Зоран Штерјов

КОНВЕКСНОСТ И ТРИГОНОМЕТРИСКИ НЕРАВЕНСТВА

Конвексните функции, поточно неравенствата кои ги задоволуваат овие функции,се важен извор за добивање на геометриски неравенства. Во оваа тема ќе презентираме пет неравенства во врска со конвексни функции, и начин на кој од нив може да се добијат тригонометриски неравенства. Притоа, под претпоставка дека е позната конвесноста на тригонометриските функции $\sin x, \cos x, \operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$,ќе искористиме и некои познати равенства за триаголник кои ќе ги земаме како веќе докажани, и кои ќе ни помогнат при доказот на тригонометриските неравенства.

Нека функцијата $f(x)$ е дефинирана на множеството $D \subset \mathbb{R}$, и нека интервалот I се содржи во D. Тогаш:

а) Функцијата $f(x)$ е ***конвексна*** на интервалот I ако за кои и да било

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \text{ важи } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2};$$

б) Функцијата $f(x)$ е ***конкавна*** на интервалот I ако за кои и да било

$$x_1, x_2 \in I, x_1 < x_2 \text{ важи } f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \ge \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}.$$

Првото неравенство кое ќе го презентираме е неравенството на ***Јенсен***. Тоа гласи:

Ако $f : D \to \mathbb{R}, (D \subset \mathbb{R})$ ***е конвексна функција, тогаш*** $\forall x_1, x_2, ..., x_n \in D$ ***и*** $\forall t_1, t_2, ..., t_n \in [0,1]$***, така што*** $t_1 + t_2 + ... + t_n = 1$***, важи неравенството***

$$f(t_1x_1 + t_2x_2 + ... + t_nx_n) \le t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2) + ... + t_n f(x_n).$$

Ако функцијата $f(x)$ е конкавна тогаш важи знакот $\ge$. За $t_1 = t_2 = t_3 = \dfrac{1}{3}$, неравенството на Јенсен гласи

$$f\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right) \le \frac{f(x_1)+f(x_2)+f(x_3)}{3}.$$

Применувајќи го ова неравенство на тригонометриските функции добиваме серија геометриски неравенства.

а) За $f : (0;\pi) \to (0,1)$, $f(x) = \sin x$,која е конкавна функција,се добива дека за секој триаголник ABC важи неравенството

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\le\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\quad\text{т.е.}\quad \sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Но,бидејќи $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$,се добива неравенството

$$4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{2}\quad\text{т.е.}\quad \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Притоа $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Од $r=s\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ и $r=4R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ се добива дека $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{s}{4R}$. Заменувајќи во претходното неравенство се добива $\frac{s}{4R}\le\frac{3\sqrt{3}}{8}$ т.е. $2s\le3\sqrt{3}\cdot R$.

b) За $f:\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\to(0;1)$, $f(x)=\cos x$, која е конкавна функција, добиваме дека за секој остроаголен триаголник *ABC* важи неравенството

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma}{3}\le\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\quad\text{т.е.}\ \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\le\frac{3}{2}.$$

Но, бидејќи $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-1$,се добива неравенството $4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}-1\le\frac{3}{2}$. Притоа $\alpha+\beta+\gamma=\pi$. Од

$r=4R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ следи дека $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}=\frac{r}{4R}$, па со замена во претходното неравенство се добива $\frac{r}{4R}\le\frac{1}{8}$ т.е. $2\cdot r\le R$.

Последното неравенство е познато како ***неравенство на Ојлер***.

в) За $f:\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}x$,која е конвексна функција, се добива дека за секој остроаголен триаголник ABC важи неравенството

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma}{3}\ge\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\quad\text{т.е.}\quad \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma\ge3\sqrt{3}.$$

Бидејќи во секој остроаголен триаголник важи

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma,$$

се добива

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\ge3\sqrt{3}\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

Од $P=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$ следи дека $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma=\frac{P}{2R^2}$, и од тоа што $P=\frac{abc}{4R}$, се добива $P\ge 6\sqrt{3}\cdot R^2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$

$$abc\ge 24\sqrt{3}\cdot R^3\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

г) За $f:\left(0;\frac{\pi}{2}\right)\to\mathbb{R},\ f(x)=\operatorname{ctg}x$, која е конвексна функција, се добива дека за секој остроаголен триаголник *ABC* важи неравенството

$$\frac{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma}{3}\ge\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\quad \text{т.е.}\quad \operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma\ge\sqrt{3}.$$

Од овде се добива неравенството $\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}+\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}\ge\sqrt{3}$, или, поинаку запишано

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\ge\sqrt{3}\cdot\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Имајќи предвид дека

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma\ge 3\sqrt{3},$$

се добива неравенството

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\ge 9.$$

д) За $f:(0;\pi)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln\sin x$, која е конкавна функција, се добива дека за секој триаголник *ABC* важи неравенството

$$\frac{\ln\sin\alpha+\ln\sin\beta+\ln\sin\gamma}{3}\le\ln\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

$$\frac{1}{3}\ln\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\le\ln\sin\frac{\pi}{3}$$

$$\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

Бидејќи $P=2R^2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$,се добива неравенство $P\le\frac{3\sqrt{3}\cdot R^2}{4}$.

г) За $f:(0;\pi)\backslash\left\{\frac{\pi}{2}\right\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln|\cos x|$, која е конкавна функција, се добива дека за секој неправоаголен триаголник ABC важи неравенството

$$\frac{\ln|\cos\alpha|+\ln|\cos\beta|+\ln|\cos\gamma|}{3}\le\ln\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

$$\frac{\ln|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma|}{3} \leq \ln\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

$$\ln|\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma| \leq 3\ln\frac{1}{2}\,; \quad \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \leq \frac{1}{8}.$$

е) За $f:(0;\pi)\to(0;1)$, $f(x)=\sin\frac{x}{2}$,која е конкавна функција,се добива дека за секој триаголник ABC важи неравенството

$$\frac{\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}}{3} \leq \sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\,; \qquad \sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3}{2}.$$

ж) За $f:(0;\pi)\to(0;1)$, $f(x)=\cos\frac{x}{2}$,која е конкавна функција, се добива дека за секој триаголник ABC важи неравенството

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2}}{3} \leq \cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\,; \qquad \cos\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\beta}{2}+\cos\frac{\gamma}{2} \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

з) За $f:(0;\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, која е конвексна функција,се добива дека за секој триаголник ABC важи неравенството

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{3} \geq \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\,; \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \geq \sqrt{3}.$$

ѕ) За $f:(0;\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$, која е конвексна функција,се добива дека за секој триаголник ABC важи неравенството

$$\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}}{3} \geq \operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}\,; \qquad \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2} \geq 3\sqrt{3}\,.$$

Од $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$, и од $P=r^2\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}$,се добива $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\frac{P}{r^2}=\frac{s\cdot r}{r^2}=\frac{s}{r}$. Заменувајќи во последното неравенство се добива неравенството $s\geq 3\sqrt{3}\cdot r$

и) За $f:(0;\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\sin\frac{x}{2}$, која е конкавна функција,се добива дека за се- кој триаголник ABC важи неравенството

$$\frac{\ln\sin\frac{\alpha}{2}+\ln\sin\frac{\beta}{2}+\ln\sin\frac{\gamma}{2}}{3}\le\ln\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{6}; \qquad \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\le\frac{1}{8},$$

односно повторно се доби неравенството $2r\le R.$

j) За $f:(0;\pi)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln\cos\frac{x}{2}$, која е конкавна функција,се добива дека за се- кој триаголник ABC важи неравенството

$$\frac{\ln\cos\frac{\alpha}{2}+\ln\cos\frac{\beta}{2}+\ln\cos\frac{\gamma}{2}}{3}\le\ln\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}$$

$$\frac{\ln(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2})}{3}\le\ln\cos\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}; \qquad \cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\le\frac{3\sqrt{3}}{8},$$

односно повторно се доби неравенството $2s\le 3\sqrt{3}\cdot R.$

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија