Ристо Малчески
Скопје

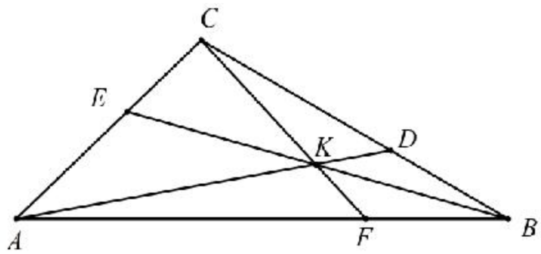
ЕКВИВАЛЕНТНОСТ НА ТЕОРЕМИТЕ НА ЧЕВА И МЕНЕЛАЈ

1. ВОВЕД

Теоремите на Чева и Менелај се особено корисни при докажување на конкурентност на прави и колинеарност на точки. Во [3] и [4] се дадени доказите на овие две важни теореми и се решени повеќе задачи со примена на истите, а во [5] и [6] се разгледани дополнителни задачи со примена на теоремите на Чева и Менелај, повеќе од кои се задавани на престжни математички натпревари. Но, да се потсетиме.

Теорема 1 (Чева). Нека D, E и F се редоследно точки на страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$. Правите AD, BE и CF се сечат во една точка ако и само ако важи

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}} \cdot \frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} \cdot \frac{\overline{CE}}{\overline{EA}} = 1. \blacksquare \qquad (1)$$



Коментар 1. а) Во (1) со $\overline{XY}$ е означена неориенираната должина на отсечката XY која е секогаш позитивна. Ако на правата XY избереме позитивна ориентација, можеме да користиме и ориентирана должина на отсечката XY која ќе ја означуваме со $\overrightarrow{XY}$ (по аналогија на означувањето на векторите). Притоа, ако ја земеме предвид ориентацијата, тогаш равенството (1) можеме да го замениме со равенството

$$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}} = 1. \qquad (2)$$

б) Постои и поопшта форма на теоремата на Чева, каде точките D, E и F може да се наоѓаат на продолженијата на страните на $\triangle ABC$, но тогаш се користи само формулата (2).

в) Покрај наведените форми на теоремата на Чева, постои и нејзина тригонометриска форма, која во случај кога точките D, E и F се редоследно точки на страните BC, CA и AB на $\triangle ABC$ гласи:

Правите AD, BE и CF се сечат во една точка ако и само ако важи

$$\frac{\sin\measuredangle ABE}{\sin\measuredangle CBE}\cdot\frac{\sin\measuredangle BCF}{\sin\measuredangle ACF}\cdot\frac{\sin\measuredangle CAD}{\sin\measuredangle BAD}=1. \qquad (3)$$

Доказ. Користејќи ја синусната теорема за триаголниците ABE и CBE добиваме

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}=\frac{\sin\measuredangle ABE}{\sin\measuredangle BAE} \text{ и } \frac{\overline{CE}}{\overline{BE}}=\frac{\sin\measuredangle CBE}{\sin\measuredangle BCE}.$$

Ако добиените равенства ги поделиме, искористиме дека $\measuredangle CBE=\measuredangle CBA$ и $\measuredangle BAE=\measuredangle BAC$, а потоа ја примени синусната теорема за триаголникот ABC, добиваме

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{BE}}:\frac{\overline{CE}}{\overline{BE}}=\frac{\sin\measuredangle ABE}{\sin\measuredangle BAE}:\frac{\sin\measuredangle CBE}{\sin\measuredangle BCE}$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}=\frac{\sin\measuredangle ABE}{\sin\measuredangle BAC}\cdot\frac{\sin\measuredangle BCA}{\sin\measuredangle CBE},$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}=\frac{\sin\measuredangle ABE}{\sin\measuredangle CBE}\cdot\frac{\sin\measuredangle BCA}{\sin\measuredangle BAC},$$

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}}=\frac{c\cdot\sin\measuredangle ABE}{a\cdot\sin\measuredangle CBE}.$$

Аналогно се докажуваат равенствата

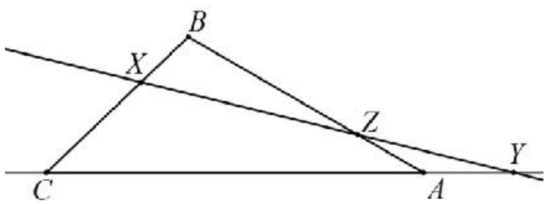
$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{b\cdot\sin\measuredangle CAD}{c\cdot\sin\measuredangle BAD} \text{ и } \frac{\overline{BF}}{\overline{AF}}=\frac{a\cdot\sin\measuredangle BCF}{b\cdot\sin\measuredangle ACF}.$$

Според теоремата на Чева, правите AD, BE и CF се сечат во една точка ако и само ако е исполнето равенството

$$\begin{aligned}1&=\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}\\&=\frac{b\cdot\sin\measuredangle ACF}{a\cdot\sin\measuredangle BCF}\cdot\frac{c\cdot\sin\measuredangle BAD}{b\cdot\sin\measuredangle CAD}\cdot\frac{a\cdot\sin\measuredangle CBE}{c\cdot\sin\measuredangle ABE}\\&=\frac{\sin\measuredangle ACF}{\sin\measuredangle BCF}\cdot\frac{\sin\measuredangle BAD}{\sin\measuredangle CAD}\cdot\frac{\sin\measuredangle CBE}{\sin\measuredangle ABE},\end{aligned}$$

кое е квивалентно со равенството (3). ■

Теорема 2 (Менелај). Нека X, Y, Z се редоследно точки на правите BC, AC, AB така што две од нив се на страните на $\triangle ABC$, а третата е а продолжението на страна на овој триаголник. Точките X, Y, Z се колинеарни ако и само ако важи



$$\frac{\overline{AZ}}{\overline{ZB}}\cdot\frac{\overline{BX}}{\overline{XC}}\cdot\frac{\overline{CY}}{\overline{YA}}=1. \qquad (4)$$

Коментар 2. а) Теоремата на Менелај дава критериум за колинеарност на точки. Ако се земе предвид ориентацијата на отсечките, равенството (4) се запишува во видот

$$\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}} = -1. \tag{5}$$

б) Како и кај теоремата на Чева, постои и поопшта форма на теоремата на Менелај, каде не поставуваме услови дали точките се на страните или на продолженијата на $\triangle ABC$. Во овој случај исклучиво се користи равенството (5).

Во продолжение, прво ќе разгледаме неколку задачи од математички натпревари, чии решенија се со помош на теоремите на Чева и Менелај, а потоа ќе го презентираме доказот за еквивалентност на овие две важни теореми.

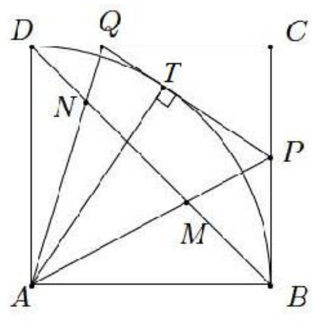
2. РЕШЕНИ ПРИМЕРИ

1. Даден е квадрат $ABCD$ со страна 1. На страните BC и CD соодветно се избрани точки P и Q. Отсечките AP и AQ ја сечат дијагоналата BD соодветно во точките M и N. Ако $\overline{DQ} \neq \overline{BP}$ и правата низ A и пресечната точка на MQ и NP е нормална на PQ, докажи дека важи $\measuredangle PAQ = 45^\circ$.

Решение. Нека правата низ A и пресечната точка на MQ и NP ја сече PQ во точката T. Од сличноста на триаголниците AMD и PBM следува дека $\frac{\overline{PM}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{AD}} = \overline{BP}$ и аналогно $\frac{\overline{QN}}{\overline{NA}} = \overline{DQ}$.

Сега, од теоремата на Чева за $\triangle APQ$ следува

$\frac{\overline{PT}}{\overline{TQ}} \cdot \frac{\overline{QN}}{\overline{NA}} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{MP}} = 1$, т.е. $\frac{\overline{PT}}{\overline{TQ}} = \frac{\overline{NA}}{\overline{QN}} \cdot \frac{\overline{MP}}{\overline{AM}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{DQ}}$



и можеме да ставиме $\overline{PT} = k\overline{BP}$ и $\overline{TQ} = k\overline{DQ}$. Од друга страна, AQ е заедничка хипотенуза на триаголниците AQD и AQT, па затоа

$$1 + \overline{DQ}^2 = \overline{AT}^2 + \overline{TQ}^2.$$

Аналогно добиваме дека

$$1 + \overline{BP}^2 = \overline{AT}^2 + \overline{TP}^2.$$

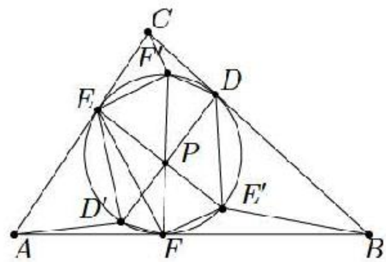
Ако ги одземеме последните две равенства, добиваме

$$\overline{DQ}^2 - \overline{BP}^2 = \overline{TQ}^2 - \overline{TP}^2 = k^2\overline{DQ}^2 - k^2\overline{BP}^2.$$

Оттука, бидејќи $\overline{DQ} \neq \overline{BP}$, добиваме $k = 1$. Според тоа, $\overline{PT} = \overline{BP}$ и

$\overline{TQ}=\overline{DQ}$, од што следува дека четириаголниците $ATQD$ и $ATPB$ се делтоиди, што значи дека AQ и AP се симетрали соодветно на $\measuredangle TAD$ и $\measuredangle BAT$ и затоа $\measuredangle PAQ=45^\circ$. ■

2. Впишаната кружница k во триаголникот ABC ги допира страните BC,CA,AB соодветно во точките D,E,F. Нека точката P е внатрешна за кружницата k. Ако правите DP,EP,FP соодветно ја сечат k во точките D',E',F', докажи дека правите AD',DE' и CF' се сечат во една точка.



Решение. Од синусната теорема имаме

$$\frac{\sin\measuredangle EAD'}{\sin\measuredangle FAD'}=\frac{\frac{\overline{D'E}}{\overline{AD'}}\sin\measuredangle AED'}{\frac{\overline{D'F}}{\overline{AD'}}\sin\measuredangle AFD'}=\frac{\overline{D'E}\sin\measuredangle EFD'}{\overline{D'F}\sin\measuredangle FED'}=(\frac{\overline{D'E}}{\overline{D'F}})^2.$$

Аналогно наоѓаме

$$\frac{\sin\measuredangle FBE'}{\sin\measuredangle DBE'}=(\frac{\overline{E'F}}{\overline{E'D}})^2 \text{ и } \frac{\sin\measuredangle DCF'}{\sin\measuredangle ECF'}=(\frac{\overline{F'D}}{\overline{F'E}})^2.$$

Понатаму, одсличноста на триаголниците $ED'P$ и $DE'P$ следува

$$\overline{DE'}:\overline{ED'}=\overline{D'P}:\overline{E'P},$$

од сличноста на триаголниците $D'FP$ и $F'DP$ следува

$$\overline{F'D}:\overline{D'F}=\overline{F'P}:\overline{PD'}$$

и од сличноста на триаголниците $FE'P$ и $EF'P$ следува

$$\overline{E'F}:\overline{F'E}=\overline{E'P}:\overline{PF'}.$$

Ако ги помножиме последните три пропорции, добиваме

$$\frac{\overline{DE'}\cdot\overline{E'F}\cdot\overline{F'D}}{\overline{D'F}\cdot\overline{ED'}\cdot\overline{F'E}}=1,$$

па затоа

$$\frac{\sin\measuredangle EAD'}{\sin\measuredangle FAD'}\frac{\sin\measuredangle FBE'}{\sin\measuredangle DBE'}\frac{\sin\measuredangle DCF'}{\sin\measuredangle ECF'}=(\frac{\overline{D'E}}{\overline{D'F}})^2(\frac{\overline{E'F}}{\overline{E'D}})^2(\frac{\overline{F'D}}{\overline{F'E}})^2=1,$$

што според тригонометриската форма на теоремата на Чева значи дека правите AD',DE' и CF' се сечат во една точка. ■

3. Точките A',B',C' се соодветно на страните BC,CA,AB на $\triangle ABC$ и се такви, што AA',BB',CC' се симетрали на соодветните агли. Ако AA' и CC' ги сечат $C'B'$ и $B'A'$ соодветно во точките M и N, докажи, дека $\measuredangle MBB'=\measuredangle NBB'$.

Решение. Од синусната теорема за $\triangle AC'B'$ и $\triangle BC'B'$ имаме

$$\frac{\overline{AC'}}{\sin\measuredangle AB'C'}=\frac{\overline{B'C'}}{\sin\measuredangle BAC} \text{ и } \frac{\overline{BC'}}{\sin\measuredangle BB'C'}=\frac{\overline{B'C'}}{\sin\measuredangle ABB'}.$$

Ако ги поделиме горните равенства, добиваме

$$\frac{\sin\measuredangle BB'C'}{\sin\measuredangle AB'C'}\cdot\frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}}=\frac{\sin\measuredangle ABB'}{\sin\measuredangle BAC}.$$

Но, од својството на симетралата на аголот имаме

$$\frac{\overline{AC'}}{\overline{BC'}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\sin\measuredangle ABC}{\sin\measuredangle BAC},$$

што заедно со горното равенство дава

$$\frac{\sin\measuredangle BB'C'}{\sin\measuredangle AB'C'}=\frac{\sin\measuredangle ABB'}{\sin\measuredangle ABC}. \qquad (1)$$

Од друга страна, од тригонометриската форма на теоремата на Чева за $\triangle ABB'$ и точката M следува

$$\frac{\sin\measuredangle BB'C'}{\sin\measuredangle AB'C'}\cdot\frac{\sin\measuredangle B'AM}{\sin\measuredangle C'AM}\cdot\frac{\sin\measuredangle ABM}{\sin\measuredangle MBB'}=1. \qquad (2)$$

Бидејќи AA' е симетрала на $\measuredangle BAC$ од (1) и (2) следува

$$\frac{\sin\measuredangle BB'C'}{\sin\measuredangle AB'C'}=\frac{\sin\measuredangle ABB'}{\sin\measuredangle ABC}=\frac{\sin\measuredangle MBB'}{\sin\measuredangle ABM}.$$

Аналогно наоѓаме

$$\frac{\sin\measuredangle CBB'}{\sin\measuredangle ABC}=\frac{\sin\measuredangle NBB'}{\sin\measuredangle CBN}$$

и следствено

$$\frac{\sin\measuredangle MBB'}{\sin\measuredangle ABM}=\frac{\sin\measuredangle NBB'}{\sin\measuredangle CBN}.$$

Бидејќи

$$\measuredangle MBB'+\measuredangle ABM=\measuredangle NBB'+\measuredangle CBN$$

заклучуваме дека $\measuredangle MBB'=\measuredangle NBB'$. ■

4. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ги допира страните AC и BC во точките M и N. Правата MN ја сече правата AB во точка P, при што B е меѓу A и P. Ако $\overline{BP}=\overline{CM}$, определи го $\measuredangle ABC$.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на $\triangle ABC$. Нека $\overline{BP}=\overline{CM}=\overline{CN}=x$. Од теоремата на Менелај за $\triangle ABC$ и правата MN следува

$$\frac{c+x}{x}\cdot\frac{a-x}{x}\cdot\frac{x}{b-x}=1.$$

Оттука добиваме $x=\frac{ac}{b+c-a}$. Од друга страна $x=\frac{a+b-c}{2}$, па затоа

$$\frac{a+b-c}{2}=\frac{ac}{b+c-a},$$

од каде наоѓаме $b^2 = a^2 + c^2$. Конечно, од обратната Питагорова теорема следува дека $\triangle ABC$ е правоаголен и $\measuredangle ABC = 90^\circ$. ■

5. Впишаната кружница во $\triangle ABC$ ($\overline{AC} < \overline{BC}$) ги допира страните AC и BC соодветно во точките X и Y . Низ средината M на AB е повле-чена права, паралелна на XY , која ја сече страната BC во точката N . Нека $L \in BC$ е таква што $\overline{NL} = \overline{AC}$ и L е меѓу C и N . Правите ML и AC се сечат во точката K . Докажи, дека $\overline{BN} = \overline{CK}$.

Решение. Нека $N_1 = MN \cap AC$. Тогаш од $NN_1 \| XY$ и рамнокракиот $\triangle CXY$ следува, дека $\overline{CN_1} = \overline{CN}$. Од теоремата на Менелај за $\triangle ABC$ и NMN_1 следува $\frac{\overline{AN_1} \cdot \overline{BM} \cdot \overline{CN}}{\overline{AM} \cdot \overline{BN} \cdot \overline{CN_1}} = 1$, па затоа $\overline{AN_1} = \overline{BN}$. Според тоа,

$$\overline{CL} = \overline{CN} - \overline{NL} = \overline{CN_1} - \overline{AC} = \overline{AN_1} = \overline{BN} .$$

Ја применуваме теоремата на Менелај за $\triangle ABC$ и правата KLM и добиваме $\frac{\overline{AM} \cdot \overline{BL} \cdot \overline{CK}}{\overline{BM} \cdot \overline{CL} \cdot \overline{AK}} = 1$, од каде добиваме

$$\frac{\overline{BL}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{AK}}{\overline{CK}} \iff \frac{\overline{BL} - \overline{CL}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{AK} - \overline{CK}}{\overline{CK}} \iff \frac{\overline{BL} - \overline{BN}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CK}} \iff \frac{\overline{NL}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{CK}} .$$

Од последното равенство и од $\overline{NL} = \overline{AC}$ следува, дека $\overline{CK} = \overline{CL}$. Конечно, од последното равенство и од претходно докажаното равенство $\overline{CL} = \overline{BN}$ следува равенството $\overline{BN} = \overline{CK}$. ■

6. Точките P и Q на страната AC на разностраниот триаголник ABC се такви што $\measuredangle ABP = \measuredangle QBC < \frac{1}{2} \measuredangle ABC$. Симетралите на аглите во темињата A и C ја сечат отсечката BP соодветно во точките K и L, а отсечката BQ соодветно во точките M и N . Докажи дека правите AC, KN и LM се сечат во една точка.

Решение. Нека KN и LM ја сечат AC соодветно во точките X и Y . Од теоремата на Менелај следува

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{XQ}} \cdot \frac{\overline{QN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BK}}{\overline{KP}} = 1 = \frac{\overline{PY}}{\overline{YQ}} \cdot \frac{\overline{QM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LP}} .$$

Понатаму, од својството на симетралите на зглите следува

$$\frac{\overline{QN}}{\overline{NB}} \cdot \frac{\overline{BK}}{\overline{KP}} = \frac{\overline{QC}}{\overline{CB}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AP}}, \quad \frac{\overline{QM}}{\overline{MB}} \cdot \frac{\overline{BL}}{\overline{LP}} = \frac{\overline{QA}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{CP}} .$$

Од друга страна,

$$\frac{\overline{AQ}}{\overline{QC}}\cdot\frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}=\frac{\overline{AB}\sin(\quad -x)}{\overline{BC}\sin x}\cdot\frac{\overline{AB}\sin x}{\overline{CB}\sin(\quad -x)}=(\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}})^2 .$$

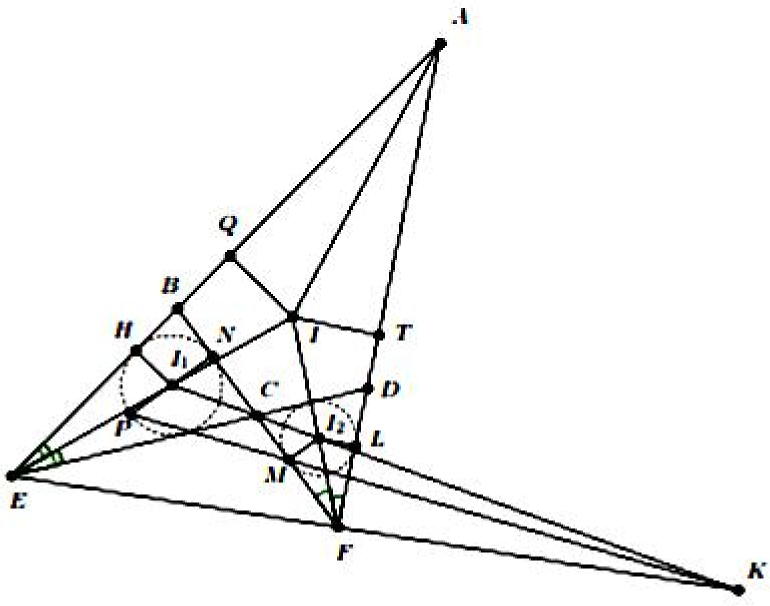
Од добиените равенства следува

$$\frac{\overline{PX}}{\overline{XQ}}=\frac{\overline{PY}}{\overline{YQ}},$$

па затоа $X\equiv Y$.

7. Даден е конвексен четириаголник $ABCD$. Полуправите AB и DC се сечат во точка E , а полуправите AD и BC се сечат во точка F . Симетралата на $\measuredangle DCF$ ја сече EF во точка K . Нека I_1 и I_2 се центрите на впишаните кружници во $\triangle ECB$ и $\triangle FCD$, соодветно. Нека M е проекцијата на I_2 на CF и нека N е проекцијата на I_1 на BC . Нека P е симетричната точка на N во однос на I_1 . Ако точките P, M, K се колиниерни, докажи дека четириаголникот $ABCD$ е тангентен.

Решение. Нека $EI_1\cap FI_2=I$. Јасно, EI_1 и FI_2 се соодветно симетрали на $\measuredangle AED$ и $\measuredangle AFB$. Имаме $PI_1\,||\,MI_2$ и од Талесовата теорема следува $\frac{\overline{I_1K}}{\overline{KI_2}}=\frac{\overline{PI_1}}{\overline{MI_2}}=\frac{r_1}{r_2}$, каде $\overline{PI_1}=\overline{NI_1}=r_1$ и $\overline{MI_2}=r_2$ се радиусите на впишаните кружници во $\triangle ECB$ и $\triangle FCD$, соодветно. Од теоремата на Менелај следува



$$\frac{\overline{I_1K}}{\overline{KI_2}}\cdot\frac{\overline{I_2F}}{\overline{FI}}\cdot\frac{\overline{IE}}{\overline{EI_1}}=1,\text{ т.е. }\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\overline{I_2F}}{\overline{FI}}\cdot\frac{\overline{IE}}{\overline{EI_1}}=1.$$

Нека $IQ\perp AE$ $(Q\in AE)$, $IT\perp AF$ $(T\in AF)$, $I_1H\perp AE$ $(H\in AE)$ и $I_2L\perp AF$ $(L\in AF)$. Тогаш, од сличностите на триаголниците и последното равенство добиваме

$$\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{\overline{I_2L}}{\overline{TI}}\cdot\frac{\overline{IQ}}{\overline{HI_1}}=1,\text{ т.е. }\frac{r_1}{r_2}\cdot\frac{r_2}{\overline{TI}}\cdot\frac{\overline{IQ}}{r_1}=1,$$

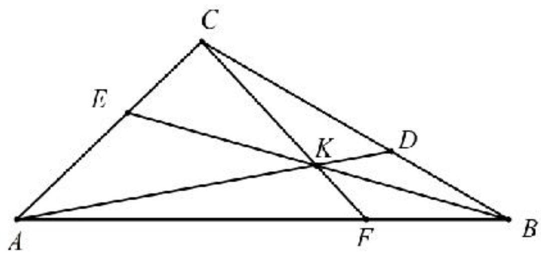
па затоа $\overline{IQ}=\overline{TI}$, што значи дека AI е симетрала на $\measuredangle EAF$. Според тоа, I е центар на впишаната кружница во $\triangle AED$ и во $\triangle AFB$. Но, тоа значи дека I е центар на впишаната кружница во $ABCD$, т.е. четириаголникот $ABCD$ е тангентен. ■

3. ЕКВИВАЛЕНТНОСТ НА ТЕОРЕМИТЕ НА ЧЕВА И МЕНЕЛАЈ

Теоремите на Чева и Менелај често пати се доведуваат во врска една со друга, а една од причините за тоа е фактот што едната теорема може да се докаже со помош на другата и обратно.

Доказ на теоремата на Чева со помош на теоремата на Менелај. Нека точките D,E,F припаѓаат соодветно на страните BC,CA,AB на триаголникот ABC и се такви што отсечките AD,BE,CF се сечат во точката K (види цртеж). Треба да докажеме дека важи

$$\frac{\overline{AF}}{\overline{FB}}\cdot\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}}\cdot\frac{\overline{CE}}{\overline{EA}}=1.$$



Од теоремата на Менелај, применета на $\triangle FCA$ и колинеарните точки B,K,E, следува

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BF}}\cdot\frac{\overrightarrow{FK}}{\overrightarrow{KC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}=-1.$$

Повторно од тепремата на Менелај, применета на $\triangle FCB$ и колинеарните точки A,K,D следува

$$\frac{\overrightarrow{FA}}{\overrightarrow{AB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CK}}{\overrightarrow{KF}}=-1.$$

Ако ги помножиме последните две равенства, добиваме

$$\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BF}}\cdot\frac{\overrightarrow{FK}}{\overrightarrow{KC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}\cdot\frac{\overrightarrow{FA}}{\overrightarrow{AB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CK}}{\overrightarrow{KF}}=1,$$

од што по скратувањето, добиваме

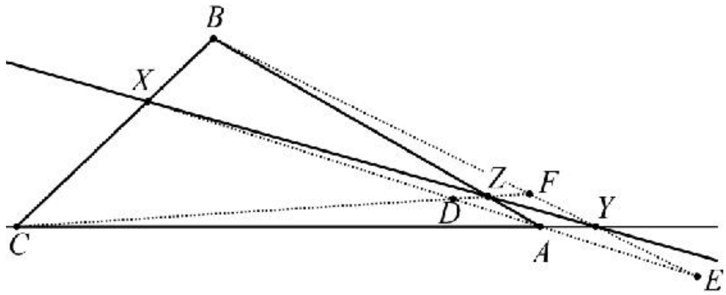
$$\frac{\overrightarrow{AF}}{\overrightarrow{FB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BD}}{\overrightarrow{DC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CE}}{\overrightarrow{EA}}=1,$$

а тоа е равенството од теоремата на Чева.

Доказ на теоремата на Менелај со помош на теоремата на Чева. Нека се дадени $\triangle ABC$ и колинеарните точки X,Y,Z (види цртеж). Треба да докажемедека важи

$$\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}=-1. \qquad (1)$$

Нека правите CZ и AX се сечат во точката D, правите AX и BY се сечат во точката E и правите BY и CZ се сечат во точката F.



От теоремата на Чева, применета на $\triangle AZC$ и конкурентните прави BC, AD и ZY, следува

$$\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZD}}{\overrightarrow{DC}}=1.$$

Понатаму, од теоремата на Чева, применета на $\triangle ABX$ и конкурентните прави AC, BE и XZ следува

$$\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CX}}\cdot\frac{\overrightarrow{XE}}{\overrightarrow{EA}}=1.$$

Конечно, од примената на теоремата на Чева на $\triangle BCY$ и конкурентните прави BA, CF и YX следува

$$\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YF}}{\overrightarrow{FB}}=1.$$

Сега, ако ги помножиме претходните три равенства, добиваме

$$\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZD}}{\overrightarrow{DC}}\cdot\frac{\overrightarrow{BC}}{\overrightarrow{CX}}\cdot\frac{\overrightarrow{XE}}{\overrightarrow{EA}}\cdot\frac{\overrightarrow{CA}}{\overrightarrow{AY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YF}}{\overrightarrow{FB}}=1. \qquad (2)$$

Забележуваме дека производот на првите три множители во (2) е еднаков на левата страна во (1). Понатаму, ја применуваме теоремата на Чева прво на CZX и конкурентните прави CY, ZB, XD, потоа на $\triangle AXY$ и конкурентните прави AZ, XC, YE и на крајот на $\triangle BYZ$ и конкурентните прави, по што соодветно ги добиваме равенствата

$$\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{DZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZY}}{\overrightarrow{YX}}\cdot\frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{BC}}=1,\ \frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EX}}\cdot\frac{\overrightarrow{XZ}}{\overrightarrow{ZY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YC}}{\overrightarrow{CA}}=1 \text{ и } \frac{\overrightarrow{BF}}{\overrightarrow{FY}}\cdot\frac{\overrightarrow{YX}}{\overrightarrow{XZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{ZA}}{\overrightarrow{AB}}=1.$$

Ако последните три равенства ги помножиме со равенството (2) и земеме предвид дека

$$\frac{\overrightarrow{ZD}}{\overrightarrow{DC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CD}}{\overrightarrow{DZ}}=\frac{\overrightarrow{XE}}{\overrightarrow{EA}}\cdot\frac{\overrightarrow{AE}}{\overrightarrow{EX}}=\frac{\overrightarrow{YF}}{\overrightarrow{FB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BF}}{\overrightarrow{FY}}=1,$$

по кратењето со $\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA},\overrightarrow{AB},\overrightarrow{XZ},\overrightarrow{ZY},\overrightarrow{YX}$, добиваме

$$\left(\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}\right)\left(\frac{\overrightarrow{ZA}}{\overrightarrow{BZ}}\cdot\frac{\overrightarrow{XB}}{\overrightarrow{CX}}\cdot\frac{\overrightarrow{YC}}{\overrightarrow{AA}}\right)=1, \text{ т.е. } \left(\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}\right)^2=1.$$

Според тоа,

$$\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}=-1 \text{ или } \frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}=1.$$

Но, правите AX, BY и CZ не се ниту паралелни, ниту конкурентни, па од теоремата на Чева следува дека

$$\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}\neq 1,$$

што значи дека

$$\frac{\overrightarrow{AZ}}{\overrightarrow{ZB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BX}}{\overrightarrow{XC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CY}}{\overrightarrow{YA}}=-1,$$

т.е. точно е равенството (1).

Литература

1. Klamkin, M. S., Kung, S. H.: Ceva's and Menelaus' Theorems and Their Converses via Centroids, Mathematics Magazine, Vol. 69, No. 1, 1996
2. Silvester, J. R.: Ceva = $(\text{Menelaus})^2$, The Mathematical Gazette, Vol. 84, No. 500, 2000
3. Малчески, А., Малчески, Р.: Теорема на Чева, Сигма, Скопје, 2018
4. Малчески, Р.: Теорема на Менелај (втор дел), Математички талент, Скопје, 2022
5. Малчески, Р.: Теорема на Менелај, Сигма, Скопје, 1999
6. Малчески, Р.: Теорема на Чева (втор дел), Математички талент, Скопје, 2022