Алексеј А. Јегоров, Москва

ЛОГАРИТАМСКИ РАВЕНКИ

На приемните испити често се среќаваат равенки кои променливата ја содржат под знакот за логаритам. Таквите равенки се нарекуваат **логаритамски.**

Основна логаритамска равенка е равенката од облик $\log_a x = b$. Ако $a > 0, a \neq 1,$ тогаш равенката има единствено решение $x = a^b$.

Во натамошните разгледувања ќе ги користиме следните својства на логаритмите:

$$\log_a xy = \log_a x + \log_a y, \tag{1}$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y, \tag{2}$$

$$\log_a x^{\alpha} = \alpha \log_a x, \tag{3}$$

$$\log_{a^{\beta}} x = \frac{1}{\beta} \log_a x, \tag{4}$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}, \tag{5}$$

(секаде се претпоставува дека $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, x > 0, y > 0, \alpha \in R, \beta \in R$). Исто така, корисно е да се запамети и специјалниот случај на формулата (5):

$$\log_a x = \frac{1}{\log_x a}. \tag{5'}$$

Сега да разгледаме некои типови логаритамски равенки кои најчесто се среќаваат.

Пример 1. Решете ја равенката $\log_4 x + \log_{\frac{1}{16}} x + \log_8 x^3 = 5.$

Решение. Во оваа равенка x е под знакот на логаритмот, па затоа $x>0$. Користејќи го својството (4), сите логаритми ги сведуваме на основа 2. Од својството (3) добиваме $\frac{1}{2}\log_2 x - \frac{1}{4}\log_2 x + \log_2 x = 5,$ од што последователно имаме $\frac{5}{4}\log_2 x = 5,\ \log_2 x = 4,\ x = 16.$ ♦

Некогаш после извесни трансформации равенката се сведува на обликот

$$f(\log_a x) = 0. \tag{6}$$

Решавањето на равенката (6), после смената $y = \log_a x$ и наоѓањето на решението на равенката $f(y) = 0,$ се сведува на решавање на основната равенка $\log_a x = y.$ Затоа основен проблем е да се најде трансформацијата која дадената равенка ја сведува на равенка од обликот (6).

Пример 2. Решете ја равенката $(\log_x 9x^2) \cdot \log_3^2 x = 4.$

Решение. Во оваа равенка x е под знакот на логаритмот, па затоа $x \neq 1$. Ако преминеме на логаритми со основа 3, ја добиваме еквивалентната равенка

$$\frac{\log_3 9x^2}{\log_3 x} \cdot \log_3^2 x = 4,$$

од каде што наоѓаме

$$(2+2\log_3 x)\cdot\log_3 x = 4.$$

Ставајќи $y=\log_3 x,$ ја добиваме квадратната равенка $y^2+y-2=0,$ чии решенија се $y_1=-2$ и $y_2=1.$ Останува да се решат основните равенки $\log_3 x=-2$ и $\log_3 x=1,$ од каде што наоѓаме $x\in\left\{\frac{1}{9},3\right\}.$ ♦

Пример 3. Решете ја равенката $x^{\log x}=10^{2\log^2 x-3\log x+2}.$

Решение. Во оваа равенка x е под знакот на логаритмот, па затоа $x>0.$

Логаритмирајќи ја левата и десната страна со основа 10, ја добиваме еквивалентната равенка $\log^2 x=2\log^2 x-3\log x+2.$ Ако ставиме $y=\log x,$ ја добиваме равенката $y^2-3y+2=0,$ чии решенија се $y_1=1$ и $y_2=2.$ Останува да се решат основните равенки $\log x=1$ и $\log x=2,$ од каде што наоѓаме $x\in\{10,\ 100\}.$ ♦

Често пати се среќаваме со равенка од облик

$$\log_a f(x)=g(x), \tag{7}$$

или со равенка која се сведува на обликот (7). За $a>0, a\neq 1, f(x)>0,$ равенката (7) е еквивалентна на равенката $f(x)=a^{g(x)}.$

Пример 4. Решете ја равенката $\log_3(4\cdot 3^{x-1}-1)=2x-1.$ \

Решение. Јасно, за да равенката има смисла треба $4\cdot 3^{x-1}-1>0.$ Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$4\cdot 3^{x-1}-1=3^{2x-1}.$$

Со смената $y=3^x,$ ја добиваме квадратната равенка $y^2-4y+3=0,$ чии решенија се $y_1=1$ и $y_2=3.$ Останува да се решат равенки $3^x=1$ и $3^x=3,$ од каде што наоѓаме $x\in\{0,\ 1\}.$ ♦

Равенката од облик

$$\log_{g(x)} f(x)=a, \tag{8}$$

е еквивалентна на системот

$$f(x)=(g(x))^a,\quad g(x)>0,\quad f(x)>0,\quad g(x)\neq 1. \tag{9}$$

Пример 5. Решете ја равенката $\log_{(x+1)}(x^2+x-6)^2=4.$

Решение. Равенката е еквивалентна на системот

$$(x^2+x-6)^2=(x+1)^4,\quad x+1>0,\quad x+1\neq 1,\quad x^2+x-6\neq 0.$$

Од $(x^2+x-6)^2-((x+1)^2)^2=0,$ имаме

$$(x^2+x-6-(x+1)^2)(x^2+x-6+(x+1)^2)=0,$$

од каде што наоѓаме

$$(2x^2+3x-5)(x+7)=0,$$

па е $x_1=1, x_2=-\frac{5}{2}, x_3=-7.$ Системот го задоволува само решението $x_1=1.$ ♦

Да го разгледаме системот

$$f(x)=g(x), \quad f(x)>0. \tag{10}$$

Ако x_0 е решение на системот (10), тогаш $\log f(x_0)=\log g(x_0),$ што значи секое решение на системот (10) е решение и на равенката $\log f(x)=\log g(x).$ Јасно, секое решение на последната равенка е решение и на системот (10). Според тоа, последната равенка е еквивалентна на системот (10).

Пример 6. Решете ја равенката $\log_8(7x^2-5x-6)=2\log_4\sqrt[3]{3x-1}.$

Решение. Сведувајќи на логаритми со основа 2, после упростувањето, ја добиваме еквивалентната равенка $\log_2(7x^2-5x-6)=\log_2(3x-1),$ која е еквивалентна на системот

$$7x^2-5x-6=3x-1, \quad 3x-1>0.$$

Решенија на квадратната равенка во системот се $x_1=\frac{4+\sqrt{51}}{7}, x_2=\frac{4-\sqrt{51}}{7}$ бидејќи $3x_2-1<0,$ добиваме дека решение на системот, а со самото тоа и на почетната равенка е $x=\frac{4+\sqrt{51}}{7}.$ ♦

Сега ќе обратиме внимание на некои грешки, кои учениците најмногу ги прават при решавањето на логаритамските равенки.

Најчесто тие грешки се поврзани со неправилната примена на формулите за логаритмирање на производ, количник и степен.

На пример, решавајќи ја равенката од примерот 5, некои ученици пишуваат: *"Од условот следува* $2\log_{(x+1)}(x^2+x-6)=4,$ *односно* $x^2+x-6=(x+1)^2$ *од што добиваме* $x=-7.$ *Меѓутоа,* $x=-7$ *не ја задоволува почетната равенка, па затоа таа нема решение."* Решението $x=1$ е изгубено бидејќи применетата формула $\log_a x^2=2\log_a x$ важи само за $x>0.$ Во нашиот случај изразот x^2+x-6 за $x=1$ е негативен. Овде треба да се користи формулата $\log_a x^2=2\log_a|x|,$ која е точна за секој $x\neq 0.$

Уште еден пример. Решавајќи ја равенката

$$\log_2((x+1)(x-3))=2\log_4(x+8)-\log_{\frac{1}{2}}((x+1)(x-5)),$$

ученикот ја сведува на обликот

$$\log_2(x+1)+\log_2(x-3)=\log_2(x+8)+\log_2(x+1)+\log_2(x-5),$$

или

$$\log_2(x-3)=\log_2((x+8)(x-5)). \tag{11}$$

Потоа, тој добива квадратна равенка $x^2+2x-37=0,$ од која наоѓа $x_1=-1+\sqrt{38},$ $x_2=-1-\sqrt{38}.$ Второто решение го отфрла бидејќи не ја задоволува равенката (11) и добива $x=-1+\sqrt{38}.$

Каде е овде грешката? Формулата $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$ е точна само за $x>0$ и $y>0.$ Затоа при логаритмирањето на производот се губи решението $x=-1-\sqrt{38},$ кое ја задоволува почетната равенка.

За да се убедиме во последното, да забележиме дека почетната равенка е еквивалентна на системот

$$\log_2(x+1)(x-3)=\log_2(x+8)(x+1)(x-5),\quad x+8>0,$$

т.е. на системот

$$(x+1)(x-3)=(x+8)(x+1)(x-5),\quad x+8>0,\quad (x+1)(x-3)>0.$$

Решенија на последниот систем се $-1-\sqrt{38},-1+\sqrt{38}.$

Примената на формулите $\log_a u^2=2\log_a u$ и $\log_a uv=\log_a u+\log_a v$ "од десно на лево", најчесто доведува до проширување на областа на дефинираност на равенката, од што може да се појават решенија, кои тоа не се. Во таков случај, кога корените на добиената равенка се едноставни и проверката не е комплицирана, не е потребно да се испишува системот равенки и неравенки. Може да се премине на равенката од последицата и на крајот од решавањето да се изврши проверка.

Пример 7. Решете ја равенката $\log_{\frac{1}{2}}(x-1)+\log_{\frac{1}{2}}(x+1)-\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}}(7-x)=1.$

Решение. Ако преминеме во логаритам со основа 2 ја добиваме равенката $2\log_2(7-x)=1+\log_2(x-1)+\log_2(x+1),$ од каде како последица ја добиваме равенката $(7-x)^2=2(x^2-1)$ т.е. равенката $x^2+14x-51=0.$ Решенија на последната равенка се $x_1=3,$ $x_2=-17.$ Второто решение, очигледно, не ја задоволува дадената равенка. Заменувајќи во дадената равенка $x=3$, добиваме дека $x=3$ навистина е нејзино решение. ♦

На крајот, да наведеме уште еден пример, како се губат решенијата при користењето на формулите за премин на друга основа на логаритмот.

Пример 8. Решете ја равенката $\log_{2x}x+\log_{8x^2}x=0.$

"Решение". Ако преминеме во логаритам со основа u ја добиваме равенка $\frac{1}{1+\log_x 2}+\frac{1}{2+3\log_x 2}=0.$ Ставаме $y=\log_x 2$ и ја добиваме равенката $\frac{1}{1+y}+\frac{1}{2+3y}=0,$ чие решение е $y=-\frac{3}{4}.$ Затоа $\log_x 2=-\frac{3}{4},$ т.е. $x=2^{-\frac{4}{3}}=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}.$ Вредноста $x=\frac{1}{2\sqrt[3]{2}}$ ја задоволува почетната равенка. Меѓутоа, лесно се гледа дека и $x=1$ е решение на дадената равенка. Во што е работата?

Решението $x=1$ е изгубено заради преминот во основа μ, бидејќи формулата (6) е точна за $x>0, x\neq 1$. Ова решение може да се "спаси", ако веднаш забележиме дека $x=1$ ја задоволува равенката, а за останатите решенија се постапува како што е покажано. ♦

Воопшто зборувано, подобро е да се избегнува премин на основи кои зависат од μ. Но, ако тоа сепак мораме да го направиме, треба внимателно да се прати за кои вредности на μ тоа е можно и со директна замена во почетната равенка да проверуваме за оние вредности на μ, за кои во равенката се појавува основа на логаритам 1 или негативна.

Според тоа, при решавање на последната равенка подобро е да се премине на основа 2. Притоа добиваме $\frac{\log_2 x}{1+\log_2 x}+\frac{\log_2 x}{2+3\log_2 x}=0,$ или по смената $y=\log_2 x$ ја добиваме равенката $\frac{y}{1+y}+\frac{y}{2+3y}=0,$ чии решенија се $y_1=0,\ \ y_2=-\frac{4}{3},$ од кои лесно ги добиваме решенијата на почетната равенка.

Сега, да разгледаме две задачи, при чие решавање се користи монотоноста на некои функции.

Пример 9. Решете ја равенката $\log_5(x+3)=3-x.$

Решение. Лесно се гледа дека $x=2$ е решение на дадената равенка. Други решенија очигледно нема, бидејќи функцијата $\log_5(x+3)$ строго монотоно расте во целата своја дефиниционa област, а функцијата $3-x$ строго монотоно опаѓа во целата своја дефиниционa област. ♦

Пример 10. Решете ја равенката $(x+1)\log_3^2 x+4x\log_3 x-16=0.$

Решение. Ставаме $y=\log_3 x$ и по s ја решаваме квадратната равенка $(x+1)y^2+4xy-16.$ Добиваме $y=\frac{4}{x+1},$ ili $y=-4.$ Останува да се решат равенките $\log_3 x=\frac{4}{x+1},\ \ \log_3 x=-4.$

Втората равенка лесно се решава, а за да се реши првата доволно е да се забележи дека $x=3$ ја задоволува равенката и дека функцијата од левата страна расте за $x>0,$ а функцијата од десната страна опаѓа. ♦

На крајот ќе разгледаме една равенка која се решава со други методи.

Пример 11. Решете ја равенката $3x^2-2x^3=\log_2(x^2+1)-\log_2 x.$

Решение. Десната страна на равенката е дефинирана за $x>0$ и е еднаква на $\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right).$ Бидејќи $x+\frac{1}{x}>2, \text{za } x>0,$ добиваме дека $\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)\leq 1.$ Од друга страна, $3x^2-2x^3\geq 1 \text{ za } x>0.$ За $x=1$ важи $\log_2\left(x+\frac{1}{x}\right)=1$ и бидејќи

$$3x^2-2x^3=1 \text{ za } x=1$$

добиваме дека единствено решение на дадената равенка е $x=1$. ♦

ЗАДАЧИ ЗА САМОСТОЈНА РАБОТА

1. $\log_4 x+\log_2 x+2\log_{16} x=5$

2. $\log_{16}(x^2-2x-3)^2-2\log_{16}(x^2+x-2)=\frac{1}{2}$

3. $\left[(\log_2 x)^2+2\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{2\sqrt{2}}\right](3\log_8 x-1)=2(\log_2\frac{x}{2})\log_2 x^2$

4. $\log_{(3-4x^2)}(9-16x^2)=2+\frac{1}{\log_2(3-4x^2)}$

5. $(\log_3\frac{3}{x})\log_2 x-\log_3\frac{x^3}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}$

6. $3+\frac{1}{\log_{32}\frac{x}{2}}=\log_{\frac{x}{2}}\left(\frac{75x}{4}-\frac{11}{x}\right)$

7. $\log_{(2x+1)}(5+8x-4x^2)+\log_{(5-2x)}(1+4x+4x^2)=4$

8. $0,5\log(2x-1)+\log\sqrt{x-9}=1$

9. $x^2\log_6\sqrt{5x^2-2x-3}-x\log_{\frac{1}{6}}(5x^2-2x-3)=x^2+2x$

10. $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$

11. $3^x=10-\log_2 x$

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија