Неравенства со веројатности на случајни настани

Ирена Стојковска
Природно-математички факултет - Скопје

1. Простор од елементарни настани и случаен настан

Експериментот кој под приближно исти услови може да се повторува повеќе број пати и при тоа во ниедно од повторувањата неговиот исход не е еднозначно одреден, се нарекува *статистички експеримент*. Секој можен исход на еден статистички експеримет, се нарекува *елементарен настан*. Множеството од сите елементарни настани за еден статистички експеримент, се нарекува *простор од елементарни настани*, и се означува со Ω ("омега"). Секое подмножество $A \subseteq \Omega$, се нарекува *случаен настан* или само *настан*. Така, настаните $\varnothing$ и Ω се специјални случаи на настани, кои се нарекуваат *невозможен*, односно *сигурен настан*.

Пример 1. Нека статистичкиот експеримент се состои во фрлање на хомогена коцка за играње. Тогаш, елементарните настани на овој експеримент може да ги означиме со ω_i -на коцката паднале i точки, $i = 1,2,3,4,5,6$, па просторот од елементарни настани ќе биде $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$. Ако настанот A го дефинираме како "на коцката паднале парен број на точки", тогаш $A = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$. Велиме дека, *настанот A се реализирал* кога ќе се реализира некој од елементарните настани во состав на настанот A. Нека сега настанот B е "на коцката паднале 6 точки", тогаш $B = \{\omega_6\}$. Забележуваме дека $B \subseteq A$ (се чита: "*настанот B го повлекува настанот A*"), а тоа значи дека секогаш кога ќе се реализира настанот B, се реализира и настанот A.

2. Операции со настани

Бидејќи настаните се множества (подмножества од просторот елементарни настани), кај нив може да ги примениме операциите со множества. Така, ги имаме следните дефиниции:

i) Настанот $\overline{A} = \Omega \setminus A = \{\omega \mid \omega \notin A\}$, се нарекува *спротивен настан на настанот A*, и се релизира кога не се реализира настанот A.

ii) Настанот $A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ или } \omega \in B\}$, се нарекува *унија на настаните A и B*, и се реализира кога ќе се реализира барем еден од настаните A и B.

iii) Настанот $AB = \{\omega \mid \omega \in A \text{ и } \omega \in B\}$, се нарекува *производ на настаните A и B*, и се реализира кога ќе се реализираат истовремено и двата настани A и B.

iv) Настанот $A \setminus B = \{\omega \mid \omega \in A \text{ и } \omega \notin B\}$, се нарекува *разлика на настаните A и B*, и се реализира кога ќе се реализира настанот A, но нема да се реализира настанот B.

Од претходните дефиниции може да се забележи дека спротивниот настан $\overline{A}$ е *комплементот на* множеството A во множеството елементарни настани Ω, а производот AB на настаните A и B е *пресек* на множествата A и B.

v) За настаните A и B за кои важи дека $AB = \varnothing$, велиме дека се *дисјунктни настани*, односно не е можна нивната истовремена реализација. Ако $AB = \varnothing$, тогаш нивната унија $A \cup B$ се означува со $A + B$ и се нарекува *збир на настаните A и B*.

Следуваат некои од основните равенства кои важат кај множествата и кои може да се искористат и кај случајните настани:

$$AB = BA,\; A \cup B = B \cup A,\; (AB)C = A(BC),\; (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$$

$$A(BUC) = AB \cup AC,\; A \cup BC = (A \cup B)(A \cup C),\; \overline{(AUB)} = \overline{A}\,\overline{B},\; \overline{(AB)} = \overline{A} \cup \overline{B},$$

$$A \setminus B = A\overline{B},\; A = AB + A\overline{B},\; A \cup B = A + \overline{A}B.$$

Пример 2. Како продолжение на Пример1. ако дефинираме настан C со "на коцката се паднале број на точки поголем од 3", тогаш $C=\{\omega_4,\omega_5,\omega_6\}$. Сега можеме да илустрираме некои од операциите со настани. Така, настанот $AC=\{\omega_4,\omega_6\}$ е настанот "на коцката се паднале парен број на точки поголем од 3", потоа настанот $A\setminus C=\{\omega_2\}$ е настанот "на коцката се паднале парен број на точки помал или еднаков на 3", додека настанот $\overline{A}=\{\omega_1,\omega_3,\omega_5\}$ е настанот "на коцката не се паднале парен број на точки", односно "на коцката се паднале непарен број на точки".

3. Дефиниција на веројатност и основни својства

Нека $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,...,\omega_n\}$ е просторот од елементарни настани на некој експеримент. На елементарните настани $\omega_1,\omega_2,...,\omega_n$ им ги придружуваме соодветно броевите $p_1,p_2,...,p_n$ кои ги задоволуваат следните услови:

i) ненегативност: $p_i\geq 0$, за секој $i=1,2,...,n$,

ii) нормираност: $p_1+p_2+...+p_n=1$.

Тогаш, бројот p_i го нарекуваме *веројатност на елементарниот настан* ω_i. Нека $A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},...,\omega_{i_m}\}\subseteq\Omega$, каде $1\leq i_1<i_2<...<i_m\leq n$, е случаен настан, тогаш бројот $P(A)=p_{i_1}+p_{i_2}+...+p_{i_m}$ го нарекуваме *веројатност на настанот* A. Ако $p_1=p_2=...=p_n=\frac{1}{n}$, тогаш станува збор за простор од елементарни настани каде секој елементарен настан е еднакво веројатен, и тогаш горната дефиниција се нарекува *класична дефиниција на веројатност* и според неа веројатноста на настанот A е $P(A)=\frac{m}{n}$.

Пример 3. За просторот елементарни настани дефиниран во Пример 1. имаме дека важи $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6=\frac{1}{6}$, каде p_i е веројатноста на елементарниот настан ω_i. Имено тоа е така затоа што коцката е хомогена и "шансите", односно веројатноста за појавување на било кој број на точки на коцката се еднакви за секој број на точки. И тогаш, веројатностите на настаните дефинирани во Пример 1. и Пример 2. се $P(A)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(B)=\frac{1}{6}$, $P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, $P(AC)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ и слично.

Ако со $\boldsymbol{A}$ го означиме множеството од сите подмножества на множеството од елементарни настни Ω (партитивното множество), тогаш со горната дефиниција се дефинира функција $P:\boldsymbol{A}\rightarrow\mathbb{R}$, која на секој настан $A\subseteq\Omega$ му придружува број $P(A)$ и таа функција се нарекува *веројатност*. Подредената тројка $(\Omega,\boldsymbol{A},P)$ се нарекува *простор на веројатност.*

Некои од основните својства на веројатноста се:

i) за секој настан $A\subseteq\Omega$, важи $0\leq P(A)\leq 1$,

ii) веројатноста на сигурниот настан е $P(\Omega)=1$,

iii) ако $AB=\varnothing$, тогаш $P(A+B)=P(A)+P(B)$,

iv) за произволни два настана A и B важи $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB)$,

v) за секој настан A, веројатноста на неговиот спротивен настан е $P(\overline{A})=1-P(A)$,

vi) веројатноста на невозможниот настан е $P(\varnothing)=0$,

vii) ако $A\subseteq B$, тогаш $P(A)\leq P(B)$,

viii) веројатноста на разлика на настаните A и B е $P(A\setminus B)=P(A)-P(AB)$,

ix) за произволни настани A, B и C важи

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC),$$

x) за произволни настани $A_1, A_2, ..., A_n$ важи неравенството

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \le P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Секое од погорните својства може да се докаже со помош на дефиницијата на веројатност. Препорачуваме да се обидете да ги покажете.

4. Некои неравенства со веројатности на случајни настани

Со користење на својствата на веројатноста може да се покажат многу неравенства со веројатности на случајни настани. Еве некои од нив:

Задача 1. Покажи дека за произволните настани A и B важи $P(AB) \ge P(A) + P(B) - 1$.

Решение. Од својството iv) имаме дека $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$. Според својството i) се добива дека $P(A \cup B) \le 1$. Ако го замениме последното неравенство во претходното равенство, добиваме $P(AB) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) \ge P(A) + P(B) - 1$, што требаше да се докаже. ♦

Задача 2. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ се произволни настани. Докажи го неравенството

$$P(A_1 A_2 ... A_n) \ge P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) - (n-1).$$

Решение. Од задачата 1, за настаните A_1 и A_2, имаме $P(A_1 A_2) \ge P(A_1) + P(A_2) - 1$. Понатаму, од ова неравенство може да се изведе следното неравенство

$$P(A_1 A_2 A_3) \ge P(A_1 A_2) + P(A_3) - 1 \ge P(A_1) + P(A_2) - 1 + P(A_3) - 1 = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - 2.$$

Сега, може да претпоставиме дека за настаните $A_1, A_2, ..., A_n$ важи

$$P(A_1 A_2 ... A_n) \ge P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) - (n-1).$$

Тогаш, за настаните $A_1, A_2, ..., A_n, A_{n+1}$ имаме

$$P(A_1 A_2 ... A_n A_{n+1}) \ge P(A_1 A_2 ... A_n) + P(A_{n+1}) - 1 \ge P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) - (n-1) + P(A_{n+1}) - 1 =$$
$$= P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) + P(A_{n+1}) - n$$

од каде според принципот на математичката индукција, заклучуваме дека важи даденото неравенство. ♦

Задача 3. Нека настаните A, B и C се произволни настани, и нека истовремената реализација на настаните A и B го повлекува настанот C. Докажи дека $P(A) + P(B) - P(C) \le 1$.

Решение. Од условот на задачата имаме дека $AB \subseteq C$, па според својството vii) следи дека $P(AB) \le P(C)$. Користејќи го ова неравенство и резултатот од задачата 1 добиваме $P(C) \ge P(AB) \ge P(A) + P(B) - 1$, од каде следи бараното неравенство $P(A) + P(B) - P(C) \le 1$. ♦

Задача 4. Нека $A_1, A_2, ..., A_n$ и B се произволни настани и нека истовремената реализација на настаните $A_1, A_2, ..., A_n$ го повлекува настанот B. Докажи дека $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) - P(B) \le n - 1$.

Решение. Бараното неравенство може да се изведе слично како во задачата 3 или пак да се размислува на следниот начин. Прво, од условот на задачата имаме дека $A_1 A_2 ... A_n \subseteq B$, од каде следи дека $P(A_1 A_2 ... A_n) \le P(B)$. Сега, користејќи ги својатвата v) и x) се добива

$$P(B) \ge P(A_1 A_2 ... A_n) = P(\overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup ... \cup \overline{A_n}}) = 1 - P(\overline{A_1} \cup \overline{A_2} \cup ... \cup \overline{A_n}) \ge 1 - (P(\overline{A_1}) + P(\overline{A_2}) + ... + P(\overline{A_n})) =$$
$$= 1 - (1 - P(A_1) + 1 - P(A_2) + ... + 1 - P(A_n)) = 1 - n + P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n)$$

од каде следи бараното неравенство $P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) - P(B) \le n - 1$. ♦

Задача 5. Покажи дека за произволните настани A, B и C важи

$$P(A) \cdot P(B \setminus A) \cdot P(C \setminus (A \cup B)) \le \frac{1}{27}.$$

Решение. За ненегативните броеви $P(A)$, $P(B \setminus A)$ и $P(C \setminus (A \cup B))$ важи неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина

$$P(A)\cdot P(B\setminus A)\cdot P(C\setminus(A\cup B))\le\left(\tfrac{P(A)+P(B\setminus A)+P(C\setminus(A\cup B))}{3}\right)^3.$$

Бидејќи настаните A, $B\setminus A$ и $C\setminus(A\cup B)$ се попарно дисјунктни настани, за збирот од нивните веројатности имаме дека е

$$P(A)+P(B\setminus A)+P(C\setminus(A\cup B))=P(A+B\setminus A+C\setminus(A\cup B))=P(A\cup B\cup C)\le 1,$$

затоа што во теоријата на множества важи следното равенство

$$A+(B\setminus A)+(C\setminus(A\cup B))=A\cup B\cup C.$$

Со примена на последното неравенство во неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, добиваме

$$P(A)\cdot P(B\setminus A)\cdot P(C\setminus(A\cup B))\le\left(\tfrac{P(A)+P(B\setminus A)+P(C\setminus(A\cup B))}{3}\right)^3\le\left(\tfrac{1}{3}\right)^3=\tfrac{1}{27},$$

што требаше да се докаже. ♦

Задача 6. Покажи дека за произволните настани A, B и C важи неравенството

$$P(AB)+P(AC)-P(BC)\le P(A).$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со $P(AB)+P(AC)\le P(A)+P(BC)$, кое заради својството iv) е еквивалентно со $P(AB\cup AC)+P(ABC)\le P(A\cup BC)+P(ABC)$, односно со $P(A(B\cup C))\le P(A\cup BC)$. Повторно заради својството iv) последното неравенство е еквивалентно со $P(A)+P(B\cup C)-P(A\cup B\cup C)\le P(A)+P(BC)-P(ABC)$, односно со $P(A\cup B\cup C)-P(B\cup C)+P(BC)-P(ABC)\ge 0$.

Заради, $B\cup C\subseteq A\cup B\cup C$ и $ABC\subseteq BC$, и од својството vii) добиваме дека $P(B\cup C)\le P(A\cup B\cup C)$ и $P(ABC)\le P(BC)$, односно $P(A\cup B\cup C)-P(B\cup C)\ge 0$ и $P(BC)-P(ABC)\ge 0$, од каде следи дека е точно

$$P(A\cup B\cup C)-P(B\cup C)+P(BC)-P(ABC)\ge 0.$$

Заради еквивалентните трансформации, следи дека е точно и даденото неравенство $P(AB)+P(AC)-P(BC)\le P(A)$. ♦

Задача 7. Покажи дека за произволните настани A и B важи неравенството

$$P(A\cup B)\cdot P(AB)\le P(A)\cdot P(B).$$

Решение. Бидејќи $AB\subseteq A$ и $AB\subseteq B$, следи дека $P(AB)\le P(A)$ и $P(AB)\le P(B)$ од каде $P(AB)\le\min\{P(A),P(B)\}$. Од друга страна $P(AB)\ge 0$. Значи, $P(AB)\in[0,\min\{P(A),P(B)\}]$. Понатаму, $P(A\cup B)\cdot P(AB)=(P(A)+P(B)-P(AB))\cdot P(AB)$. Да означиме со $f(x)=(P(A)+P(B)-x)\cdot x$, тогаш функцијата $f(x)$ е растечка на интервалот $[0,\min\{P(A),P(B)\}]$ и достигнува максимум во $x=\min\{P(A),P(B)\}$. Тоа значи дека $f(x)\le(P(A)+P(B)-\max\{P(A),P(B)\})\cdot\max\{P(A),P(B)\}$, за секој $x\in[0,\min\{P(A),P(B)\}]$. Така, од $P(AB)\in[0,\min\{P(A),P(B)\}]$, имаме дека

$$\begin{aligned}P(A\cup B)\cdot P(AB)&=(P(A)+P(B)-P(AB))\cdot P(AB)=f(P(AB))\le\\&\le(P(A)+P(B)-\max\{P(A),P(B)\})\cdot\max\{P(A),P(B)\}=P(A)\cdot P(B)\end{aligned}$$

што требаше да се докаже. ♦

Задача 8. Покажи дека за произволните настани A и B важи неравенството

$$|P(AB)-P(A)\cdot P(B)|\le\frac{1}{4}.$$

Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со $-\frac{1}{4}\le P(AB)-P(A)\cdot P(B)\le\frac{1}{4}$, односно за да се покаже дека важи, треба да се покажат дека важат неравенствата $P(AB)-P(A)\cdot P(B)\le\frac{1}{4}$ и $P(AB)-P(A)\cdot P(B)\ge-\frac{1}{4}$.

Да означиме со $x=\min\{P(A),P(B)\}$, тогаш $P(AB)\le x$ (затоа што $AB\subseteq A$ и $AB\subseteq B$, па следи дека $P(AB)\le P(A)$ и $P(AB)\le P(B)$) и $P(A)\cdot P(B)\ge x\cdot x=x^2$. И бидејќи, $x-x^2\le\frac{1}{4}$, за $x\in[0,1]$, добиваме дека важи едната страна на неравенство, односно

$$P(AB)-P(A)\cdot P(B)\leq x-x^2\leq \tfrac{1}{4}.$$

Од друга страна, ако означиме со $y=P(AB)$, $a=P(A\setminus B)$ и $b=P(B\setminus A)$ имаме дека
$$P(A)\cdot P(B)=P(A\setminus B+AB)\cdot P(B\setminus A+AB)=(P(A\setminus B)+P(AB))\cdot(P(B\setminus A)+P(AB))=(a+y)(b+y)$$
тогаш имаме
$$P(AB)-P(A)\cdot P(B)=y-(a+y)(b+y)=y-(ab+ay+by+y^2)=y-(ab+y(a+b+y)),$$
и бидејќи $a+b+y=P(A\setminus B)+P(B\setminus A)+P(AB)=P(A\setminus B+B\setminus A+AB)=P(A\cup B)\leq 1$, се добива дека
$$y-(ab+y(a+b+y))=y-ab-y(a+b+y)\geq y-ab-y=-ab.$$
Сега, од $A\setminus B\subseteq A$ и $B\setminus A\subseteq \overline{A}$ имаме дека $P(A\setminus B)\leq P(A)$ и $P(B\setminus A)\leq P(\overline{A})=1-P(A)$, односно $a\leq P(A)$ и $b\leq 1-P(A)$, и тогаш $ab\leq P(A)\cdot(1-P(A))\leq \frac{1}{4}$, бидејќи $P(A)\in[0,1]$. Така добивме дека важи и другата страна на неравенството, односно
$$P(AB)-P(A)\cdot P(B)=y-(ab+y(a+b+y))\geq -ab\geq -\tfrac{1}{4}.\ \blacklozenge$$

5. Задачи за самостојна работа

Задача 9. Покажи дека за произволните настани A, B и C важи неравенството
$$|P(AB)-P(AC)|\leq P(B\Delta C),$$
каде $B\Delta C=(B\setminus C)+(C\setminus B)=B\overline{C}+C\overline{B}$ е *симетрична разлика* на настаните B и C и се реализира тогаш кога ќе се реализира само еден од настаните B или C.

Задача 10. Покажи дека за произволните настани A, B и C важи неравенството
$$P(A\Delta B)\leq P(A\Delta C)+P(B\Delta C).$$

Литература:

1. С. Вукадиновиќ, В. Стојановиќ, *Математископ 6 - Збирка решених задатака за четврти разред средњих школа*, Математископ, Београд, 1999
2. П. Младеновиќ, *Вероватноќа и статистика*, Математички факултет, Београд, 2005
3. Р. Малчески, *Статистика за бизнис,* Факултет за општествени науки, Скопје, 2006

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА кое го издава Сојузот на математичарите на Македонија