \equiv q+1 \equiv i (\mathrm{mod}\, 3)$. Лесно се проверува дека ℓ_1, ℓ_2 и ℓ_3 се конвексни $n-$аголници.

33. Човек се наоѓа во точката $(1,1)$ во координатната рамнина и сака да најде предмет кој се наоѓа во некоја точка (a,b), каде $a \in \{1,2,...,m\}$, $b \in \{1,2,...,n\}$ и после тоа да се врати во точката од која тргнал. Колку време му е потребно за да ја заврши работата, ако не знае во која од дадените точки се наоѓа предметот и може да се движи во произволен правец со брзина не поголема од 1.

Решение. Човекот треба да ја посети секоја точка $(a,b), (1 \le a \le m, 1 \le b \le n)$, па затоа барем mn пати мора да помине пат со должина 1.

Ако, на пример, $2 \mid n$, човекот може тоа да го направи одејќи по пат со должина еднаква на mn (види цртеж).





Од друга страна, ако m и n се непарни, тогаш при секој премин во соседна точка се менува парноста на збирот на координатите на положбата. Бидејќи после непарен број чекори треба да се врати во почетната точка, заклучуваме дека барем во еден чекор треба да помине во некоја несоседна точка и така да помине пат со должина најмалку $\sqrt{2}$, па затоа вкупниот пат не е помал од $mn + \sqrt{2} - 1$ (види цртеж).

34. Квадратна шема со димензии 3×3 е пополнета како на цртежот.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Квадратната шема може да се трансформира во нова, на тој начин што две соседни полиња (што имаат заедничка страна) се намалуваат за вредноста на помалиот од двата броја што се запишани во нив. Дали по конечно многу вакви трансформации може да се добие шема пополнета со нули.

Решение. Со една ваква трансформација збирот на броевите од квадратната шема се намалува за парен број $2x$. Значи, неговата парност не се менува. Бидејќи збирот на почетокот е 45, т.е. непарен број, по конечно многу трансформации пак ќе биде непарен.

Значи, не може да се добие квадратна шема во која сите броеви се нули.

35. На кружница се означени 3000 точки. Во една од овие точки се наоѓа скакулец. Со секој свој скок скакулецот прескокнува една или две точки во насока на движењето на стрелката на часовникот и застанува на следната означена точка. Определи колку најмалку скокови направил скакулецот ако на секоја означена точка застанал барем еднаш и се вратил во почетната точка.

Решение. Скакулецот треба да направи најмалку 3001 скок.

Да ги означиме точките во насока на движењето на стрелките на часовникот со 1, 2 , 3, ..., 3000, тргнувајќи од точката во која скакулецот се наоѓа на почетокот. Скакулецот може да застане на секоја точка барем еднаш и да се врати во точката од која тргнал со 3001 скок на следниов начин:

$$1\xrightarrow{3}4\xrightarrow{3}7\xrightarrow{3}...\xrightarrow{3}2998\xrightarrow{2}3000\xrightarrow{3}3\xrightarrow{3}...\xrightarrow{3}2997\xrightarrow{2}2999\xrightarrow{3}2\xrightarrow{3}...\xrightarrow{3}2999\xrightarrow{2}1\,.$$

Ќе докажеме дека скакулецот тоа не може да го направи со помалку скокови. Нека k е бројот на скоковите со должина 2, а l е бројот на скоковите со должина 3. Бидејќи скаколецот мора да се врати во точката од која тргнал, т.е. мора да направи цел број полни кругови, постои природен број n таков што $2k+3l=3000n$. Понатаму, бидејќи скакулецот мора да застане на секоја точка барем еднаш важи $k+l\geq 3000$. Ако важи $k+l=3000$, тогаш од

$$3000n=2k+3l=2(k+l)+l=6000+l$$

ќе следува дека $3000\,|\,l$. Но, $k,l\geq 0$, па затоа мора да важи $l=0$ или $l=3000$. Случајот $l=0$ значи дека сите скокови се со должина 2, но тогаш скакулецот нема да застане на секоја означен точка. Случајот $l=3000$ значи дека сите скокови се со должина 3 и повторно скакулецот нема да застане на секоја означена точка. Значи, не е можно $k+l=3000$.

36. На табла се запишани $1,2,3,...,19$. Се изведува следнава постапка: кои било два броја x и y се бришат а на нивно место се запишува бројот $x+y-1$. Постапката се продолжува се додека не се добие само еден број. Кој е тој број?

Решение. Со a_k ќе ја означиме разликата на збирот од сите броеви кои се на таблата после k-тиот чекор, и од бројот на броевите кои после k-тиот чекор се запишани на таблата. За почетната позиција (нулти чекор) важи:

$$a_0=(1+2+3+4+...+19)-19=171\,.$$

Ќе докажеме дека важи: $a_k = a_p$ за секој k и p ($k \le 18$ и $p \le 18$). Нека во $k+1$-от чекор се запишани броевите x и y, а на нивно место е запишан бројот $x+y-1$. Тогаш се добива:

$$a_k = x + y + \sum z_i - (19-k)$$

и

$$a_{k+1} = (x+y-1) + \sum z_i - (19-k-1) = x + y + \sum z_i - (19-k).$$

Значи: $a_k = a_p$ за секој k и p ($k \le 18$ и $p \le 18$). Според тоа

$$a_{18} = d - 1 = a_0 = 171.$$

Конечно, се добива бројот 172.

37. Играчите A и B имаат на располагање две купчиња со по p и q монети. Тие играат наизменично, при што прв игра играчот A. Еден чекор се состои во отстранување на едно од купчињата и поделба на останатото купче на две купчиња. Губитник е оној кој не може да направи чекор. Кој од играчите во зависност од p и q има победничка стратегија? Одговорот да се образложи.

Решение. Ќе покажеме дека ако барем еден од броевите p и q е парен тогаш играчот A има победничка стратегија, инаку играчот B е победник.

Имено ако p и q се двата парни броја тогаш A, го трга едното од купчињата а останатото купче го дели на две непарни купчиња, B во наредниот чекор мора да отстрани непарно купче а останатото непарно купче мора да го раздели на едно парно и едно непарно купче, па така A во наредниот чекор го трга непарното купче и го дели парното купче на две непарни купчиња итн. се до позиција 1, 3 која му ја остава на B, тогаш јасно B мора да го отстрани првото купче а второто да го раздели на две купчиња т.е. 1, 2 и конечно во последниот чекор играчот A го отстранува првото купче и го дели второто купче на две купчиња 1, 1. И јасно играчот B не може да направи чекор.

38. На една табла се запишани природните броеви од 1 до 101. Двајца ученици наизменично прецртуваат по еден број од запишаните броеви на таблата, се додека не останат запишани само два броја. Ако збирот на тие два броја е делив со 5 победник е првиот играч, во спротивен случај победник е вториот играч.

Дали може да победи првиот играч?

Решение. Броевите 2 ,3, 4, 5, ..., 101 ќе ги групирираме во парови на следниот:

- ќе го формираме парот $(2,3)$ и

- ќе ги формираме паровите $(i+1)$ $(101-k, 4+k)$, $k = 0,1,2,3,...,48$.

Првиот играч, т.е. ученикот кој ја почнува играта во првиот чекор ќе го прецрта бројот 1.

Понатаму првиот играч играта може да ја игра на следниот начин:

- ако во i-тиот чекор вториот играч, т.е. вториот ученик го прецрта бројот $101-k$, тогаш во -от чекор првиот играч ќе го прецрта бројот $4+k$.

- ако во i-тиот чекор вториот игреач го прецрта бројот $4+k$, тогаш во $(i+1)$-от чекор првиот играч ќе го прецрета бројот $101-k$.

- ако во i -тиот чекор вториот играч го прецрта бројот еден од броевите 2 или 3, тогаш првиот играч во $(i+1)$ -от чекор ќе го прецрта непрецртаниот број од броевите 2 или 3.

На крај ќе останат два броја кои се броеви од еден ист пар. Нивниот збир ќе биде делив со 5. Значи, првиот играч може да игра и сигурно да победи во играта.

VIII ГЕНЕРАТОРНИ ФУНКЦИИ

1. ОБИЧНИ ГЕНЕРАТОРНИ ФУНКЦИИ

1. Нека е дадена низата реални броеви $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Функцијата

$$G(x)=\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \;, \tag{1}$$

каде редот конвергира во некоја област ја нарекуваме *генераторна функција за низата* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Определи ја генераторната функција на:

а) биномните коефициенти од $n=$ ти ред $\binom{n}{k}$, $k=0,1,2,...,n$,

б) низата $a_k=(-1)^k$, $k=0,1,2,3,...$

Решение. а) Од $(1+x)^n=\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$ следува дека бараната генераторна функција е $G(x)=(1+x)^n$.

б) Имаме

$$G(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k=1-x+x^2-x^3+...=\tfrac{1}{1+x}\text{, за } |x|<1.$$

Забелешка. Генераторната функција $(1+x)^n$ всушност е генераторна функција за бројот на комбинациите без повторување од класа k од n елементи.

2. Нека $g_1(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $g_2(x)$ е генераторна функција на низата $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$. Докажи, дека $g(x)=g_1(x)+g_2(x)$ е генераторна функција на низата $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$, каде $c_i=a_i+b_i$, $i=0,1,2,3,...$.

Функцијата $g(x)$ ја нарекуваме *збир на генераторните функции* g_1 и g_2.

Решение. Навистина, од претпоставката дека редовите $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ и $\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k x^k$ конвергираат следува дека редот $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k x^k+\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_k x^k$ конвергира во некоја област и притоа важи

$$g(x)=g_1(x)+g_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k+\sum_{k=0}^{\infty}b_k x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)x^k \;,$$

што значи дека $g(x)$ е генераторна функција на низата $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$.

3. Нека $g(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ и c е константа. Докажи дека $f(x)=cg(x)$ е генераторна функција на низата $\{ca_i\}_{i=0}^{\infty}$. Функцијата f ја нарекуваме *производ на генераторната функција* g *со константата* c.

Решение. Навистина, од претпоставката дека редот $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ конвергира следува дека редот $\sum\limits_{k=0}^{\infty} ca_k x^k$ конвергира во истата област и притоа важи

$$f(x) = cg(x) = c\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} ca_k x^k ,$$

што значи дека $f(x) = cg(x)$ е генераторна функција на низата $\{ca_i\}_{i=1}^{\infty}$.

4. Нека $g_1(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$, $g_2(x)$ е генераторна функција на низата $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Докажи, дека

$$g(x) = \alpha g_1(x) + \beta g_2(x)$$

е генераторна функција на низата $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$, каде $c_i = \alpha a_i + \beta b_i$, $i = 0,1,2,3,...$.

Решение. Доказот непосредно следува од задачите 2 и 3. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

5. Нека $g(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Докажи, дека $x^n g(x)$ е генераторна функција на низата $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$, каде $b_k = 0, k = 0,1,2,...,n-1$ и $b_k = a_{k-n}, k \geq n$.

Решение. Навистина,

$$x^n g(x) = x^n \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=n}^{\infty} a_{k-n} x^k$$

каде во последната сума собирањето може да се прошири на сите $k \geq 0$, ако земеме $a_k = 0$, за сите негативни вредности на k.

6. Определи ја генараторната функција на низата $a_k = 1$, $k = 0,1,2,3,...$.

Решение. Нека $g(x)$ е генераторна функција за низата $a_k = 1$, $k = 0,1,2,...$. Тогаш $xg(x)$ е генераторна функција за низата $a_0 = 0$, $a_k = 1$, $k = 1,2,...$. Значи,

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \text{ и } xg(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x^k ,$$

па затоа $g(x) - xg(x) = 1$, т.е. $(1-x)g(x) = 1$, од што следува дека

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = g(x) = \tfrac{1}{1-x} .$$

7. Нека $g(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Докажи, дека

$$\frac{g(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2 - ... - a_{n-1} x^{n-1}}{x^n}$$

е генераторна функција на низата $a_n, a_{n+1}, a_{n+2},...$.

Решение. Доказот е аналоген на доказот во задача 8.5. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

8. Нека $g(x)$ е генераторна функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$. Докажи, дека $g(cx)$ е генераторна функција на низата $\{c^i a_i\}_{i=0}^{\infty}$.

Решение. Од претпоставката дека редот $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ конвергира следува дека редот

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (cx)^k = \sum_{k=0}^{\infty} (c^k a_k) x^k$$

конвергира во некоја област и притоа важи

$$g(cx) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (cx)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c^k a_k x^k ,$$

што значи дека функцијата $g(cx)$ е генераторна функција на низата $\{c^i a_i\}_{i=0}^{\infty}$.

9. а) Нека $g_1(x)$ е генераторна функција за низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ и $g_2(x)$ е генераторна функција за низата $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$. Докажи, дека $g(x) = g_1(x) g_2(x)$ е генераторна функција за низата $\{c_i\}_{i=0}^{\infty}$ каде

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + ... + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 , \qquad (1)$$

Функцијата $g(x)$ ја нарекуваме *производ на генераторните функции* g_1 и g_2.

б) Нека

$$g_1(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...$$

е генераторна функција таква што $g_1(0) = a_0 \neq 0$. Докажи, дека постои единствена генераторна функција

$$g_2(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + ...$$

таква што $g_1(x) g_2(x) = 1$. Притоа пишуваме $g_2(x) = \frac{1}{g_1(x)}$.

Решение. а) Тврдењето непосредно следува од равенството

$$g(x) = g_1(x) g_2(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ...)(b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + ...)$$
$$= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0) x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0) x^2 + ...$$

б) Да ја разгледаме низата $c_0 = 1, c_i = 0, i = 1, 2, ...$, на која и соодветствува генераторната функција $g(x) = 1$. Членовите на низата $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ на која и соодветствува генераторната функција $g_2(x)$ ќе ги определиме индуктивно користејќи го равенството $g(x) = g_1(x) g_2(x)$. За $n = 0$, со замена во равенството (1) добиваме $a_0 b_0 = 1$ и како $a_0 \neq 0$ добиваме $b_0 = \frac{1}{a_0}$. Нека претпоставиме дека сме ги определиле $b_i, i = 0, 1, 2, ..., k-1$. Тогаш за $n = k$ од (1) добиваме

$$0 = c_k = a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + ... + a_{k-1} b_1 + a_k b_0$$

и како $a_0 \neq 0$ од последното равенство наоѓаме единствен

$$b_k = -\frac{a_1 b_{k-1} + a_2 b_{k-2} + ... + a_{k-1} b_1 + a_k b_0}{a_0} .$$

Конечно, од претходно изнесеното следува дека постои единствена генераторна функција $g_2(x)$ таква што $g_1(x) g_2(x) = 1$.

10. Нека е дадена низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Определи ја генераторната функција на парцијалните суми на редот $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$.

Решение. Нека $g_1(x)$ е генераторна функција за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. За низата $\{b_i\}_{i=0}^{\infty}$ определена со $b_i = 1$, $i = 0,1,2,...$ важи $g_2(x) = \frac{1}{1-x}$. Сега од задача 8.9 следува

$$\frac{1}{1-x} g_1(x) = a_0 + (a_0 + a_1) x + (a_0 + a_1 + a_2) x^2 + ... ,$$

т.е. $\frac{1}{1-x} g_1(x)$ е генераторна функција за парцијалните суми на редот $\sum_{i=0}^{\infty} a_i$.

11. (Теорема за инверзна генераторна функција). Нека

$$g_1(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + ... \text{ и } g_2(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + ...$$

се две генераторни функции, при што $g_2(0) = b_0 = 0$. Тогаш генераторната функција

$$g(t) = g_1(g_2(t)) = a_0 + a_1 b_1 t + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2) t^2 + (a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3) t^3 + ... \quad (1)$$

ја нарекуваме *композиција на генераторните функции* g_1 и g_2.

Нека генераторната функција

$$g(t) = b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + b_4 t^4 + ...$$

е таква што $b_1 \neq 0$. Тогаш постојат единствени генераторни функции

$$f(s) = a_1 s + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + ... ,$$

и

$$h(u) = c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + c_4 u^4 + ... ,$$

такви што $f(g(t)) = t$ и $g(h(u)) = u$. Функцијата f ја нарекуваме *лева инверзија,* а функција h ја нарекуваме *десна инверзија на функцијата* g.

Решение. Ќе ја докажеме егзистенцијата и единственоста на левата инверзна генераторна функција. Притоа коефициентите на генераторната функција $f(s)$ ќе ги определуваме последователно при што ќе го користиме условот $f(g(t)) = t$ и фактот дека функцијата $a(t) = t$ е генераторна за низата $d_0 = 0, d_1 = 1, d_i = 0, i > 1$. Според тоа, ако го искористиме равенството (1) за $n = 1$ добиваме $a_1 b_1 = 1$ и како $b_1 \neq 0$ имаме $a_1 = \frac{1}{b_1}$. Понатаму, повторно од (1) и фактот дека $d_2 = 0$, за $n = 2$

имаме $a_2 = -\frac{a_1 b_2}{b_1^2}$. Нека претпоставиме дека коефициентите $a_1, a_2, ..., a_n$ се веќе определени. Од $d_{n+1} = 0$ и од (1) следува дека е точно равенството

$$a_{n+1} b_1^{n+1} + P(a_1, ..., a_n, b_1, ..., b_n) = 0, \qquad (1)$$

каде P е полином. Равенката е линеарна по a_{n+1} и како $b_1^{n+1} \neq 0$, таа има единствено решение, што значи дека постои единствена генераторна функција $f(s)$ таква што $f(g(t)) = t$.

Егзистенцијата и единственоста на десната инверзна генераторна функција се докажува аналогно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

12. а) Ако функцијата $g(x)$ е генераторна за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, тогаш функцијата $g'(x)$ е генераторна за низата $\{na_n\}_{n=1}^{\infty}$.

б) Ако функцијата $g(x)$ е генераторна за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, тогаш функцијата $\int_0^x g(t)dt$ е генераторна за низата $0, a_0, \frac{a_1}{2}, \frac{a_2}{4}, ...$.

Решение. Тврдењата непосредно следуваат од својствата на степенските редови. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

13. Определи ги генераторната функции на низите

$$\{n+1\}_{n=0}^{\infty} \text{ и } 0, 1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, ..., \tfrac{1}{n}, ...$$

Решение. Според задача 6 генераторната функција на низата $a_k = 1$, $k = 0, 1, 2, 3, ...$ е $g(x) = \frac{1}{1-x}$. Сега, од задача 12 а) следува дека генераторната функција на низата $\{n+1\}_{n=0}^{\infty}$ е функцијата

$$g'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + ...,$$

а генарторната функција на низата $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ е функцијата

$$\int_0^x g(t)dt = -\ln(1-x) = x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{3}x^3 + ...$$

14. Броевите $H_0 = 0$ и $H_k = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{k}$, за $k = 1, 2, ...$. ги нарекуваме *хармониски броеви* и тие се еднакви на парцијалните суми на хармонискиот ред $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$.

а) Докажи, дека за секој природен број m важи

$$H_{2^m} \geq 1 + \frac{m}{2}. \qquad (1)$$

б) Определи ја генераторната функција на низата хармониски броеви.

Решение. а) Очигледно тврдењето важи за $m = 1$. Нека претпоставиме дека (1) важи за некој $m \geq 1$. Тогаш

$$\begin{aligned}H_{2^{m+1}} &= H_{2^m} + \tfrac{1}{2^m+1} + \tfrac{1}{2^m+2} + \tfrac{1}{2^m+3} + \dots + \tfrac{1}{2^{m+1}} \\ &\geq H_{2^m} + 2^m \tfrac{1}{2^{m+1}} = H_{2^m} + \tfrac{1}{2} \\ &\geq 1 + \tfrac{m}{2} + \tfrac{1}{2} = 1 + \tfrac{m+1}{2}.\end{aligned}$$

Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека (2) важи за секој природен број m.

б) Во задача 10 докажавме дека генераторната функција за низата парцијални суми на редот $\sum\limits_{i=0}^{\infty} a_i$ е функцијата $\frac{1}{1-x} g_1(x)$, каде $g_1(x)$ е генераторната функција на низата $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$. Понатаму, во задача 13 докажавме дека генераторната функција на низата $0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ е $g_1(x) = -\ln(1-x)$. Според тоа, генераторната функција на низата парцијални суми на дивергентниот ред $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1}$, т.е. на низата хармониски броеви е дадена со

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{1-x} \ln(1-x) &= (1 + x + x^2 + x^3 + \dots)(x + \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{3} x^3 + \tfrac{1}{4} x^4 + \dots) \\ &= x + \tfrac{3}{2} x^2 + \tfrac{11}{6} x^3 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} H_k x^k,\end{aligned}$$

15. Определи ја генераторната функција на низата $a_n = \frac{1}{(n+1)(n+2)}$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Решение. Имаме

$$f(x) = \tfrac{1}{1 \cdot 2} + \tfrac{1}{2 \cdot 3} x + \tfrac{1}{3 \cdot 4} x^2 + \dots + \tfrac{1}{(n+1)(n+2)} x^n + \dots .$$

Последното равенство го множиме со x^2, диференцираме и ако го искористиме добиениот резултат поа а) добиваме

$$(x^2 f(x))' = x + \tfrac{1}{2} x^2 + \tfrac{1}{3} x^3 + \dots + \tfrac{1}{n} x^n + \dots = -\ln(1-x).$$

Конечно, од последното равенство наоѓаме

$$f(x) = -x^2 \int_0^x \ln(1-t) dt = x^2[(1-x)\ln(1-x) + x].$$

16. Докажи, дека за секој $m \geq 1$ важи

$$\frac{1}{(1-ax)^m} = 1 + \binom{m}{1} ax + \binom{m+1}{2} a^2 x^2 + \binom{m+2}{3} a^3 x^3 + \dots + \binom{m+n-1}{n} a^n x^n + \dots \qquad (1)$$

Решение. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по m.

За $m = 1$ од задачите 6 и 7 следува

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{1-ax} &= 1 + ax + a^2 x^2 + a^3 x^3 + \dots + a^n x^n + \dots \\ &= 1 + \binom{1}{1} ax + \binom{1+1}{1} a^2 x^2 + \binom{1+2}{1} a^3 x^3 + \dots + \binom{1+n-1}{1} a^n x^n + \dots\end{aligned}$$

т.е. важи равенството (1).

Нека претпоставиме дека (1) важи за $m = k$, т.е. дека

$$\frac{1}{(1-ax)^k}=1+\binom{k}{1}ax+\binom{k+1}{2}a^2x^2+\binom{k+2}{3}a^3x^3+...+\binom{k+n-1}{n}a^nx^n+.... \qquad (2)$$

Сакаме да докажеме дека

$$\frac{1}{(1-ax)^{k+1}}=1+\binom{k+1}{1}ax+\binom{k+2}{2}a^2x^2+\binom{k+3}{3}a^3x^3+...+\binom{k+n}{n}a^nx^n+.... \qquad (3)$$

Од $\frac{1}{(1-ax)^k}=(1-ax)\frac{1}{(1-ax)^{k+1}}$ следува дека (3) важи ако и само ако при множење на (3) со $1-ax$ се добива генераторната функција за $\frac{1}{(1-ax)^k}$, т.е. се добива (2). Ако го искористиме Паскаловото равенство $\binom{k+n-1}{n}+\binom{k+n-1}{n-1}=\binom{k+n}{n}$ кое е еквивалентно на равенството $\binom{k+n}{n}-\binom{k+n-1}{n-1}=\binom{k+n-1}{n}$ добиваме

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-ax)^k}&=\frac{1}{(1-ax)^{k+1}}(1-ax)\\ &=(1-ax)[1+\binom{k+1}{1}ax+\binom{k+2}{2}a^2x^2+\binom{k+3}{3}a^3x^3+...+\binom{k+n}{n}a^nx^n+...]\\ &=1+\binom{k+1}{1}ax+\binom{k+2}{2}a^2x^2+\binom{k+3}{3}a^3x^3+...+\binom{k+n}{n}a^nx^n+...\\ &\qquad -ax-\binom{k+1}{1}a^2x^2-\binom{k+2}{2}a^3x^3-...-\binom{k+n-1}{n}a^nx^n-...\\ &=1+\binom{k}{1}ax+\binom{k+1}{2}a^2x^2+\binom{k+2}{3}a^3x^3+...+\binom{k+n-1}{n}a^nx^n+...,\end{aligned}$$

а тоа е равенството (2). Конечно, од претходно изнесеното следува дека тврдењето важи за $m=k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $m\ge 1$.

Забелешка. Ако во (1)земеме $a=1$ ја добиваме генераторната фунција

$$\frac{1}{(1-x)^m}=1+\binom{m}{1}x+\binom{m+1}{2}x^2+\binom{m+2}{3}x^3+...+\binom{m+n-1}{n}x^n+...$$

која всушност е генераторна функција за бројот на комбинациите со повторување од класа k од m елементи.

17. Реши ја диференцната равенка

$$a_0=5,\quad a_k=a_{k-1}+3,\ \text{за}\ k\ge 1. \qquad (1)$$

Решение. Нека

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \qquad (2)$$

е генераторната функција за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Ако (2) го помножиме со x добиваме

$$xf(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+1}. \qquad (3)$$

Понатаму, во (4) имаме константа 3, па затоа ја наоѓаме генераторната функција на низата $b_n=3, n\ge 0$ и тоа е функцијата

$$\frac{3}{1-x}=3\sum_{i=1}^{\infty}x^i=\sum_{i=1}^{\infty}3x^i. \qquad (4)$$

Од равенствата (2), (3) и (4) наоѓаме

$$f(x)-xf(x)-\tfrac{3}{1-x}=a_0-3+(a_1-a_0-3)x+(a_2-a_1-3)x^2+...+(a_n-a_{n-1}-3)x^n+...$$
$$=a_0-3=5-3=2$$

и ако последната равенка ја решиме по $f(x)$ и ја искористиме задача 8.15 добиваме

$$f(x)=\tfrac{3}{(1-x)^2}+\tfrac{2}{1-x}=3(1+2x+3x^2+...+(n+1)x^n+...)+2(1+x+x^2+...+x^n+...)$$
$$=5+8x+11x^2+14x^3+...+(3n+5)x^n+...,$$

што значи $a_n=3n+5,$ за $n\geq 0$.

18. Со помош на генераторни функции изведи ја формулата за општиот член на низата на Фибоначи:

$$f_0=0,\ f_1=1,\quad f_{n+2}=f_{n+1}+f_n,\ \text{за } n\geq 0.$$

Решение. Нека $F(x)$ е генераторната функција на низата на Фибоначи, т.е.

$$F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}f_nx^n\ .$$

Од $f_0=0$ и $f_1=1$ последователно добиваме

$$\tfrac{F(x)}{x}=\tfrac{F(x)-f_0}{x}=f_1+f_2x+f_3x^2+...+f_{n+1}x^n+...\quad \text{и}$$
$$\tfrac{F(x)-x}{x^2}=\tfrac{F(x)-f_0-f_1x}{x^2}=f_2+f_3x+f_4x^2+...+f_{n+2}x^n+....$$

Ако во последното равенство замениме $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n$, за $n\geq 0$ добиваме

$$\tfrac{F(x)-x}{x^2}=f_0+f_1+(f_1+f_2)x+(f_2+f_3)x^2+...+(f_n+f_{n+1})x^n+...$$
$$=[f_0+f_1x+f_2x^2+...+f_nx^n+...]+[f_1+f_2x+f_3x^2+...+f_{n+1}x^n+...]$$
$$=F(x)+\tfrac{F(x)}{x}$$

од каде наоѓаме $F(x)=\frac{x}{1-x-x^2}$.

Нека a и b се корените на равенката $1-x-x^2=0$, т.е. $a=-\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ и

$$1-x-x^2=-(a-x)(b-x)\ .$$

Понатаму, ќе ги определиме константите A и B такви што

$$\tfrac{x}{1-x-x^2}=\tfrac{A}{a-x}+\tfrac{B}{b-x}\ .$$

Ако последното равенство го помножиме со $1-x-x^2$ после средувањето добиваме

$$-x=-(A+B)x+Ab+Ba$$

од каде го добиваме системот

$$\begin{cases}A+B=1\\ Ab+Ba=1\end{cases}$$

чие решение е $A=-\frac{a}{b-a}$ и $B=\frac{b}{b-a}$. Од досега изнесеното, со примена на задачите 6, 8 и 2 добиваме

$$F(x)=\frac{A}{a-x}+\frac{B}{b-x}=\frac{1}{b-a}\left(\frac{b}{b-x}-\frac{a}{a-x}\right)=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{1-\frac{x}{b}}-\frac{1}{1-\frac{x}{a}}\right)$$

$$=\frac{1}{b-a}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{b}\right)^n-\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{a}\right)^n\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{b^n}-\frac{1}{a^n}\right)\cdot\frac{1}{b-a}x^n.$$

Конечно, од својствата на степенските редови следува дека

$$f_n=\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{b^n}-\frac{1}{a^n}\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{a^n-b^n}{(ab)^n}=(-1)^n\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^n\right]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

19. Нека низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ја задоволува линеарната диференцна равенка

$$a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}+...+c_ma_{n-m} \tag{1}$$

од $m-$ти ред со константни коефициенти $c_1,c_2,...,c_m$ и почетни услови $a_0,a_1,...,a_m$. Докажи, дека генераторната функција $g(x)$ на оваа низа е од видот $g(x)=\frac{P_{m-1}(x)}{Q_m(x)}$, каде $Q_m(x)$ е полином од $m-$ти степен, а степенот на полиномот $P_{m-1}(x)$ е помал или еднаков на $m-1$.

Решение. Нека претпоставиме дека треба да ја определиме генераторната функција на низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ која ја задоволува диференцната равенка (1). Првите m членови на низата се $a_0,a_1,...,a_{m-1}$, па затоа

$$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{m-1}x^{m-1}+a_mx^m+...$$

$$xg(x)=a_0x+a_1x^2+a_2x^3+...+a_{m-1}x^m+a_mx^{m+1}+...$$

$$x^2g(x)=a_0x^2+a_1x^3+a_2x^4+...+a_{m-1}x^{m+1}+a_mx^{m+2}+...$$

....

$$x^mg(x)=a_0x^m+a_1x^{m+1}+a_2x^{m+2}+...+a_{m-1}x^{2m-1}+a_mx^{2m}+...$$

Сега, ако втората равенка ја помножиме со $-c_1$, третата со $-c_2$ итн. последната со $-c_m$, после собирањето добиваме

$$g(x)(1-c_1x-c_2x^2-...c_mx^m)=P_{m-1}(x)$$

каде $P_{m-1}(x)$ е полином со степен помал од m. Имено, од (1) следува дека после собирањето на десната страна сите коефициенти пред x^k, $k\geq m$ се еднакви на нула. Значи, генераторната функција на нашата низа е рационалната функција $g(x)=\frac{P_{m-1}(x)}{Q_m(x)}$.

20. Нека генераторната функција

$$g(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_{m-1}x^{m-1}+a_mx^m+... \tag{1}$$

е рационална, т.е. ако $g(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$, каде $P(x)$ и $Q(x)$ се заемно прости полиноми. Докажи, дека почнувајќи од некој број n низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ја задоволува линеарната диференцна равенка

$$a_{n+m}=c_1a_{n+m-1}+c_2a_{n+m-2}+...+c_ma_n\,, \qquad (2)$$

каде m е степенот на полиномот $Q(x)$, а $c_1,c_2,...,c_m$ се некои константи.

Решение. Од $g(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ следува $g(x)Q(x)=P(x)$. Сега ако во последното равенство од (1) замениме за $g(x)$ и за полиномите $P(x)$ и $Q(x), \deg Q=m$ после изедначување на коефициентите пред соодветните степени добиваме , дека почнувајќи од некој број n низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ ја задоволува линеарната диференцна равенка (2), каде m е степенот на полиномот $Q(x)$, а $c_1,...,c_m$ се некои константи. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

21. Реши ја диференцната равенка

$$a_0=1,\ a_1=4,\ a_k=a_{k-1}+6a_{k-2},\quad k\geq 2\,. \qquad (1)$$

Решение. Нека $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kx^k$ е генераторната функција за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Бидејќи во диференцната равенка (1) коефициентот пред a_{k-1} е 1, а пред a_{k-2} е 6 со множење со x и $6x^2$ наоѓаме

$$xf(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^{k+1}\,. \qquad (2)$$

$$6x^2f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}6a_kx^{k+2}\,. \qquad (3)$$

Сега, од равенствата (2) и (3) наоѓаме

$$\begin{aligned}f(x)-xf(x)-6x^2f(x)&=a_0+(a_1-a_0)x+(a_2-a_1-6a_0)x^2+...+(a_n-a_{n-1}-6a_{n-2})x^n+...\\&=a_0+(a_1-a_0)x=1+3x.\end{aligned}$$

Ако последната равенка ја решиме по $f(x)$ добиваме

$$f(x)=\frac{1+3x}{1-x-6x^2}=\frac{1+3x}{(1-3x)(1+2x)}\,. \qquad (4)$$

Користејќи го методот на неопределени коефициенти имаме

$$\frac{1+3x}{(1-3x)(1+2x)}=\frac{a}{1-3x}+\frac{b}{1+2x}=\frac{a+b+(2a-3b)x}{(1-3x)(1+2x)}\,,$$

т.е. го добиваме системот равенка

$$\begin{cases}a+b=1\\2a-3b=3\end{cases}$$

чие решение е $a=\frac{6}{5},\ b=-\frac{1}{5}$. Со замена во (4) добиваме

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{1-3x}-\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{1+2x}=\\&=\frac{6}{5}(1+3x+3^2x^2+...+3^nx^n+...)-\frac{1}{5}(1-2x+(-2)^2x^2+...+(-2)^nx^n+...)\end{aligned}$$

односно

$$a_n = \tfrac{1}{5}[6\cdot 3^n - (-2)^n],\ \text{за}\ n \ge 0\,.$$

22. Низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ е зададена со рекуретната релација

$$a_0 = 2, a_1 = 7, \quad a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + 3^n, n \ge 0\,.$$

Определи експлицитен израз за a_n.

Решение. Нека $A(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ е генераторната функција за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Од $a_0 = 2$ и $a_1 = 7$ последователно следуваат следните равенства

$$\tfrac{A(x)-2}{x} = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + ... + a_{n+1}x^n + ... \quad \text{и}$$

$$\tfrac{A(x)-2-7x}{x^2} = a_2 + a_3 x + a_4 x^2 + ... + a_{n+2}x^n + ...$$

Ако во последното равенство замениме $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n + 3^n$, за $n \ge 0$ и земеме во предвид дека $1 + 3x + 3^2 x^2 + ... + 3^n x^n + ... = \tfrac{1}{1-3x}$ добиваме

$$\tfrac{A(x)-2-7x}{x^2} = 4\cdot\tfrac{A(x)-2}{x} - 4A(x) + \tfrac{1}{1-3x}\,,$$

од каде наоѓаме

$$\begin{aligned} A(x) &= \tfrac{4x^2-7x+2}{(1-3x)(1-2x)^2} = \tfrac{(1-3x)+(1-2x)^2}{(1-3x)(1-2x)^2} = \tfrac{1}{1-3x} + \tfrac{1}{(1-2x)^2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(3x)^n + \sum_{n=0}^{\infty}\tbinom{n+1}{n}(2x)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)2^n + 3^n]x^n, \end{aligned}$$

од каде следува дека $a_n = (n+1)2^n + 3^n$, за $n \ge 0$.

23. Реши ја диференцната равенка

$$a_0 = 1, \quad a_k = 3a_{k-1} + 4^k, k \ge 1 \tag{1}$$

Решение. Нека $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ е генераторната функција за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Бидејќи во диференцната равенка (13) коефициентот пред a_{k-1} е еднаков на 3 наоѓаме

$$3xf(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 3a_k x^{k+1}\,. \tag{2}$$

Понатаму, во (1) имаме член 4^k, па затоа ја наоѓаме генераторната функција на низата $b_k = 4^k, k \ge 0$ и тоа е функцијата

$$\tfrac{1}{1-4x} = \sum_{k=0}^{\infty} 4^k x^k\,. \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3) наоѓаме

$$f(x)-3xf(x)-\frac{1}{1-4x}=a_0-1+(a_1-3a_0-4)x+(a_2-3a_1-4^2)x^2+...+(a_n-3a_{n-1}-4^n)x^n+...$$
$$=a_0-1=1-1=0.$$

Последната равенка ја решаваме по $f(x)$ и добиваме:

$$f(x)=\frac{1}{(1-4x)(1-3x)}=\frac{4}{1-4x}-\frac{3}{1-3x}=4\sum_{k=0}^{\infty}4^k x^k-3\sum_{k=0}^{\infty}3^k x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(4^{k+1}-3^{k+1})x^k,$$

од каде наоѓаме $a_k=4^{k+1}-3^{k+1}, k\geq 0$.

24. Реши ја диференцната равенка

$$a_0=3,\quad a_k=2a_{k-1}+k,\, k\geq 1 \tag{1}$$

Решение. Нека $f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^k$ е генераторната функција за низата $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$. Бидејќи во диференцната равенка (1) коефициентот пред a_{k-1} е еднаков на 2 наоѓаме

$$2xf(x)=\sum_{k=0}^{\infty}2a_k x^{k+1}. \tag{2}$$

Понатаму, во (1) имаме член k, па затоа ја наоѓаме генераторната функција на низата $b_k=k, k\geq 0$ и тоа е функцијата

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{k=1}^{\infty}kx^k. \tag{3}$$

Од (1), (2) и (3) наоѓаме

$$f(x)-2xf(x)-\frac{x}{(1-x)^2}=a_0+(a_1-2a_0-1)x+(a_2-2a_1-2)x^2+...+(a_n-2a_{n-1}-n)x^n+...$$
$$=a_0=3.$$

Последната равенка ја решаваме по $f(x)$ и добиваме:

$$f(x)=\frac{3-5x+3x^2}{(1-2x)(1-x)^2}=\frac{-1}{1-x}-\frac{1}{(1-x)^2}+\frac{5}{1-2x}$$
$$=-\sum_{k=0}^{\infty}x^k-\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k+5\sum_{k=0}^{\infty}2^k x^k=\sum_{k=0}^{\infty}(-k-2+5\cdot 2^k)x^k,$$

од каде наоѓаме $a_k=-k-2+5\cdot 2^k, k\geq 0$.

25. За секој природен број n, нека

$$S_n=1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n},$$
$$T_n=S_1+S_2+...+S_n,$$
$$U_n=\frac{T_1}{2}+\frac{T_2}{3}+...+\frac{T_n}{n+1}.$$

За секој n определи константи a_n,b_n,c_n,d_n такви, што

$$T_n=a_nS_{n+1}+b_n \text{ и } U_n=c_nS_{n+1}+d_n.$$

Решение. Нека

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}S_n x^n,\quad T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n x^n \text{ и } U(x)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n x^n$$

се генераторните функции за разгледуваните низи. Од условот имаме

$$T_n-T_{n-1}=S_n \text{ и } S_n-S_{n-1}=\tfrac{1}{n}$$

па затоа

$$\begin{aligned}(1-x)T(x)&=T_1x+(T_2-T_1)x^2+\ldots+(T_n-T_{n-1})x^n+\ldots\\&=S_1x+S_2x^2+\ldots+S_nx^n+\ldots=S(x)\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}(1-x)^2T(x)=(1-x)S(x)&=S_1x+(S_2-S_1)x^2+\ldots+(S_n-S_{n-1})x^n+\ldots\\&=x+\tfrac{x^2}{2}+\ldots+\tfrac{x^n}{n}+\ldots\end{aligned}$$

Според тоа,

$$[(1-x)^2T(x)]'=1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=\tfrac{1}{1-x}$$

т.е.

$$-2(1-x)T(x)+(1-x)^2T'(x)=\tfrac{1}{1-x}$$

од што следува

$$-2T(x)+(1-x)T'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\tbinom{n+1}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n\ . \quad (1)$$

Од друга страна имаме

$$\begin{aligned}(1-x)T'(x)&=(1-x)\sum_{n=1}^{\infty}nT_nx^{n-1}=T_1+\sum_{n=1}^{\infty}[(n+1)T_{n+1}-nT_n]x^n\\&=T_1+\sum_{n=1}^{\infty}T_nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)S_{n+1}x^n=T(x)+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)S_{n+1}x^n\end{aligned}$$

од што според (1) добиваме

$$-T(x)+\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)S_{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$

т.е.

$$T(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+1)S_{n+1}-(n+1)]x^n$$

од што следува $T_n=(n+1)S_{n+1}-(n+1)$, што значи $a_n=n+1$ и $b_n=-(n+1)$. Слично, за $U(x)$ имаме

$$\begin{aligned}(1-x)U(x)&=U_1x+(U_2-U_1)x^2+\ldots+(U_n-U_{n-1})x^n+\ldots\\&=\tfrac{T_1}{2}x+\tfrac{T_2}{3}x^2+\ldots+\tfrac{T_n}{n+1}x^n+\ldots\\&=(S_2-1)x+(S_3-1)x^2+\ldots+(S_{n+1}-1)x^n+\ldots\\&=\sum_{i=1}^{\infty}S_ix^{i-1}-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\tfrac{S(x)}{x}-\tfrac{1}{1-x}\end{aligned}$$

од што следува

$$U(x)=\tfrac{1}{1-x}\cdot\tfrac{S(x)}{x}-\tfrac{1}{(1-x)^2}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(\sum_{j=1}^{n+1}S_j)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}[T_{n+1}-(n+1)]x^n$$

што значи дека $U_n=T_{n+1}-(n+1)$. Според тоа,

$$\begin{aligned}U_n&=(n+2)S_{n+2}-(n+2)-(n+1)\\&=(n+2)(S_{n+1}+\tfrac{1}{n+2})-1-2(n+1)\\&=(n+2)S_{n+1}-2(n+1)\end{aligned}$$

од што добиваме $c_n=n+2$ и $d_n=-2(n+1)$.

26. Докажи, дека генераторната функција на низата $\{a_i\}_{i=0}^{\infty}$ е рационална ако и само ако постојат броеви $q_1,q_2,...,q_k$ и полиноми $p_1(t),p_2(t),...,p_k(t)$ такви што почнувајќи од некој n важи

$$a_n=p_1(t)q_1^n+p_2(t)q_2^n+...+p_k(t)q_k^n. \qquad (1)$$

Изразот на десната страна на (1) го нарекуваме *квазиполином* од променлива n.

Решение. Најпрво да забележиме дека генераторната функција $(1-qx)^{-m}$ има вид

$$\begin{aligned}(1-qx)^{-m}&=1+\tbinom{m}{1}qx+\tbinom{m+1}{2}q^2x^2+\tbinom{m+2}{3}q^3x^3+\tbinom{m+3}{4}q^4x^4+...\\&=1+\tbinom{m}{m-1}qx+\tbinom{m+1}{m-1}q^2x^2+\tbinom{m+2}{m-1}q^3x^3+\tbinom{m+3}{m-1}q^4x^4+...\end{aligned}$$

Коефициентот пред x^n во оваа генераторна функција е

$$\tfrac{(n+1)(n+2)...(n+m-1)}{(m-1)!}q^n=P_{m-1}(n)q^n, \qquad (2)$$

каде $P_{m-1}(n)$ е полином од n од $(m-1)-$ви степен. Според XV 4.7 секоја рационална функција од x може да се запише во вид на линеарна комбинација од полиноми и елементарни дропки од видот $(1-q_ix)^{-m_i}$, па затоа коефициентите на соодветната генераторна функција се квазиполиноми.

Обратно, нека претпоставиме дека коефициентите на генераторната функција, почнувајќи од некој број n, можат да се запишат како казиполиноми. Ќе докажеме дека за квазиполиномот $p(n)q^n$ соодветната генераторна функција е рационална. Нека степенот на p е еднаков на $m-1$. Според пример X 4.2. в) полиномите $P_0,P_1,...,P_{m-1}$ определени со равенството (2) формираат база на просторот полиноми со степен помал или еднаков на $m-1$. Затоа полиномот p може да се запише како линеарна комбинација на полиномите $P_0,P_1,...,P_{m-1}$, што значи дека соодветната генераторна функција е линеарна комбинација од функциите $(1-qx)^{-i}$, $i=1,2,...,m-1$. За произволен квазиполином добиваме линеарна комбинација од функции од ваков вид за различни q_i, со што тврдењето е докажано.

27. *Производ на Адамар* за генераторните функции

$$g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots$$

и

$$h(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots$$

ја нарекуваме генераторната функција

$$f(x) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + a_2 b_2 x^2 + a_3 b_3 x^3 + \ldots .$$

Докажи, дека производот на Адамар на две рационални генераторни функции и рационална генераторна функција.

Решение. Тврдењето следува непосредно од задача 25 и фактот дека согласно равенството (1) во задача 25 производ на квазиполиноми е квазиполином. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

28. Определи ги бројот на решенијата на равенката

$$e_a + e_b + e_c + e_d = r,$$

каде $0 \le r \le 6$, $e_a, e_b, e_c, e_d \in \mathbb{Z}$ и $0 \le e_a \le 1, 0 \le e_b \le 1, 0 \le e_c \le 2, 0 \le e_d \le 2$.

Решение. Да го разгледаме производот

$$(1_a + x_a)(1_b + x_b)(1_c + x_c + x_c^2)(1_d + x_d + x_d^2)$$

каде индексите служат само за следење на множителите на кој му припаѓа секој x, т.е. индексите не влијаат на вредноста на променливата. Ако земеме дека $x_i^0 = 1$, за $i = a, b, c, d$ и го разгледаме членот x^4 добиваме дека тој се јавува во секој собирок од збирот:

$$x_a^0 x_b^0 x_c^2 x_d^2 + x_a^0 x_b^1 x_c^2 x_d^1 + x_a^1 x_b^0 x_c^2 x_d^1 + x_a^1 x_b^1 x_c^2 x_d^0 +$$
$$+ x_a^0 x_b^1 x_c^1 x_d^2 + x_a^1 x_b^0 x_c^1 x_d^2 + x_a^1 x_b^1 x_c^0 x_d^2 + x_a^1 x_b^1 x_c^1 x_d^1$$

при што збирот на степените во секој член е еднаков на 4. Затоа, разгледувајќи ги степените на членовите, гледаме дека истите ги даваат сите решенија на равенката

$$e_a + e_b + e_c + e_d = 4,$$

каде $e_a, e_b, e_c, e_d \in \mathbb{Z}$ и $0 \le e_a \le 1, 0 \le e_b \le 1, 0 \le e_c \le 2, 0 \le e_d \le 2$. Аналогно, за $0 \le r \le 6$ коефициентот пред x^r го дава бројот на решенијата на равенката

$$e_a + e_b + e_c + e_d = r,$$

каде $e_a, e_b, e_c, e_d \in \mathbb{Z}$ и $0 \le e_a \le 1, 0 \le e_b \le 1, 0 \le e_c \le 2, 0 \le e_d \le 2$.

29. Нека A е множество кое содржи 1 објект од тип a, 1 објект од тип b, 2 објекта од тип c и 2 објекта од тип d. Определи го бројот на начините на кој може да се изберат 4 објекти од дадените 4 типа во множеството A.

Решение. Да го разгледаме производот

$$(1_a + x_a)(1_b + x_b)(1_c + x_c + x_c^2)(1_d + x_d + x_d^2).$$

Нека x_i^j претставува j објекти од тип i, што значи дека 1_a претставува 0 објекти од тип a, x_b претставува 1 објект од тип b и x_c^2 претставува 2 објекти од тип c. Така, $x_a^1 x_b^1 x_c^2 x_d^0$ преставува избор на 1 објект од тип a, 1 објект од тип b и

2 објекти од тип c и 0 објекти од тип d. Според тоа, коефициентот пред x^4 е еднаков на бројот на начините на кој може да се изберат 4 објекти од дадените 4 типа во множеството A.

30. Во сад имаме 4 црвени, 5 сини и 2 зелени топчиња.

а) На колку различни начини од садот можат да се изберат 7 топчиња?

б) На колку различни начини можат да се извлечат 7 топчиња, но притоа да мора да се извлече 1 црвено и 2 сини топчиња?

Решение. а) Генераторната функција е:

$$(1+x+x^2+x^3+x^4)(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2)$$

и бараниот број е еднаков на коефициентот пред x^7.

б) Бидејќи мора да се извлече барем едно црвено топче, множителот кој соодветствува на барањето на црвените топчиња е $x+x^2+x^3+x^4$. Слично, множителот кој соодветствува на барањето на сини топчиња е $x^2+x^3+x^4+x^5$. Значи генераторната функција е

$$(x+x^2+x^3+x^4)(x^2+x^3+x^4+x^5)(1+x+x^2)$$

и бараниот број е еднаков на коефициентот пред x^7.

31. Нека претпоставиме дека во сад се наоѓаат 3 црвени, 8 зелени, 9 портокалови и 2 бели топчиња. На колку начини можат да се изберат 12 топчиња, ако мора да се изберат барем едно црвено топче, парен број зелени топчиња и непарен број портокалови топчиња?

Решение. Бидејќи од 3 црвени мора да се избере барем едно топче полиномот за црвените топчиња е $x+x^2+x^3$. Бидејќи од 8 зелени топчиња мора да се избере парен број топчиња, добиваме дека може да се изберат 0 или 2 или 4 или 6 или 8 топчиња, па затоа полиномот за зелените топчиња е

$$1+x^2+x^4+x^6+x^8.$$

Слично, полиномот за портокаловите топчиња е

$$x+x^3+x^5+x^7+x^9,$$

а полиномот за белите топчиња е

$$1+x+x^2.$$

Според тоа, за поставениот проблем генераторната функција е

$$(x+x^2+x^3)(1+x^2+x^4+x^6+x^8)(x+x^3+x^5+x^7+x^9)(1+x+x^2)$$

и бараниот број е коефициентот пред x^{12}.

32. Определи го коефициентот пред x^{24} во развојот

$$(x^3+x^4+x^5+x^6+...)^4.$$

Решение. Според задача 15 имаме

$$(x^3+x^4+x^5+x^6+...)^4=(x^3)^4(1+x+x^2+x^3+x^4+...)^4=x^{12}(\tfrac{1}{1-x})^4=x^{12}\,\frac{1}{(1-x)^4}$$

$$=x^{12}(1+4x+\tbinom{5}{2}x^2+\tbinom{6}{3}x^3+...+\tbinom{4+n-1}{n}x^n+...).$$

Значи, за да го определиме коефициентот пред x^r треба да го определиме коефициентот пред x^{r-12} во генераторната функција

$$1+4x+\binom{5}{2}x^2+\binom{6}{3}x^3+\ldots+\binom{4+n-1}{n}x^n+\ldots,$$

па затоа коефициентот пред x^r е

$$\binom{4+r-12-1}{r-12}=\binom{r-9}{r-12}.$$

Конечно, коефициентот пред x^{24} е $\binom{24-9}{24-12}=\binom{15}{12}$.

33. На колку начини 12 објекти можат да се изберат од 5 видови објекти, при што мора да има најмногу 2 објекти од првите три видови, а неограничен број објекти од останатите два видови објекти?

Решение. Генераторната функција е:

$$(1+x+x^2)^3(1+x+x^2+x^3+x^4+\ldots)^2=\left(\frac{1-x^3}{1-x}\right)^3\left(\frac{1}{1-x}\right)^2=(1-x^3)^3\cdot\frac{1}{(1-x)^5}$$

$$=(1-3x^3+3x^6-x^9)(1+5x+\binom{6}{2}x^2+\ldots+\binom{5+n-1}{n}x^n+\ldots).$$

Ако ги помножиме последните два полиноми, добиваме дека коефициентот пред x^{12}, т.е. бараниот број избори е

$$1\cdot\binom{5+12-1}{12}-3\binom{5+9-1}{9}+3\binom{5+6-1}{6}-\binom{5+3-1}{3}=\binom{16}{12}-3\binom{13}{9}+3\binom{10}{6}-\binom{7}{3}.$$

34. На колку начини 20 објекти можат да се изберат, ако објектите од првиот вид можат да се изберат само во пакети од по 5 објекти, од вториот вид само во пакети од по 3 објекти, од третиот вид можат да се земат најмногу 4, од четвртиот вид најмалку 3 објекти и може да се земат најмнугу 2 објекти од петтиот вид?

Решение. Генераторната функција за поставениот проблем е:

$$(1+x^5+x^{10}+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)(1+x+x^2+x^3+x^4)(x^3+x^4+\ldots)(1+x+x^2)=$$

$$=\frac{1}{1-x^5}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^5}{1-x}\cdot\frac{x^3}{1-x}\cdot\frac{1-x^3}{1-x}=\frac{x^3}{(1-x)^3}$$

$$=x^3(1+3x+\binom{4}{2}x^2+\binom{5}{3}x^3+\ldots+\binom{3+n-1}{n}x^n+\ldots).$$

Бараниот број избори е коефициентот пред x^{20}. Но коефициентот пред x^r е $\binom{r-1}{r-3}$, па затоа бараниот број избори е $\binom{19}{17}$.

35. Најди ја генераторната функција чиј $n-$ти коефициент го дава бројот на ненегативните решенија на равенката

$$e_1+4e_2+5e_3+3e_4=n.$$

Решение. Бараниот број е еднаков на бројот на начините за избор на n објекти при што објектите од вториот вид се земаат во пакети од по 4 објекти, објектите од третиот вид се земаат во пакети од по 5 објекти и објектите од четвртиот вид се земаат во пакети од по три објекти. Според тоа, бараната генераторна функција е

$$(1+x+x^2+\ldots)(1+x^4+x^8+\ldots)(1+x^5+x^{10}+\ldots)(1+x^3+x^6+\ldots)=\frac{1}{(1-x)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^3)}.$$

36. Докажи, дека функцијата

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)...(1-x^k)...} \tag{1}$$

е генераторна функција чиј $n-$ти коефициент го дава бројот на начините на сместување на n истоветни објекти во n истоветни кутии, при што некои кутии може да останат празни, односно го дава бројот на разбивањата на бројот n на n или помалку делови (целобројни ненегативни собирци).

Решение. Да го разгледаме бројот на начините на сместување на n истоветни објекти во n истоветни кутии, при што некои од кутиите можат да останат празни. Јасно, овој број е еднаков на бројот на разбивањата на бројот n на n или помалку делови и тој број еднаков на бројот на ненегативните целобројни решенија на равенката

$$e_1 + 2e_2 + 3e_3 + ... + ne_n = n\,. \tag{2}$$

Понатаму, за фиксиран број n, бројот на решенијата на равенката (2) е еднаков на коефициентот пред x^n во генераторната функција

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)...(1-x^n)}\,. \tag{3}$$

Генераторната функција (3) важи за фиксиран број n. Аналогно, за секој природен број n степенот пред x^n во генераторната функција (1) го дава бројот на решенијата на равенката (2).

37. Со помош на генераторни функции определи го бројот на начините на разбивање на бројот n како збир на n или помалку различни броеви.

Решение. Да го разгледаме бројот на начините на разбивање на бројот n како збир на n или помалку различни природни броеви. Бидејќи собирците треба да се различни, секој цел број може да се појави во разгледуваниот збир само еднаш. Значи, во записот на бројот n, како збир на различни природни броеви, секој цел број помал или еднаков на n ќе се појави само еднаш. Според тоа, решението на поставениот проблем го дава коефициентот пред x^n во генераторната функција

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)...(1+x^k)...\,.$$

38. Докажи, дека бројот на начините за разбивање на природниот број n, како збир на n или помалку различни природни броеви е еднаков на бројот на начините на разбивања на природниот број n како збир на n или помалку непарни природни броеви.

Решение. Според задача 36 бројот на начините на разложување на целиот број n како збир на n или помалку различни природни броеви е еднаков на коефициентот пред x^n во генераторната функција

$$\begin{aligned}(1+x)(1+x^2)(1+x^3)...(1+x^k)... &= \frac{1-x^2}{1-x}\cdot\frac{1-x^4}{1-x^2}\cdot\frac{1-x^6}{1-x^3}\cdot\frac{1-x^8}{1-x^4}\cdot...\cdot\frac{1-x^{2k}}{1-x^k}\cdot...\\ &= \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)...(1-x^{2k-1})...}.\end{aligned}$$

Но, функцијата

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)...(1-x^{2k-1})...}$$

е генераторна функција за бројот на разбивања на целиот број n како збир на n или помалку непарни природни броеви, од што следува тврдењето на задачата.

2. ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНИ ГЕНЕРАТОРНИ ФУНКЦИИ

1. Функцијата

$$h(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k \tag{2}$$

ја нарекуваме *експоненцијална генераторна функција* за низата $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Докажи, дека ако f и g се експоненцијални генераторни функции за низите $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$, тогаш

а) функцијата $f(x)+g(x)$ е ексоненцијална генераторна функција за низата $\{a_k + b_k\}_{k=0}^{\infty}$.

б) функцијата $f(x)g(x)$ е експоненцијална генераторна функција за низата

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k},\ n = 0,1,2,3,\ldots,$$

која ја нарекуваме *биномна конволуција на низите* $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Решение. а) Нека $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k$ и $g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} x^k$ се експоненцијални генераторни функции за низите $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ и $\{b_k\}_{k=0}^{\infty}$. Тогаш

$$f(x)+g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} x^k + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b_k}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k+b_k}{k!} x^k,$$

што значи дека $f(x)+g(x)$ е експоненцијална генераторна функција за низата $\{a_k + b_k\}_{k=0}^{\infty}$.

б) Од

$$\begin{aligned} h(x) = f(x)g(x) &= (\tfrac{a_0}{0!} + \tfrac{a_1}{1!} x + \tfrac{a_2}{2!} x^2 + \ldots)(\tfrac{b_0}{0!} + \tfrac{b_1}{1!} x + \tfrac{b_2}{2!} x^2 + \ldots) \\ &= \tfrac{a_0 b_0}{0!} + (\tfrac{a_0 b_1}{0!1!} + \tfrac{a_1 b_0}{1!0!})x + (\tfrac{a_0 b_2}{0!2!} + \tfrac{a_1 b_1}{1!1!} + \tfrac{a_2 b_0}{2!0!})x^2 + \ldots \\ &= \tfrac{a_0 b_0}{0!} + \tfrac{1}{1!}[\tfrac{1!}{0!1!} a_0 b_1 + \tfrac{1!}{1!0!} a_1 b_0]x + \tfrac{1}{2!}[\tfrac{2!}{0!2!} a_0 b_2 + \tfrac{2!}{1!1!} a_1 b_1 + \tfrac{2!}{2!0!} a_2 b_0]x^2 + \ldots, \end{aligned}$$

следува дека $h(x) = f(x)g(x)$ е експоненцијална генераторна функција на низата

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k},\ n = 0,1,2,3,\ldots.$$

Забелешка. Друга суштинска разлика меѓу експоненцијалните и обичните генераторни функции се забележува при нивното диференцирање и интегрирање. Имено, при диференцирањето и интегрирањето на експоненцијална генераторна функција повторно добиваме експоненцијална генераторна функција за која имаме шифтување на низата коефициенти, без да се менува нивната големина, т.е.

$$h'(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{k+1}}{k!}x^k \quad \text{и} \quad \int h(x)dx=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{(k+1)!}x^{k+1}.$$

2. Определи ја експоненцијалната генераторна функција на низата
$$a_k=\frac{n!}{(n-k)!},\ k=0,1,2,...,n.$$

Решение. Од
$$\begin{aligned}(1+x)^n&=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+...+\binom{n}{n}x^n\\&=\frac{n!}{0!n!}+\frac{n!}{1!(n-1)!}x+\frac{n!}{2!(n-2)!}x^2+...+\frac{n!}{k!(n-k)!}x^k+...+\frac{n!}{0!n!}x^n\\&=\frac{n!}{n!}\cdot\frac{x^0}{0!}+\frac{n!}{(n-1)!}\cdot\frac{x^1}{1!}+\frac{n!}{(n-2)!}\cdot\frac{x^2}{2!}+...+\frac{n!}{(n-k)!}\cdot\frac{x^k}{k!}+...+\frac{n!}{0!}\cdot\frac{x^n}{n!},\end{aligned}$$
следува дека $(1+x)^n$ е експоненцијална генераторна функција за низата
$$a_k=\frac{n!}{(n-k)!},\ k=0,1,2,...,n,$$
т.е. за бројот на варијации без повторување од n елементи од класа k.

3. Определи ја експоненцијалната генераторната функција која може да се искористи за наоѓање на бројот на начините на кој n лица може да се сметат во 3 соби со најмалку 2, но не повеќе од 9 лица.

Решение. Од својствата на експоненцијалните генераторни функции, добиваме дека бараната експоненцијална генераторна функција е
$$\begin{aligned}f(x)&=(\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^4}{4!}+...+\tfrac{x^9}{9!})(\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^4}{4!}+...+\tfrac{x^9}{9!})(\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^4}{4!}+...+\tfrac{x^9}{9!})\\&=(\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^4}{4!}+...+\tfrac{x^9}{9!})^3.\end{aligned}$$

4. Определи ја експоненцијалната генераторна функција за низата варијации со повторување од n елементи од класа k.

Решение. Бројот на варијациите со повторување од n елементи од класа k е еднаков на n^k. Овој број е еднаков на бројот на различните распоредувања за k објекти од n видови објекти, при што претпоставуваме дека постои неограничен број објекти од секој вид. Експоненцијалната генераторна функција за определување на овој број е
$$\begin{aligned}f(x)&=(1+\tfrac{x}{1!}+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+...+\tfrac{x^k}{k!}+...)^n=(e^x)^n=e^{nx}\\&=1+\tfrac{nx}{1!}+\tfrac{(nx)^2}{2!}+\tfrac{(nx)^3}{3!}+...+\tfrac{(nx)^k}{k!}+...\\&=1+\tfrac{nx}{1!}+\tfrac{n^2x^2}{2!}+\tfrac{n^3x^3}{3!}+...+\tfrac{n^kx^k}{k!}+...\end{aligned}$$
што значи
$$f(x)=(1+\tfrac{x}{1!}+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+...+\tfrac{x^k}{k!}+...)^n$$
е експоненцијална генераторна функција за низата варијации со повторување од n елементи од класа k.

5. Определи го бројот на сместување на n гости во три сали, при што во прва-та сала мора да има барем еден гостин, во втората сала мора да има непарен број гости и во третата сала мора да има парен број гости.

Решение. Нека n гости се сметени во три сали, при што во правата сала мора да има барем еден гостин, во втората сала мора да има непарен број гости и во третата сала мора да има парен број гости. Експоненцијалната генераторна функција за овој проблем е

$$f(x)=(\tfrac{x}{1!}+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+...)(\tfrac{x}{1!}+\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^5}{5!}...)(1+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}+\tfrac{x^6}{6!}...)\,. \qquad (1)$$

Ако ги искористиме равенствата

$$e^x=1+\tfrac{x}{1!}+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+...+\tfrac{x^k}{k!}+...\,,\quad e^{-x}=1-\tfrac{x}{1!}+\tfrac{x^2}{2!}-\tfrac{x^3}{3!}+...+(-1)^k\tfrac{x^k}{k!}+...$$

добиваме

$$\tfrac{e^x+e^{-x}}{2}=1+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^4}{4!}+...+\tfrac{x^{2k}}{(2k)!}+...\ \text{ и }\ \tfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\tfrac{x}{1!}+\tfrac{x^3}{3!}+\tfrac{x^5}{5!}+...+\tfrac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}+...\,,$$

па со замена во (1) за експоненцијалната генераторна функција добиваме

$$f(x)=(e^x-1)\tfrac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\tfrac{e^x+e^{-x}}{2}=(e^x-1)\tfrac{e^{2x}-e^{-2x}}{4}=\tfrac{1}{4}[e^{3x}-e^{-x}-e^{2x}+e^{-2x}]\,.$$

Коефициентот пред $\frac{x^n}{n!}$ во последната функција е $\frac{1}{4}[3^n-(-1)^n-2^n+(-2)^n]$ и тој е еднаков на бројот на начините на сместување на n-те гости во трите сали, при дадените услови.

6. Користејќи ги експоненцијалните генераторни функции докажи дека бројот на начините на кои n различни објекти може да се стават во k различни кутии, при што ниту една кутија не смее да биде празна и $1\le k\le n$ е

$$A_k^{(n)}=\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n\,. \qquad (1)$$

Решение. За дадениот проблем експоненцијалната генераторна функција е

$$\begin{aligned}f(x)&=(\tfrac{x}{1!}+\tfrac{x^2}{2!}+\tfrac{x^3}{3!}+...)^k=(e^x-1)^k\\&=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i e^{(k-i)x}=\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(k-i)^n x^n}{n!}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^i(k-i)^n\frac{x^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\sum_{k=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n\end{aligned}$$

и коефициентот пред $\frac{x^n}{n!}$ е даден со (1).

7. Докажи, дека бројот на начините на кои n различни објекти може да се ста-ват во k исти кутии, при што ниту една кутија не смее да биде празна и $1\le k\le n$ е

$$S_k^{(n)}=\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n\,, \qquad (1)$$

каде $S_k^{(n)}$, $0\le k\le n$ се Стирлинговите броеви од втор вид.

Решение. Според задача 6 бројот на сместувања на n различни објекти во k различни кутии, при што ниту една кутија не смее да биде празна е еднаков на $A_k^{(n)}$. Сега формулата (1) следува од фактот дека за да од различни преминеме на исти кутии треба овој број да го поделиме со $k!$, што значи дека $S_k^{(n)} = \frac{1}{k!} A_k^{(n)}$.

8. На кружницата се дадени $2n$ точки. На колку начини овие точки можат да се разбијат на n парови така што меѓу $n-$те тетиви определени со овие парови точки не постојат две кои се сечат?

Решение. Со a_n да го означиме бараниот број разбивања, а точките на кружницата да ги означиме со $A_1, A_2, A_3, ..., A_{2n}$, во ист редослед како што се поставени на кружницата. Точката A_1 може, при дадените услови со тетива да се поврзе само со една од точките $A_2, A_4, ..., A_{2n-2}, A_{2n}$ (точки со парни индекси), бидејќи во спротивно, од секоја страна на тетивата која излегува од A_1 ќе има непарен број точки, па барем една тетива ќе ја сече тетивата од A_1.

Да го определиме бројот на различните начини на поврзувања на точките, кога A_1 е поврзана со точката A_{2k}. Од едната страна на тетивата A_1A_{2k} има $2k-2 = 2(k-1)$ точки и тие можат да се поврзат на a_{k-1} начин. Од другата страна на тетивата A_1A_{2k} се наоѓаат $2(n-k)$ точки и тие можат да се поврзат на a_{n-k} начини. Од принципот на производ следува дека бројот на поврзувањата на точнике со n тетиви, при кои точката A_1 е поврзана со точкта A_{2k} е еднаков на $a_{k-1}a_{n-k}$. Понатаму, ако сумираме по k од принципот на збир следува дека

$$a_n = a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + ... + a_{k-1}a_{n-k} + ... + a_{n-2}a_1 + a_{n-1}a_0, \quad (1)$$

Јасно, $a_0 = a_1 = 1$. Нека

$$g(x) = 1 + x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...$$

е генераторна функција на низата $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$. Тогаш,

$$\begin{aligned}[g(x)]^2 &= [1 + x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...][1 + x + a_2x^2 + a_3x^3 + ...] \\ &= a_0a_0 + (a_0a_1 + a_1a_0)x + ... + (a_0a_{n-1} + a_1a_{n-2} + ... + a_{n-2}a_1 + a_{n-1}a_0)x^{n-1} \\ &= a_1 + a_2x + a_3x^2 + a_4x^3 + ... = \frac{g(x)-a_0}{x} = \frac{g(x)-1}{x}\end{aligned}$$

т.е.

$$x[g(x)]^2 = g(x) - 1. \quad (2)$$

Квадратната равенка (2) ја решаваме по $g(x)$ и добиваме

$$g(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}. \quad (3)$$

Но, $a_0 = 1$, па затоа $g(0) = 1$ и како $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} = 1$, а $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1+\sqrt{1-4x}}{2x} = \infty$ добиваме дека

$$g(x) = \frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x} \quad (4)$$

е генераторна функција на низата $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Ќе го определиме коефициентот пред x^k во развојот на функцијата (4). За таа цел ќе ја користиме обопштената Њутнова биномна формула, според која

$$
\begin{aligned}
(1-4x)^{1/2} &= 1+\sum_{k\geq 1}\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)...(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}(-1)^k 4^k x^k = 1+\sum_{k\geq 1}\frac{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2-1}{2}\cdot\frac{4-1}{2}\cdot...\cdot\frac{2k-2-1}{2}}{k!}4^k x^k \\
&= 1-\sum_{k\geq 1}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot...\cdot(2k-3)}{k!}2^k x^k = 1-\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot...\cdot(2k-3)2^k\cdot 1\cdot 2\cdot 3...\cdot(k-1)}{(k-1)!\cdot(k-1)!}x^k \\
&= 1-2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot...\cdot(2k-3)\cdot 2\cdot 4\cdot 5...\cdot(2k-2)}{(k-1)!\cdot(k-1)!}x^k = 1-2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\frac{(2k-2)!}{(k-1)!\cdot(k-1)!}x^k \\
&= 1-2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\frac{(2k-2)!}{(k-1)!\cdot(k-1)!}x^k = 1-2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^k
\end{aligned}
$$

па затоа

$$g(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}=\frac{1-1+2\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^k}{2x}=\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k}\binom{2k-2}{k-1}x^{k-1}=\sum_{i\geq 0}\frac{1}{i+1}\binom{2i}{i}x^i.$$

Според тоа,

$$a_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n},\ n=0,1,2,\dots . \tag{5}$$

Забелешка. Користејќи ја формулата (5) ќе добиеме поедноставна рекурзија со чија помош поедноставно можеме да ги пресметуваме Каталановите броеви. Имено, од формулата (5) непосредно следува дека

$$a_{n+1}=\frac{4n+2}{n+2}a_n$$

9. За низата нули и единици со должина $2n$ ($2n$-низа над азбуката $\{0,1\}$) ќе велиме дека е *урамнотежена* ако содржи n нули и n единици.

За урамнотежената $2n$-низа над азбуката $\{0,1\}$ ќе велиме дека е добра ако во ниту еден нејзин почетен дел нема повеќе нули од единици. Во спротивно ќе велиме дека $2n$-низата е лоша.

Докажи, дека бројот на добри $2n$-низи над азбука $\{0,1\}$ е $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

Решение. Прво да забележиме дека бројот на урамнотежени $2n$-низи е еднаков на $\binom{2n}{n}$. Ќе го определиме бројот на лошите низи меѓу урамнотежените $2n$-низи. Во секоја лоша низа може да се забележи првата нула со која се нарушува условот низата да е добра (во почетниот дел кој завршува со оваа нула има повеќе нули од единици). Ако во овој почетен дел ги замениме нулите со единици и единиците со нули добиваме $2n$-низа со $n+1$ единица и $n-1$ нула, Од друга страна, за секоја $2n$-низа со $n+1$ единица и $n-1$ нула може да се изврши обратната постапка на замена и да се најде лошата низа од која е добиена почетната низа. На пример, низата 001011101101 е добиена од низата 110100001101 со замена на нулите и единиците во почетниот дел со должина 7. Од принципот на еднаквост следува дека бројот на лошите $2n$-низи е еднаков на $\binom{2n}{n-1}$. Конечно, од принципот на исклучување следува дека бројот на добрите $2n$-низи е

$$C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n-1} = \frac{(2n)!}{n!n!} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!} = \frac{(2n)!}{n!n!}[1 - \frac{n}{n+1}] = \frac{1}{n+1}\frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

10. Пред билетарница стојат $2n$ лица. Секоја од нив сака да купи по еден билет кој чини 50 денари. Меѓу лицата во редот точно n лица имаат по 50 денари, а останатите имаат по една банкнота од по 100 денари. На почетокот касата на билетарницата е празна. Колкав е бројот на распоредите на лицата така што продавачката може да врати кусур на секое лице кое купува билет?

Решение. На секое лице при купувањето на билетот може одма да и се врати потребниот кусур ако и само ако за секое лице кое има 100 денари бројот на лицата кои се во редот пред неа и имаат по 50 денари е поголем од бројот на лицата кои се во редот пред неа и имаат по 100 денари. Ако на секое лице кое има 50 денари му го придружиме бројот 1, а на останатите бројот 0, добиваме $2n$-низа од нули и единици, која е добра. Според теорема 11.5 бројот на добрите $2n$-низи е c_n. Бидејќи $n-$те лица со 50 денари можат да се распоредат на $n-$те места во секоја добра низа на $n!$ начини и истото важи за $n-$те лица со 100 денари, заклучуваме дека бараниот број распореди е еднаков на

$$C_n n!n! = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} n!n! = \frac{(2n)!}{n+1}.$$

11. Нека n е даден природен број. Определи го бројот на природните броеви кои се помали од 10^n и во чиј декаден запис се содржи цифрата 5.

Решение Нека $A = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ и $B = \{0,1,2,3,4,6,7,8,9\}$, т.е. A е множеството од сите цифри, а B е множеството цифри во кои не се содржи цифрата 5. Понатаму, на броевите кои имаат $k < n$ цифри од лево ќе им допишеме $n-k$ нули и така броевите кои се помали од 10^n (вклќиучувајќи ја и нулата) ги сведовме на подредени $n-$торки од елементи на множеството A, т.е. на варијациии со повторување од 10 елементи од класа n. Бараниот број броеви да го означиме со x_n.

Експоненцијалната генераторна функција на варијациите со повторување на елементите на множеството $A(|A|=10)$ во кои цифрата 5 се појавува барем еднаш е:

$$H(t) = (\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + ...)(1 + \frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + ...)^9,$$

при што првиот множител се однесува на цифрата 5, а вториот множител се однесува на останатите цифри. Понатаму, ако се искористи дека развојот на експоненцијалната функција во ред е $e^t = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}$, добиваме

$$\begin{aligned} H(t) &= (e^t - 1)e^{9t} = e^{10t} - e^{9t} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(10t)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(9t)^k}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (10^k - 9^k)\frac{t^k}{k!}. \end{aligned}$$

Според тоа, бидејќи бројот на бараните броеви е еднаков на бројот на пожелните варијации од $n-$ти, а овој број е еднаков на коефициентот пред $\frac{t^n}{n!}$ во генераторната функција $H(t)$ добиваме дека $x_n = 10^n - 9^n$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Aczél, J., Dhombres, J.: Functional Equations Containing Several Variables. Reading, Mass., Addison-Wesley, 1985
2. Aczél, J.: Lectures on Functional Equations and Their Applications, New York, Birkhäuser, 1966
3. Alexanderson, G. L., Klosinski, L. F., Larson, L. C.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1938–1964. Mathematical Association of America,Washington, DC, 1985
4. Alfonsin, J. L. R.: The Diophantine Frobenius Problem, Oxford Lecture Series, 2005
5. Amini, A. R.: Fibonacci Numbers a Long Division Formula, Mathematical Spectrum, Vol. 40, Number 2, 2007/08
6. Anderson, J. A.: Diskretna matematika sa kombinatorikom, CET, Beograd, 2005
7. Andreescu, T., Andrica, D., Feng, Z.: 104 Number Theory Problems: From the Training of the USA IMO Team, Birkhauser, 2007
8. Andreescu, T., Andrica, D.: Complex Numbers from A to ...Z, Birkhauser, 2006
9. Andreescu, T., Andrica, D.: Number Theory – Structures, Examples and Problems, Birkhauser, 2009
10. Andreescu, T., Feng, Z.: USA and International Mathematical Ulympiads 2003, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
11. Andreescu, T., Gelea, R.: Mathematical Olympiad Challenges, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 2000
12. Archibald, R. G.: An Introduction to the Theory of Numbers, Merrill, Publishing and Co., Columbia, OH, 1970.
13. Arslanagić, Š., Zejnulahi, F., Govedarica, V.: Zbirka zadataka sa republičkih takmičenja u Bosni i Hercegovini 1981-1991, Bosanska riječ, Sarajevo, 2004
14. Arslanagić, Š.: Matematička čitanka 9, Grafičar promet, Sarajevo, 2017
15. Arslanagić, Š.: Matematika za nadarene (drugo izdanje), Bosanska riječ, Sarajevo, 2005
16. Ašić, M. i dr.: Međunarodne matematičke olimpijade, DM Srbije, Beograd, 1986
17. Ašić, M. i dr.: Republička i savezna takmičenja srednjoškolaca (1970-1983), DMS, Beograd, 1984
18. Batchedder, P. M.: An Introduction to linear difference equations, Dover Publications, 1967
19. Becheanu, M., Enescu, B.: Inegalitati elementare. Bucurest: Gil., 2002
20. Beklekamp, E. , Rodgers, T.: Math Puzzles, Springer-Verlag, New York, Inc., 1992
21. Benjamin, A. T., Quinn, J. J.: Proofs that Really Count: The Art of Combinatorial Proof, MAA, 2003
22. Bilinski, S.: Problem parketiranja, Matematičko-fizičko list, 196, Zagreb, 1999
23. Bottema, O. and oth.: Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969
24. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2003-2006, GIL Publishing House, Zalău, 2007
25. Boyvalenkov, P., Kolev, E., Musharov, O., Nikolov, N.: Bulgarian Mathematical Competitions 2006-2008, GIL Publishing House, Zalău, 2009
26. Burton, D. M.: Elementary Number Theory, Wm. C. Brown, Dubuque, Iowa, 1994
27. Cerone, P.; Dragomir, S. S.: Mathematical Inequalities, CRC Press, London – New York, 2011
28. Cîrtoaje, V.: Algebraic Inequalities, GIL Publishing house, Zalau, 2006
29. Cull P., Elahive M., Robson R.: Difference equations: From rabbits to chaos, Springer, 2005
30. Cvetkovski, Z.: Inequalities, Springer, Heidelberg – Dordrecht – London – New York, 2012
31. Djukić,. D., Janković, V., Matić, I., Petrović, N.: The IMO Compendium, Springer, 2011
32. Đurković, R.: Matematička takmičenja srednjoškolaca u Jugoslaviji 1990, DMS, Beograd, 1991
33. Dye R. H.; Nickakalls R.W. D.: A new algorithm for generating Pythagorean triples, Mathematical Gazette; 1998
34. Engel, A.: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York-Berlin-Heidelberg, 1997
35. Feng, Z., Zhao, Y.: USA and International Mathematical Ulympiads 2006-2007, The Mathematical Association of America, Washington, 2003
36. Gleason, A. M.; Greenwood, R. E.; Kelly, L. M.: The William Lowell Putnam Mathematical Competition. Problems and Solutions: 1965–1984. Mathematical Association of America, Washington, DC, 1984
37. Govedarica, V.: Matematička takmičenja u Republici Srpskoj, ZUNS, Sarajevo, 2007
38. Graham R.L, Knuth D.E., Patashnik O.: Concrete Mathematics: A foundation for computer science, Second edition, Addison-Wesley Professional, 1994
39. Green D. H., Knuth D.E.: Homogeneous equations, Mathematics for the analysis of algorithms, Birkhäuser, 1982
40. Grozdev, S., Kolev, E., Mushkarov, O., Nikolov, N. Bulgarian Mathematical Competitions 1997-2002, SMB, Sofia, 2002
41. Grozdev, S.: For High Achievements in Mathematics. The Bulgarian Experience (Theory and Practice). Sofia: ADE, 2007

42. Hatch G.: Pythagorean triples and triangular square numbers, Mathematical Gazette; 1995
43. Herman, J.; Kučera, R.; Šimša, J.: Equations and Inequalities, Springer – Verlag, New York – Berlin – Heidelberg, 2000
44. Hung, P. K.: Secrets in Inequalities, GIL Publishing Hause, Zalau, 2007
45. Kadelburg, Z., Mladenović, P.: Savezna takmičenja iz matematike, DMS, Beograd, 1990
46. Kuczma, M. E., Mientka, W. E.: Problems of the Austrian-Polish Mathematics Competition, The Academic Distribution Center, Freeland, Maryland, 1994
47. Kuczma, M., Choczewski, B., Ger, R.: Iterative Functional Equations. Cambridge, UK, Cambridge University Press, 1990
48. Landau, E.: Elementary number theory, Chelsea Publishing Company, New York, 1966
49. Lee, H.: Topics in Inequalities - Theorems and Techniques, 2007
50. Lozansky, E., Rouseau, C.: Winning solutions, Springer-Verlag, Inc., New York, 1996
51. Manfrino, R. B., Ortega, J. A. G., Delgado, R. V.: Inequalities, Birkhäuser, Basel – Boston – Berlin, 2000
52. Mićić, V., Kadelburg, Z.: Uvod u teoriji brojeva, DMS, Beograd, 1989
53. Mitrinović, D. S., Barnes, E. S., Marsh, D. C. B., Radok, J. R. M.: Elementary Inequalities, P. Noordhoff, Groningen, 1964
54. Mitrinović, D. S.: Analytic Inequalities, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970
55. Mitrović, M., Ognjanović, S., Veljković, M., Petković, Lj., Lazarević, N.: Geometrija za prvi razred Matematičke gimnazija, Krug, Beograd, 1998
56. Mladenović, P.; Ognjanović, S.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike srednjoh škola, DMS, Beograd, 1991
57. Nardy, G. H., Littlewood, J. E., Pólya, G.: Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1951
58. Nathanson, M. B.: Elementary Methods in Number Theory, Springer, 1993
59. Nesbitt, A. M.: Problem 15114, Educational Times, 3, 1903
60. Neville, R. Beginning: Number Theory, 2nd ed. Sudbury, Mass.: Jones and Bartlett, 2006.
61. Niven, I., Zuckerman, H. S.: An introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc., New Yor, 1980
62. Palman, D.: Planimetrija, Element, Zagreb, 1998
63. Pavković, B., Dakić, B., Hajnš, Ž., Mladinić, P.: Male teme iz matematike, Hrvatsko matematičko društvo, Knjiga 2., Element, Zagreb, 1994
64. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna matematika I, Tehnička knjiga, Zagreb, 1992
65. Pavković, B., Veljan, D.: Elementarna Matematika 2, Školska kniga, Zagreb, 1995
66. Pečarić, J. E.: Nejednakosti, Element, Zagreb, 1996
67. Riordan, J.: Combinatorial Identities, John Willey & Sons, 1968
68. Sierpinski, W.: Elementary theory of numbers, PWN, Warszawa, 1964
69. Small, C. G.: Functional Equations and How to Solve Them, Springer, New York, 2007
70. Specht, E.: Geometria-Scientiae Atlantis, Magdeburg, 2001
71. Stark, H. M.: An introduction to Number Theory, Markh. Publis. Comp., Chicago, 1970
72. Stevanović, D., Milošević, M., Baltić, V. Diskretna matematika, DMS, Beograd, 2004
73. Tripathi, A.: The Coin Exchange Problem for Arithmetic Progressions, American Mathematical Monthly,1994
74. Veljan, D.: An Analogue of the Pythagorean Theorem, El. Math. 51 (1996)
75. Vo Quoc B.: On a class of three-variable Inequalities, 2007
76. Volenc, V.: Analitička geometrija u kompleksnim koordinatima I, II, III, Matematičko-fizički list, 186, 187,188, Zagreb, 1996/97
77. Vrećica, S.: Konveksna analiza, BS Procesor, Matematički fakultet, Beograd, 1993
78. Wells, D.: Prime numbers. The most mysterious figures in Math, John Wiley and Sons, Inc., Hoboken, New Jersey, 2005
79. Wilf, H. S.: A Circle-of-lights Algorithm for the Money-changing Problem , American Mathematical Monthly, 1978
80. Xiong, B., Lee Peng, Y.: Mathematical Olympiad in China – Problems and Solutions, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltgt., Singapore , 2007
81. Алексиев, К., Бангачев, К., Бойваленков, П.: 640 задачи или Теория на числата за олимпиади, УНИМАТ СМБ, София, 2017
82. Аневска, К.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
83. Арноль, И. В.: Теория чиесл, Учиедгиз, Москва, 1939
84. Арсеновић, М., Драговић, В.: Функционалне једначине, ДМС, Београд, 1999
85. Арсланагиќ, Ш. За подобрувањето на неравенствата, Сигма, Скопје
86. Арсланагиќ, Ш., Зејнулаху, Ф.: Две условни алгебарски неравенства, Сигма, Скопје

87. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ , А.: Повеќе докази на едно познато геометриско неравенство, Сигма, Скопје
88. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе решенија на една геометриска задача, Сигма, Скопје
89. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
90. Арсланагиќ, Ш.: Едно неравенство во врска со симетралата на внатрешен агол на триаголник, Сигма, Скопје
91. Арсланагиќ, Ш.: Неравенства со факториели, Сигма, Скопје
92. Арсланагиќ, Ш.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје
93. Арсланагиќ, Ш.: Несбитовото неравенство и едно негово подобрување, Сигма, Скопје
94. Арсланагиќ, Ш.: Повеќе докази на едно познато неравенство, Сигма, Скопје
95. Арсланагиќ, Ш.: Подобрување на едно алгебарско неравенство, Сигма, Скопје
96. Арсланагиќ, Ш., Муминагиќ, А.: Едно интересно равенство за триаголник и негови последици, Сигма, Скопје
97. Баралић, Ђ.: 300 припремних задатака за Јуниорске математичке олимпијаде (искуство Србије), Klett, Београд, 2016
98. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
99. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
100. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
101. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
102. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2009, УНИМАТ СМБ, София, 2010
103. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2010, УНИМАТ СМБ, София, 2011
104. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
105. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2012, УНИМАТ СМБ, София, 2013
106. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2013, УНИМАТ СМБ, София, 2014
107. Бойваленков, П., Колев, Е., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2014, УНИМАТ СМБ, София, 2015
108. Бойваленков, П., Николов, Н.: Национални олимпиади по математика 2008, УНИМАТ СМБ, София, 2008
109. Брсаковска, С., Малчески, С.: Некои последици на Питагоровата теорема, Нумерус, Скопје, 2019
110. Василевска, В.: Степен на точка во однос на кружница, Сигма, Скопје
111. Велинов, Д.: Полиномни равенки, Сигма, Скопје
112. Велинов, Д.: Некои методи за решавање на Диофантови равенки, Сигма, Скопје, 2018
113. Велинов, Д.: Рекурентни релации, Сигма, Скопје
114. Виноградов, И. М.: Основы теории чисел, Наука, Москва, 1972
115. Гаврилов, М, Давидов, Л.: Делимост на числата, Народна просвета, София, 1976
116. Гарднер, М.: Математически развлечения. Том 2. София, Наука и изкуство, 1977
117. Главче, М.: Повеќе начини за решавање на иста задача, Сигма, Скопје
118. Гроздев, С., Лесов, Х.: Квадратни параметарски неравенки, Сигма, Скопје
119. Гроздев, С., Ненков, В.: Магични квадрати, Сигма, Скопје
120. Гроздев, С., Стефанова, Д., Иванов, И.: Планиметрични задачи за триъгълник с тригонометрични функции, Светлина, София, 2016
121. Гроздев, С.: Минимален прост делител, Сигма, Скопје
122. Гроздев, С.: Примена на едно обопштување на теоремата на Птоломеј, Сигма, Скопје
123. Гуревич, Е.: Тайна древнего талисмана. Москва, Наука, 1969
124. Давидов, Љ.: Генераторни функции, Сигма, Скопје
125. Давидов, Љ.: Принципот на Дирихле и некои комбинаторни проблеми, Сигма, Скопје
126. Давидов, Љ.: Функционални уравнения, Народна Просвета, София, 1977
127. Давыдов, У. С.: Задачи и упражниния по теоретической арифметике целых чисел, ГУНИМИ БССР, Минска, 1963
128. Димитров, С., Личев, Л., Чобанов, С.: 555 задачи по геометрия (решения по Геометрия в картинки на А. В. Акопян), УНИМАТ СМБ, 2015

129. Димовски, Д., Малчески, Р., Тренчевски, К., Шуниќ, З.: Натпревари по математика '94, СММ, Скопје, 1995
130. Димовски, Д., Тренчевски, К., Малчески, Р., Јосифовски, Б.: Практикум по елементарна математика, Просветно дело, Скопје, 1993
131. Димовски, И.: Врска меѓу биномните коефициенти и пермутациите со повторување, Сигма, Скопје
132. Димовски, И.: Неограниученост на низата совршени и низата прости броеви, Сигма, Скопје
133. Димовски, И.: Теорема на Дезарг, Сигма, Скопје
134. Дирихле, П. Г. Л.: Лекции по теория на числата, Наука и изкуство, София, 1980
135. Докоска, М.: Некои карактеристични неравенства во врска со триаголник, Сигма, Скопје
136. Дуденков, С., Чакърян, К.: Задачи по теория на числата, Регалия 6, София, 1999
137. Ђукић, Д.: Задаци о скуповима, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
138. Ђукић, Д.: Задаци са распоредима бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
139. Ђукић, Д.: Инваријанте, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
140. Ђукић, Д.: Инверзија, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
141. Ђукић, Д.: Комбинаторна геометрија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
142. Ђукић, Д.: Комбинаторна теорија бројева, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
143. Ђукић, Д.: Математичке игре погађања, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
144. Ђукић, Д.: Микелова тачка и Симсонова права, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
145. Ђукић, Д.: Партиције природног броја, Београд, 2013 (www.imo.org.yu/sc)
146. Ђукић, Д.: Паскалова теорема, пол и полара, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
147. Ђукић, Д.: Полиноми по једној променљивој, Београд, 2015 (www.imo.org.yu/sc)
148. Ђукић, Д.: Полиномске једначине, Београд, 2006 (www.imo.org.yu/sc)
149. Ђукић, Д.: Потенција тачке, Београд, 2012 (www.imo.org.yu/sc)
150. Ђукић, Д.: Холова теорема, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
151. Ђукић, Д.: Хомотетија, Београд, 2016 (www.imo.org.yu/sc)
152. Ерусалимский, Я. М.: Дискретная математика, Везувская книга, Москва, 2004
153. Избраные задачи из журнала American Mathematical monthly, Мир, Москва, 1977
154. Јанев, И.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
155. Јанев, И.: Варијации на иста тема, Сигма, Скопје
156. Јанев, И.: Метод на неодредени коефициенти, Сигма, Скопје
157. Јанковић, З., Каделбург, З., Младеновић, П. Међународне и балканске математичке олимпијаде 1984-1995, ДМС, Београд, 1995
158. Јегоров, А.: Логаритамски равенки, Сигма, Скопје
159. Каделбург, З.; Ђукић, Д.; Лукић, М.; Матић, И.: Неједнакости, ДМС, Београд, 2003
160. Карамата, Ј.: Комплексан број, са применом на елементарну геометрију, Научна књига, Београд, 1950
161. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Адициони теореми, Сигма, Скопје
162. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Паскаловиот триаголник и бројот е, Сигма, Скопје
163. Карстенсен, Ј., Муминагић, А.: Геометриски решенија на некои задачи поврзани со аркустангенсите, Сигма, Скопје
164. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Геометрски докази на некои тригонометриски равенства, Сигма, Скопје
165. Карстенсен, Ј., Муминагиќ, А.: Суперзлатен четириаголник, Сигма, Скопје
166. Карстенсен, Ј., Муминагиућ, А.: Фибоначиеви броеви и полиноми со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје
167. Кендеров, П., Табов, Й.: Български олимпиади по математика, Народна просвета, София, 1990
168. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, 2012
169. Кудреватов, Г. А.: Сборник задач по теории чисел, Просвещение, Москва, 1970
170. Кючуков, М.; Недевски, П.: Функционални и диференциални уравнения, Проф. Марин Дринов, София, 1995
171. Лидский В. Б. и др.: Задачи по элементарной математике, Москва, 1962
172. Лихтарников, Л. М.: Элементарное введение в функциональные уравнения, Лань, Санкт-Петербург, 1997
173. Лукић, М.: Инверзија, Београд, 2005 (www.imo.org.yu/sc)
174. Мадески, Ж.; Самарџиски, А.; Целакоски, Н.: Збирка задачи по геометрија, Просветно дело, Скопје, 1981
175. Макарова, Н.: Волшебный мир магических квадратов. Саратов, 2009
176. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни I, Сигма, Скопје
177. Малческа, В., Малчески, С.: Латински квадрати и блок дизајни II, Сигма, Скопје

178. Малчески, А. Манова-Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсаковска. С.: Сигмина ризница (конкурсни здачи 1-192), СММ, Скопје, 2012
179. Малчески, А.: Регресивна индукција, Сигма, Скопје
180. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
181. Малчески, А., Малчески, Р.: Разбивање на броеви, Математика+, Софија, 1997
182. Малчески, А., Малчески, Р.: Теорема на Чева, Сигма, Скопје, 2018
183. Малчески, А., Малчески, С.: Теорема на Птоломеј, Сигма, Скопје
184. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р., Маркоски, Ѓ., Брсакоска, С.: Сигмина ризница (рубрика подготвителни задачи), СММ, Скопје, 2012
185. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 506-1005), СММ, Скопје, 2011
186. Малчески, А., Манова – Ераковиќ, В., Малчески, Р.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1006-1200), СММ, Скопје, 2012
187. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 1, Сигма, Скопје
188. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 2, Сигма, Скопје
189. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 3, Сигма, Скопје
190. Малчески, А.: Симетрични полиноми од три променливи 4, Сигма, Скопје
191. Малчески, Р., Аневска, К.: Теорема на Стјуарт, Сигма, Скопје, 2018
192. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Атанасов, Р., Манова – Ераковиќ, В., Јанев, И.: Меѓународни математички олимпијади, СММ, Скопје, 2000
193. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997
194. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
195. Малчески, Р., Докоска, М.: Математика 2, Просветно дело, Скопје, 2002
196. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 1 – алгебарски структури (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
197. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 2 – векторска и линеарна алгебра (второ издание), ФОН универзитет, Скопје, 2012
198. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 3 – калкулус 1 (трето изадние), ФОН универзитет, Скопје, 2011
199. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 4 – калкулус 2 (трето издание), ФОН универзитет, Скопје, 2011
200. Малчески, Р., Малческа, В.: Математика 5 – дискретна математика (второ издание), ФОН универзитет , Скопје, 2011
201. Малчески, Р., Малчески, А. Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1994
202. Малчески, Р., Малчески, А., Аневска, К.: Вовед во елементарна теорија на броеви, СММ, Скопје, 2015
203. Малчески, Р., Малчески, А.: Избрани содржини од елементарна математика, СММ, Скопје, 1993
204. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви I, Сигма, Скопје, 2000
205. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви II, Сигма, Скопје, 2000
206. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви III, Сигма, Скопје, 2001
207. Малчески, Р., Малчески, А.: Пресликување во рамнина преку комплексни броеви IV, Сигма, Скопје, 2001
208. Малчески, Р., Малчески, А.: Теорема на Helly за конвексните множества, Математика, Софија, 1997
209. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки, СММ, Скопје, 2016
210. Малчески, Р., Малчески, А.: Херонови триаголници, Сигма, Скопје, 1994
211. Малчески, Р., Малчески, С.: Белешка за распределбата на простите броеви, Сигма, Скопје, 2018
212. Малчески, Р., Малчески, С.:. Ред на број по модул и примитивни корени, Сигма, Скопје, 2018
213. Малчески, Р., Манова – Ераковиќ, В., Марковски, Ѓ., Малчески, А.: Сигмина ризница (рубрика задачи 1-505), СММ, Скопје, 2008
214. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 1, Сигма, Скопје, 2005
215. Малчески, Р., Цветковски, З.: Математичка индукција 2, Сигма, Скопје, 2005
216. Малчески, Р.: Паркетирания и приложения, Математика +, София, 2001
217. Малчески, Р.: Метод на инваријанти, Сигма, Скопје, 2014
218. Малчески, Р., Аневска, К.: Хомотетија, Сигма, Скопје, 2014
219. Малчески, Р.: Ах тие питагорови тројки, Сигма, Скопје, 1995

220. Малчески, Р.: Две важни неравенства и бројот е, Сигма, Скопје, 1996
221. Малчески, Р.: Елементарна алгебра, Просветно дело, Скопје, 2002
222. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства, СММ, Скопје, 2016
223. Малчески, Р.: Елементарно испитување на текот и скицирање на графикот на кубната функција, Сигма, Скопје, 1993
224. Малчески, Р.: Енгелов принцип на минимум, Сигма, Скопје, 2016
225. Малчески, Р.: За рационалните корени на полином од *n*-ти степен со целобројни коефициенти, Сигма, Скопје, 1992
226. Малчески, Р.: Мултипликативни функции и теорема на Ојлер, Сигма, Скопје, 2004
227. Малчески, Р.: Неколку елементарни алгебарски методи за определување екстремни вредности, Сигма, Скопје, 2004
228. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините и пресметување на квадратен корен од позитивен број, Математика+, София, 2003
229. Малчески, Р.: Неравенства меѓу средините, Сигма, Скопје, 2011
230. Малчески, Р.: Неравенство на Коши-Буњаковски-Шварц, Сигма, Скопје, 2011
231. Малчески, Р.: Неравенство на Чебишев, Сигма, Скопје, 2011
232. Малчески, Р.: Проблем на бои, Сигма, Скопје, 2000
233. Малчески, Р.: Пчелиното саќе – генијална творба во природата, Сигма, Скопје, 2013
234. Малчески, Р.: Семејно решавање на една „едноставна“ задача, Сигма, Скопје
235. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма, Скопје, 1999
236. Малчески, Р.: Триаголни броеви, Сигма, Скопје, 1995
237. Малчески, Р.: Фибоначиеви броеви, Сигма, Скопје, 2009
238. Малчески, Р.: Функциите [x] и {x}, Сигма, 2015
239. Малчески, Р.: Хармониска прогресија, Сигма, Скопје, 1999
240. Малчески, Р:. Една задача повеќе начини на решавање, Сигма, Скопје, 2001
241. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни-тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
242. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Геометриско пресметување на тригонометриски функции од некои агли, Сигма, Скопје
243. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 1, Сигма, Скопје
244. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Гометриско решавање на системи равенки 2, Сигма, Скопје
245. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тангентни четириаголници, Сигма, Скопје
246. Маркоска, Ј., Маркоски, Ѓ.: Тетивни четириаголници, Сигма, Скопје
247. Маркоска, Ј.: Една задача, повеќе начини за решавање, Сигма, Скопје
248. Маркоски, Ѓ.: Девет карактеристични точки за триаголник 1, Сигма, Скопје
249. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 2, Сигма, Скопје
250. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 3, Сигма, Скопје
251. Маркоски, Ѓ. : Девет карактеристични точки за триаголник 4, Сигма, Скопје
252. Матић, И.: Инверзија, Београд (www.imo.org.yu/sc)
253. Миличић, П.: Идентични трансформации (збирка нестандардни решени задачи), СММ, Скопје, 2013
254. Миовска, В.: Една задача и дванаесет начини за решавање, Сигма, Скопје
255. Миовска, В.: Теорема на Симпсон, Сигма, Скопје
256. Михелович, Ш. Х.: Теория чисел, Высшая школа, Москва, 1967
257. Младеновић, П.: Комбинаторика (четврто издање), ДМС, 2013
258. Моденов, П. Ц.: Задачи по геометрии, Наука, Москва, 1979
259. Морозова, Е. А., Петраков, А. С., Скворцов, В. А.: Международние математические олимпиады, Просвещение, Москва, 1976
260. Муминагић, А., Карстенсен, Ј.: Една задача, повеќе начини за нејзино решавање, Сигма, Скопје
261. Муминагић, А., Карстенсен, Ј.: Познати задачи со не така познати решенија, Сигма, Скопје
262. Муминагић, А.: Бабилиерова теорема, Сигма, Скопје
263. Муминагић, Никобинг: За една интересна математичка задача со корени, Сигма, Скопје
264. Мушкаров, О., Гроздев, С.: Едно математичко чудовиште, Сигма, Скопје
265. Нагел, Т.: Увод в теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
266. Начевска-Настоска, Б., Настоски, Љ.: Системи од точки или принцип на Дирихле, Сигма, Скопје
267. Пиперевски, Б., Малчески, Р., Малчески, А., Стојковска, И.: Избрани содржини од елементарна математика II (второ издание), СММ, Скопје, 2014
268. Плотников, А. Д.: Дискретная математика, Новое знание, Москва, 2005
269. Поја, Г.: Математическое открìитие, Москва 1976
270. Поповиќ-Грибовска, Л.: Инверзија, Сигма, Скопје
271. Поповска-Грибовска, Л.: За Виетовата теорема, Сигма, Скопје
272. Самарџиски, А.: Хомотетија, инверзија и задачите на Аполониј, ПМФ, Скопје, 1988

273. Серпинский, В.: 250 задач по елементарной теории чисел, Просвещение, Москва, 1976
274. Серпинский, В.: Что мы знаем и чего мы не знаем о Простиых числа, Физматгиз, Москва, 1963
275. Сивашинский, И. Х.: Неравенства в задачах, Наука, Москва, 1967
276. Стојменовска, И.: Обопштена равенка на Ојлер, Сигма, Скопје
277. Страшевич, С., Боровкин, Е.: Польские математические олимпиады, Мир, Москва, 1978
278. Тонов, И. К.; Сидеров, П. Н.: Приложение на комплексните числа в геометрията, Наука, София, 1981
279. Тренчевски, Г., Малчески, Р., Тренчевски, К.: Математика 3, (авторизиран ракопис), 2003
280. Тренчевски, К., Урумов, В.: Меѓународни олимпијади по математика, Природно – математички факултет, Скопје, 2000
281. Филеп, Л., Березнай, Г.: История на цифрите. София, Техника, 1988
282. Филиповски, С.: 200 –тероија на броеви (подготвителни задачи), Скопје, 2013
283. Филиповски, С.: Една задача, повеќе начини за ршавање, Сигма, Скопје
284. Хинчин, А. Я.: Три бисера од теорията на числата, Наука и изкуство, София, 1971
285. Хинчин, А. Я.: Цепные дроби, Физматгиз, Москва, 1961
286. Хинчин, А. Я.: Элементи теории чиесл, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1951
287. Цветковски, З., Малчески, Р.: Алгоритам за генерирање на Питагорини тројки, Сигма, Скопје, 2006
288. Цветковски, З., Малчески, Р.: Докажување на симетрични неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
289. Цветковски, З., Малчески, Р.: Еден метод за докажување неравенства со три променливи, Сигма, Скопје, 2008
290. Цветковски, З., Малчески, Р.: Неравенства на Schur и Muirhead, Сигма, Скопје, 2007
291. Цофман, Ј.: Примена на паркетот при решавање на задачи, Сигма, Скопје, 2000
292. Шаригин, И.: Задачи по геометрија, Наука, Москва, 1986 (на руски)
293. Школярски, Д. О.; Ченцов, Н. Н.; Яаглом, И. М.: Избраные задачи и теоремы по елементарной математике, Наука, Москва, 1976
294. Шнилерман, Л. Г.: Простиы числа, Гостехиздат, Москва-Ленинград, 1940
295. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 1, Сигма, Скопје
296. Штерјов, З.: Конвексност и тригонометриски неравенства 2, Сигма, Скопје
297. Штерјов, З.: Конвексност на функцијата $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервалот $(0,\infty)$ и една примена, Сигма, Скопје
298. Штерјов, З.: Методи за докажување неравенства, Пробиштип, 2008
299. Штерјов, З.: Триаголници чии страни формираат аритметичка прогресија, Сигма, Скопје
300. Штерјов, З.: Функционални равенки во множеството реални броеви, НУ Гоце Делчев, Штип, 2011