Osječki matematički list 21 (2021), 75–80

Egipatski razlomci

Franka Miriam Brückler*

Sažetak

U ovom članku opisujemo egipatske razlomke, tj. zapise pozitivnih razlomaka kao zbrojeve jediničnih razlomaka, u njihovom povijesnom kontekstu.

Ključne riječi: *staroegipatska matematika, matematika starih civilizacija, racionalni brojevi, egipatski razlomci, Ahmes, Leonardo iz Pise, pohlepni algoritmi*

Egyptian fraction

Abstract

In this paper we discuss Egyptian fractions, i.e. representations of positive fractions as sums of unit fractions, in their historical context.

Keywords: *ancient Egyptian mathematics, mathematics of ancient civilisations, rational numbers, Egyptian fractions, Ahmes, Leonardo of Pisa, greedy algorithms*

*Matematički odsjek, Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Zagrebu, email: bruckler@math.hr

1 Uvod

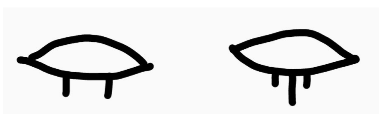
Staroegipatska civilizacija jedna je od civilizacija iz kojih su sačuvani najstariji poznati dokazi ljudske matematičke djelatnosti naprednije od osnovnog brojanja. Poznate su hijeroglifske brojke, jedan od prvih sustava notacije brojeva. Radilo se o dekadskom aditivnom nepozicijskom sustavu sa znamenkama koje su predstavljale potencije od 10, od jedan do milijun. Hijeroglifsko pismo je poslije otkrića papirusa u 3. tisućljeću pr. Kr. zamijenjeno hijeratskim, prikladnijim za pisanje po papirusima, a još kasnije (sredinom prvog tisućljeća pr. Kr.) demotskim.

Najstariji sačuvani egipatski matematički tekstovi potječu iz razdoblja tzv. srednjeg carstva (prva polovica drugog tisućljeća pr. Kr.). Radi se o nekoliko papirusa matematičkog sadržaja, pisanih hijeratskim pismom. Iz njih saznajemo da su stari Egipćani, među ostalim, znali provoditi osnovne računske operacije s prirodnim brojevima i pozitivnim razlomcima.

O temi egipatskih razlomaka već se pisalo u Osječkom matematičkom listu [2], te ovaj članak ima više zajedničkih elemenata s tim člankom, no ovaj članak, kao što će biti i budući u ovoj povijesnoj rubrici, pisan je s naglaskom na povijesni kontekst. Ako se niste već susreli s egipatskim razlomcima, vjerojatno sad očekujete da se u egipatskim matematičkim papirusima mogu naći računi poput

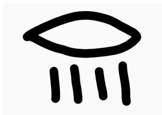
$$\frac{5}{6}+\frac{2}{5}=\frac{25+12}{30}=\frac{37}{30}=1\,\frac{7}{30}.$$

I stvarno, istina je da su stari Egipćani znali zbrojiti $\frac{5}{6}$ s $\frac{2}{5}$, no račun nipošto nije izgledao poput gore navedenog, pri čemu je najmanje bitna razlika u drukčijoj notaciji brojeva. Naime, umjesto da razlomke zapisuju koristeći brojnik i nazivnik, stari su Egipćani razlomke prikazivali kao zbrojeve jediničnih razlomaka (razlomaka s brojnikom 1). Specijalni simboli postojali su samo za razlomke $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$ (slika 1).



Slika 1. Staroegipatski simboli za $\frac{2}{3}$ i $\frac{3}{4}$

Ostali razlomci rastavljali su se na zbrojeve jediničnih, pri čemu za zbrajanje nije bilo posebne oznake, već su se članovi rastava jednostavno zapisivali jedan iza drugog, a jedinični razlomci zapisivali su se pomoću simbola otvorenih usta iznad brojke koja je predstavljala nazivnik (slika 2 prikazuje razlomak kojeg danas zapisujemo kao $\frac{1}{4}$: u hijeroglifskoj i hijeratskoj notaciji broj četiri se zapisivao kao $||||$). Pritom se za razlomke iznosa većeg od 1 podrazumijeva da je prvo odvojen cijeli dio, pa se egipatski razlomci odnose na zapisivanje razlomaka između 0 i 1.



Slika 2. Staroegipatski jedinični razlomak

Rhindov papirus, koji potječe iz otprilike 1650. g. pr. Kr. i koji je ujedno najstariji poznati matematički spis na svijetu s poznatim imenom autora (bio je to pisar Ahmes) sadrži tablicu rastava razlomaka tipa $\frac{2}{2n+1}$ na jedinične razlomke. Tako tu primjerice nalazimo da je $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$. Ahmes nigdje nije naveo kojom je metodom dobivena ta tablica, a i danas postoje rasprave o mogućim metodama i razlozima određenih odabira. Ono što je očito da Ahmes preferira kraće zapise, ali i da izbjegava ponavljanje dva ista jedinična razlomka u rastavu (danas se pod egipatskim razlomcima misli na zapise razlomaka kao zbroja, u pravilu različitih, jediničnih razlomaka). Tako primjerice ni Ahmes ni mi danas ne bismo kao egipatski razlomak prihvatili zapis $\frac{2}{7}$ kao $\frac{1}{7} + \frac{1}{7}$.

Navedeno sugerira nejedinstvenost ovakvog prikaza i moguće je da je već Ahmes toga bio bar donekle svjestan. Zapravo, svaki pozitivan razlomak ima beskonačno mnogo rastava na zbroj različitih jediničnih razlomaka. Egzistencija rastava[1] posljedica je pohlepnog algoritma za generiranje egipatskih razlomaka, kojeg je otkrio i opisao Leonardo iz Pise[2] pa se taj rezultat njemu u čast naziva Fibonaccijevim teoremom o egipatskim razlomcima.

[1] Ako ne bismo zahtijevali da su pribrojnici u egipatskim razlomcima različiti, egzistencija bi bila trivijalna: Svaki pozitivan razlomak $\frac{m}{n}$ bio bi zbroj od m jediničnih razlomaka $\frac{1}{n}$.

[2] Usput rečeno, razlomačku crtu uveo je upravo Leonardo iz Pise (Fibonacci) početkom 13. stoljeća.

Formalni dokaz nije težak, a oslanja se na tzv. Sylvesterovu lemu: Ako od pozitivnog nejediničnog razlomka manjeg od 1 oduzmemo najveći jedinični razlomak manji od njega, dobit ćemo razlomak s manjim brojnikom od polaznog.[3] Budući da stoga uzastopnim oduzimanjem najvećeg jediničnog razlomka manjeg od trenutnog rezultata dobivamo razlomke sa sve manjim brojnicima, a oni su prirodni brojevi, te budući da je skup prirodnih brojeva dobro uređen (ne sadrži beskonačan padajući niz), postupak staje u konačno mnogo koraka, dakle se svaki pozitivan razlomak može zapisati u egipatskom obliku.

No, znamo i da je

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6},$$

pa ako taj identitet podijelimo s nekim od nazivnika u jednom egipatskom zapisu danog razlomka, te rezultat supstituiramo na njegovo mjesto, dobit ćemo novi egipatski zapis istog razlomka. Budući da to možemo ponoviti proizvoljno mnogo puta, zaključujemo da svaki pozitivni razlomak ima beskonačno mnogo prikaza u egipatskom obliku.

Ilustrirajmo ovo na konkretnom primjeru. Uzmimo razlomak $\frac{13}{7}$. Prvo odvojimo cijeli dio:

$$\frac{13}{7} = 1 + \frac{6}{7}.$$

Sad primijenimo Fibonaccijev algoritam na $\frac{6}{7}$. Najveći jedinični razlomak manji od njega je $\frac{1}{2}$, pa računamo

$$\frac{6}{7} - \frac{1}{2} = \frac{5}{14}$$

(uočite da se brojnik smanjio!). Dakle, $\frac{13}{7} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{5}{14}$. Sad uzmemo najveći jedinični razlomak manji od $\frac{5}{14}$, a to je $\frac{1}{3}$, te oduzmemo

$$\frac{5}{14} - \frac{1}{3} = \frac{1}{42}.$$

Rezultat je jedinični razlomak, dakle je ovo bio zadnji korak i zaključujemo da je

$$\frac{13}{7} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{42}$$

[3]Formalni iskaz i dokaz Sylvesterove leme nalazi se u dodatku na kraju ovog članka.

jedan egipatski prikaz našeg razlomka. Podijelimo li identitet $1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ npr. s 3 dobijemo $\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$ te je

$$\frac{13}{7} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{42}$$

drugačiji egipatski zapis istog razlomka.

Postavlja se razumno pitanje što li je stare Egipćane navelo da razlomke prikazuju na ovaj način, kojeg su donekle koristili i antički Grci i Rimljani? Razlog je čisto praktične prirode: Mnogi svakodnevni problemi čija rješenja se izražavaju razlomcima jednostavnije su rješivi pomoću egipatskih razlomaka. Primjerice, zamislite da je stari Egipćan, nazovimo ga Ahmes, htio podijeliti 11 kruhova među 16 ljudi. Mi bismo danas rekli: Svatko će dobiti $\frac{11}{16}$ kruhova (kako biste Vi rezali kruhove da ih raspodijelite?). No, Ahmes bi razmišljao ovako: Ako svatko dobije po pola kruha, potrošit ću 8 kruhova, dakle prvo ću 8 kruhova razrezati napola i svakom dat po $\frac{1}{2}$ kruha. Tada mi preostaju 3 čitava kruha. Ako svaki od njih podijelim na osmine (popola pa popola pa još jednom popola) imat ću 24 komada, od tog svakom dam po jedan pa je svatko dobio po $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ kruha, a ostalo mi je 8 osmina kruha. Ako svaku od njih raspolovim, dobit ću još 16 komada, svakom dam po 1 i svi sretni — svatko je dobio po $\frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16}$ kruha, točno koliko i treba.

Dodatak

Ovdje dajemo dokaz spomenute Sylvesterove leme:

Teorem 1 (Sylvesterova lema). *Ako je $\frac{m}{n}$ pozitivan razlomak manji od 1 s $m \neq 1$ i ako je $\frac{1}{k}$ najveći jedinični razlomak manji od $\frac{m}{n}$, onda je brojnik razlomka $\frac{m}{n} - \frac{1}{k} = \frac{mk - n}{nk}$ manji od m.*

Dokaz. Po pretpostavci je

$$\frac{1}{k} < \frac{m}{n} < \frac{1}{k-1},$$

dakle je $m\,(k - \text{¸}1) < n$ odnoson $m\,k - n < m$. $\square$

Literatura

[1] M. Dunton, R.E. Grimm, *Fibonacci on Egyptian fractions*, Fibonacci Quart, 4 (1966) 339—354.

[2] D. Jankov, *Egipatski razlomci*, Osječki matematički list, 11 (2011) 11–18.

[3] R. Knott, *Egyptian Fractions*. `http://www.maths.surrey.ac.uk/hosted-sites/R.Knott/Fractions/egyptian.html`, pristupljeno 7. travnja 2021.

[4] M. Millmore, *Egyptian Mathematics Numbers Hieroglyphs*. `https://discoveringegypt.com/egyptian-hieroglyphic-writing/egyptian-mathematics-numbers-hieroglyphs/`, pristupljeno 10. svibnja 2021.