ММО 2021

1. Низата $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $a_1=1$ и

$$a_{n+1}=1+\sum_{k=1}^{n} ka_k .$$

Докажи дека за секој $n>1$ важи

$$\sqrt[n]{a_n}<\tfrac{n+1}{2} . \qquad (1)$$

Решение. Прво ќе докажеме дека $a_n=n!$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Прв начин. За секој $n\geq 1$ важи

$$a_{n+2}-a_{n+1}=1+\sum_{k=1}^{n+1} ka_k-(1+\sum_{k=1}^{n} ka_k)=(n+1)a_{n+1} .$$

Според тоа, за секој $n\geq 1$ имаме $a_{n+2}=(n+2)a_{n+1}$, па како $a_1=1$ и $a_2=2$, добиваме $a_n=n!$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Втор начин. Имаме $a_1=1!$, што значи дека тврдењето е точно.

Нека претпоставиме дека тврдењето важи за секој $k\leq n$. Тогаш

$$a_{n+1}=1+\sum_{k=1}^{n} ka_k=1+\sum_{k=1}^{n} k\cdot k!=1+\sum_{k=1}^{n}(k+1-1)\cdot k!$$

$$=1+\sum_{k=1}^{n}[(k+1)!-k!]=1-(n+1)!-1=(n+1)!,$$

па од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој $n\in\mathbb{N}$. ■

Конечно, од неравенствотѕо меѓу аритметичката и геометриската средина следува дека за секој $n>1$ важи

$$\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{n!}\leq\tfrac{1+2+...+n}{n}=\tfrac{n(n+1)}{2n}=\tfrac{n+1}{2} .$$

Во неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина знак за равенство важи ако и само ако броевите се еднакви, што не е случај, па затоа точно е неравенството (1).

2. Во градот на островите има точно 2021 остров поврзани со мостови. За секој пар острови A и B, може да се стигне од A до B користејќи некои од мостовите. Притоа за секои четири острови $A_i, i=1,2,3,4$ важи: ако постои мост од A_i до A_{i+1} за секој $i \in \{1,2,3\}$, тогаш постои мост меѓу A_j и A_k за некои $j,k \in \{1,2,3,4\}$ такви што $|j-k|=2$.

   Докажи дека барем еден остров во градот е директно поврзан со секој друг остров во градот.

   Решение. Ќе користиме терминологија од теоријата на графови: за островите ќе земеме дека се *темиња*, за мостовите ќе земеме дека се *ребра*. Според тоа, секои два острови кои се директно поврзани со мост се соседни темиња (*соседи*). Тогаш, градот на островите е едноставен сврзан граф (од ред 2021) со дополнително својство за секој пат P_4.

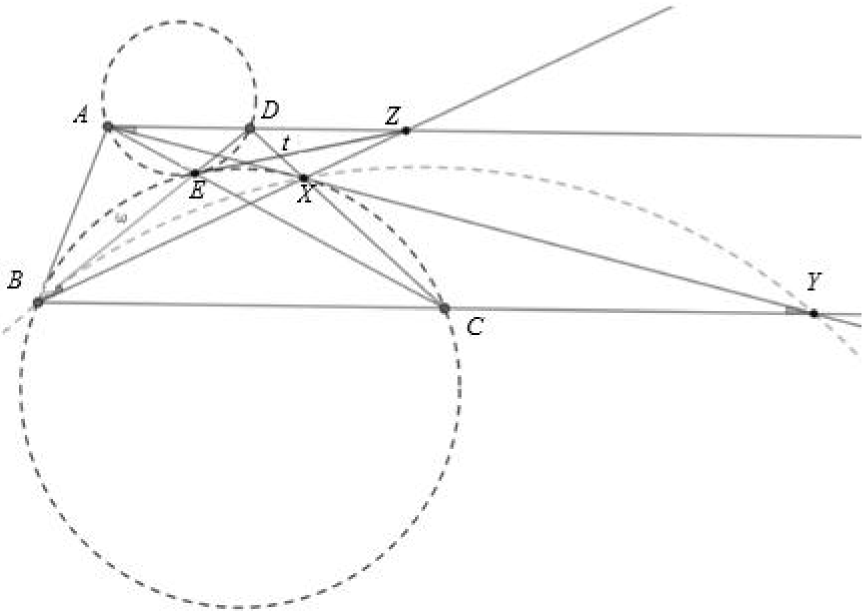
   Нека претпоставиме дека не постои теме соседно со секое од преостанатите темиња, и да го разгледаме темето v со најголем можен степен, односно со најмногу соседи. Бидејќи графот е сврзан, постојат сосед u на v и теме w кое не е сосед на v такви што uw е ребро. Според изборот на v, постои сосед z на v таков што z не е сосед на u. Но тогаш $wuvz$ е пат P_4 за кој не е исполнето дополнителното својство, што е противречност. Конечно, од добиената противречност следува тврдењето на задачата.

3. Нека $ABCD$ е трапез таков што $AD \parallel BC$ и $\measuredangle BCD < \measuredangle ABC < 90^\circ$. Нека E е пресечната точка на дијагоналите AC и BC. Опишаната кружница μ околу триаголникот BEC ја сече страната CD во точката X. Правите AX и BC се сечат во точката Y, а правите BX и AD се сечат во точката Z. Докажи дека правата EZ е тангента на μ ако и само ако правата BE е тангента на опишаната кружница околу триаголникот BXY.

Решение. *Прв начин*. Прво ќе докажеме дека опишаната кружница околу триаголникот AED ја допира кружницата μ. Од Талесовата теорема имаме

$$\frac{\overline{AE}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{DE}}{\overline{BE}}.$$

Тоа значи дека постои хомотетија H со центар во E таква што $\mathrm{H}(A) = C$ и $\mathrm{H}(D) = B$. Оваа хомотетија ја пресликува опишаната кружница околу триаголникот AED во опишаната кружница околу триаголникот $\mathrm{H}(A)\mathrm{H}(E)\mathrm{H}(D) = CEB$, а тоа е кружницата μ. Според тоа, правата што ги содржи центрите на овие две кружници минува низ нивна заедничка точка E, од што следува дека тие се допираат во E.



Од претходното следува дека EZ е тангента на μ во E ако и само ако Z припаѓа на заедничката тангента t на μ и опишаната кружница на триаголникот AED. Ќе докажеме дека Z припаѓа на t ако и само ако четириаголникот $ABXD$ е тетивен. Навистина, ако Z припаѓа на t, тогаш користејќи степен на точка во однос на кружница добиваме $\overline{ZB}\cdot\overline{ZX}=\overline{ZE}^2=\overline{ZD}\cdot\overline{ZA}$, па затоа точките A,B,X,D припаѓаат на иста кружница, т.е. четириаголникот $ABXD$ е тетивен.

Нека претпоставиме дека четириаголникот $ABXD$ е тетивен. Тогаш t е радикална оска на μ и на опишаната кружница околу триаголникот AED. Понатаму, AD е радикална оска на опишаните кружници околу триаголникот AED и четириаголникот $ABXD$, а BX е радикална оска на μ и опишаната кружница околу четириаголникот $ABXD$. Сега од теоремата за конкурентност на радикалните оски следува дека правите t, AD и BX се сечат во една точка и тоа е точката Z, што значи дека Z припаѓа на t.

Сега, да забележиме дека точките A, X, Y се колинеарни и $AD \parallel BC$, па затоа $\measuredangle DAX = \measuredangle BYX$. Конечно, од претходните разгледувања и од теоремата за агол меѓу тангента и тетива следува низата еквиваленции:

правата EZ е тангента на μ $\Leftrightarrow$
четириаголникот $ABXD$ е тетивен $\Leftrightarrow$
$\measuredangle DBX = \measuredangle DAX$ $\Leftrightarrow$
$\measuredangle EBX = \measuredangle BYX$ $\Leftrightarrow$
правата BE е тангента на опишаната кружница околу $\triangle BYX$,

што и требаше да се докаже.

Втор начин. Според условот на задачата четириаголникот $BCXE$ е тетивен и $AD \parallel BC$, па затоа

$$\measuredangle EAZ + \measuredangle EXZ = \measuredangle ECB + \measuredangle EXZ = \measuredangle EXB + \measuredangle EXZ = 180^\circ,$$

од што следува дека четириаголникот $AEXZ$ е тетивен. Според тоа,

$$\measuredangle XEZ = \measuredangle XAZ = \measuredangle XYB.$$

Сега од теоремата за агол меѓу тетива и тангента имаме: EZ е тангента на кружницата μ ако и само ако $\measuredangle XEZ = \measuredangle XBE$. Слично BE е тангента на кружницата (BXY) ако и само ако $\measuredangle XYB = \measuredangle XBE$. Конечно, од претходните разгледувања следува низата еквиваленции:

правата EZ е тангента на μ $\Leftrightarrow$
$\measuredangle XEZ = \measuredangle XBE$ $\Leftrightarrow$
$\measuredangle XYB = \measuredangle XBE$ $\Leftrightarrow$
правата BE е тангента на кружницата (BXY),

што и требаше да се докаже.

4. За даден природен број $n \geq 3$ имаме $n \times n$ табла на која сите полиња се бели. Дефинираме *лебдечки плус* како петорка (M, L, R, A, B) од единечни полиња на таблата така што L е лево од M во истиот ред, R е десно од M во истиот ред, A е над M во истата колона и B е под M во истата колона. Дозволено е M да формира лебдечки плус со несоседни полиња. Определи го најголемиот k (во зависност од n) за кој може некои k полиња на таблата да се обојат во црно и притоа да не постои ниту еден црн лебдечки крст.

Решение. Ќе докажеме дека одговорот е $k = 4n - 4$. Ако ги обоиме сите рабни полиња од таблата во црно, тогаш имаме точно $4n - 4$ црни полиња, бидејќи секој раб има по n и притоа секое ќоше (ги има 4) се брои два пати. Ако постои црн лебдечки плус, тогаш неговиот центар, M, е во редица со барем 3 црни полиња и во колона со барем 3 црни полиња. Тоа значи дека M мора да е ќоше на таблата, што не е можно бидејќи не постои лебдечки плус со центар во ќоше. Заклучуваме дека конструкцијата е точна.

Ќе докажеме сега дека доколку бројот на црни полиња на таблата е барем $4n - 3$, тогаш постои црн лебдечки плус. Ако го претпостаиме спротивното, тогаш секое црно поле не е центар M на ниту еден лебдечки плус. Тоа значи дека барем една од четирите насоки $\uparrow, \downarrow, \rightarrow$ и $\leftarrow$ во однос на тоа поле не содржи друго црно поле. Ги разгледуваме сите парови од облик $(s, \leftarrow), (s, \rightarrow), (s, \uparrow)$ и $(s, \downarrow)$ каде што s е црно поле, а стрелката од парот покажува во насока без црни полиња во однос на s. Нека P е бројот на вакви парови. Бидејќи ниту едно поле не е центар на црн лебдечки плус, заклучуваме дека имаме барем $4n - 3$ вакви парови.

Ја разгледуваме првата колона од лево, K_l, што содржи црно поле (што значи дека сите колони лево од неа не содржат црни полиња). Нека x е најгорното црно поле од колоната K_l. Тогаш x припаѓа барем во два од разгледуваните парови: имено, во $(x, \leftarrow)$ и $(x, \uparrow)$. Слично, ако y е најдолното црно поле од истата колона, тогаш и y припаѓа барем во два пара: имено, $(y, \leftarrow)$ и $(y, \downarrow)$. Тоа значи дека во колоната K_l имаме барем два дополонителни пара, дури и кога $x = y$. Истото важи и за првата колона од десно што содржи црно поле, да ја означиме K_d. Јасно, $K_l \neq K_d$, бидејќи во спротивно има најмногу n црни полиња (сите во истата колона), што не е можно ($4n - 3 > n$).

Заклучуваме дека постојат барем $4n-3+4=4n+1$ парови, односно дека $P \geq 4n+1$.
За секој пар стрелката е во една од четири можни насоки. Од $P \geq 4n+1$ и принципот на Дирихле заклучуваме дека имаме најмалку $n+1$ парови со стрелките во истата насока, да речеме $\rightarrow$. Тоа значи дека постојат парови $(s_1,\rightarrow),(s_2,\rightarrow),\ldots,(s_{n+1},\rightarrow)$. Бидејќи таблата има точно n редици, принципот на Дирихле повлекува дека некои s_i и s_j лежат во иста редица, а со тоа и паровите $(s_i,\rightarrow)$ и $(s_j,\rightarrow)$ се во иста редица. Последното не е можно, бидејќи тогаш едно од s_i и s_j има црно поле во насока $\rightarrow$ (едното поле е десно од другото). Оваа противречност докажува дека може да има најмногу $4n-4$ црни полиња, при услов да не се појавува црн лебдечки плус.

5. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е определена со $x_1 = \frac{7}{2}$ и $x_{n+1} = x_n(x_n - 2)$, за $n \geq 1$. Нека $x_{2021} = \frac{a}{b}$, $\mathrm{NZD}(a,b) = 1$. Докажи, ако p е прост делител на a, тогаш $p = 3$ или $3 \mid p-1$.

Решение. Имаме $\frac{7}{2} = 2 + \frac{1}{2} + 1$. Нека $c_1 = 2$. Тогаш $x_1 = c_1 + \frac{1}{c_1} + 1$. Да ставиме $c_n = 2^{2^{n-1}}$. Со математичка индукција ќе докажеме дека $x_n = c_n + \frac{1}{c_n} + 1$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Базата на идукцијата веќе е докажана. Нека претпоставиме дека за некој n важи $x_n = c_n + \frac{1}{c_n} + 1$. Тогаш

$$x_{n+1} = x_n(x_n - 2) = (c_n + \frac{1}{c_n} + 1)(c_n + \frac{1}{c_n} - 1) = (c_n + \frac{1}{c_n})^2 - 1$$
$$= c_n^2 + \frac{1}{c_n^2} + 1 = 2^{2^n} + \frac{1}{2^{2^n}} + 1 = c_{n+1} + \frac{1}{c_{n+1}} + 1.$$

Според тоа, $x_n = \frac{c_n^2 + c_n + 1}{c_n}$, каде што броителот и именителот се заемно прости броеви. Според тоа, $a = c_{2021}^2 + c_{2021} + 1$ и $b = c_{2021}$. Ставаме $c = c_{2021} = 2^{2^{2020}}$. Нека p е прост делител на a. Бидејќи $c^2 + c + 1$ е непарен број, добиваме $p \neq 2$. Значи, $p \geq 3$ и $p \mid c^2 + c + 1$, што значи дека полиномот $P(x) = x^2 + x + 1$ има корен c по модул p.

На два начина ќе докажеме дека од последното тврдење следува дека $p = 3$ или $3 \mid p-1$.

Прв начин. Од $p \mid c^2 + c + 1$ следува

$$p \mid 4(c^2 + c + 1) = (2c+1)^2 + 3. \qquad (1)$$

Нека $p \neq 3$. Тогаш $p > 3$, па затоа $\mathrm{NZD}(p,3) = 1$ и од (1) следува дека -3 е квадратен остаток по модул p. Сега, од Гаусовиот закон за квадратен реципроцитет добиваме

$$(\frac{3}{p}) = (\frac{p}{3}) \cdot (-1)^{\frac{3-1}{2} \cdot \frac{p-1}{2}} = (\frac{p}{3}) \cdot (-1)^{\frac{p-1}{2}}.$$

Оттука следува

$$(\frac{-3}{p}) = (\frac{3}{p})(\frac{-1}{p}) = (\frac{3}{p})(-1)^{\frac{p-1}{2}} = (\frac{p}{3}) \cdot (-1)^{p-1} = (\frac{p}{3}).$$

Според тоа, -3 е квадратен остаток по модул p ако и само ако p е квадратен остаток по модул 3. Последното е еквивалентно со $3 \mid p-1$.

Втор начин. Ако $p \mid c^2+c+1$, тогаш $p \mid (c-1)(c^2+c+1) = p \mid c^3-1$, односно $c^3 \equiv 1 (\bmod p)$. Нека $w_p(c)$ е редот на c по модул p. Како што знаеме од $c^t \equiv 1 (\bmod p)$ следува $w_p(c) \mid t$, па затоа важи $w_p(c) \mid 3$. Последното значи дека $w_p(c) = 1$ или $w_p(c) = 3$. Случајот $w_p(c) = 1$ се сведува на $p \mid c-1$, т.е. $c \equiv 1 (\bmod p)$, па затоа од

$$3 \equiv c^2+c+1 \equiv 0 (\bmod p)$$

следува $p = 3$. Нека $w_p(c) = 3$. Имаме $p \mid c^2+c+1$, што значи дека $\mathrm{NZD}(p,c) = 1$, па од малата теорема на Ферма следува $c^{p-1} \equiv 1 (\bmod p)$. Конечно, бидејќи $w_p(c) = 3$ од последната конгруенција следува $3 \mid p-1$.