Самоил Малчески
Скопје

НЕКОЛКУ НЕСТАНДАРДНИ РАВЕНКИ И СИСТЕМИ РАВЕНКИ

Книгата [1] е посветена на задачи со равенки и неравенки со параметар, при што се разгледани и системите равенки со параметар. Во оваа статија прво ќе разгледаме неколку равенки и системи равенки кои не содржат параметри, а потоа ќе се осврнеме на пет задачи кои содржат параметар.

1. Докажи дека равенката

$$x^4-8x^3+23x^2-34x+39=0$$

нема реални решенија.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned}x^4-8x^3+23x^2-34x+39&=(x^2-x+3)(x^2-7x+13)\\&=((x-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{11}{4})((x-\tfrac{7}{2})^2+\tfrac{3}{4})\\&\geq\tfrac{11}{4}\cdot\tfrac{3}{4}>0,\end{aligned}$$

па затоа дадената равенка нема реални решенија.

2. Дали постои квадратен трином со целобројни коефициенти чија дискриминанта е еднаква на

а) 2023, б) 2024.

Решение. Нека

$$f(x)=ax^2+bx+c,\ \ a,b,c\in\mathbb{Z}, a\neq 0 \text{ и } D=b^2-4ac\,.$$

а) Ако $D=2023$, тогаш $D\equiv 3(\operatorname{mod}4)$, па како $D\equiv b^2(\operatorname{mod}4)$, добиваме дека $b^2\equiv -1(\operatorname{mod}4)$, што не е можно бидејќи квадрат на цел број е конгруентен со 1 по модул 4.

б) Постои. На пример, за полиномот $f(x)=2x^2+52x+85$ важи

$$D=52^2-4\cdot 2\cdot 85=2024$$

3. Дали постојат квадратни триноми $f(x)$ и $g(x)$ со реални коефициенти за кои равенката $f(g(x))=0$ има решенија 2, 3, 5 и 7?

Решение. Бидејќи полиномот $g(x)$ за $x=2,3,5,7$ треба по два пати да е еднаков на корените на полиномот $f(x)$ и $g(x_1)=g(x_2)$ при што $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$, заклучуваме дека 2, 3, 5 и 7 треба да се поделат на две групи со еднакви збирови. Но, последното не е можно бидејќи $2+3+5+7=17$ е непарен број.

4. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^2+x=y^3-y, \\ y^2+y=x^3-x. \end{cases}$$

Решение. Равенките од системот ќе ги запишеме во видот

$$x(x+1)=(y-1)y(y+1) \text{ и } y(y+1)=(x-1)x(x+1).$$

Ако некој од броевите x и y е еднаков на 0, 1 или -1, тогаш лесно се добива дека решенија се $(x,y)=(0,0),(0,-1),(-1,0),(-1,-1)$. Во спротивно, т.е. кога $x,y\neq 0,1,-1$ наоѓаме $(x-1)(y-1)=1$, од каде добиваме $y=\frac{x}{x-1}$ и $y+1=\frac{2x-1}{x-1}$. Заменуваме во

$$y(y+1)=(x-1)x(x+1)$$

и ја добиваме равенката $x^4-2x=0$, од каде наоѓаме $x=2$. Сега, $y=\frac{2}{2-1}=2$, т.е. $(x,y)=(2,2)$ е уште едно решение на дадениот систем.

5. Во множествотореални броеви реши го системот

$$\begin{cases} a+b+c=2021, \\ a^2b+b^2c+c^2a=a^2c+b^2a+c^2b. \end{cases}$$

Решение. Втората равенка на системот е еквивалентна со равенката

$$(a-b)(b-c)(c-a)=0.$$

Од последната равенка следува дека барем два од броевите a,b,c мора да се еднакви. Сега, од $a+b+c=2021$ следува дека решенија на дадениот систем се:

- ако $a=b$,тогаш $(a,b,c)=(t,t,2021-2t),\ t\in\mathbb{R}$,
- ако $b=c$,тогаш $(a,b,c)=(2021-2t,t,t),\ t\in\mathbb{R}$,
- ако $a=c$,тогаш $(a,b,c)=(t,2021-2t,t),\ t\in\mathbb{R}$.

6. Во множествотореални броеви реши го системот

$$\begin{cases} a+b+c=2021, \\ a^3b+b^3c+c^3a=a^3c+b^3a+c^3b. \end{cases}$$

Решение. Втората равенка на системот е еквивалентна на равенката

$$(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)=0\,.$$

Сега ако во горната равенка замениме $a+b+c=2021$, добиваме

$$2021(a-b)(b-c)(c-a)=0\,.$$

Од последната равенка следува дека барем два од броевите a,b,c мора да се еднакви. Сега, од $a+b+c=2021$ следува дека решенија на дадениот систем се:

- ако $a=b$,тогаш $(a,b,c)=(t,t,2021-2t),\ t\in\mathbb{R}$,
- ако $b=c$,тогаш $(a,b,c)=(2021-2t,t,t),\ t\in\mathbb{R}$,
- ако $a=c$,тогаш $(a,b,c)=(t,2021-2t,t),\ t\in\mathbb{R}$.

7. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} a+\frac{a+8b}{a^2+b^2}=2, \\ b+\frac{8a-b}{a^2+b^2}=0. \end{cases}$$

Решение. Јасно, a и b не може да се истовремено еднакви на 0, бидејќи тогаш $a^2+b^2=0$, што не е можно.

Ако $a=0$, тогаш од првата равенка следува $b=4$, а од втората следува $b=1$ или $b=-1$, што не е можно. Аналогно, ако $b=0$, тогаш од втората равенка добиваме $\frac{8a}{a^2}=0$, што не е можно.

Ако првата равенка ја помножиме со b, втората со a и добиените равенки ги собереме, добиваме

$$ab+\frac{ab+8b^2}{a^2+b^2}+ab+\frac{8a^2-ab}{a^2+b^2}=2b\,,$$

односно $2ab+8=2b$. Ако првата равенка ја помножиме со a , втората со b и добиените равенки ги одземеме, добиваме

$$a^2+\frac{a^2+8ab}{a^2+b^2}-b^2-\frac{8ab-b^2}{a^2+b^2}=2a\,,$$

односно $b^2=a^2-2a+1=(a-1)^2$.

Во првиот случај, кога $b=a-1$, со замена во $2ab+8=2b$, по средувањето добиваме $b^2=-2$, па затоа во овој случај системот нема решение во множеството реални броеви.

Во вториот случај, кога $b=1-a$, со замена во $2ab+8=2b$, по средувањето $b^2=4$, од каде ги наоѓаме решенијата $b=2, a=-1$ и $b=-2$, $a=3$.

8. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x^3+y^3+2010xy=670^3, \\ |x|+|y|=1340. \end{cases}$$

Решение. Да ставиме $z=-670$. Имаме

$$0=x^3+y^3+z^3-3xyz=\tfrac{1}{2}(x+y+z)((x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2).$$

Од последното равенство следува $x+y+z=0$ или $x=y=z$. Во вториот случај добиваме $x=y=-670$ и тоа е едно решение на заадачата. Во првиот случај добиваме $x+y=670$. Според тоа, еден од броевите x и y е позитивен, но не и двата, бидејќи тогаш од втората равенка ќе следува $x+y=1340$. Ако $x>0\ge y$, добиваме $x-y=1340$. Сега, од $x+y=670$ и $x-y=1340$ наоѓаме $x=1005, y=-335$. Ако $y>0\ge x$, го добиваме решението $x=-335, y=1005$.

9. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} x(xy-1)=2(yz-1), \\ y(yz-1)=2(zx-1), \\ z(zx-1)=2(xy-1). \end{cases}$$

Решение. Равенките на системот ги множиме и добиваме

$$xyz(xy-1)(yz-1)(zx-1)=8(xy-1)(yz-1)(zx-1).$$

Ако $xy-1=0$, тогаш од првата равенка на системот следува $yz-1=0$, а од втората следува $zx-1=0$. Слично заклучуваме ако $yz-1=0$ или $zx-1=0$. Според тоа, ако еден од броевите $xy-1, yz-1, zx-1$ е еднаков на 0, тогаш и сите три броја се еднакви на 0.

Ако $xy=1, yz=1, zx=1$, со множење на овие три равенства добиваме $x^2y^2z^2=1$, па како $x^2y^2=1$ следува $z^2=1$. Слично заклучуваме дека $x^2=1$ и $y^2=1$.

Ако $z=1$, тогаш од $yz=1, zx=1$ следува $x=y=1$, а ако $z=-1$, повторно од $yz=1, zx=1$ следува $x=y=-1$.

Нека претпоставиме дека $(xy-1)(yz-1)(zx-1)\neq 0$. Тогаш $xyz=8$.

Ако првата равенка на системот ја помножиме со x, добиваме $x^3y-x^2=2(xyz-x)$, односно

$$x^3y=15+(x-1)^2\geq 15.$$

Од последното неравенство следува $xy>0$, па како $xyz=8$, добиваме дека $z>0$. На потполно ист начин заклучуваме дека $x>0$ и $y>0$.

Ако претпоставиме дека $xy<1$, тогаш од првата равенка следува $yz<1$, а потоа од втората следува $zx<1$. Но, тоа не е можно бидејќи тогаш $64=x^2y^2z^2<1$. Според тоа, важи $xy-1>0,\ yz-1>0,\ zx-1>0$.

Нека претпоставиме дека $x>2$. Тогаш

$$2yz-2=2(yz-1)=x(xy-1)>2(2y-1)=4y-2,$$

па затоа $z>2$. Но, тогаш од втората равенка на ист начин заклучуваме дека и $y>2$, па затоа $8=xyz>2\cdot 2\cdot 2=8$, што не е можно.

Според тоа, $x\leq 2,\ y\leq 2,\ z\leq 2$ и како $xyz=8$, заклучуваме дека во овој случај единствено решение е $x=y=z=2$.

Конечно, единствени решенија на дадениот систем се $x=y=z=1$, $x=y=z=-1$ и $x=y=z=2$.

Во продолжение ќе дадеме три равенки и еден систем равенки кои содржат параметар.

10. Определи ги вредностите на реалниот параметар a за кои равенката

$$x^3-(2a+1)x^2+3ax-a=0$$

има единствен реален корен.

Решение. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(x-1)(x^2-2ax+a)=0. \quad (1)$$

Бидејќи $x=1$ е корен на равенката (1) за секој реален број a, условот на задачата се сведува да се определат сите вредности на a за кои равенката

$$x^2-2ax+a=0 \quad (2)$$

нема реален корен различен од 1. Последното е исполнето за $a=1$, кога (2) има единствен корен $x=1$ и кога $D=4(a^2-a)<0$, т.е. кога $a\in(0,1)$, при што (2) нема реални корени. Конечно, бараните вредности на параметарот се $a \in (0,1]$.

11. Дадена е равенката

$$x^3 - cx^2 + (c-3)x + 1 = 0,$$

каде c е параметар. Докажи дека ако оваа равенка има барем еден рационален корен, тогаш сите корени и се рационални.

Решение. Нека корените на дадената равенка се x_1, x_2 и $x_3 = r \in \mathbb{Q}$. Од $c(r^2 - r) = r^3 - 3r + 1$ следува дека $r \neq 0,1$ и $c = \frac{r^3-3r+1}{r^2-r}$, што значи дека $c \in \mathbb{Q}$. Од Виетовите формули следува дека x_1, x_2 се корени на квадратната равенка $x^2 - (c-r)x - \frac{1}{r} = 0$. Дискриминантата на оваа равенка е $D = (c-r)^2 + \frac{4}{r} = (\frac{r^2-r+1}{r^2-r})^2$, што значи дека $x_1 = \frac{1}{1-r}$ и $x_1 = r - \frac{1}{r}$ се рационални броеви.

12. За кои вредности на позитивниот параметар r равенката

$$r^3x^3 + 7r^2 = 7r^3x + 1$$

има три различни целобројни корени?

Решение. Јасно, $r \neq 0$. Дадената равенка е еквивалентна на равенката

$$(rx-1)(r^2x^2 + rx + 1 - 7r^2) = 0.$$

За да равенката има три целобројни корени потребно е $rx = 1$ и изразот во десните загради да се анулира два пати, односно

$$D = r^2 - 4r^2(1-7r^2) = 28r^4 - 3r^2 > 0 \text{, т.е. } r^2 > \frac{3}{28}.$$

Тогаш $r \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$. За $r = 1$ ја добиваме равенката

$$x^2 + x - 6 = 0,$$

чии корени 2 и -3 се цели броеви. За $r = \frac{1}{2}$, ја добиваме равенката

$$x^2 + 2x - 3 = 0,$$

чии корени 1 и -3 се цели броеви. За $r = \frac{1}{3}$ ја добиваме равенката

$$x^2 + 3x + 2 = 0$$

чии корени -1 и -2 се цели броеви. Значи, бараните вредности на параметарот се $r \in \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\}$.

13. Определи ги вредностите на реалниот параметар a а кои равенката

$$a^3x^4-2a^2x^2+8x+a-4=0$$

има четири реални различни решенија.

Решение. Јасно, $a\neq 0$, бидејќи за $a=0$ равенката има само едно решение. Затоа дадената равенка можеме да ја запишеме во видот

$$(ax)^4-2a(ax)^2+8(ax)+a^2-4a=0.$$

Ставаме $y=ax$ и ја добиваме равенката

$$y^4-2ay^2+8y+a^2-4a=0. \qquad (1)$$

Значи, треба да го определиме реалниот параметар a така да равенката (1) има четири реални решенија. Ако (1) ја разгледаме како квадратна равенка по a, т.е. како равенка

$$a^2-2(y^2+2)a+y^4+8y=0,$$

добиваме дека нејзините решенија се $a_1=y^2+2y$ и $a_2=y^2-2y+4$, па затоа по разложувањето на множители

$$(a-a_1)(a-a_2)=0,$$

добиваме

$$(y^2+2y-a)(y^2-2y+4-a)=0. \qquad (2)$$

Сега, за да равенката (2) има четири реални корени потребно е дискриминантите на квадратните равенки

$$y^2+2y-a=0 \text{ и } y^2-2y+4-a=0$$

да се позитивни, од каде добиваме $4(a+1)>0$ и $4(a-3)>0$, односно $a>3$. За $a>3$ последните две равенки немаат заеднички корен, бидејќи ако $y=b$ е таков што $b^2+2b-a=b^2-2b+4-a$, тогаш $b=1$, па затоа со замена во една од равенкиуте добиваме $a=3$. Конечно, равенката (2), што значи и почетната равенка, има четири реални корени ако и само ако $a\in(3,+\infty)$.

14. Определи ги вредностите на реалниот параметар a, за кои системот равенки

$$\begin{cases} x^4+x^2=yz+a \\ y^4+y^2=zx+a \\ z^4+z^2=xy+a \end{cases}$$

има:
а) барем едно реално решение,
б) единствено реално решение.

Решение. Ако секоја равенка на системот ја помножиме со 2 и ги собереме добиените равенки наоѓаме

$$2(x^4+y^4+z^4)+(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=6a\,. \qquad (1)$$

а) Од (1) е јасно дека за $a<0$ системот нема решение, а додека за $a\geq 0$ тој има барем едно решение. На пример, едно решение е $x=y=z=\sqrt[4]{a}$.

б) За $a>0$ системот има барем две различни решенија $x=y=z=\sqrt[4]{a}$ и $x=y=z=-\sqrt[4]{a}$. Но, за $a=0$, од (1) е јасно дека системот има единствено решение $x=y=z=0$. Конечно, $a=0$.

Задачи за самостојна работа

15. Реши го системот равенки

$$\begin{cases}\sqrt{1+x_1}+\sqrt{1+x_2}+...+\sqrt{1+x_n}=n\sqrt{1+\frac{1}{n}},\\ \sqrt{1-x_1}+\sqrt{1-x_2}+...+\sqrt{1-x_n}=n\sqrt{1-\frac{1}{n}}.\end{cases}$$

16. Даден е квадратен трином $f(x)=ax^2+bx+c,\ a,b,c\in\mathbb{Z}, a\neq 0$. Познато е дека равенката $f(x)=0$ има целоброен корен и дека постојат цели броеви p и q такви што $f(p)=f(q)=1$. Определи ја разликата $p-q$.

Литература

1. Малчески, Р., Малчески, А. Малчески, С. Математички талент С11 – Параметарски равенки и неравенки, Математички талент, Скопје, 2022
2. Гроздев, С., Лесов, Х. Квадратни параметарски неравенки, Сигма (Математички талент 2021)
3. Стојменовска, И. Равенки и неравенки со параметар, Сигма (Математички талент 2021)