Милутин Обрадовић ♠ Душан Георгијевић

4 MATHEMATISKOP 4

Малешку

ОДАБРАНИ ЗАДАЦИ

ЗА
ДРУГИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

ДРУГО ИЗДАЊЕ

МАТЕМАТИСКОП ♠ Београд 1995.

Др Милутин Обрадовић
Др Душан Георгијевић MATHEMATISKOP 4
ОДАБРАНИ ЗАДАЦИ ЗА ДРУГИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА
друго проширено издање

Рецензент
Др Павле Миличић

Издавач
ИП МАТЕМАТИСКОП, н.х. Т. Томшича 6/68, Београд

За издавача
Нада Стојановић, директор

Уредник
Владимир Стојановић

Стручна и техничка редакција
Владимир Стојановић

Компјутерска обрада текста
Катарина Недић
Душан Стојановић
Никола Стојановић

CIP – Каталогизација у публикацији
Народна библиотека Србије, Београд

372.851.411.62(075.3) (076)

ГЕОРГИЈЕВИЋ, Душан
Matematiskop 4 : odabrani zadaci (sa rešenjima) : za drugi razred srednjih škola / Dušan Georgijević, Milutin Obradović, – (2. prošireno izd.). – Beograd : Matematiskop, 1995 (Bor : Bakar). – 285 str. : graf. prikazi ; 24 cm

Tiraž 3000.

ISBN 86-7076-004-5
1. Обрадовић, Милутин
372.851.717(075.3) (076)

ID=41233164

Тираж 3000
Штампа: Штампарско издавачко предузеће „Бакар”, Бор

САДРЖАЈ

ПРВА ГЛАВА

КОРЕНИ РЕАЛНИХ БРОЈЕВА. ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ 7

ДРУГА ГЛАВА

КВАДРАТНА ЈЕДНАЧИНА 15

2.1. Комплексни бројеви 15
2.2. Квадратна једначина са једном непознатом. Природа решења 19
2.3. Виетове формуле.
Растављање квадратног тринома на линеарне чиниоце 23
2.4. Нелинеарни системи једначина 26

ТРЕЋА ГЛАВА

КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА 29

3.1. Квадратна функција и њен график. Екстремне вредности 29
3.2. Квадратне неједначине 33

ЧЕТВРТА ГЛАВА

ИРАЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ 41

4.1. Ирационалне једначине 41
4.2. Ирационалне неједначине 44

ПЕТА ГЛАВА

ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ 47

5.1. Уопштени углови, мерење углова радијаном 47
5.2. Дефиниције тригонометријских функција ма ког угла.
Знак тригонометријских функција 48
5.3. Основне тригонометријске идентичности 51
5.4. Основна својства тригонометријских функција 54
5.5. Свођење тригонометријских функција ма ког угла на
тригонометријске функције оштрог угла 55
5.6. Испитивање и графичко представљање
тригонометријских функција 58
5.7. Адиционе формуле 61
5.8. Тригонометријске функције удвострученог угла 66
5.9. Тригонометријске функције половине угла 69

5.10. Трансформисање збира и разлике
тригонометријских функција у производ 71
5.11. Трансформисање производа
тригонометријских функција у збир (или разлику) 76
5.12. Тригонометријске једначине 79
5.13. Тригонометријске неједначине 84
5.14. Инверзне тригонометријске функције 85
5.15. Примене тригонометрије 87

ШЕСТА ГЛАВА
ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА 93
6.1. Експоненцијалне једначине 94
6.2. Експоненцијалне неједначине 96

СЕДМА ГЛАВА
ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА 97
7.1. Појам логаритма и основна својства 97
7.2. Логаритамска функција и њен график 99
7.3. Логаритамске једначине и неједначине 101

ОСМА ГЛАВА
РЕШЕЊА ЗАДАТАКА 105

ПРЕДГОВОР

Ова Збирка задатака је намењена ученицима II разреда свих средњих школа и писана је према најновијем наставном плану и програму. Збирка садржи преко 2000 задатака. У оквиру сваког одељка задаци су поређани од лакших ка тежим.

Овде нису обрађени степени са целим изложиоцем, јер је природно да се ова тема обради у одељку о рационалним изразима (у оквиру градива I разреда средње школе).

У другом делу књиге дата су решења свих задатака. Као и у претходним књигама серије MATHEMATISKOP, сви задаци су подељени у три групе: троуглом испред редног броја су означени стандарни задаци, које би требало обрадити у редовној настави, звездицом – задаци који су се појављивали на такмичењима младих математичара (ранга републичког и вишег), док неозначену групу чине нестандарни задаци који такође могу бити интересантни, како ученицима тако и њиховим наставницима.

Захваљујемо се рецензенту Др. Павлу Миличићу на многим корисним примедбама и сугестијама.

Уредник серије MATHEMATISKOP, Владимир Стојановић, бројним прилозима је дао допринос побољшању текста на многим местима. Сем тога, убацио је и одељак о инверзним тригонометријским функцијама. За све то врло смо му захвални.

Посебну захвалност дугујемо издавачком предузећу МАТЕМАТИСКОП за свесрдно ангажовање у припреми рукописа и штампању ове збирке.

Аутори

У Београду
oktобар, 1995.

О СЕРИЈИ MATHEMATISKOP

Математика све више улази у живот људи као неопходан чинилац. Она, заправо, постаје начин живљења. Серија MATHEMATISKOP ту налази своју сврсисходност.

Књиге ове серије представљају незаобилазну литературу за ученике свих узраста, као и за њихове наставнике и професоре. Намењене су онима који воле математику, као и онима који је не воле.

Серија ће остварити пун ефекат када буде комплетирана. За сада су, поред ове књиге, изашле из штампе:

Владимир Стојановић: **MATHEMATISKOP 2** *(четири издања)*
КАКО ДА ПОСТАНЕМ ШАМПИОН МАТЕМАТИКЕ
(Тренутно је нема у складишту, а у припреми је прерађено и проширено *пето издање.*)

Владимир Стојановић: **MATHEMATISKOP 3** *(пето издање)*
ОДАБРАНИ ЗАДАЦИ ЗА ПРВИ РАЗРЕД СРЕДЊИХ ШКОЛА

Владимир Стојановић: **MATHEMATISKOP 7** *(друго издање)*
МАТЕМАТИКА ЗА МАТУРАНТЕ

Издавачким планом ИП МАТЕМАТИСКОП предвиђено је да сваке године изађу из штампе најмање две нове књиге, док се серија MATHEMATISKOP не комплетира.

ПРВА ГЛАВА

КОРЕНИ РЕАЛНИХ БРОЈЕВА. ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

Подсетимо се на појам и особине **степена** *са целим изложиоцем.*

1^o $a \overset{def}{=} a^1$ и $\underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ чинилаца}} \overset{def}{=} a^n$.

2^o За $a \neq 0$ је:

а) $a^0 \overset{def}{=} 1$;

б) $a^{-n} \overset{def}{=} \dfrac{1}{a^n}$ $n \in \mathbf{N}$;

в) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $m, \ n \in \mathbf{Z}$;

г) $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $m, \ n \in \mathbf{Z}$;

д) $a^m : a^n = a^{m-n}$, $m, \ n \in \mathbf{Z}$.

3^o За $abc \neq 0$ је $\left(\dfrac{ab}{c}\right)^m = \dfrac{a^m b^m}{c^m}$, $m \in \mathbf{Z}$.

Ово подсећање ће нам олакшати рад са коренима.

Нека $n \in \mathbf{N}$ и $a \in R$. Тада симбол $\sqrt[n]{a}$ (n-ти корен из a) се дефинише на следећи начин:

1^o Ако је n непаран број, тј. $n = 2k-1$, $k \in \mathbf{N}$, тада је $\sqrt[n]{a}$ једнак реалном броју b, таквом да је $b^n = a$.

2^o Ако је $n = 2k$, $k \in \mathbf{N}$, $a \geq 0$, тада $\sqrt[n]{a}$ означава број $b \geq 0$, такав да је $a^n = b$.

Показује се да такви бројеви b постоје и јединствени су. Тако је, например, $\sqrt[3]{a^3} = a$, док је $\sqrt{a^2} = |a|$, итд.

Основне особине корена су (притом ћемо претпоставити, углавном, да су поткорене величине ненегативне, да не бисмо посматрали посебно парне и непарне случајева корена):

$$\boxed{\begin{array}{l}
а)\ (\sqrt[n]{a})^n = a,\ a \geq 0; \\
б)\ \sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a\ ,\ n = 2k-1 \\ |a|\ ,\ n = 2k \end{cases},\ k \in \mathbf{N}; \\
в)\ \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b},\ a,\ b \geq 0; \\
г)\ \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ a \geq 0,\ b > 0; \\
д)\ (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m},\ a \geq 0,\ m,\ n \in \mathbf{N}; \\
ђ)\ \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a},\ a \geq 0,\ m,\ n \in \mathbf{N};
\end{array}}$$

Напоменимо да у случају непарних корена није потребно ограничење $a \geq 0$, $b \geq 0$, осим у случају *г)*, где треба претпоставити да $b \neq 0$.

Ако је r рационалан број, тј. $r = \dfrac{m}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$, и $a > 0$ реалан број, тада дефинишемо степен са рационалним изложиоцем:

$$\boxed{a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Ако су a и b позитивни реални бројеви, а r и s рационални бројеви, тада важе следећа својства:

$$\boxed{\begin{array}{l}
а)\ a^r \cdot a^s = a^{r+s}\ ; \\
б)\ (a^r)^s = a^{r \cdot s}\ ; \\
в)\ (a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r\ ; \\
г)\ \left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}\ ; \\
д)\ \dfrac{a^r}{a^s} = a^r \cdot a^{-s} = a^{r-s}.
\end{array}}$$

$\triangle$ **1.** Израчунати:

а) $\sqrt{9}$; *б)* $\sqrt[4]{16}$; *в)* $\sqrt[3]{125}$; *г)* $\sqrt[3]{-8}$; *д)* $\sqrt{(-2)^2}$; *ђ)* $\sqrt[4]{(-3)^4}$; *е)* $\sqrt[6]{2^6}$;

ж) $\sqrt{a^2} + \sqrt[3]{a^3}$, $a < 0$; *з)* $\sqrt[5]{(-2)^5}$; *и)* $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$; *ј)* $64^{\frac{1}{6}}$; *к)* $(32)^{-\frac{1}{5}}$.

$\triangle$ **2.** За које $x \in \mathbf{R}$ важе следеће једнакости?

а) $\sqrt{(x-1)^2} = x - 1$; *б)* $\sqrt{(x-3)^2} = 3 - x$; *в)* $\sqrt{x^2}\sqrt[3]{x^3} = -x^2$;

г) $\sqrt{(-x)^2} = -x$; *д)* $\sqrt[4]{(-x)^4} = x$; *ђ)* $\sqrt{x^6} = x^3$; *е)* $\sqrt{-x}\sqrt{x} = -x$;

ж) $\sqrt[3]{-x^3} = -x$; *з)* $\dfrac{x-1}{\sqrt{(x-1)^2}} = -1$; *и)* $x\sqrt{2} = \sqrt{2x^2}$; *ј)* $x\sqrt{2} = -\sqrt{2x^2}$.

△ **3.** Упростити изразе:

а) $\sqrt[4]{32\sqrt[3]{4}}+\sqrt[4]{64\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}-3\sqrt[3]{2\sqrt[4]{2}}$; *б)* $\sqrt{8}-\sqrt{18}+\sqrt{32}-\sqrt{72}$;

в) $2\sqrt{75}-3\sqrt{48}+5\sqrt{125}-2\sqrt{3}$; *г)* $3\sqrt{8}+5\sqrt{18}-\sqrt{12}-2\sqrt{27}$;

д) $(2\sqrt{90}-5\sqrt{160}+3\sqrt{250})\cdot\sqrt{2}$; *ђ)* $(\sqrt{60}-2\sqrt{135}+10\sqrt{15}):2\sqrt{5}$;

е) $\sqrt{4\frac{4}{7}}\cdot\sqrt{3\frac{1}{2}}$; *ж)* $\sqrt{8\frac{2}{5}}:\sqrt{5\frac{5}{6}}$;

з) $2\sqrt{40\sqrt{12}}+3\sqrt{5\sqrt{48}}-2\sqrt[4]{75}-4\sqrt{15\sqrt{27}}$; *и)* $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{1}{16}}+\sqrt[3]{\frac{1}{54}}$;

ј) $\sqrt{(1+\sqrt{2})^2}+\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}$; *к)* $\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(1-x)^2},\ x\geq 2$;

л) $\sqrt[3]{(x-1)^3}+\sqrt{(1-x)^2},\ x<1$; *љ)* $\sqrt{a^2}+\sqrt[3]{a^3}+\sqrt[4]{a^4}+\sqrt[5]{a^5},\ a<0.$

△ **4.** Одредити који је од датих бројева већи:

а) $\sqrt{2}$ или $\sqrt[3]{2}$; *б)* $\sqrt{\frac{1}{3}}$ или $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$; *в)* $\sqrt{\frac{1}{2}}$ или $\sqrt{\frac{1}{3}}$; *г)* $\sqrt{2}$ или $\sqrt{3}$;

д) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ или $\sqrt{11}$; *ђ)* $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ или $2\sqrt{6}$; *е)* $\sqrt{3}+2\sqrt{2}$ или $2\sqrt{5}$;

ж) $\sqrt{6}+2\sqrt{7}$ или $\sqrt{10}+\sqrt{21}$; *з)* $\sqrt{11}$ или $5-\sqrt[3]{5}$; *и)* $\sqrt[4]{5}$ или $3-\sqrt{2}$.

△ **5.** Доказати да су следећи бројеви ирационални:

а) $\sqrt{3}$; *б)* $2+\sqrt{3}$; *в)* $\sqrt{2}+\sqrt{3}$; *г)* $\sqrt{2}+\sqrt[4]{2}$; *д)* $\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$; *ђ)* $(2+\sqrt{3})^{10}$

е) $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$; *ж)* $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{5}$.

* *з)* Дат је разломак $\dfrac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}$ (a, b, c, d су рационални бројеви). Које услове морају испуњавати бројеви a, b, c, d, да би разломак био рационалан број?

* **6.** Нека је S подскуп скупа реалних бројева такав да важе следећи услови:

(*а*) $Z\subset S$;
(*б*) $\sqrt{2}+\sqrt{3}\in S$;
(*в*) $x,y\in S\Rightarrow x+y\in S,\ x\cdot y\in S$.

Доказати да $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}\in S$.

△ **7.** Ако је $a\geq 0$, $b\geq 0$ и $a^2-b\geq 0$, доказати да је

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

Користећи претходне једнакости упростити изразе:

а) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$; *б)* $\sqrt{11-4\sqrt{6}}$; *в)* $\sqrt{29+6\sqrt{6}}$; *г)* $\sqrt{30-12\sqrt{6}}$;

д) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; *ђ)* $\sqrt{30-12\sqrt{6}}+3\sqrt{5-2\sqrt{6}}$;

е) $\sqrt{11-4\sqrt{6}}+\sqrt{5+2\sqrt{6}}$; *ж)* $\sqrt{7+2\sqrt{10}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

△ **8.** Рационалисати имениоце следећих разломака:

а) $\dfrac{3}{\sqrt{3}}$; *б)* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}}$; *в)* $\dfrac{3}{\sqrt{3}-1}$; *г)* $\dfrac{3}{\sqrt{2}+3}$; *д)* $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}$; *ђ)* $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$

* *е)* $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}+\sqrt{d}}$; *ж)* $\dfrac{1}{\sqrt[4]{a}-\sqrt{b}}$; *з)* $\dfrac{14}{\sqrt[4]{3}+\sqrt[8]{2}}$; *и)* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}-1}$;

ј) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{a}+1}$; *к)* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt{a}}$; * *л)* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}}$.

△ **9.** Упростити следеће изразе:

а) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\dfrac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}$; *б)* $\dfrac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{9-12\sqrt{2}+8}}-\dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{9+12\sqrt{2}+8}}$;

в) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}}{\sqrt{\sqrt[4]{8}+\sqrt{\sqrt{2}-1}}-\sqrt{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}}}$;

г) $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$;

д) $\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$; *ђ)* $\sqrt[3]{45+29\sqrt{2}}-\sqrt[3]{45-29\sqrt{2}}$;

е) $\sqrt[3]{26+15\sqrt{3}}(2-\sqrt{3})$; *ж)* $\sqrt[6]{25+4\sqrt{6}}-\sqrt[3]{1+2\sqrt{6}}$;

з) $\sqrt{7-\sqrt{48}}+\sqrt{5-\sqrt{24}}+\sqrt{3-\sqrt{8}}$; * *и)* $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}+\sqrt{8}+4}$.

△ **10.** Доказати следеће једнакости:

а) $\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=\dfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{25}\right)$; *б)* $\sqrt[3]{\sqrt[3]{2}-1}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{9}}-\sqrt[3]{\dfrac{2}{9}}+\sqrt[3]{\dfrac{4}{9}}$;

в) $\sqrt[4]{\dfrac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}}=\dfrac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}$; *г)* $\sqrt{\sqrt{2}+2\sqrt{\sqrt{2}-1}}+\sqrt{\sqrt{2}-2\sqrt{\sqrt{2}-1}}=2$;

д) $\sqrt{4+\sqrt{4+2\sqrt{3}}+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\sqrt{3}+1$;

ђ) $\sqrt{8+2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}+\sqrt{8-2\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{2}(\sqrt{5}+1)$.

△ **11.** Доказати условне једнакости.

а) Ако је $\dfrac{A}{a}=\dfrac{B}{b}=\dfrac{C}{c}=\dfrac{D}{d}$ и $A,\ B,\ C,\ D\geq 0$, $a,\ b,\ c,\ d>0$, тада је $\sqrt{Aa}+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}$.

б) Ако је $ax^3 = by^3 = cz^3$ и $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, тада је
$\sqrt[3]{ax^2 + by^2 + cz^2} = \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{c}$.

в) Ако су $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ позитивни бројеви, такви да је $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n}$, тада је:

$$\sqrt{a_1b_1} + \sqrt{a_2b_2} + \cdots + \sqrt{a_nb_n} = \sqrt{a_1 + a_2 + \cdots + a_n} \cdot \sqrt{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}.$$

г) Ако су a, b и c позитивни бројеви и $a + b < c$, тада је:

$$\sqrt{a + b + c + 2\sqrt{ac + bc}} + \sqrt{a + b + c - 2\sqrt{ac + bc}} = 2\sqrt{c}.$$

* *д)* Ако је $\frac{aa_1 + bb_1 + cc_1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}} = 1$ и бројеви a, b, c, a_1, b_1, c_1 сви различити од нуле, тада је $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}$.

* **12.** Израчунати збир

$$\frac{1}{2\sqrt{1} + 1 \cdot \sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{100\sqrt{99} + 99\sqrt{100}}.$$

13. Доказати да вредност израза

$$\frac{\sqrt{\frac{abc + 4}{a} - \frac{4\sqrt{bc}}{\sqrt{a}}}}{\sqrt{abc} - 2}, \quad a > 0,\ b > 0,\ c > 0,\ abc > 4,$$

не зависи од b и c.

△ **14.** Израчунати вредности израза за дате вредности x:

а) $\frac{(1 - x)(x + 2)}{x^2(x + 1)^2}$, $x = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$; *б)* $(x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 4)$, $x = \frac{\sqrt{7} - 5}{2}$;

в) $\frac{1 + x}{1 + \sqrt{1 + x}} - \frac{1 - x}{1 - \sqrt{1 - x}}$, $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

г) $\frac{2b\sqrt{x^2 - 1}}{x - \sqrt{x^2 - 1}}$, $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, $a,\ b > 0$;

д) $\frac{2a\sqrt{1 + x^2}}{x + \sqrt{1 + x^2}}$, $x = \frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}}\right)$, $a,\ b > 0$;

ђ) $\frac{1 - ax}{1 + ax}\sqrt{\frac{1 + bx}{1 - bx}}$, $x = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2a - b}{b}}$ $(0 < a < b < 2a)$;

е) $x^3 + 3x$, $x = \sqrt[3]{\sqrt{5} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{5} - 2}$;

ж) $\frac{(x + 1)^{-\frac{1}{2}}}{(x - 1)^{-\frac{1}{2}} - (x + 1)^{-\frac{1}{2}}}$, $x = \frac{a^2 + 1}{2a}$, $a > 0$;

з) $\sqrt{\dfrac{\sqrt{(a-x)(x-b)}+\sqrt{(a+x)(x+b)}}{\sqrt{(a+x)(x+b)}-\sqrt{(a-x)(x-b)}}}$, $x=\sqrt{ab}$, $0<b<a$.

15. Упростити следеће изразе:

а) $\dfrac{a^2+4}{a\sqrt{\left(\dfrac{a^2-4}{2a}\right)^2+4}}$, $a\neq 0$; *б)* $\dfrac{\sqrt{\dfrac{a+2}{a-2}}+\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}}{\sqrt{\dfrac{a+2}{a-2}}-\sqrt{\dfrac{a-2}{a+2}}}$;

в) $\left(\dfrac{\sqrt{1+a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}+\dfrac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}\right)\left(\sqrt{\dfrac{1}{a^2}-1}-\dfrac{1}{a}\right)$, $0<a<1$;

г) $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-9}}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-9}}}$; *д)* $\dfrac{\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}+2}{\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-2}$;

ђ) $\sqrt{1-2\sqrt{a-a^2}}$; *е)* $\dfrac{\sqrt{2a+2\sqrt{a^2-b^2}}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{2a-2\sqrt{a^2-b^2}}+\sqrt{a-b}}$, $0<b\leq a$;

ж) $\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}\left(\sqrt{(1+x)^3}-\sqrt{(1-x)^3}\right)}{2+\sqrt{1-x^2}}$;

з) $\dfrac{\sqrt[3]{x+4\sqrt{x-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{x-4}-2}}{\sqrt[3]{x-4\sqrt{x-4}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{x-4}+2}}\cdot\dfrac{x-4\sqrt{x-4}}{2}$;

и) $\dfrac{\sqrt{(2x+1)^3}+\sqrt{(2x-1)^3}}{\sqrt{2x+2\sqrt{4x^2-1}}}$, $x\geq\dfrac{1}{2}$;

ј) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}+\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-2}\cdot(2x+\sqrt{x^2-1})}{\sqrt{(x+1)^3}-\sqrt{(x-1)^3}}$, $x>1$;

* **16.** Показати да се израз $\dfrac{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}-2}{x^3-3x+(x^2-1)\sqrt{x^2-4}+2}$, $(x>2)$ може трансформисати у израз $\dfrac{(x+1)\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x+2}}$.

* **17.** За које вредности a и b је: $a^2-a\sqrt{2}+b-2\sqrt{b}+\dfrac{3}{2}=0$.

18. Доказати неједнакости:

а) $\sqrt[3]{3+\sqrt[3]{3}}+\sqrt[3]{3-\sqrt[3]{3}}<2\sqrt[3]{3}$; *б)* $\dfrac{a^2+3}{\sqrt{a^2+2}}>2$, a је реалан број ;

в) $\sqrt{a}+\sqrt{b} \leq \sqrt{\frac{a^2}{b}}+\sqrt{\frac{b^2}{a}}$, $a>0,\ b>0.$

△ **19.** Упростити изразе:

а) $\sqrt{xy}\cdot\sqrt[4]{x^2y^3}\cdot\sqrt[6]{x^9y^8}$, $x>0,\ y>0$;

б) $\sqrt{\frac{x}{y^2}}\cdot\sqrt[3]{\frac{y^2z^2}{x^2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{xy}{z^3}}$, $x>0,\ y>0,\ z>0$;

в) $\left(\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[3]{a^4}\right):\left(\sqrt[12]{a^{11}}\cdot\sqrt{a}\right)$, $a>0$;

г) $\sqrt[3]{a^2-b^2}\cdot\sqrt[3]{a^2+2ab+b^2}\cdot\sqrt[3]{a^2-2ab+b^2}$;

д) $4^{\frac{1}{2}}+8^{\frac{1}{3}}+16^{\frac{1}{4}}+32^{\frac{1}{5}}$; *ђ)* $0.008^{\frac{2}{3}}-0.064^{\frac{2}{3}}$;

е) $\left(16^{\frac{1}{8}}+\left(27^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\left(2^{\frac{1}{2}}-\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{1}{2}}\right)$; *ж)* $100^{0.5}+81^{0.25}-16^{0.75}$;

з) $\left(x^{\frac{3}{2}}\cdot y^{\frac{4}{3}}\cdot z^{\frac{5}{6}}\right):\left(x^{\frac{5}{4}}\cdot y^{\frac{2}{3}}\cdot z^{\frac{7}{12}}\right)$, $x>0,\ y>0,\ z>0$;

и) $\left(a^{\frac{2}{3}}b^{-\frac{1}{2}}\right)^3-a^{-\frac{2}{3}}b^{-1}\left(a^2+b^2\right)a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}$, $a>0,\ b>0$;

ј) $\left(\frac{a-x}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}}-\frac{a+x}{\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{x}}\right)\cdot 2(ax)^{-\frac{1}{3}}$, $a\neq x,\ a>0,\ x>0$;

к) $(3a+\sqrt{6a-1})^{-\frac{1}{2}}+(3a-\sqrt{6a-1})^{-\frac{1}{2}}$;

л) $\frac{\sqrt[3]{a+2\sqrt{a-1}}}{(\sqrt{a-1}+1)^{-\frac{1}{3}}}+\frac{\sqrt[3]{a-2\sqrt{a-1}}}{(\sqrt{a-1}-1)^{-\frac{1}{3}}}$;

љ) $\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}{(x+y)^{\frac{1}{2}}}-\frac{(x+y)^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}}\right)^{-2}-\frac{x+y}{2\sqrt{xy}}$, $x>0,\ y>0$;

м) $\frac{[(x+2)^{-\frac{1}{2}}+(x-2)^{-\frac{1}{2}}]^{-1}+[(x+2)^{-\frac{1}{2}}-(x-2)^{-\frac{1}{2}}]^{-1}}{[(x+2)^{-\frac{1}{2}}+(x-2)^{-\frac{1}{2}}]^{-1}-[(x+2)^{-\frac{1}{2}}-(x-2)^{-\frac{1}{2}}]^{-1}}$, $x>2$;

н) $\frac{\left(b^{\frac{5}{6}}a^{-\frac{1}{6}}+b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right)^2+\left(b^{\frac{5}{6}}a^{-\frac{1}{6}}-b^{\frac{1}{3}}a^{\frac{1}{3}}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{a^{-1}}-\sqrt[3]{b^{-1}}\right)\left(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{ab}\right)}-2a+\frac{4a^2}{a-b}$ $a>0,\ b>0,\ a\neq b$;

њ) $\frac{(x^2-3x+2)^{-\frac{1}{2}}-(x^2+3x+2)^{-\frac{1}{2}}}{(x^2-3x+2)^{-\frac{1}{2}}+(x^2+3x+2)^{-\frac{1}{2}}}-1+\frac{(x^4-5x^2+4)^{\frac{1}{2}}}{3x}$, $x<-2$ или $-1<x<1$ или $x>2$.

20. Доказати једнакости:

а) $\left\{2\left[(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-a\right]\left[(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}-b\right]\right\}^{\frac{1}{2}}=a+b-(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\ ,\ a>0,\ b>0\ ;$

б) $\left\{3\left[(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}-a\right]\left[(a^3+b^3)^{\frac{1}{3}}-b\right]\right\}^{\frac{1}{3}}=(a+b)^{\frac{2}{3}}-(a^2-ab+b^2)^{\frac{1}{3}},\ a,\ b>0$

в) $\left(\dfrac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x+a}+\sqrt{x-a}}+\dfrac{x-a}{\sqrt{x^2-a^2}-x+a}\right):\sqrt{\dfrac{x^2}{a^2}-1}=1\ ,\ x>a>0.$

ДРУГА ГЛАВА

КВАДРАТНА ЈЕДНАЧИНА

2.1 КОМПЛЕКСНИ БРОЈЕВИ

Скупом *комплексних бројева* називамо скуп $\mathbf{C} = \mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x,\ y) | x \in \mathbf{R},\ y \in \mathbf{R}\}$, $\mathbf{R}$ – скуп реалних бројева, у коме су дефинисане операције сабирања и множења на следећи начин:

$$(x_1,\ y_1) + (x_2,\ y_2) = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2),$$
$$(x_1,\ y_1) \cdot (x_2,\ y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Обично пишемо $z = (x,\ y)$. Уређена тројка $(\mathbf{C},\ +,\ \cdot)$ има структуру поља, тј. $(\mathbf{C},\ +)$ и $(\mathbf{C} \backslash (0,\ 0),\ \cdot)$ су комутативне (или Абелове) групе и важе дистрибутивни закони: $z_1(z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$, $(z_2 + z_3) z_1 = z_2 z_1 + z_3 z_1$. Неутрални елемент за сабирање је број $(0,\ 0)$, а јединични за множење $(1,\ 0)$. Подскуп $\mathbf{R}' = \{(x,\ 0) | x \in \mathbf{R}\}$ скупа $\mathbf{C}$, у односу на уведене операције, има својства реалних бројева, па га можемо идентификовати са скупом реалних бројева $\dot{\mathbf{R}}$.

Комплексни број $(0,\ 1)$ обележавамо га са i, има својство: $i^2 = i \cdot i = (-1,\ 0) = -1$ (према договору: $(x,\ 0) \equiv x$), па није реалан. Број i називамо *имагинарном јединицом*.

Сада се сваки комплексан број $z = (x,\ y)$ може представити у *алгебарском облику*: $z = x + iy$.

Једнакост комплексних бројева и претходно уведене операције сабирања и множења имају следећи облик. Ако је $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, тада је:

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \ \wedge \ y_1 = y_2,$$
$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2),$$
$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1).$$

Другим речима, комплексне бројеве посматрамо као биноме (специјалног типа), а код множења имамо у виду и да је $i^2 = -1$.

Ако је $z = x + iy$ комплексан број, тада реални број x називамо *реалним делом* комплексног броја z и пишемо $x = Re z$ или $x = Re\{z\}$, а y називамо *имагинарним делом* комплексног броја z и пишемо $y = Im z$ или $y = Im\{z\}$.

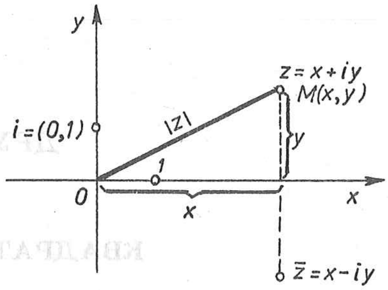
Геометријски посматрано, сваком комплексном броју $z = (x, y) = x+iy$ можемо доделити тачку $M(x, y)$ у правоуглом координатном систему и обрнуто (видети сл. 1). За број $z = x + iy$ дефинишемо:

конјуговано комплексан број:

$$\overline{z} = x - iy,$$

модуо комплексног броја:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$



Сл. 1

Тачка одређена са $\overline{z}$ је симетрична тачки одређеној са z у односу на x-осу, док је $|z|$ растојање комплексног броја z од координатног почетка (сл. 1).

У скупу $\mathbf{C}$ једначина $x^2 + 1 = 0$ има два решења. Једно решење је i, а друго $-i$.

Δ **21.** Представити у алгебарском облику следеће комплексне бројеве:

а) $(3-2i)+(5+3i)$; *б)* $(1+2i)-(3-i)$; *в)* $3(1-2i)$; *г)* $i(i-2)$; *д)* $(1+i)(1-2i)$; *ђ)* $(1-i)^2$; *е)* $(1+2i)^3$; *ж)* i^8 ; *з)* i^{17} ; *и)* i^n, $n \in \mathbf{N}$; *ј)* $(1+i)^{26}$; *к)* $(1-i)^{50}$; *л)* $(1+i)^2 \cdot (1-i)^2$; *љ)* $(-1+i\sqrt{3})^3$.

Δ **22.** Представити у облику $a + ib$ следеће комплексне бројеве:

а) $\dfrac{1}{1-i}$; *б)* $\dfrac{3}{1+2i}$; *в)* $\dfrac{1-i}{2+3i}$; *г)* $\dfrac{1+2i}{i}$; *д)* $\dfrac{1}{i}$; *ђ)* $\dfrac{1}{i^3}$; *е)* $\dfrac{1}{i^{25}}$

ж) $\dfrac{1}{(1+i)^{10}}$; *з)* $\dfrac{3+i}{(2-i)^2}$; *и)* $\left(\dfrac{1+i}{2-2i}\right)^3$; *ј)* $\dfrac{1-3i}{1+i} - \dfrac{i}{2+i}$; *к)* $\dfrac{1+i}{2-i}(3+2i)$

л) $\dfrac{(1+i)^3}{(2-3i)^2}\left(\dfrac{3-i}{2+i} - \dfrac{2-i}{3+i}\right)$; *љ)* $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^2$.

✓ Δ **23.** Доказати да за произвољне комплексне бројеве важи:

а) $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$; *б)* $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$; *в)* $\overline{z^{-1}} = (\overline{z})^{-1}$, $z \neq 0$;

г) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$, $z_2 \neq 0$; *д)* $\overline{(\overline{z})} = z$.

✓ Δ **24.** Доказати да за произвољне комплексне бројеве важи:

а) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$; *б)* $|z^n| = |z|^n$, $n \in \mathbf{N}$; *в)* $z\overline{z} = |z|^2$; *г)* $|z| = |\overline{z}|$;

✓ *д)* $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ $(z_2 \neq 0)$; *ђ)* $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2}$ $(z_2 \neq 0)$.

△ **25.** Доказати да за произвољне комплексне бројеве z_1, z_2 важе следећа својства:

a) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$;

б) $|z_1\overline{z_2}+1|^2+|z_1-z_2|^2=\left(|z_1|^2+1\right)\left(|z_2|^2+1\right)$;

в) $|z_1+z_2|^2=\left(|z_1|+|z_2|\right)^2-2\left(|z_1\overline{z_2}|-Re(z_1\overline{z_2})\right)$.

△ **26.** Представити следеће бројеве у комплексној равни, као на сл. 1.

а) $z=2$; *б)* $z=-1$; *в)* $z=i$; *г)* $z=-3i$; *д)* $z=1+i$; *ђ)* $z=\sqrt{3}-i$; *е)* $z=\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; *ж)* $z=2-3i$; *з)* $z=-2+2i$; *и)* $z=-3-2i$.

△ **27.** Одредити модуле комплексних бројева из претходног задатка.

28. Објаснити геометријски смисао величине $|z_1-z_2|$.

29. Одредити скуп тачака у комплексној равни који задовољава следећи услов:

а) $Re z>0$; *б)* $Re z\geq 0$; *в)* $-1\leq Re z\leq 1$; *г)* $Im z<0$; *д)* $|Im z|\leq 1$; *ђ)* $|z|\leq 1$; *е)* $|z|>1$; *ж)* $|z+i|=|z-1|$.

30. Доказати да је $Re z\leq |z|$, $Im z\leq |z|$ за произвољно $z\in\mathbf{C}$.

31. Доказати да за произвољне z_1, $z_2\in\mathbf{C}$ важи неједнакост: $||z_1|-|z_2||\leq|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$. Дати и геометријско тумачење.

△ **32.** Решити следеће једначине (или системе) по непознатој $z=x+iy$.

а) $(1+i)x+(2+i)y=5+3i$; *б)* $2x+(1+i)(x+y)=7+i$;

в) $\dfrac{z}{4-2i}=5-4i$; *г)* $z+2\overline{z}=3+2i$; *д)* $|z|-z=1+2i$;

ђ) $|z+1|+z+i=0$; *е)* $\begin{cases}|z-2i|=|z|\\ |z-1|=|z+i|\end{cases}$.

△ **33.** Одредити зависност између a, b, c, $d\in\mathbf{R}$ ако је $(a+bi)(c-di)=(a-bi)(c+di)$.

34. Одредити n, $n\in\mathbf{N}$, тако да је $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n=1$.

35. Доказати да је $\dfrac{z-1}{z+1}$ реалан број ако и само ако је z реалан број и $z\neq -1$.

36. Доказати да је $\dfrac{z-1}{z+1}$ чисто имагинаран број (тј. облика iy, $y\in\mathbf{R}$) ако и само ако је $|z|=1$ и $z\neq -1$.

37. Ако је $|z_1| = |z_2| = 1$, доказати да је $\dfrac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ реалан број.

38. Нека $\alpha,\ z \in \mathbb{C}$ и $|z| = 1$. Доказати да је $|\xi| = 1$, где је $\xi = \dfrac{\alpha - z}{1 - z\overline{\alpha}}$.

39. Израчунати вредност полинома $P(z) = z^2 - z + 1$ за:
а) $z = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; *б)* $z = -\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

40. Дати су комплексни бројеви z_1, z_2 такви да је $Imz_1 \neq 0$ и $Imz_2 \neq 0$. Доказати да су бројеви $z_1 + z_2$ и $z_1 \cdot z_2$ истовремено реални ако и само ако је $z_1 = \overline{z_2}$.

41. Нека је дат комплексан број u. Одредити све комплексне бројеве z такве да је број $a = \dfrac{u - \overline{u}z}{1 - z}$ реалан.

42. Ако су a, b, c, комплексни бројеви такви да $|a| = |b| = |c| = 1$, доказати да је $|ab + bc + ca| = |a + b + c|$.

* **43.** Одредити три комплексна броја модула 1 са својством да им је збир и производ једнак 1.

* **44.** Нека је $f(n) = \left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^n + \left(\dfrac{1-i}{\sqrt{2}}\right)^n$. Одредити $f(1986) + f(1990)$.

45. Доказати једнакости:
а) $|z_1 - z_2|^2 + |z_2 - z_3|^2 + |z_3 - z_1|^2 + |z_1 + z_2 + z_3|^2 = 3\left(|z_1|^2 + |z_2|^2 + |z_3|^2\right)$;
б) $\sum\limits_{k=1}^{n} |z - z_k|^2 = n\left(|z|^2 + 1\right)$, ако је $|z_1| = |z_2| = \cdots = |z_n| = 1$ и $\sum\limits_{k=1}^{n} z_k = 0$.

46. Доказати неједнакости:
а) $|z_3 - z_1| - |z_3 - z_2| \leq |z_1 - z_2| \leq |z_3 - z_1| + |z_3 - z_2|$;
б) $|z_1 - z_2| + |z_2 - z_3| + |z_3 - z_1| \leq 2\left(|z - z_1| + |z - z_2| + |z - z_3|\right)$.

* **47.** Ако су $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ реални бројеви, доказати да је $\sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)^2 + (y_1 + y_2 + \cdots + y_n)^2} \leq$
$\leq \sqrt{x_1^2 + y_1^2} + \sqrt{x_2^2 + y_2^2} + \cdots + \sqrt{x_n^2 + y_n^2}$.

* **48.** Нека комплексни бројеви z_1, z_2, z_3 имају једнаке модуле и нека образују темена једнакостраничног троугла. Доказати да бројеви $z_1 z_2$, $z_2 z_3$, $z_3 z_1$ образују такође темена једнакостраничног троугла.

2.2 КВАДРАТНА ЈЕДНАЧИНА С ЈЕДНОМ НЕПОЗНАТОМ. ПРИРОДА РЕШЕЊА.

Једначина облика $ax^2 + bx + c = 0$, где је x непозната, а a, b, c ($a \neq 0$) реални бројеви, називамо *квадратном једначином* по x, а константе a, b, c – *коефицијентима* квадратне једначине. Решења ове једначине дата су формулом:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\,.}$$

Број $D = b^2 - 4ac$ називамо *дискриминатном* квадратне једначине и од знака дискриминанте зависи *природа решења* једначине. Наиме, ако је $D > 0$, тада су решења реална и различита, ако је $D = 0$ реална су и једнака, а ако је $D < 0$ решења су конјуговано комплексна (тада под $\sqrt{D}$ подразумевамо комплексан број чији је квадрат једнак D).

За једначину облика $ax^2 + 2b_1x + c = 0$, важи формула:

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b_1 \pm \sqrt{b_1^2 - ac}}{a}\,.}$$

Непотпуне квадратне једначине облика $ax^2 = 0$, $ax^2 + bx = 0$, или $ax^2 + c = 0$ решавамо на једноставнији начин (непосредно или растављањем на чиниоце).

Напомињемо да претходне формуле важе и за решења квадратне једначине са коефицијентима који су комплексни бројеви. У таквом случају се не може говорити о природи решења као у случају реалних коефицијената (због поретка). Сличне примедбе би важиле и убудуће.

△ **49.** Решити следеће једначине:

а) $3x^2 = 0$; *б)* $x^2 - 1 = 0$; *в)* $x^2 - 3 = 0$; *г)* $2x^2 + 1 = 0$; *д)* $x^2 + 3x = 0$; *ђ)* $3x^2 - 2x = 0$; *е)* $x(2x + 1) = 0$; *ж)* $(x - 1)(x + 2) = 0$.

△ **50.** Решити следеће једначине:

а) $x^2 - 5x + 6 = 0$; *б)* $x^2 + x - 1 = 0$; *в)* $x^2 - 4x + 4 = 0$; *г)* $2x^2 - x - 1 = 0$
д) $x^2 + x + 1 = 0$; *ђ)* $x^2 - 3x + 5 = 0$; *е)* $3x^2 - \sqrt{2}x + 1 = 0$;
ж) $2(1 + i)z^2 - 4(2 - i)z - 5i - 3 = 0$ (i - имагинарна јединица) ;
з) $x^3 + 4x^2 + 6x + 3 = 0$.

△ **51.** Решити следеће једначине:

а) $\dfrac{x^2 + 1}{x - 4} - \dfrac{x^2 - 1}{x + 3} = -2$; *б)* $\dfrac{b}{x - a} + \dfrac{a}{x - b} = 2$ (a, $b \in \mathbf{R}$) ;

в) $(x+3)^3-(x-1)^3=56$; *г)* $(x-a)^3-(x-b)^3=b^3-a^3$;

д) $\dfrac{(x-a)^2+x(x-a)+x^2}{(x-a)^2-x(x-a)+x^2}=\dfrac{19}{17}$; *ђ)* $\dfrac{2x}{x+1}+\dfrac{2x}{x-1}=\dfrac{16}{3}$;

е) $(a^2-b^2)x^2-2a^2bx+a^2b^2=0$, $ab\neq 0$.

Δ **52.** Одредити реална решења следећих једначина:

а) $x^2-|x|=0$; *б)* $x^2+|x|=0$; *в)* $x^2-3|x|+2=0$; *г)* $|(x-1)(x+2)|=4$
д) $x^2+2x-3|x+1|+3=0$; *ђ)* $|x^2-8x+12|=x^2-8x+12$;
е) $(|x|+1)^2=4|x|+9$; *ж)* $(3|x|-3)^2=|x|+7$; *з)* $|x^2-1|+|x^2-4|=3x$;
и) $|x^2-9|-|x^2-1|=8$.

Δ **53.** Решити следеће (биквадратне) једначине:

а) $x^4-1=0$; *б)* $x^4-2x^2=0$; *в)* $x^4-10x^2+1=0$;

г) $3x^4-x^2-2=0$; *д)* $\dfrac{4}{x^2+4}+\dfrac{5}{x^2+5}=2$; *ђ)* $x^4+8x^2-9=0$.

Δ **54.** Коришћењем одговарајуће замене непознате, решити следеће једначине:

а) $3\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)-7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=0$; *б)* $x^2+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)-5=0$;

в) $2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)+3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-16=0$; *г)* $7\left(x+\dfrac{1}{x}\right)-2\left(x^2+\dfrac{1}{x^2}\right)=9$;

д) $\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{(x+1)^2}=1$; *ђ)* $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}=\dfrac{10}{9}$;

е) $x(x+1)(x+2)(x+3)=-1$; *ж)* $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$;

з) $(2x^2-3x+1)(2x^2+5x+1)=9x^2$; *и)* $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^3$;

ј) $\dfrac{(x-1)x}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{2}{9}$; *к)* $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$; *л)* $(x-2)(x-3)(x-4)=6$

љ) $x^4-2x^3+x-\dfrac{3}{4}=0$; *м)* $x^4+(x-1)^4=\dfrac{1}{8}$;

н) $(x+a)^4+(x+b)^4=c$ $(a,\ b,\ c\in\mathbf{R})$; *њ)* $(6-x)^4+(8-x)^4=16$;

о) $(x+3)^4+(x+5)^4=4$; *п)* $x^5+33=(x+3)^5$;

Одредити реална решења једначина:

р) $x^6+1=0$; *с)* $2x^6-11x^3-40=0$; *т)* $\dfrac{1}{x^3+2}-\dfrac{1}{x^3+3}=\dfrac{1}{12}$.

55. Решити симетричне једначине (*са симетричним коефицијентима*):

а) $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$; *б)* $4x^4+3x^3-14x^2+3x+4=0$;
в) $4x^4+12x^3-47x^2+12x+4=0$; *г)* $4x^5+x^4-5x^3-5x^3+x+4=0$;
д) $2x^3-5x^2-5x+2=0$; *ђ)* $2x^5+5x^4-13x^3-13x^2+5x+2=0$.

56. Заменом облика $z = ax + \frac{b}{x}$, решити следеће једначине:

а) $9x^4 - 6x^3 - 18x^2 - 2x + 1 = 0$; *б)* $x^4 + 4x^3 - 18x^2 - 12x + 9 = 0$;

в) $18x^4 - 3x^3 - 25x^2 + 2x + 8 = 0$; *г)* $x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 3x - 2 = 0$;

д) $x^6 - 2x^5 - x^4 + 3x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$; *ђ)* $x^5 + 1 = 0$.

57. Решити кососиметричне једначине (симетрични коефицијенти се разликују у знаку):

а) $2x^5 + 7x^4 + 5x^3 - 5x^2 - 7x - 2 = 0$; *б)* $12x^5 - 16x^4 - 37x^3 + 37x^2 + 16x - 12 = 0$

в) $x^5 - 3x^4 + x^3 - x^2 + 3x - 1 = 0$; *г)* $x^6 - 3x^5 + 3x^4 - 3x^2 + 3x - 1 = 0$.

58. Дате су једначине са реалним параметром k.

Дискутовати решења једначина у зависности од параметра:

а) $2x^2 - x + k + 1 = 0$; *б)* $(k-2)x^2 - 2kx + k + 3 = 0$;

в) $kx^2 - 3x + 2 = 0$; *г)* $(k-1)x^2 - 3kx + 2k + 1 = 0$.

Одредити вредност параметра, тако да једначине имају двострука реална решења ($x_1 = x_2$):

д) $x^2 + kx + 25 = 0$; *ђ)* $3x^2 + x - k + 2 = 0$;

е) $(2k-1)x^2 + 3x - 6 = 0$; *ж)* $(2k+1)x^2 + 3kx + k - 1 = 0$;

Одредити параметар тако да једначине имају конјуговано комплексна решења:

з) $x^2 + 3x - k + 5 = 0$; *и)* $kx^2 + x + 3 = 0$;

ј) $(k+1)x^2 - 2kx + k = 0$; *к)* $(k+3)x^2 + 7x - k + 3 = 0$;

Одредити параметар тако да решења једначина буду реална:

л) $2x^2 - 2x + k - 1 = 0$; *љ)* $(k+3)x^2 - 2x - 1 = 0$;

м) $kx^2 - (2k+1)x + k - 2 = 0$; *н)* $(k+2)x^2 + 5x + 2 - k = 0$.

59. Решити следеће једначине и дискутовати природу решења у зависности од параметра:

а) $\frac{1}{x+p} + \frac{1}{x-p} = \frac{1}{a}$, $(a,\ p \in \mathbf{R},\ a \neq 0$ *б)* $ax^2 + 2(a+1)x + 2a = 0$, $(a \in \mathbf{R})$

в) $x^2 + 4kx - 4(k+1) = 0$, $(k \in \mathbf{R})$.

$\triangle$ **60.** Ако су решења једначине $x^2 + px + q = 0$ $(p,\ q \in \mathbf{R})$ реална и различита, тада су за $a \in \mathbf{R}$ и решења једначина:

а) $x^2 + (p+2a)x + q + ap = 0$ $(a \in \mathbf{R})$; *б)* $3x^2 + 2(p+a)x + q + ap = 0$ $(a \in \mathbf{R})$, реална и различита. Доказати.

61. Дата је једначина $kx^2 - (1-2k)x + k - 2 = 0$, $k \in \mathbf{Z}$. Одредити k тако да корени једначине буду рационални бројеви.

* **62.** Ако су сви коефицијенти квадратне једначине непарни бројеви, тада једначина нема рационалне корене. Доказати.

63. Ако једначина $x^2 + px + q = 0$, p, $q \in \mathbf{Z}$, има рационалне корене, онда су они цели бројеви. Доказати.

64. Ако су коефицијенти једначина $x^2+p_1x+q_2 = 0$ и $x^2+p_2x+q_1 = 0$ реални и задовољавају релацију $p_1p_2 = 2(q_1 + q_2)$, доказати да бар једна од једначина има реалне корене.

* **65.** Дата је једначина $x^2 - 2ax - (a + 3) = 0$. Одредити све вредности целог броја a тако да решења дате једначине буду цели бројеви.

* **66.** Решити једначину $x^4 - 2ax^2 + x + a^2 - a = 0$, где је a реалан параметар.

* **67.** За које a, $a \in \mathbf{R}$, једначине $x^2 + ax + 8 = 0$ и $x^2 + x + a = 0$ имају заједнички реалан корен?

68. Одредити p, $p \in \mathbf{Z}$, тако да једначине $3x^2 - 4x + p - 2 = 0$ и $x^2 - 2px + 5 = 0$ имају заједнички корен. Наћи такав корен.

69. Одредити k, $k \in \mathbf{Z}$, тако да једначине $2x^2 + (2k - 1)x - 3 = 0$ и $2x^2 + (2k - 3)x - 1 = 0$ имају заједнички корен.

70. Једначине $ax^2 + bx + c = 0$ и $cx^2 + bx + a = 0$ $(a \neq c)$ имају бар један заједнички корен. Доказати да је $(a + c)^2 = b^2$.

71. Доказати да за све a и b, $a, b \in \mathbf{R}$, који нису истовремено једнаки нули, једначина $\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{b^2}{x-1} = 1$ има реалне корене.

72. Решити једначину $\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{4}{x-2} + \dfrac{4}{x-3} + \dfrac{1}{x-4} + \dfrac{3}{x-5} = 0$.

73. Базен се пуни са две славине за 6 часова. Исти базен би се пунио само мањом славином 5 сати дуже, него кад би била отворена само већа славина. За које време се базен може напунити ако је отворена само једна славина?

74. При множењу два броја, од којих је један за 10 већи од другог, ученик је начинио грешку, смањивши за 4 цифру десетица у производу. При дељењу добијеног производа мањим множитељем добио је количник 39 и остатак 22. Наћи та два броја.

75. Из места A у место B пошла су истовремено, истим путем, два аутомобила. Први је у место B стигао 15 минута пре другог. Брзина другог је за $2km/h$ мања од брзине првог. Израчунати брзине оба аутомобила, ако дужина пута од A до B износи $36km$.

76. Из места A у место B кренуо је камион. Један сат касније из места A је кренуло путничко возило. У место B стигли су истовремено. Да су возила кренула истовремено, једно из A и друго из B, једно усусрет другом, срела би се после 1 часа и 12 минута. Колико је времена путовао камион од места A до места B?

77. Дуж два пута, који се укрштају у месту C под правим углом, крећу се ка раскршћу два возила равномерним брзинама. Брзина једног возила је два пута већа од брзине другог. После 10 секунди растојање између возила (праволинијско) је 130 метара. Израчунати брзине ових возила, ако је на почетку прво возило било на 270 метара, а друго на 125 метара од раскршћа.

2.3 ВИЕТОВЕ ФОРМУЛЕ. РАСТАВЉАЊЕ КВАДРАТНОГ ТРИНОМА НА ЛИНЕАРНЕ ЧИНИОЦЕ

Ако су x_1 и x_2 решења (корени квадратне једначине $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$, тада је:

$$\boxed{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}\ , \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}} \quad \text{(Виетове формуле).}$$

Важи и обратно: ако бројеви x_1 и x_2 задовољавају претходне релације, тада важи факторизација:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)}\ ,$$

па су x_1 и x_2 решења квадратне једначине $ax^2 + bx + c = 0$.

$\triangle$ **78.** Формирати једначину чији су корени:

а) $x_1 = 0,\ x_2 = 3$; *б)* $x_1 = x_2 = -2$; *в)* $x_1 = -1,\ x_2 = 3$;
г) $x_1 = 1 - \sqrt{2},\ x_2 = 1 + \sqrt{2}$; *д)* $x_1 = 2\sqrt{3},\ x_2 = 3\sqrt{3}$;
ђ) $x_1 = \dfrac{1}{10 + 6\sqrt{2}},\ x_2 = \dfrac{1}{10 - 6\sqrt{2}}$; *е)* $x_1 = -i,\ x_2 = i$;
ж) $x_1 = \sqrt{2} + 2i,\ x_2 = \sqrt{2} - 2i$.

$\triangle$ **79.** Нека су x_1 и x_2 решења једначине
$ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$.

Не решавајући дату једначину, израчунати вредности израза:

а) $x_1^2 + x_2^2$; *б)* $x_1^3 + x_2^3$; *в)* $x_1^4 + x_2^4$; *г)* $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$; *д)* $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2}$;
ђ) $|x_1 - x_2|$; *е)* $\left|\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2}\right|$; *ж)* $|x_1^2 - x_2^2|$; *з)* $|x_1^3 - x_2^3|$.

Δ **80.** Решити претходни задатак у случају следећих једначина:
а) $x^2-5x+6=0$; *б)* $2x^2-3ax-2=0$, $(a\in\mathbf{R})$.

81. Упростити изразе:

а) $\dfrac{x^2-x-6}{2x^2-7x+3}$; *б)* $\dfrac{2x^2+x-3}{2x^2+5x+3}$; *в)* $\dfrac{3x^2-2x^3-x^4}{4x^3+10x^2-6x}$;
г) $\dfrac{x^2+x-12}{x^2+3x-4}\cdot\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$; *д)* $\dfrac{2x^2+x-3}{2x^2-3x+1}:\dfrac{4x^2+8x+3}{2x^2-3x-2}$;
ђ) $\dfrac{x^3-4x}{x^2-x-2}-\dfrac{x}{x+1}$.

82. Користећи се Виетовим везама, не решавајући дате једначине, одредити каквог су знака x_1 и x_2 (све дате једначине имају реална решења).
а) $x^2-5x+6=0$; *б)* $x^2+4x+3=0$; *в)* $2x^2+x-6=0$;
г) $3x^2-8x-35=0$; *д)* $x^2+2x=0$; *ђ)* $x^2-5x=0$.

83. Дата је квадратна једначина $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$. Формирати квадратну једначину чији су корени:
а) квадрати корена дате једначине;
б) кубови корена дате једначине.

84. Саставити квадратну једначину чији су корени x_1^{-3} и x_2^{-3}, где су x_1 и x_2 корени једначине $x^2-8x+2=0$.

85. Одредити вредност параметра у датој једначини, тако да збир квадрата њених решења има дату вредност.
а) $x^2-4kx+7k^2=0$, $x_1^2+x_2^2=2$; *б)* $x^2+3\alpha x+\alpha^2=0$, $x_1^2+x_2^2=\dfrac{7}{4}$;
в) $2x^2-px-2p+3=0$, $x_1^2+x_2^2=2$; *г)* $(m+1)x^2-(m-1)x+m=0$, $x_1^2+x_2^2=1$.

86. У једначини $x^2-4x+p=0$ је $x_1^2-x_2^2=16$. Одредити p.

87. За које $a\in\mathbf{R}$ у једначини $x^2-(3a+2)x+a^2=0$ важи $x_1=9x_2$?

Δ **88.** Одредити a, $a\in\mathbf{R}$ у једначини $x^2-2ax+2a-1=0$, тако да:
а) $x_1-x_2=x_1x_2$; *б)* $x_1^2+x_2^2=x_1+x_2$; *в)* $x_1=x_2$; *г)* $x_1=-x_2$;
д) $x_1=2x_2$; *ђ)* $7x_2-4x_1=12$.

89. Одредити a тако да решења једначине $x^2-x+a-2=0$ задовољавају услов $\dfrac{x_1}{x_2}+\dfrac{x_2}{x_1}+\dfrac{1}{2}x_1x_2+4=0$.

90. Одредити a у једначини $4x^2-15x+a=0$ тако да је $x_1^2=x_2$.

91. Одредити зависност између коефицијената једначине
$ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$
ако су корени једначине узајамно реципрочни бројеви.

92. За које позитивно k је један корен једначине
а) $8x^2 - 6x + 9k^2 = 0$; *б)* $4x^2 - 15x + 4k^2 = 0$
једнак квадрату другог корена?

93. У једначинама $x^2 - ax + b - 4 = 0$ и $4x^2 - 4bx + 4a - 1 = 0$ одредити реалне параметре a и b тако да корени једне једначине буду реципрочне вредности корена друге једначине.

94. Дата је квадратна једначина $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$. Формирати квадратну једначину тако да њени корени:

а) разликују се од корена дате једначине само по знаку ;

б) једнаки су реципрочним вредностима корена дате једначине

в) за m су већи од корена дате једначине ;

г) n пута су мањи од корена дате једначине.

95. Саставити једначину чији су корени $(x_1 + x_2)^2$ и $(x_1 - x_2)^2$, ако су x_1 и x_2 корени једначине $x^2 + px + q = 0$.

* **96.** Која релација независна од m постоји између решења једначине $(x^2 - 6x + 5) + m(x^2 - 5x + 6) = 0$?

97. За које p и q корени једначине $x^2 + px + q = 0$ су баш p и q?

* **98.** Да ли постоје реални бројеви a, b, c, d такви да:

1^o једначина $ax^2 + bdx + c = 0$ има различита реална решења x_1 и x_2 ;

2^o једначина $bx^2 + cdx + a = 0$ има различита реална решења x_2 и x_3 ;

3^o једначина $cx^2 + adx + b = 0$ има различита реална решења x_3 и x_1 .

99. Нека су a, b, c различити реални бројеви и $c \neq 0$. Ако једначине $x^2 + ax + bc = 0$ и $x^2 + bx + ca = 0$ имају један заједнички корен, тада други корени тих једначина задовољавају једначину $x^2 + cx + ab = 0$.

* **100.** Ако су p и q комплексни бројеви, онда су решења једначине $x^2 + px + q = 0$ по модулу једнака 1 ако и само ако је $|p| \leq 2$, $|q| = 1$ и $\dfrac{p^2}{q}$ је ненегативан реалан број. Доказати.

* **101.** Нека је $\lambda > 0$. Доказати да за свако реално решење x једначине $x^2 + px + q = 0$, $(p,\ q \in \mathbf{R})$ важи $x \geq \dfrac{4q - (p + \lambda)^2}{4\lambda}$.

* **102.** У једначини $x^2 + px - \dfrac{1}{2p^2} = 0$ $(p \in \mathbf{R} \backslash \{0\})$ важи $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$. Доказати.

Не **103.** Ако су x_1 и x_2 корени једначине $x^2+px+1=0$, а x_1' и x_2' корени једначинне $x^2+qx+1=0$, доказати да је:
$(x_1-x_1')(x_2-x_2')(x_1-x_2')(x_2-x_1')=(q-p)^2$.

104. Нека су x_1 и x_2, $(x_1>0\ ,\ x_2>0)$ корени квадратне једначине $x^2+px+q=0$. Изразити $\sqrt[4]{x_1}+\sqrt[4]{x_2}$ помоћу p и q.

Не

105. Дата је једначина $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$. Ако важи услов $S_n=x_1^n+x_2^n$, $n\in\mathbf{N}$, наћи зависност између S_n, S_{n+1} и S_{n+2}.

Не **106.** Нека су x_1 и x_2 корени квадратне једначине $x^2+px+q=0$ и нека је $S_n=x_1^n+x_2^n$. Израчунати S_n за $n=\pm1,\ \pm2,\ \pm3,\ \pm4,\ \pm5$.

Не * **107.** Корени једначине $x^2+ax+b+1=0$ су природни бројеви. Доказати да је a^2+b^2 сложен број.

2.4 НЕЛИНЕАРНИ СИСТЕМИ ЈЕДНАЧИНА

У овом одељку се разматрају системи једначина у којима је бар једна од једначина квадратна или се приликом решавања система долази до једначине која је квадратна. Нећемо давати класификацију таквих система, јер би то захтевало доста простора. У задацима са више варијанти, почетни примери су дати са детаљним објашњенима, што олакшава решавање преосталих примера истог типа.

На крају су наведени и задаци који су нешто другачијег типа, али су се појављивали на такмичењима.

$\triangle$ **108.** Решити следеће системе једначина у којим је једна једначина линеарна:

$$a)\begin{cases}x^2+2x-y-3=0\\ x-y+3=0\end{cases};\ б)\begin{cases}x^2+2x-y+4=0\\ x+y+3=0\end{cases};\ в)\begin{cases}2x^2+2x-y-1=0\\ 2x-y+1=0\end{cases}$$

$$г)\begin{cases}x+y=3\\ xy=2\end{cases};\ д)\begin{cases}y=-2x\\ xy=-1\end{cases};\ ђ)\begin{cases}x^2+y^2+2y-9=0\\ 3x-y-1=0\end{cases}.$$

$\triangle$ **109.** Решити следеће системе једначина:

$$a)\begin{cases}x^2+y^2=25\\ x^2+2y^2=41\end{cases};\ б)\begin{cases}3x^2+y^2=4\\ 6x^2+5y^2=2\end{cases};$$

$$в)\begin{cases}x^2-y=23\\ x^2y=50\end{cases};\ г)\begin{cases}x^2+3xy=18\\ 3y^2+xy=6\end{cases}.$$

$\triangle$ **110.** За које p, $p\in\mathbf{R}$, права $y=-2x+p$ додирује параболу $y=3x^2-7x+4$?

△ **111.** За које a, $a \in \mathbf{R}$, графици функција $y = 2ax + 1$ и $y = (a-6)x^2 - 2$ се не секу?

△ **112.** Наћи a, $a \in \mathbf{R}$, при коме систем једначина

а) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 1 \\ y = ax + b \end{cases}$ има реална решења за свако реално b.

б) $\begin{cases} ax - y + 4 - 3a = 0 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$ има два једнака решења.

113. Одредити све a, $a \in \mathbf{R}$, при којима систем

$\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 1 \\ x - y + a = 0 \end{cases}$ има јединствено решење.

114. Одредити вредност реалног параметра, тако да систем има јединствено решење, па наћи то решење:

а) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x - 8y + 44 = 0 \\ x - y + n = 0 \end{cases}$; *б)* $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x = 1 \\ x - y + k = 0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0 \\ kx - y - 3 = 0 \end{cases}$;

△ **115.** Решити системе једначина:

а) $\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 3 \\ xy = \dfrac{1}{2} \end{cases}$; *б)* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 41 \\ xy = 20 \end{cases}$; *в)* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(xy + 2) \\ x + y = 6 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35 \\ x + y = 5 \end{cases}$; *д)* $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82 \\ x + y = 4 \end{cases}$; *ђ)* $\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 \\ x^2 + y^2 + xy = 7 \end{cases}$;

е) $\begin{cases} x^4 + y^4 = b^4 \\ x + y = a, \ a \neq 0, \ b \neq 0 \end{cases}$; *ж)* $\begin{cases} x^5 + y^5 = a^5 \\ x + y = a \end{cases}$.

116. Решити системе једначина, користећи се хомогеном квадратном једначином:

а) $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$; *б)* $\begin{cases} x^2 + xy = 12 \\ xy - y^2 = 2 \end{cases}$; *в)* $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + xy + y = 2 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} 3x^2 - 7xy + 4y^2 = 0 \\ 3x + y = 10 \end{cases}$; *д)* $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 0 \\ x^2 + 2xy + y - y^2 = 8 \end{cases}$; *ђ)* $\begin{cases} x^2 + 3xy = 54 \\ 4y^2 + xy = 115 \end{cases}$;

е) $\begin{cases} x^2 - xy + y^2 = 300 \\ 2x^2 - xy - y^2 = 500 \end{cases}$; *ж)* $\begin{cases} x^2 + -3xy + 4y^2 = 2 \\ 3x^2 - xy - 5y^2 = 5 \end{cases}$.

117. Наћи реална решења система једначина:

а) $\begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^3+y^3=19 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ x^5+y^5=1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y}+\dfrac{y^2}{x}=12 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x^4+y^4=2 \\ x^2y^2+1=2y^2 \end{cases}$; д) $\begin{cases} x^2+y^2=6 \\ x+y+xy=2+3\sqrt{2} \end{cases}$.

118. Одредити реална решења система једначина:

а) $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ x^3y^3=-8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^2y^3+x^3y^2=12 \\ x^2y^3-x^3y^2=4 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x^2y+xy^2=20 \\ x^3+y^3=65 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x^4-y^4=15 \\ x^3y-xy^3=6 \end{cases}$; д) $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ xy=2 \end{cases}$; ђ) $\begin{cases} xy(x+y)=-2 \\ x^3+y^3=7 \end{cases}$.

119. Решити следеће системе једначина:

а) $\begin{cases} x(x+y+z)=7 \\ y(x+y+z)=14 \\ z(x+y+z)=28 \end{cases}$; б) $\begin{cases} (x+y)^2-z^2=4 \\ (y+z)^2-x^2=2 \\ (z+x)^2-y^2=3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x+\dfrac{1}{y}=1 \\ y+\dfrac{1}{z}=-\dfrac{3}{4} \\ z+\dfrac{1}{x}=\dfrac{9}{2} \end{cases}$.

120. Решити системе једначина:

а) $\begin{cases} x^2+y^2+z=2 \\ x+y^2+z^2=2 \\ x^2+y+z^2=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \dfrac{x}{y^2+1}=z \\ \dfrac{y}{z^2+1}=x \\ \dfrac{z}{x^2+1}=y \end{cases}$ $(x,\ y,\ z\in\mathbf{R})$.

* **121.** У скупу реалних бројева решити систем једначина:
$x+y=z\ ,\quad x^2+y^2=z\ ,\quad x^3+y^3=z.$

* **122.** Решити системе једначина у скупу реалних бројева:

а) $\begin{cases} xy(x-y)=ab(a-b) \\ x^3-y^3=a^3-b^3 \end{cases}$ $(a,\ b\in\mathbf{R})$; б) $\begin{cases} (x^3+y^3)(x^2+y^2)=2a^5 \\ x+y=a \end{cases}$ $(a\in\mathbf{R})$

в) $\begin{cases} \dfrac{2x^2}{1+x^2}=y \\ \dfrac{2y^2}{1+y^2}=z \\ \dfrac{2z^2}{1+z^2}=x \end{cases}$; г) $\begin{cases} x^2y^2+x^2z^2=axyz \\ y^2z^2+y^2x^2=bxyz \\ z^2x^2+z^2y^2=cxyz \end{cases}$ $(a,\ b,\ c\in\mathbf{R})$.

ТРЕЋА ГЛАВА

КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

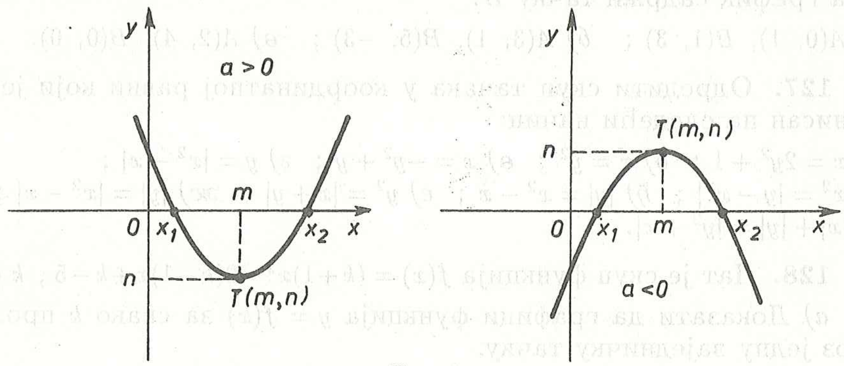
3.1 КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА И ЊЕН ГРАФИК. ЕКСТРЕМНЕ ВРЕДНОСТИ

Функцију облика $y = ax^2+bx+c$, где је $a,\ b,\ c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$, називамо *квадратном функцијом* независно променљиве x.

Сваку квадратну функцију можемо довести на канонски облик

$$\boxed{y = a(x-m)^2+n}\ ,$$

где је $m = -\dfrac{b}{2a}$, $n = \dfrac{4ac-b^2}{4a}$. График функције је парабола са отвором нагоре или надоле, зависно од a (сл. 2).



Сл. 2

Функција је дефинисана за свако $x \in \mathbf{R}$ и има *минимум* $n = \dfrac{4ac-b^2}{4a}$ који се достиже за $x = m = -\dfrac{b}{2a}$ ако је $a > 0$, а ако је $a < 0$ има *максимум* n за $x = m$ (сл. 2).

Тачку $T(m,\ n)$ графика називамо *теменом* параболе. Уколико функција има реалних нула, тј. ако је $D = b^2 - 4ac \geq 0$, тада их налазимо по формули

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}\ .$$

Нуле функције нам могу послужити код цртања графика. Интервали рашћења и опадања функције се могу прочитати са графика и зависе од коефицијента a и темена (сл. 2).

△ **123.** Конструисати графике следећих функција:

а) $y = 2x^2$; *б)* $y = \frac{1}{2}x^2$; *в)* $y = (x-1)^2$; *г)* $y = 2(x+3)^2$; *д)* $y = -2x^2$;
ђ) $y = -(x+1)^2$; *е)* $y = -x^2 + 1$; *ж)* $y = x^2 - 4$.

△ **124.** Конструисати графике следећих функција:

а) $y = x^2 - 4x + 4$; *б)* $y = x^2 + x + 1$; *в)* $y = -x^2 + 2x - 1$;
г) $y = x^2 - 5x + 6$; *д)* $y = -x^2 + 3x - 2$; *ђ)* $y = 2x^2 + x$;
е) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 2$.

△ **125.** Испитати да ли постоји квадратна функција чији график садржи тачке A, B, C:

а) $A(-1,\ 0)$, $B(2,\ 0)$, $C(0,\ -4)$; *б)* $A(3,\ 0)$, $B(-1,\ 0)$, $C(0,\ 3)$;
в) $A(-5,\ 0)$, $B(-1,\ 0)$, $C(0,\ -5)$; *г)* $A(-2,\ 0)$, $B(1,\ 0)$, $C(3,\ 0)$.

126. Да ли постоји квадратна функција чије је теме дата тачка A, а график садржи тачку B?

а) $A(0,\ 1)$, $B(1,\ 3)$; *б)* $A(3,\ 1)$, $B(5,\ -3)$; *в)* $A(2,\ 4)$, $B(0,\ 0)$.

127. Одредити скуп тачака у координатној равни који је дефинисан на следећи начин:

а) $x = 2y^2 + 1$; *б)* $x = y^2$; *в)* $x = -y^2 + y$; *г)* $y = |x^2 - x|$;
д) $x^2 = |y - x^2|$; *ђ)* $|y| = x^2 - x$; *е)* $y^2 = |x + y|$; *ж)* $|y| = |x^2 - x|$;
з) $|x| + |y| = |y^2 + x|$.

128. Дат је скуп функција $f(x) = (k+1)x^2 - 2(k-1)x + k - 5$, $k \in \mathbf{R}$.

а) Доказати да графици функција $y = f(x)$ за свако k пролазе кроз једну заједничку тачку.

б) Показати да ниједна од тих функција нема екстремну вредност у заједничкој тачки.

129. Дат је скуп функција $f(x) = kx^2 - (k+2)x - 2k + 6$, $k \in \mathbf{R}$.

а) Доказати да графици функција $y = f(x)$ пролазе кроз две сталне тачке, и одредити их.

б) Наћи k тако да функција има екстремум у тачки чија је апсциса једнака првој координати једне од сталних тачака.

130. Дат је скуп функција $f(x) = x^2 + (k-3)x - 1 - 2k$, $k \in \mathbf{R}$.

а) Доказати да графици функција секу x – осу.

б) Наћи једначину скупа тачака – темена свих парабола.

131. Дат је скуп парабола $y = x^2 + (2k+1)x + k^2 - 1$, $k \in \mathbf{R}$. Доказати да је скуп тачака – темена парабола, једна права.

132. Одредити заједничку тачку свих парабола:
$y = -x^2 + 2(k+1)x + 3k - 1$, $k \in \mathbf{R}$,
и одредити скуп тачака – темена тих парабола.

* **133.** Дат је трином $(k+1)x^2 - 2kx + k - 1$, где је k реалан параметар.

а) Одредити скуп тачака – темена свих парабола датих једначином $y = (k+1)x^2 - 2kx + k - 1$.

б) Да ли све те параболе имају заједничких тачака?

в) Доказати да је само једно решење једначине
$(k+1)x^2 - 2kx + k - 1 = 0$
промењиво и представити то на графику.

г) Одредити за који природан број k је промењиво решење једначине из *в)* периодичан децималан број са једном цифром у периоду.

134. За које a теме параболе $y = x^2 + 2ax + 13$ лежи на растојању 5 од координатног почетка?

135. Задатак налажења области вредности функције $y = f(x)$ може се формулисати као задатак одређивања свих a, $a \in \mathbf{R}$, при којима $f(x) = a$ има бар један реалан корен. Одредити област вредности следећих функција:

а) $y = x + \dfrac{1}{x}$; *б)* $y = x - \dfrac{1}{x}$; *в)* $y = \dfrac{x^2 - 10x + 7}{2x^2 - 1}$;

г) $y = \dfrac{3x}{4x^2 - x + 1}$; *д)* $y = \dfrac{x}{x^2 + x + 1}$; *ђ)* $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

△ **136.** Реални бројеви x, y, a задовољавају једнакости $x + y = a - 1$ и $xy = a^2 - 7a + 14$. За које a збир $x^2 + y^2$ достиже највећу вредност?

△ **137.** Наћи вредности a и b при којима је вредност израза $a^3 + b^3 + ab$ најмања, ако је $a + b = 1$.

138. Нека су a, b, c, d реални бројеви и $a^2 + c^2 \neq 0$. Одредити најмању вредност функције $y = (ax+b)^2 + (cx+d)^2$.

139. Одредити m, $m \in \mathbf{R}$, тако да је збир квадрата корена једначине $x^2 - mx + m - 3 = 0$ најмањи.

140. Наћи најмању и највећу вредност функције $y = \dfrac{1}{x^2 + x + 1}$ у интервалу $[-1,\ 1]$.

141. Одредити најмању и највећу вредност функције $y = x^4 + 3x^2 + 2$, за $-2 \leq x \leq 3$.

142. Наћи најмању вредност функције $y = x(x+1)(x+2)(x+3)$.

143. Између свих троуглова са истом страницом c и истим обимом $2s$ наћи онај који има највећу површину.

144. Одредити x тако да функција:
$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$, $a_1,\ a_2,\ \ldots\ ,\ a_n \in \mathbf{R}$,
има минималну вредност.

145. Наћи највећу вредност функције $y = \dfrac{x}{ax^2 + b}$ $(a,\ b > 0)$.

146. Наћи најмању вредност функције $y = \dfrac{1 + x^2}{1 + x}$ за $x \geq 0$.

147. Ако је $2x + 4y = 1$, доказати да је $x^2 + y^2 \geq \dfrac{1}{20}$.

148. Ако реални бројеви a, b, c, d испуњавају услове $ac - bd \neq 0$ и $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) < 0$, доказати да функција $y = \dfrac{(ax + b)(cx + d)}{(bx + a)(dx + c)}$ узима све реалне вредности.

* **149.** Дата је функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a > 0)$. Доказати да за све вредности x_1, $x_2 \in \mathbf{R}$ важи $f\left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \dfrac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$ (тј. да је дата функција конвексна надоле).

* **150.** За дате бројеве p, $q \in \mathbf{R}$ наћи све вредности које полином $P(x) = x^2 + px + q$ добија за $x \in [-1,\ 1]$.

* **151.** Наћи све $x \in \mathbf{Z}$ при којима трином $2x^2 - x - 36$ добија вредности које су квадрати простих бројева.

* **152.** Функција $f(x) = ax^2 + bx + c$ за све $x \in \mathbf{Z}$ узима целобројне вредности. Доказати да су бројеви $2a$, $a + b$, c цели.

* **153.** *а)* Дат је квадратни трином $f(x) = ax^2 + bx + c$, такав да за $-1 \leq x \leq 1$ важи $|f(x)| \leq 1$. Доказати да је $|a| \leq 2$.

б) Одредити бар један трином $f(x) = ax^2 + bx + c$, такав да важи $|a| = 2$ и $|f(x)| \leq 1$ за $-1 \leq x \leq 1$.

* **154.** Од три вредности функције $y = x^2 + px + q$ које добија за три целобројне вредности x, бар једна по модулу није мања од $\dfrac{1}{2}$. Доказати.

155. *Дата је функција* $y = x^2 + px + q$, $p, \ q \in \mathbf{R}$. Ако је $|f(0)| > 1$ и $f(-1)f(1) > 0$, тада функција f нема нула на интервалу $[-1, \ 1]$. Доказати.

* **156.** Нека су $a, \ b, \ c$, реални бројеви, такви да једначине

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ и } -ax^2 + bx + c = 0$$

имају реална решења. Ако је r било које решење прве, а s било које решење друге једначине $(s > r)$, доказати да интервал $[r, \ s]$ садржи бар једно решење једначине $\frac{a}{2}x^2 + bx + c = 0$.

* **157.** Ако за једначину $ax^2 + bx + c = 0$, $a, \ b, \ c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$ важи $5a + 3b + 3c = 0$, тада једначина има бар једно решење x_0, такво да је $0 \leq x_0 \leq 2$. Доказати.

* **158.** Нека је $f(x) = ax^2 + bx + c$, ($a, \ b, \ c, \ x$ – реални бројеви). Ако за $|x| \leq 1$ важи $|f(x)| \leq 1$, доказати да за $|x| \leq 2$ важи $|f(x)| \leq 7$.

* **159.** Реални бројеви $a, \ b, \ c$ су такви да је за свако $-1 \leq x \leq 1$ испуњена неједнакост $|ax^2 + bx + c| \leq 1$. Доказати да је за исте вредности x испуњено $|cx^2 + bx + a| \leq 2$.

* **160.** Квадратни трином $f(x) = ax^2 + bx + c$ је такав да једначина $f(x) = x$ нема реалних нула. Доказати да и једначина $f(f(x)) = x$ такође нема реалних нула.

3.2 КВАДРАТНЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ

Квадратном неједначином по непознатој $x \in \mathbf{R}$ називамо неједначине облика $ax^2 + bx + c \ \varrho \ 0$ ($a, \ b, \ c \in \mathbf{R}$, $a \neq 0$), где је ϱ један од симбола $<, \ \leq, \ \geq, \ >$.

Квадратну неједначину можемо решавати помоћу графика одговарајуће квадратне функције $y = ax^2 + bx + c$. Наиме, у зависности од бројева a и $D = b^2 - 4ac$, график функције у односу на x - осу може бити као на слици 3.

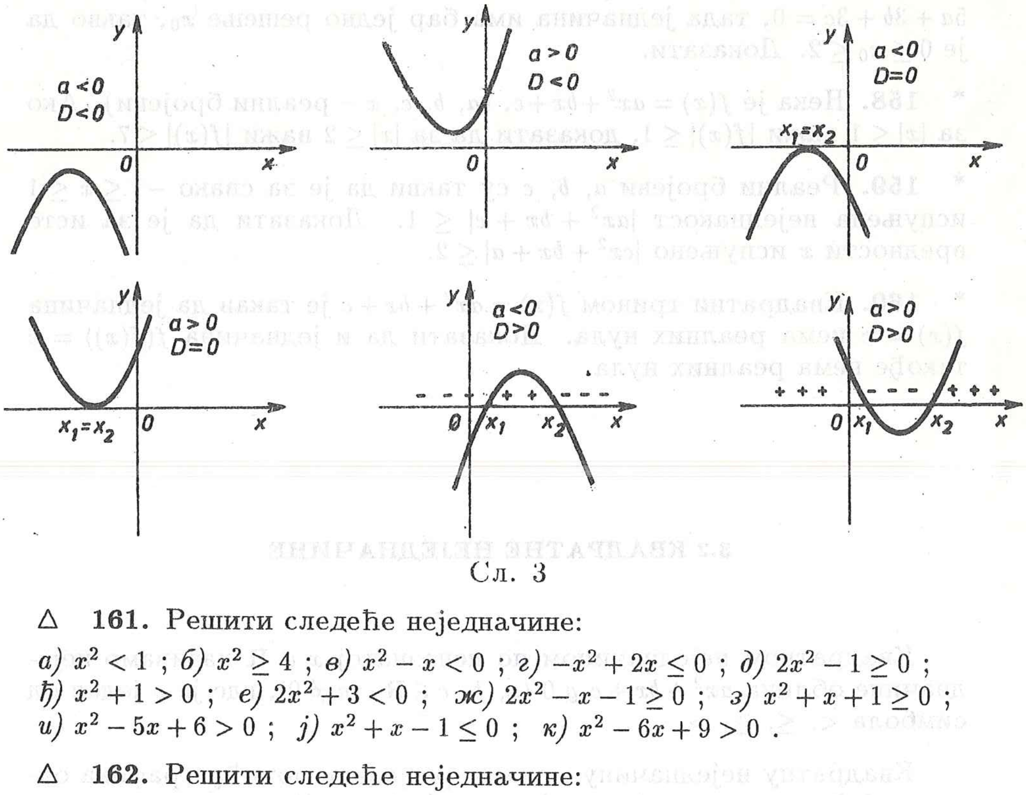
Осим графика квадратне функције можемо користити и растављање квадратног тринома на линеарне чиниоце:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)} \ ,$$

где су x_1 и x_2 нуле тринома. Ако реалних нула нема, тада је то један од прва два случаја, тј. трином је увек позитиван или негативан у зависности да ли је $a > 0$ или $a < 0$. Уколико су корени реални, тада знак тринома зависи од знака линеарних чиниоца. Може се рећи да је:

$$\boxed{sgn(ax^2 + bx + c) = sgn(a) \text{ за } x \notin [x_1,\ x_2]}\ .$$

Ускупу комплексних бројева нису дефинисане релације $>$ и $<$, па су решења неједначина увек реални бројеви.



Сл. 3

△ **161.** Решити следеће неједначине:

a) $x^2 < 1$; *б)* $x^2 \geq 4$; *в)* $x^2 - x < 0$; *г)* $-x^2 + 2x \leq 0$; *д)* $2x^2 - 1 \geq 0$; *ђ)* $x^2 + 1 > 0$; *е)* $2x^2 + 3 < 0$; *ж)* $2x^2 - x - 1 \geq 0$; *з)* $x^2 + x + 1 \geq 0$; *и)* $x^2 - 5x + 6 > 0$; *j)* $x^2 + x - 1 \leq 0$; *к)* $x^2 - 6x + 9 > 0$.

△ **162.** Решити следеће неједначине:

a) $\dfrac{4x - x^2}{x^2 - x + 1} \geq 0$; *б)* $\dfrac{x^2 - 3x + 4}{x^2 - 1} < 0$; *в)* $\dfrac{x^2 + 5x + 4}{x^3 + 1} \geq 1$; *г)* $\dfrac{x^3 + 15}{x^3 + 8} < 2$

д) $\dfrac{x^2 - 7x + 6}{x^2 - 1} < -1$; *ђ)* $\dfrac{4x^3 - 3x - 1}{x^2(x^2 - 4)} > 0$; *е)* $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{x + 1}{x^2 + x + 1} \leq 1$;

ж) $\dfrac{15}{x + 1} > \dfrac{2x^2 + 5x - 8}{x(x - 1)}$; *з)* $-1 \leq \dfrac{x^2 + 5x + 12}{x^2 + 9x + 12} \leq 1$; *и)* $\dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 2x - 3} \geq 1$;

j) $\dfrac{x - 2}{x^2 + 3x - 4} > \dfrac{1}{3}$.

△ **163.** Решити неједначине:

а) $|x^2-1|<2$; *б)* $x^2-2|x|+3>0$; *в)* $|3x^2-x-1|>1$;

г) $\dfrac{x^2-|x|-12}{x-3}\geq 2x$; *д)* $x^2+2|x+3|-10\leq 0$; *ђ)* $||x^2-1|-1|<2$.

164. За које m, $m\in\mathbf{R}$, су обе неједнакости

$$-3<\frac{x^2+mx-2}{x^2-x+1}<2$$

задовољене за свако x, $x\in\mathbf{R}$?

165. У зависности од вредности реалног параметра k, решити неједначине:

а) $x^2+kx+1>0$; *б)* $x^2-3kx+1<0$; *в)* $kx^2-2kx-1<0$.

166. Одредити све k, $k\in\mathbf{R}$, за које су реални корени квадратне једначине:

а) $kx^2-4x+2k=0$; *б)* $x^2+(k-2)x+1=0$; *в)* $(k-1)x^2-2kx+k+3=0$.

167. Дате су једначине:

а) $x^2-(m+1)x+m+4=0$; *б)* $x^2+2(m+1)x+9m-5=0$;

в) $(n-2)x^2-2nx+n-1=0$; *г)* $nx^2-(2n+4)x+n+5=0$;

д) $(p-3)x^2-2(p-1)x+2p=0$.

Одредити реалне параметре:

(1) m тако да решења једначина *а)* и *б)* буду негативна,

(2) n тако да решења једначина *в)* и *г)* буду позитивна,

(3) p тако да решења једначине *д)* буду различитог знака.

168. Одредити све k, $k\in\mathbf{R}$, за које је функција

а) $y=(k^2-1)x^2+2(k-1)x+2$;

б) $f(x)=(k-1)^2x^2+(k-1)|x-1|+k+1$;

позитивна за свако $x\in\mathbf{R}$.

169. Одредити све k, $k\in\mathbf{R}$, за које квадратни трином

а) $kx^2+2(k+2)x+2k+4$ има негативне вредности за све x, $x\in\mathbf{R}$;

б) $x^2-(8k-2)x+15k^2-2k-7$ је позитиван за све x, $x\in\mathbf{R}$.

170. Ако су a, b, c дужине страница неког троугла, тада је функција $f(x)=b^2x^2+(b^2+c^2-a^2)x+c^2$ позитивна за свако x, $x\in\mathbf{R}$. Доказати.

171. Доказати да се од сваке три дужи чије су дужине a, b, c, $(a,b,c>0)$ може конструисати троугао ако и само ако је

$$pa^2+qb^2>pqc^2,$$

где су p и q произвољни реални бројеви за које је $p+q=1$.

172. Ако су a, b, c дужине страница неког троугла, доказати да је за свако x, $x\in\mathbf{R}$, $ax^2+(b-a-c)x+c>0$.

173. Одредити m, $m \in \mathbf{R}$, тако да је

$x^2 - (8m-2)x + 15m^2 - 2m - 7 > 0$

а) за свако реално x ; *б)* за свако x, $x \in \mathbf{R}$, осим једне вредности.

174. Одредити вредности реалних параметара, тако да су дате неједначине задовољене за свако реално x.

а) $\dfrac{x^2+mx-1}{2x^2-2x+3} < 1$; *б)* $\dfrac{x^2-mx-2}{x^2-3x+4} > -1$; *в)* $\dfrac{x^2-8x+20}{mx^2+2(m+1)x+9m+4} < 0$ *г)* $-3 < \dfrac{x^2+mx-2}{x^2-x+1} < 2$; *д)* $-9 < \dfrac{3x^2+px-6}{x^2-x+1} < 6$.

* **175.** Нека су a, b, c позитивни реални бројеви. Неједнакост $(b-c)(x-a) + \left(\sqrt{bc} - \sqrt{ax}\right)^2 > 0$ важи за сваки реалан број $x > 0$ ако и само ако је c између a и b. Доказати.

* **176.** Нека је за свако реално x испуњено $ax^2 + 2bx + c \geq 0$ и $px^2 + 2qx + r \geq 0$, где су a, b, c, p, q, r реални бројеви. Доказати да је $apx^2 + 2bqx + cr \geq 0$ за свако реално x.

177. Ако су x_1 и x_2 решења дате једначине, одредити вредности реалног параметра k, тако да буде задовољен дати услов.

а) $x^2 + kx + 1 = 0$ и $\left(\dfrac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\dfrac{x_2}{x_1}\right)^2 > 2$;

б) $(k+1)x^2 - (k-1)x + k = 0$ и $x_1^2 + x_2^2 \geq 1$;

в) $x^2 + (2k+2)x + k = 0$ и $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} > 8$; *г)* $4x^2 = (k+2)(2x-1)$ и $\dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} \leq 4$

д) $x^2 + (k-1)x - 2k = 0$ и $x_1^2 + x_2^2$ је минимално ;

ђ) $6x^2 + 6(k-1)x - 5k + 2k^2 = 0$ и $x_1^3 + x_2^3$ је максимално ;

е) $x^2 - 4kx + 5k^2 - 6k + 5 = 0$ и $x_1 - x_2$ је максимално.

178. Доказати да су корени једначине

$(x-a)(x-b) + (x-a)(x-c) + (x-b)(x-c) = 0$

увек реални.

179. Ако је $a < b < c < d$ доказати да су корени једначине $(x-a)(x-c) + \lambda(x-b)(x-d) = 0$ реални за свако $\lambda \in \mathbf{R}$.

* **180.** Нека су a, b, c реални бројеви, такви да једначине

$2ax^2 + bx + c = 0$ и $-2ax^2 + bx + c = 0$

имају реална решења.

Ако је α било које решење прве, а β било које решење друге једначине, доказати да интервал $[\alpha,\ \beta]$ садржи бар једно решење једначине $ax^2 + bx + c = 0$.

181. Нека су p и q реални бројеви. Доказати да неједначина $|x^2 + px + q| < \dfrac{1}{2}$ може имати највише два целобројна решења.

182. Нека су x_1, x_2 корени квадратне једначине $ax^2+bx+c=0$, $(a\neq 0)$ и нека су α и β дати реални бројеви $(\alpha<\beta)$. Доказати следећа тврђења и дати геометријску интерпретацију:

а) корени x_1 и x_2 су реални и важи $\alpha<x_1\leq x_2$ ако и само ако је

$$\begin{cases} D=b^2-4ac\geq 0 \\ af(\alpha)>0 \ , \text{ где је } f(x)=ax^2+bx+c; \\ \alpha<-\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

б) корени x_1 и x_2 су реални и важи $x_1\leq x_2<\alpha$ ако и само ако је

$$\begin{cases} D=b^2-4ac\geq 0 \\ af(\alpha)>0 \\ \alpha>-\dfrac{b}{2a} \end{cases}$$

в) корени су реални и задовољавају услов $x_1<\alpha<x_2$ ако и само ако је $af(\alpha)<0$;

г) корени x_1 и x_2 су реални и важи $\alpha<x_1\leq x_2<\beta$ ако и само ако је

$$\begin{cases} D=b^2-4ac\geq 0 \\ af(\alpha)>0 \\ af(\beta)>0 \\ \alpha<-\dfrac{b}{2a}<\beta \end{cases}$$

У случајевима *а)*, *б)*, *в)* написати одговарајуће услове за $\alpha=0$.

183. Одредити све вредности $k\in\mathbf{R}$ за које су корени једначине $(k+1)x^2-3kx+4k=0$ већи од 1.

184. За које $k\in\mathbf{R}$ једначина $x^2-4x+k^2-1=0$ има корене мање од 1?

185. За које $k\in\mathbf{R}$ су корени једначине $x^2-6kx+2-2k+9k^2=0$ већи од 3?

186. Одредити k, $k\in\mathbf{R}$, тако да корени једначине
$kx^2+2(k-1)x-4=0$
задовољавају услов $x_1<3<x_2$.

187. Наћи k, $k\in\mathbf{R}$, тако да се корени једначине:

а) $2x^2-(2k-5)x+k-3=0$ налазе у интервалу $(0,\ 1)$;

б) $kx^2 + (2k-1)x + 1 = 0$ налазе у интервалу $(-1,\ 1)$;

в) $(k-1)x^2 - 2(k+2)x + k = 0$ налазе у интервалу $(-1,\ 2)$.

188. Одредити све реалне вредности a за које корени једначине $2x^2 - 2(2a+1)x - a(a-1) = 0$ задовољавају услов $x_1 < a < x_2$.

* **189.** Ако су a, b, c различити реални бројеви, тада за корене једначине $x^2 - 2(a+b+c)x + 3(ab+bc+ca) = 0$ важи релација $x_1 < a+b+c < x_2$. Доказати.

190. За које k, $k \in \mathbf{R}$, у једначини
$x^2 - 4kx + 1 = 0$
важи $x_1 \geq k$, $x_2 \geq 0$ $(x_1 \leq x_2)$.

191. Ако једначина $x^2 - 2(m-1)x + m + 5 = 0$ има реалне и различите корене, тада може имати само један корен у интервалу $(-2,\ 3)$. Доказати.

192. Одредити вредности реалног параметра m, тако да неједначина $2x^2 + mx - 5 > 0$ има бар једно решење x, за које је $|x| < 1$.

193. За које k, $k \in \mathbf{R}$, корени једначине $(2-k)x^2 - 3kx + 2k = 0$ су већи од $\frac{1}{2}$.

194. Одредити реалне бројеве a тако да је један корен једначине $(a-2)x^2 - 2(a+3)x + 4a = 0$ мањи од 2, а други већи од 3.

195. Неједнакост $ax^2+bx+c < 0$ је задовољена за свако $\alpha < x < \beta$ ако и само ако је $(D = b^2 - 4ac,\ f(x) = ax^2 + bx + c)$:

$$\begin{cases} D < 0 \\ a < 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a > 0 \\ f(\alpha) \leq 0 \\ f(\beta) \leq 0 \end{cases} \vee \begin{cases} D \geq 0 \\ a < 0 \\ f(\alpha) \leq 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < \alpha \end{cases} \vee \begin{cases} D \geq 0 \\ a < 0 \\ f(\beta) \leq 0 \\ -\dfrac{b}{2a} > \beta \end{cases}.$$

Доказати тврђење користећи геометријску интерпретацију. Навести одговарајуће услове за случај $ax^2 + bx + c > 0$.

196. Неједнакост $ax^2 + bx + c > 0$ је испуњена за свако $x > \alpha$ ако и само ако је

$$\begin{cases} D < 0 \\ a > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} D \geq 0 \\ a > 0 \\ f(\alpha) \geq 0 \\ -\dfrac{b}{2a} < \alpha \end{cases}.$$ Доказати.

197. Неједнакост $ax^2+bx+c>0$ је испуњена за свако $x<\alpha$ ако и само ако је

$$\begin{cases} D<0 \\ a>0 \end{cases} \vee \begin{cases} D\geq 0 \\ a>0 \\ f(\alpha)\geq 0 \\ -\dfrac{b}{2a}>\alpha \end{cases}.$$ Доказати.

198. Одредити све вредности k, $k\in\mathbf{R}$, за које је неједнакост $kx^2-4x+2k-1>0$ испуњена

а) за свако $x>0$; *б)* за свако $-1<x<1$; *в)* за свако $x<1$.

199. Одредити све вредности k, $k\in\mathbf{R}$, за које је неједнакост
$x^2-2(k^2-1)x-4k^2<0$
испуњена за свако x које задовољава услов:

а) $x<0$; *б)* $0<x<1$; *в)* $x>-2$.

200. Наћи све вредности k, $k\in\mathbf{R}$, при којима је неједнакост
$(x-5k)(x-k+5)<0$
испуњена:

а) за свако x, $2\leq x\leq 5$; *б)* за свако x, $x>10$.

201. Одредити вредности реалног параметра m, тако да:

а) веће решење једначине $3mx^2+(6m^2-1)x-2m=0$ припада, а мање не припада интервалу $(1,\ 3)$.

б) мање решење једначине $12m^2x^2-11mx+2=0$ припада, а веће не припада интервалу $(2,\ 4)$.

* **202.** Одредити све вредности k, $k\in\mathbf{R}$, за које:

а) из неједнакости $x^2-1<0$ следи неједнакост $x^2+2k^2x-3k^4<0$;

б) из неједнакости $x^2-k(1+k^2)x+k^4<0$ следи да је $x^2+4x+3>0$.

* **203.** Одредити све вредности k, $k\in\mathbf{R}$, за које:

а) из неједнакости $2x^2-(k+1)x+2<0$ следи неједнакост $0<x<1$;

б) из неједнакости $kx^2-2x-k+1>0$ следи неједнакост $-1<x<2$.

* **204.** Одредити реалан параметар p тако да решења x_1, x_2 једначине $3x^2-4x-4p=0$ задовољавају услов $\frac{1}{3}<x_1<x_2<1$.

* **205.** Решити неједначину $kx^2-|x-1|\leq 0$, где $k\in\mathbf{R}$.

* **206.** Решити неједначину $\dfrac{x}{x-a}-\dfrac{2a}{x+a}>\dfrac{8a^2}{x^2-a^2}$, за $a\in\mathbf{R}$.

* **207.** Одредити све реалне бројеве a, за које ниједан број x за које важи неједнакост $ax^2 + (1 - a^2)x - a > 0$ није по апсолутној вредности већи од 2.

* **208.** Одредити све вредности реалног параметра a тако да је за све x из интервала $[-1, 1]$ задовољена неједнакост
$ax^2 + 2(a+1)x + a - 4 \leq 0$.

ЧЕТВРТА ГЛАВА

ИРАЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ

4.1 ИРАЦИОНАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Под *ирационалном једначином* подразумевамо једначину код које се непозната налази под знаком корена. Напоменимо да ирационалне једначине решавамо искључиво у скупу реалних бројева, тј. интересују нас само реална решења. У том циљу потребно је посебно обратити пажњу да ли једначина има смисла, јер, на пример, парни корен захтева ненегативну поткорену величину, док за непарни корен поткорена величина може бити произвољан реалан број. Решавање ирационалне једначине се састоји у томе да се разним трансформацијама (најчешће степеновањем или заменом променљиве) дата једначина сведе на рационалну једначину, чијим решавањем долазимо до решења полазне једначине. Приликом решавања поступамо на један од следећих начина. Од дате једначине може се прећи на њену последицу, чији скуп решења садржи скуп решења полазне једначине. Зато је потребно проверити које од добијених решења задовољава полазну једначину. Други начин је да се од дате ирационалне једначине пређе на њој еквивалентну једначину, чијим решавањем долазимо до стварних решења. На пример, једначина $f_1^2(x) = f_2^2(x)$ је последица једначине $f_1(x) = f_2(x)$ (где f_1 и f_2 узимају реалне вредности), док су једначине $f_1(x) = f_2(x)$ и $f_1^3(x) = f_2^3(x)$ еквивалентне на скупу $\mathbb{R}$. У првом случају важи:

$$\boxed{\sqrt{f_1(x)} = f_2(x) \Leftrightarrow (f_1(x) \geq 0 \ \wedge \ f_2(x) \geq 0 \ \wedge \ f_1(x) = f_2^2(x)}$$

тј. ирационалну једначину са квадратним кореном "смемо" квадрирати ако и само ако су обе стране једнакости позитивне. Уопште, ако је једначина облика $\sqrt[n]{f_1(x)} = f_2(x)$, $n \in \mathbb{N}$ тада за непарно n степенујемо једначину "на n–ти степен", без ограничења знака за $f_2(x)$, а ако је n паран број, степеновање је дозвољено уз ограничење $f_2(x) \geq 0$, или упростимо неке поткорене величине. Даље решавање иде према претходном детаљном упутству.

Метод замене састоји се у томе да се подесном заменом (или заменама) ослободимо корена и проблем сведемо на решавање рационалне једначине или система рационалних једначина, или упростимо неке поткорене величине. Даље решавање иде према претходном детаљном упутству.

△ **209.** Решити једначине:

а) $\sqrt{x-1} = x$; *б)* $\sqrt{3x+1} = x-2$; *в)* $\sqrt{x^2+1} = x-1$; *г)* $\sqrt{x^2+x-3} = 3$

д) $\sqrt{6-x-x^2} = x+1$; *ђ)* $\sqrt{x^2-5} = \sqrt{x+1}$; *е)* $1-x = \sqrt{3x^2-7x+3}$.

△ **210.** Решити следеће једначине:

а) $\sqrt{x+5}+\sqrt{20-x} = 7$; *б)* $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3} = 4$; *в)* $\sqrt{x+7}+\sqrt{x-2} = 9$;

г) $\sqrt{x+17}-\sqrt{x-7} = 4$; *д)* $\sqrt{2x-15}-\sqrt{x+16} = -1$; *ђ)* $\sqrt{x-5}+\sqrt{3-x} = 1$

е) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x} = 1$.

△ **211.** Решити једначине:

а) $x^2+3x+5\sqrt{x^2-3x+76} = 260$; *б)* $\sqrt{x^2+5x+2}-\sqrt{x^2-3x+3} = 3$;

в) $\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{2x^2+3x-5} = 1$; *г)* $2x^2+3x+\sqrt{2x^2+3x+9} = 33$;

д) $2\sqrt{x^2-2x+4}-\sqrt{x^2-2x+9} = 1$; *ђ)* $\sqrt{2-x-x^2}-\sqrt{x^2+x-1} = 1$;

е) $\sqrt{3x^2+5x+8}-\sqrt{3x^2+5x+1} = 1$; *ж)* $\sqrt{x^2+9}+\sqrt{x^2-9} = 4+\sqrt{34}$;

з) $\sqrt{2x^2+12x+16}+\sqrt{x^2+2x} = 2x+4$.

△ **212.** Решити једначине:

а) $\sqrt{2x+1}+\sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$; *б)* $\sqrt{2x+7}-\sqrt{4x-9} = \sqrt{6x+2}$;

в) $\sqrt{x}-\sqrt{x+1} = \sqrt{x+4}-\sqrt{x+9}$; *г)* $\sqrt{2x+3}-\sqrt{x-1} = \sqrt{3x-8}$;

д) $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-1} = \sqrt{2x+3}$; *ђ)* $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x-4} = \sqrt{4x+5}$;

е) $\sqrt{2x+14}-\sqrt{x-7} = \sqrt{x+5}$;

ж) $\sqrt{2x^2+3x+2}-\sqrt{7x^2+8}+\sqrt{2x^2-3x+2} = 0$;

△ **213.** Решити једначине:

а) $x^3\sqrt[6]{x^5}-5x^2\sqrt[12]{x} = 6\sqrt[3]{x}$; *б)* $\sqrt{x-4+\sqrt{x-2}}-\sqrt{x-3-\sqrt{x-2}} = 1$;

в) $\sqrt{x+6-4\sqrt{x+2}}+\sqrt{11+x-6\sqrt{x+2}} = 1$;

г) $\sqrt{x+5-4\sqrt{x+1}} = \sqrt{x+1}-2$;

д) $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}=1$;

ђ) $\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=1$;

е) $\sqrt{x+2\sqrt{10x-25}}+\sqrt{x-\sqrt{10x-25}}=\sqrt{10}$; *ж)* $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$;

з) $\sqrt{x^2-3x+11}-4x^2+12x=11$; *и)* $(x^2-2x)^3+x\sqrt{x(x-2)^3}=2$;

ј) $4x^2+5x\sqrt{x+5}=44(x+5)$; *к)* $2(x^2+2)=5\sqrt{x^3+1}$;

л) $\sqrt{5-\sqrt{x+1}+\sqrt{2x^2+x+3}}=1$.

214. Решити једначине:

а) $\sqrt[3]{x^2+2x+1}+\sqrt[3]{x+1}=0$; *б)* $\sqrt[3]{2+x}+\sqrt[3]{2-x}=1$;

в) $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{x-3}=1$; *г)* $\sqrt[3]{2x+4}+\sqrt[3]{x-3}=1$;

д) $\sqrt[3]{x-1}+\sqrt[3]{x+1}=x\sqrt[3]{2}$; *ђ)* $\sqrt[3]{\dfrac{12-2x}{x-1}}+\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{12-2x}}=\dfrac{5}{2}$;

е) $\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{5x+2}}+\sqrt[3]{\dfrac{5x+2}{x+3}}=\dfrac{13}{6}$; *ж)* $\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}+\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}=1$;

з) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x+3}=0$;

и) $\sqrt[3]{x^3+3x^2+34x+37}-\sqrt[3]{x^3-3x^2+34x-37}=2$;

ј) $\sqrt[3]{(2-x)^2}+\sqrt[3]{(7+x)^2}-\sqrt[3]{(7+x)(2-x)}=3$;

к) $6\sqrt[3]{x-3}+\sqrt[3]{x-2}=5\sqrt[6]{(x-2)(x-3)}$;

л) $x^3+x+\sqrt[3]{x^3+x-2}=12$; *љ)* $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}=\dfrac{1}{3}$;

м) $(x-1)\sqrt[3]{\dfrac{x-1}{3-x}}-(3-x)\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{x-1}}=2$.

215. Решити једначине:

а) $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$; *б)* $\sqrt[4]{x+62}-\sqrt[4]{6-x}=3\sqrt{2}$;

в) $\sqrt[4]{18+5x}+\sqrt[4]{64-5x}=4$; *г)* $\sqrt[4]{629-x}+\sqrt[4]{77+x}=8$;

д) $\sqrt[4]{78+x}+\sqrt[4]{259-x}=7$; *ђ)* $\sqrt[4]{70+x}+\sqrt[4]{267-x}=7$;

е) $\sqrt[4]{(x-1)^2}-\sqrt[4]{x+1)^2}=\dfrac{3}{2}\sqrt[4]{x^2-1}$; *ж)* $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{3-x}=1$;

з) $\sqrt[3]{x+2}=\sqrt{x-2}$;

и) $\sqrt[m]{(1+x)^2}-\sqrt[m]{(1-x)^2}=\sqrt[m]{1-x^2}$ ($m\in\mathbf{N}$, m непаран број) ;

ј) $\dfrac{\sqrt[n]{a+x}}{a}+\dfrac{\sqrt[n]{a+x}}{x}=\dfrac{\sqrt[n]{x}}{b}$, $n\in\mathbf{N}$.

* **216.** Решити једначине:

а) $\sqrt{x^2+x}+\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}=x+3$; *б)* $x=\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$;

в) $\sqrt{4x-y^2}-\sqrt{y+2}=\sqrt{4x^2+y}$; *г)* $\sqrt{12-\frac{12}{x^2}}-x^2+\sqrt{x^2-\frac{12}{x^2}}=0,\ x\neq 0$

д) $\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}-\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{\sqrt{3}}{x}$; *ђ)* $\frac{x+\sqrt{x^2-1}}{x-\sqrt{x^2-1}}+\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}=34$;

е) $\frac{\sqrt{x^2-16}}{\sqrt{x-3}}+\sqrt{x+3}=\frac{7}{\sqrt{x-3}}$; *ж)* $\sqrt{x+\sqrt{x}}-\sqrt{x-\sqrt{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x}{x+\sqrt{x}}}$.

* **217.** Решити једначину $\sqrt{2\sqrt{3}-3}=\sqrt{x\sqrt{3}}-\sqrt{y\sqrt{3}}$ у скупу рационалних бројева.

* **218.** Наћи целобројна решења једначине $\sqrt{x-\frac{1}{5}}+\sqrt{y-\frac{1}{5}}=\sqrt{5}$.

* **219.** Решити следеће једначине у зависности од реалних параметара a, b:

а) $\sqrt{x-4a+16}=2\sqrt{x-2a+4}-\sqrt{x}$; *б)* $x+\sqrt{x^2-4}=a$;

в) $\sqrt{ax+1}-\sqrt{x-1}=\sqrt{(a-1)x}$; *г)* $x\sqrt{x}+\sqrt{x^3-2}=b$;

д) $\sqrt{x+\frac{1}{x}}+\sqrt{x-\frac{1}{x}}=a\sqrt{x}$; *ђ)* $\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}+\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}=\sqrt{\frac{b+x}{b-x}}+\sqrt{\frac{b-x}{b+x}}$;

е) $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{2a}$; *ж)* $\sqrt[3]{(x+a)^2}+\sqrt[3]{(x-a)^2}+\sqrt[3]{x^2-a^2}=\sqrt[3]{a^2}$;

з) $\sqrt{2x-a}=x-b$; *и)* $\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}=a$;

ј) $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$.

220. Решити једначине:

а) $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$;

б) $\sqrt{4-x^2}+\sqrt{1+4x}+\sqrt{x^2+y^2-2y-3}=\sqrt[4]{x^4-16}-y+5$.

4.2 ИРАЦИОНАЛНЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ

При решавању ирационалних неједначина, водећи рачуна о особинама корена и неједнакости, долазимо до следећих основних закључака:

Ако је n непаран број:

$$\boxed{\sqrt[n]{f_1(x)}\geq f_2(x)\Leftrightarrow f_1(x)\geq f_2^n(x)}$$

исто важи и ако је знак неједнакости "$\leq$".

Ако је n паран број, имамо два различита случаја:

$$\boxed{\sqrt[n]{f_1(x)} \leq f_2(x) \Leftrightarrow (f_1(x) \geq 0 \ \wedge \ f_2(x) \geq 0 \ \wedge \ f_1(x) \leq f_2^n(x))}$$

$$\boxed{\sqrt[n]{f_1(x)} \geq f_2(x) \Leftrightarrow (f_1(x) \geq 0 \ \wedge \ f_2(x) \leq 0)}$$

или

$$\boxed{(f_1(x) \geq 0 \ \wedge \ f_2(x) \geq 0 \ \wedge \ f_1(x) \geq f_2^n(x))}$$

Примена ових услова доводи до степеновања леве и десне стране неједнакости, слично поступку описаном при решавању ирационалних једначина. У случају непарног изложиоца корена, као и код ирационалних једначина, степенујемо без ограничења знака израза $f_2(x)$.

$\triangle$ **221.** Решити следеће неједначине:

а) $\sqrt{x-1} > 2$; *б)* $\sqrt{2+x^2} < 3$; *в)* $\sqrt{x^2+5x+4} > 1$;

г) $\sqrt{x^2-x-1} < 1$; *д)* $\sqrt{\dfrac{2x-1}{x+1}} > -2$; *ђ)* $\sqrt{\dfrac{x-1}{x+2}} < 2$;

е) $\sqrt{x^2-7} > -1$; *ж)* $\sqrt{3-x} > x-2$.

$\triangle$ **222.** Решити неједначине:

а) $\sqrt{8-x}+\sqrt{x-3} > 3$; *б)* $\sqrt{3x^2-5x-3} > \sqrt{2x+3}$;

в) $\sqrt{3x^2-2x-1} \geq 2(x-1)$; *г)* $\sqrt{(x+2)(x-5)} > 8-x$;

д) $\sqrt{4-\sqrt{1-x}}-\sqrt{2-x} > 0$; *ђ)* $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x} > \sqrt{3}$;

е) $2x-1 > \sqrt{x^2-3x+2}$; *ж)* $\sqrt{-x^2+x+6}+x-1 > 0$;

з) $\sqrt{3x-1}-\sqrt{7-x} \leq 2$; *и)* $\sqrt{4-3x}-\sqrt{6+x} > 1$;

ј) $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-2} \geq \sqrt{2-x}$; *к)* $\sqrt{4-\sqrt{2-x}}-\sqrt{3-x} > 0$;

л) $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2} > 1$.

$\triangle$ **223.** Решити неједначине:

а) $\dfrac{1-\sqrt{8x-3}}{4x} \geq 1$; *б)* $\dfrac{(x-1)^2}{(3+\sqrt{8+x})^2} > x-7$;

в) $\dfrac{x+1+2x\sqrt{2-x}}{(x-1)^2} \geq -1$; *г)* $\sqrt{x^2-x+1} < (x-1)^2+x^2$;

д) $\dfrac{\sqrt{2-x^4}}{x} < 1$; *ђ)* $(x-2)\sqrt{x^2+1} > x^2+2$;

е) $\dfrac{4-\sqrt{x+2}}{1+\sqrt{x+4}}<3$; *ж)* $\dfrac{\sqrt{2-x+4x^2}-3}{x}\geq 2$;

з) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{1-x}>1$; *и)* $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}>1$.

△ **224.** Решити по непознатој x неједначине у зависности од вредности реалних параметара:

а) $\sqrt{a+\sqrt{x}}+\sqrt{a-\sqrt{x}}<\sqrt{2}$; *б)* $2\sqrt{x+a}>x+1$;

в) $\sqrt{x-b^2}+\sqrt{x}>2b$; *г)* $2x+\sqrt{a^2-x^2}>0$.

ПЕТА ГЛАВА

ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ

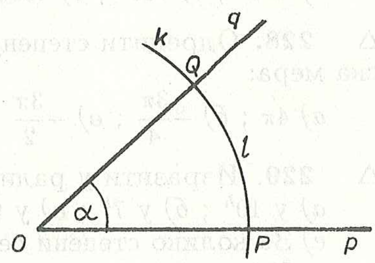
5.1 УОПШТЕНИ УГЛОВИ, МЕРЕЊЕ УГЛОВА РАДИЈАНОМ

Нека је $\alpha \measuredangle Opq$ један угао и нека је k један круг полупречника $r = 1$, са центром O, у равни угла α. Обележимо са P и Q пресечне тачке круга k и кракова угла α, а са l дужину оног лука PQ круга k који лежи у углу α, тј. чији централни угао је α (сл. 4).

Неименован број $\frac{l}{r} = l$ назива се *радијанском* или *лучном мером* угла α. Мерна јединица је угао за који је $l = 1$ и назива се *радијаном* (ознака: rad).

Радијанска мера угла има сва битна својства мере. Веза са степеном мером је следећа:

$$\boxed{\alpha\ rad = \left(\frac{180\alpha}{\pi}\right)^o,\ \varphi^o = \frac{\pi\varphi}{180} rad\ .}$$



Сл. 4

Притом је $1\ rad = \frac{180^o}{\pi} \approx 57^o17'44,8''$, односно $1^o = \frac{\pi}{180} rad \approx 0,017453\ rad$. Ознака "$rad$" обично се изоставља.

За угао чији краци се не поклапају кажемо да је *оријентисан* ако је одређено који његов крак се сматра почетним, а који крајњим. Позитивно оријентисаном углу $\measuredangle Opq$ као мерни број придружује се радијанска мера неоријентисаног угла $\measuredangle Opq$, а негативно оријентисаном углу $\measuredangle Opq$ – негативна радијанска мера неоријентисаног угла $\measuredangle Opq$.

Уопштеним углом у датој равни π назива се сваки израз облика $kP+\alpha$, где је $k \in \mathbb{Z}$, P – пун угао, а α неки оријентисани угао у равни π или нула-угао. Уопштени угао $kP + \alpha$ је *позитивно оријентисан* ако је $k > 0$, или $k = 0$ и α позитивно оријентисан угао, а *негативно оријентисан* ако је $k < 0$, или $k = 0$ и α негативно оријентисан.

Ако је угао $kP+\alpha$ позитивно оријентисан, његов крајњи крак се може добити обртањем почетног крака око темена најпре k пута за пун угао у позитивном смеру, а затим за угао α. Исто тако, крајњи крак негативно оријентисаног угла $kP+\alpha$ може се добити обртањем почетног крака око темена најпре $|k|$ пута за пун угао у негативном смеру а затим за угао α.

Мерни број уопштеног угла $kP+\alpha$ је број $k\cdot 2\pi+\alpha$, или $k\cdot 360^o+\alpha$, где је са α обележен и мерни број угла α.

△ **225.** Одредити радијанску меру угла од:
а) 90^o ; *б)* 15^o ; *в)* 270^o ; *г)* 30^o ; *д)* 45^o ; *ђ)* 300^o ; *е)* 25^o ; *ж)* 75^o ; *з)* 135^o ; *и)* 18^o ; *ј)* 225^o ; *к)* 36^o ; *л)* 150^o ; *љ)* 285^o ; *м)* 60^o.

△ **226.** Одредити степену меру угла чија је радијанска мера:
а) $\frac{\pi}{2}$; *б)* $\frac{\pi}{12}$; *в)* $\frac{3\pi}{2}$; *г)* $\frac{\pi}{6}$; *д)* $\frac{\pi}{4}$; *ђ)* $\frac{5\pi}{3}$; *е)* $\frac{7\pi}{12}$; *ж)* $\frac{3\pi}{4}$; *з)* $\frac{7\pi}{6}$; *и)* $\frac{4\pi}{5}$; *ј)* $\frac{4\pi}{3}$; *к)* $\frac{7\pi}{4}$.

△ **227.** Одредити радијанску меру уопштеног угла од:
а) 450^o ; *б)* 780^o ; *в)* 1000^o ; *г)* -105^o ; *д)* -330^o; *ђ)* -810^o.

△ **228.** Одредити степену меру уопштеног угла чија је радијанска мера:
а) 4π ; *б)* $-\frac{3\pi}{4}$; *в)* $-\frac{3\pi}{2}$; *г)* -3π ; *д)* $\frac{20\pi}{3}$; *ђ)* $-\frac{18\pi}{5}$; *е)* $\frac{13\pi}{4}$.

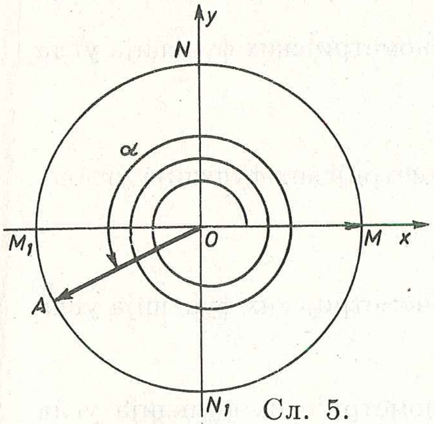
△ **229.** Изразити у радијанима угао између сатних казаљки:
а) у 10^h ; *б)* у 7^h ; *в)* у 9^h ; *г)* у 6^h ; *д)* у 4^h ; *ђ)* у 11^h.
е) За колико степени се обрне велика казаљка на сату док протекне 550 минута?

△ **230.** Точак се обрће брзином од 4π *rad/min*. За који угао се он обрне за:
а)$20s$; *б)*$1min\ 40s$; *в)* $3min\ 50s$; *г)* $50s$; *д)* $2min\ 25s$; *ђ)* $3min\ 20s$?

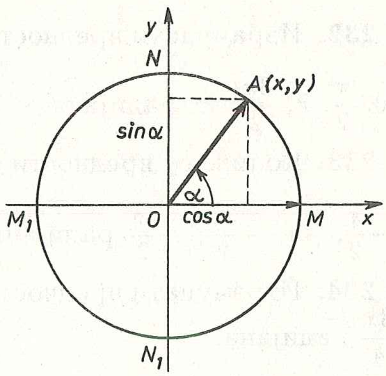
△ **231.** За време док један зупчаник изврши један пун обртај, други зупчаник изврши два обртаја у супротном смеру. За који угао се обрне други зупчаник кад се први обрне за:
а) $\frac{16\pi}{9}$; *б)* $\frac{35\pi}{9}$; *в)* 10π ; *г)* $\frac{\pi}{6}$; *д)* 5π ; *ђ)* $\frac{15\pi}{4}$?

5.2 ДЕФИНИЦИЈЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА МА КОГ УГЛА. ЗНАК ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА

Јединични круг у равни Oxy, са центром O, назива се *тригонометријским кругом.* Уопштени угао β чија је радијанска мера једнака $k\cdot 2\pi+\alpha$, $0\le\alpha<2\pi$, приказујемо као угао чији почетни крак је позитивни део осе Ox. Притом кажемо да је оријентисана дуж $\overrightarrow{OM}$ (сл. 5) *почетни вектор* угла β.



Сл. 5.

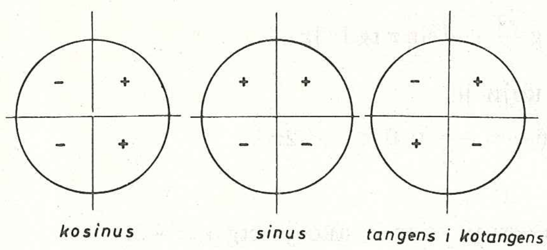


Сл. 6.

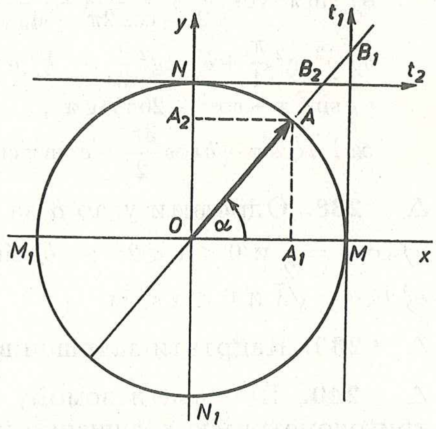
Крајњи крак угла β задајемо оријентисаном дужи $\overrightarrow{OA}$, при чему је A пресечна тачка крајњег крака угла β и тригонометријског круга. Оријентисану дуж $\overrightarrow{OA}$ је *завршни вектор* угла β.

Нека је α један угао приказан помоћу тригонометријског круга (сл. 6) и нека су x и y координате тачке A (краја завршног вектора угла α). Тада се *тригонометријске функције* угла α, тј. *синус, косинус, тангенс* и *котангенс* угла α, дефинишу са: $\sin\alpha = x$, $\cos\alpha = y$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{y}{x}$ $(x \neq 0)$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{x}{y}$ $(y \neq 0)$. Понекад се разматрају и функције *секанс*: $\sec\alpha = \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, и *косеканс*: $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{y}$ $(y \neq 0)$.

Знак тригонометријских функција по квадрантима приказан је прегледно на слици 7.



Сл. 7.



Сл. 8

За приказивање вредности тангенса и котангенса помоћу тригонометријског круга уводе се тангенте t_1 и t_2 (Сл. 8). Нека су B_1

и B_2 пресечне тачке носача завршног вектора $\overrightarrow{OA}$ и тангенти t_1 и t_2. Тада је $\operatorname{tg}\alpha$ једнак ординати тачке B_1, а $\operatorname{ctg}\alpha$ апсциси тачке B_2.

△ **232.** Израчунати вредности тригонометријских функција угла од

$$0,\ \frac{\pi}{2},\ \pi,\ \frac{3\pi}{2},\ 2\pi \text{ радијана.}$$

△ **233.** Колике су вредности тригонометријских функција углова од

$$-\frac{\pi}{2},\ -\pi,\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{5\pi}{2} \text{ радијана?}$$

△ **234.** Израчунати вредности тригонометријских функција угла од $\frac{3\pi}{4}$ радијана.

△ **235.** Одредити вредности тригонометријских функција угла α, ако је тај угао:
а) $\frac{5\pi}{4}$; *б)* $\frac{7\pi}{4}$; *в)* $-\frac{\pi}{6}$; *г)* $\frac{5\pi}{6}$; *д)* $\frac{7\pi}{6}$; *ђ)* $\frac{11\pi}{6}$; *е)* $-\frac{\pi}{3}$;
ж) $\frac{2\pi}{3}$; *з)* $\frac{4\pi}{3}$; *и)* $\frac{5\pi}{3}$ радијана.

△ **236.** У ком квадранту је завршни вектор угла α ако је:
а) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$; *б)* $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha < 0$; *в)* $\operatorname{tg}\alpha < 0$ и $\cos\alpha > 0$;
г) $\operatorname{ctg}\alpha > 0$ и $\sin\alpha < 0$; *д)* $\sin\alpha\cdot\cos\alpha > 0$; *ђ)* $\operatorname{ctg}\alpha\cdot\cos\alpha < 0$?

△ **237.** Одредити вредност израза:

а) $\cos 0\cdot\sin\frac{3\pi}{2} - \frac{2\cos(-\pi)}{\cos^2 0}$; *б)* $\frac{3\sin 0}{\cos\pi} - \frac{2}{\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)} - \cos 2\pi$;

в) $\sin\pi\cdot\cos^2\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\cos 2\pi} + \frac{1}{\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}$; *г)* $\frac{\sin^2\frac{\pi}{4}}{\cos^2\frac{\pi}{6}} + \frac{\sin^2\frac{\pi}{6}}{\cos^2\frac{\pi}{4}}$;

д) $a^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4} + b^2\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{3}$; *ђ)* $a^2\operatorname{tg}^2 0 + b\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3} + c^2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}$;

е) $\sin^2\pi - \cos^2(-26\pi)\operatorname{tg}\pi$;

ж) $a\cos\pi + b\cos\frac{3\pi}{2} - c\sin\pi\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2} + d\sin\pi\operatorname{tg}1{,}3\pi$.

△ **238.** Одредити угао α за који је
а) $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ и $0 < \alpha < 2\pi$; *б)* $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ и $0 < \alpha < 2\pi$;
в) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ и $0 < \alpha < 2\pi$.

△ **239.** Нацртати завршни вектор угла α ако је $\operatorname{ctg}\alpha = -2$.

△ **240.** Приказати помоћу тригонометријског круга вредности тригонометријских функција угла α ако је:

а) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$; *б)* $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; *в)* $\alpha = \frac{11\pi}{6}$; *г)* $\alpha = -\frac{\pi}{3}$; *д)* $\alpha = \frac{9\pi}{8}$;

ђ) $\alpha = \frac{13\pi}{12}$; *е)* $\alpha = -\frac{5\pi}{6}$; *ж)* $\alpha = -\frac{13\pi}{8}$.

△ **241.** Одредити помоћу тригонометријског круга вредност $\sin\alpha$ ако је $\cos\alpha = \frac{2}{3}$.

△ **242.** Одредити помоћу тригонометријског круга $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, ако је :

а) $\sin\alpha = \frac{2}{3}$; *б)* $\cos\alpha = -\frac{3}{4}$.

△ **243.** Одредити помоћу тригонометријског круга вредност $\cos\alpha$ ако је:

а) $\operatorname{tg}\alpha = -2$; *б)* $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$.

△ **244.** Конструисати угао α између 0 и 2π, такав да је:

а) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$; *б)* $\cos\alpha = \frac{3}{4}$; *в)* $\operatorname{tg}\alpha = 2$; *г)* $\operatorname{tg}\alpha = -3$;

д) $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{2}$; *ђ)* $\sin\alpha = \cos\alpha$; *е)* $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha$.

△ **245.** Наћи угао α ако је:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ и $0 < \alpha < 2\pi$; *б)* $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $0 < \alpha < 2\pi$.

△ **246.** Ако су α и 2α оштри углови, тада је $\sin 2\alpha < 2\sin\alpha$ и $\operatorname{tg} 2\alpha > 2\operatorname{tg}\alpha$. Доказати.

△ **247.** Доказати да је $\sin^2\alpha + \sin^2\beta \geq \sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha + \sin\beta - 1$.

5.3. ОСНОВНЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ИДЕНТИЧНОСТИ

Нека је α било који угао. Тада важе идентичности:

$$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \text{ (под условом } \cos\alpha \neq 0),$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \text{ (под условом } \sin\alpha \neq 0),$$
$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1 \text{ (под условом да } \operatorname{tg}\alpha \text{ и } \operatorname{ctg}\alpha \text{ постоје).}$$

△ **248.** Одредити вредности тригонометријских функција угла α чији завршни вектор лежи у другом квадранту, ако је $\sin\alpha = \frac{3}{5}$.

△ **249.** Доказати да важе следећи идентитети:

а) $\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ $(\cos\alpha \neq 0)$; *б)* $\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$ $(\cos\alpha \neq 0)$.

△ **250.** Дато је $\operatorname{tg}\alpha = -2$, при чему је $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Израчунати $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

△ **251.** Израчунати вредност израза: $Y = \dfrac{3\sin^3\alpha - 4\cos^3\alpha}{5\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}$, ако је $\operatorname{tg}\alpha = a$.

△ **252.** Доказати идентитет $(\operatorname{tg}\alpha - 1)^2 + (\operatorname{tg}\alpha + 1)^2 = \dfrac{2}{\cos^2\alpha}$, ако је $\cos\alpha \neq 0$.

△ **253.** Дато је $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$, при чему је $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Израчунати $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

△ **254.** Дато је $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$, при чему је $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Израчунати $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

△ **255.** Дато је $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$, при чему је $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Израчунати $\cos\alpha$, $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$.

△ **256.** Ако је $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ и $\sin\alpha = -\frac{1}{3}$, израчунати $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$.

△ **257.** Израчунати вредност израза

а) $\dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha}$ ако је $\sin\alpha = \frac{7}{25}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

б) $\dfrac{5\sin\alpha + 7\cos\alpha}{8\cos\alpha - 3\sin\alpha}$ ако је $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{15}$.

△ **258.** Колико износе $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ ако је

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2pq}{p^2 - q^2}$, $p > q > 0$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$?

△ **259.** Показати да израз $Y = (3\sin\alpha + 2\cos\alpha)^2 + (2\sin\alpha - 3\cos\alpha)^2$ има исту вредност за свако α.

△ **260.** Доказати идентитете:

а) $(1 - \cos^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = \operatorname{tg}^2\alpha$; *б)* $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)(1 - \sin^2\alpha) = 1$;

в) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \operatorname{ctg}^2\alpha = 1$; *г)* $\dfrac{1}{\cos\alpha} - \sin\alpha\operatorname{tg}\alpha = \cos\alpha$;

д) $(\operatorname{ctg}\alpha - 1)^2 + (\operatorname{ctg}\alpha + 1)^2 = \dfrac{2}{\sin^2\alpha}$; *ђ)* $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}\dfrac{1 + \operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$;

е) $(1 - \sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 2(1 - \sin\alpha)(1 + \cos\alpha)$;

ж) $\left(\dfrac{1}{\cos\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\right)\left(\dfrac{1}{\cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha\right) = 1$; *з)* $\dfrac{1 - 2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha$;

и) $\left(\sin\alpha + \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)^2 + \left(\cos\alpha + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right)^2 = 7 + \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha$;

ј) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+1}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}$; к) $\dfrac{1}{1-\sin\alpha}-\dfrac{1}{1+\sin\alpha}=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}$.

△ **261.** Изразити помоћу $\sin\alpha$:

а) $3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$; б) $\cos^3\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha$; в) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$;
г) $\cos^4\alpha\sin^2\alpha-\sin^6\alpha$; д) $\cos^6\alpha-\sin^4\alpha\cos^2\alpha$; ђ) $\cos^4\alpha-2\cos^2\alpha+1$.

△ **262.** Изразити помоћу $tg\alpha$:

а) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}$; б) $\dfrac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}$; в) $\dfrac{3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin\alpha}{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}$;

г) $\dfrac{\cos^3\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$; д) $\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}$; ђ) $\dfrac{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos^5\alpha-\sin^5\alpha}$.

△ **263.** Упростити изразе:

а) $A=(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2$;

б) $B=\left(\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}-\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\right)\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha}-\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)$;

в) $C=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$; г) $D=\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}-\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$;

д) $E=\operatorname{tg}\alpha+\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$; ђ) $F=\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$.

△ **264.** Доказати идентитете:

а) $1+\cos^2\alpha\cos^2\beta=\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\beta$;

б) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-1}=\cos\alpha+\sin\alpha$; в) $\dfrac{\sec^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=1+\operatorname{tg}\alpha$;

г) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}\right)=2$;

д) $\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\dfrac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}=2$;

ђ) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2}+\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)^2}=\sin\alpha\cos\alpha$; е) $(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{cosec}\alpha)^2=\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$;

ж) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-2\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\sin^2\alpha=0$;

з) $\dfrac{(1-\sin\alpha-\cos\alpha)(1-\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}=-2$.

* **265.** Доказати да важи идентитет:
$(1-\cos\beta\cos\gamma)^2-2(1-\cos\beta\cos\gamma)-\sin^2\beta\sin^2\gamma+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=0.$

* **266.** Ако је α оштар угао, доказати неједнакост
$\sqrt{\sin\alpha}\cdot\sqrt[4]{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\cos\alpha}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}\alpha}\le\sqrt[4]{8}$.

* **267.** Одредити вредност израза $t = \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha$, ако је $\dfrac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = m$, α оштар угао и $m \in R$.

* **268.** За оштар угао α, доказати: $\left(1 + \dfrac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1 + \dfrac{1}{\cos\alpha}\right) \leq 3+2\sqrt{2}$.

* **269.** Доказати да важи неједнакост $\dfrac{1}{\sin^4 x} + \dfrac{1}{\cos^4 x} \geq 8$, ако је $\sin x \cos x \neq 0$.

5.4 ОСНОВНА СВОЈСТВА ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА

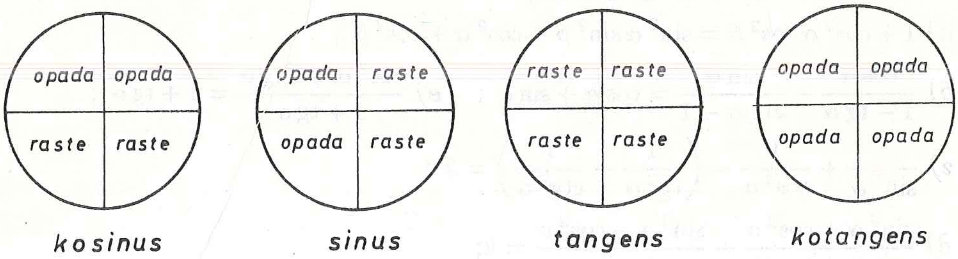
Периодичност:

$\cos(k2\pi + \alpha) = \cos\alpha$, $\sin(k2\pi + \alpha) = \sin\alpha$,
$\operatorname{tg}(k\pi + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(k\pi + \alpha) = \operatorname{ctg}\alpha$ за $k \in Z$.

Парност и непарност:

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$, $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$,
$tg(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Рашћење и опадање тригонометријских функција по квадрантима приказано је на слици 9.



Сл. 9.

△ **270.** Одредити вредности тригонометријских функција угла од $\dfrac{13\pi}{3}$ радијана.

△ **271.** Показати да ниједна од једнакости $\cos(m\pi + \alpha) = \cos\alpha$ и $\sin(m\pi + \alpha) = \sin\alpha$ није тачна за сваки угао α и сваки цео број m.

△ **272.** Испитати рашћење и опадање функције:
а) $3 - \cos\alpha$; *б)* $1 + \operatorname{tg}\alpha$.

△ **273.** Одредити знак разлике:
а) $\sin\dfrac{5\pi}{6} - \sin\dfrac{5\pi}{7}$; *б)* $\operatorname{ctg} 319^o - \operatorname{ctg} 327^o$.

△ **274.** Испитати рашћење и опадање функција:
а) $1+\cos\alpha$; *б)* $\sin^2\alpha$; *в)* $-\sin\alpha$; *г)* $\operatorname{tg}2\alpha$; *д)* $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$; *ђ)* $\operatorname{tg}^4\alpha$.

△ **275.** Упоредити по величини:
а) $\cos 0,7\pi$ и $\cos 0,71\pi$; *б)* $\sin 1,6\pi$ и $\sin 1,7\pi$;
в) $\operatorname{tg}0,5$ и $\operatorname{tg}(-0,4)$; *г)* $\operatorname{ctg}6,2\pi$ и $\operatorname{ctg}6,8\pi$.

△ **276.** Одредити знак разлике:
а) $\cos 5\frac{1}{6}\pi-\cos 5\frac{1}{7}\pi$; *б)* $\sin 310^o-\sin 347^o$; *в)* $\operatorname{tg}4\frac{1}{8}\pi-\operatorname{tg}4\frac{1}{9}\pi$;
г) $\operatorname{ctg}153^o-\operatorname{ctg}154^o$; *д)* $\cos 212^o-\cos 213^o$; *ђ)* $\operatorname{ctg}29^o-\operatorname{ctg}53^o$;
е) $\sin 16^o-\sin 375^o$; *ж)* $\operatorname{tg}218^o-\operatorname{tg}457^o$.

△ **277.** Да ли постоји угао α такав да је $2\sin\alpha+5\cos\alpha=7$?

5.5 СВОЂЕЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА МА КОГ УГЛА НА ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ ОШТРОГ УГЛА (СВОЂЕЊЕ НА ПРВИ КВАДРАНТ)

Тригонометријске функције угла од $\frac{\pi}{2}\mp\alpha$ (Горњем знаку одговара горњи знак, а доњем доњи.):

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\mp\alpha\right)=\pm\sin\alpha,\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\mp\alpha\right)=\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\mp\alpha\right)=\pm\operatorname{ctg}\alpha,\ \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\mp\alpha\right)=\pm\operatorname{tg}\alpha.$$

Тригонометријске функције угла од $\pi\mp\alpha$:

$$\cos(\pi\mp\alpha)=-\cos\alpha,\ \sin(\pi\mp\alpha)=\pm\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(\pi\mp\alpha)=\mp\operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{ctg}(\pi\mp\alpha)=\mp\operatorname{ctg}\alpha.$$

Тригонометријске функције угла од $\frac{3\pi}{2}\mp\alpha$:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\mp\alpha\right)=\mp\sin\alpha,\ \sin\left(\frac{3\pi}{2}\mp\alpha\right)=-\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}\mp\alpha\right)=\pm\operatorname{ctg}\alpha,\ \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}\mp\alpha\right)=\pm\operatorname{tg}\alpha.$$

Тригонометријске функције угла од $2\pi-\alpha$:

$$\cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha,\ \sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,\ \operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

Ако у горњим формулама уместо $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, 2π ставимо редом, 90^o, 180^o, 270^o, 360^o, и ако сматрамо да α означава степену меру датог угла, добићемо исте формуле записане помоћу степене мере.

△ **278.** Свести следеће тригонометријске функције на истоимене тригонометријске функције углова у првом квадранту:
а) $\cos 21,7\pi$; *б)* $\sin 1000^o$; *в)* $\operatorname{tg}(-126^o)$; *г)* $\operatorname{ctg}1,74$.

$\triangle$ **279.** Упростити израз $A = \dfrac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin(\pi-\alpha)}$.

$\triangle$ **280.** Доказати идентитет $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin^2\left(\dfrac{4\pi}{3}-\alpha\right)=1$.

$\triangle$ **281.** Израчунати вредности тригонометријских функција углова:
а) $\dfrac{2\pi}{3}$; *б)* $\dfrac{3\pi}{4}$; *в)* $\dfrac{4\pi}{3}$; *г)* $\dfrac{7\pi}{6}$.

$\triangle$ **282.** Свести на истоимене тригонометријске функције углова у првом квадранту:
а) $\sin 129^o 15'$; *б)* $\cos 2462^o$; *в)* $\sin 14,78\pi$;
г) $\operatorname{tg}(-3729^o)$; *д)* $\operatorname{ctg} 1120^o$; *ђ)* $\operatorname{tg}(-17,3\pi)$; *е)* $\operatorname{ctg} 62$.

$\triangle$ **283.** Свести на тригонометријске функције оштрих углова између 0 и $\dfrac{\pi}{4}$, односно између 0 и 45^o:
а) $\sin 23$; *б)* $\cos 14,71\pi$; *в)* $\cos(-930^o)$; *г)* $\sin 3529^o$; *д)* $\operatorname{tg} 15,29\pi$;
ђ) $\operatorname{ctg} 3000^o 95'$.

$\triangle$ **284.** Израчунати:
а) $\sin\dfrac{5\pi}{3}$; *б)* $\sin 210^o$; *в)* $\cos 2,5\pi$; *г)* $\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$; *д)* $\sin\dfrac{17\pi}{6}$;
ђ) $\operatorname{tg} 540^o$; *е)* $\operatorname{ctg} 31\dfrac{5}{6}\pi$; *ж)* $\operatorname{tg}(-330^o)$; *з)* $\operatorname{ctg} 225^o$.

$\triangle$ **285.** Израчунати $\dfrac{\sin\alpha+\cos\beta}{\operatorname{tg}\alpha}+\operatorname{ctg}\beta$, ако је $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$.

$\triangle$ **286.** Упростити изразе:
а) $\dfrac{\cos(180^o+\alpha^o)\operatorname{tg} 110^o \sin 324^o \sin 90^o}{\sin(90^o+\alpha^o)\cos 120^o \operatorname{ctg} 70^o \cos 180^o}$;
б) $\sin(90^o+\alpha^o)\cos(270^o-\alpha^o)+\sin(\alpha^o-90^o)\cos(\alpha^o-180^o)$;
в) $\sin(180^o+\alpha^o)\cos(180^o-\alpha^o)+\cos(180^o+\alpha^o)\sin(180^o-\alpha^o)$;
г) $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)-\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+3\cos\alpha-3\cos(2\pi-\alpha)$;
д) $a\cos^2 180^o-\dfrac{b^2}{\sin 270^o}-2abc\cos(180^o-\alpha^o)$;
ђ) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin(4\pi+\alpha)-\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cos(\alpha-2\pi)$;
е) $2\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}(\alpha-\pi)-\operatorname{ctg}\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)$;

ж) $\dfrac{\sin(-\alpha^o)}{\sin(180+\alpha^o)} - \dfrac{\operatorname{tg}(90^o+\alpha^o)}{\operatorname{ctg}\alpha^o} + \dfrac{\cos\alpha^o}{\sin(90^o+\alpha^o)}$;

з) $\dfrac{\operatorname{tg}(180^o-\alpha^o)\cos(180^o-\alpha^o)\operatorname{tg}(90^o-\alpha^o)}{\sin(90^o+\alpha^o)\operatorname{ctg}(90^o+\alpha^o)\operatorname{tg}(90^o+\alpha^o)}$;

и) $\dfrac{\operatorname{tg}(270^o-\alpha^o)\sin 130^o\cos 320^o\sin 270^o}{\operatorname{ctg}(180^o-\alpha^o)\cos 50^o\sin 220^o\cos 360^o}$; *ј)* $\dfrac{\sin^3(\alpha^o-270^o)\cos(360^o-\alpha^o)}{\operatorname{tg}^3(\alpha^o-90^o)\cos^3(\alpha^o-270^o)}$;

к) $2\sin 40^o+\cos 130^o-3\sin 160^o-\cos(-110^o)$;

л) $\dfrac{\sin(270^o-\alpha^o)\operatorname{tg}(180^o-\beta^o)}{\operatorname{tg}(180^o+\beta^o)\cos(180^o-\alpha^o)} + \dfrac{\operatorname{ctg}(90^o-\alpha^o)\sin(\gamma^o-90^o)}{\cos(180^o-\gamma^o)\operatorname{tg}(-\alpha^o)}$;

љ) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\beta\right)}{\cos(\pi-\alpha)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\beta\right)} - \dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\beta\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos(2\pi-\beta)\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}$;

м) $\sin(90^o-\alpha^o)-\sin(270^o-\alpha^o)-\cos(450^o-\alpha^o)+\sin(270^o+\alpha^o)$;

н) $\dfrac{\cos 727^o+2\sin 173^o+2\cos 263^o}{5\cos(-7^o)}$; *њ)* $\dfrac{\sin^2(\pi+\alpha)}{\sin^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)} + \dfrac{\operatorname{tg}^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}^2(\pi+\alpha)}$.

△ **287.** Доказати идентитете:

а) $\sin(45^o+\alpha^o)=\cos(45^o-\alpha^o)$; *б)* $\cos(45^o+\alpha^o)=\sin(45^o-\alpha^o)$;

в) $\operatorname{tg}\alpha^o+\operatorname{tg}(180^o-\alpha^o)+\operatorname{ctg}(90^o+\alpha^o)=\operatorname{tg}(360^o-\alpha^o)$;

г) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\pi-\alpha)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)=$

$=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$;

д) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\sin(2\pi-\alpha)\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\sin(\pi-\alpha)\sin(\pi+\alpha)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$;

ђ) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{2}\right)=\operatorname{tg}(\pi+\alpha)\cos(\pi+\alpha)\cos(2\pi-\alpha)$;

е) $\sin(\alpha^o-270^o)\cos(\alpha^o+90^o)\operatorname{tg}(3\alpha^o-180^o)=$

$=\cos(180^o-\alpha^o)\sin(180^o-\alpha^o)\operatorname{ctg}(90^o-3\alpha^o)$;

ж) $\sin(270^o-\alpha^o)\cos(\alpha^o-90^o)\operatorname{tg}(540^o+\alpha^o)=$

$=\cos(180^o+\alpha^o)\sin(180^o+\alpha^o)\operatorname{ctg}(450^o+\alpha^o)$;

з) $\operatorname{tg}44^o\operatorname{tg}45^o\operatorname{tg}46^o=1$;

и) $\operatorname{tg}10^o\operatorname{tg}20^o\operatorname{tg}30^o\operatorname{tg}40^o\operatorname{tg}50^o\operatorname{tg}60^o\operatorname{tg}70^o\operatorname{tg}80^o=1$.

△ **288.** Показати да вредност израза

$A=\dfrac{a^2\operatorname{tg}\alpha^o+b^2\operatorname{ctg}(90^o+\alpha^o)}{ac\operatorname{tg}\alpha^o+b\operatorname{tg}(90^o+\alpha^o)}-(a+b)\operatorname{tg}^2\alpha^o$ не зависи од a, b и α.

△ **289.** Израчунати:

а) $10 \operatorname{ctg} 135^o \sin 210^o \cos 225^o$; *б)* $2\sin^2 225^o - \operatorname{ctg} 330^o \operatorname{tg} 405^o$;

в) $2\sin^2 \dfrac{17\pi}{4} - \operatorname{tg}^2 \dfrac{33\pi}{4} \operatorname{ctg} \dfrac{3\pi}{4}$; *г)* $8\sin \dfrac{\pi}{6} \cos \dfrac{\pi}{3} \operatorname{tg} \dfrac{4\pi}{3} \operatorname{ctg} \dfrac{7\pi}{6}$.

△ **290.** Израчунати:

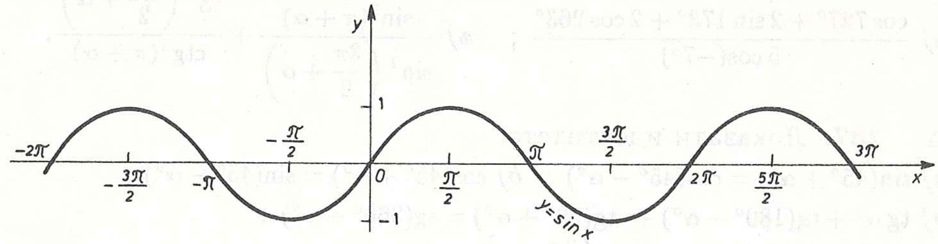
а) $\sin 120^o + \cos 210^o$; *б)* $\operatorname{tg} 570^o - \operatorname{tg}(-300^o)$; *в)* $\dfrac{\operatorname{ctg}(-1230^o)\cos 570^o}{\operatorname{tg} 675^o - \sin 570^o}$;

г) $\cos \dfrac{5\pi}{6} \cos \dfrac{7\pi}{3} + \sin \dfrac{11\pi}{6} \sin \dfrac{5\pi}{3}$; *д)* $\sin \dfrac{10\pi}{3} \cos \dfrac{11\pi}{6} + \cos \dfrac{4\pi}{3} \sin \dfrac{5\pi}{6}$.

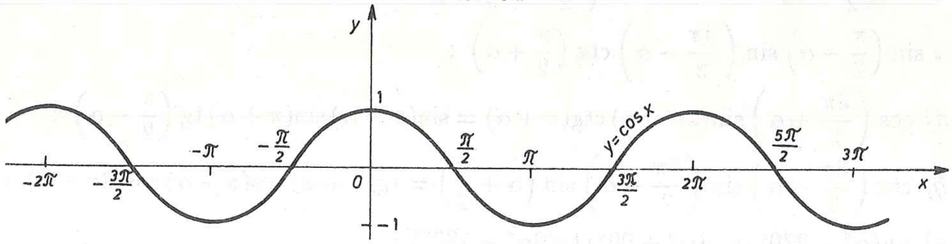
△ **291.** Ако су α и β углови једног троугла и $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$, да ли тај троугао мора да буде правоугли?

5.6 ИСПИТИВАЊЕ И ГРАФИЧКО ПРЕДСТАВЉАЊЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА

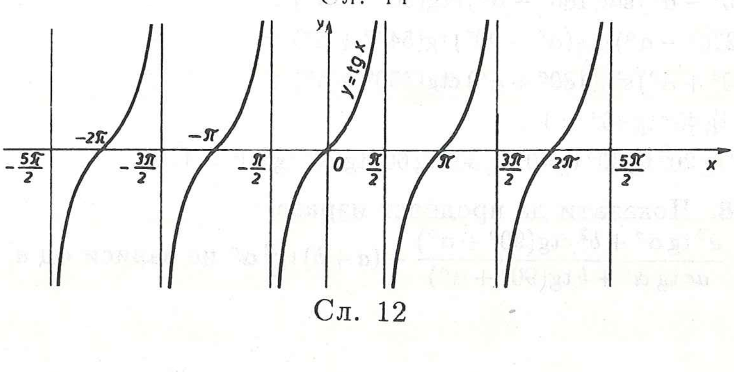
Графици тригонометријских функција $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$ (као функција броја x) приказани су на сликама 10, 11, 12 и 13.



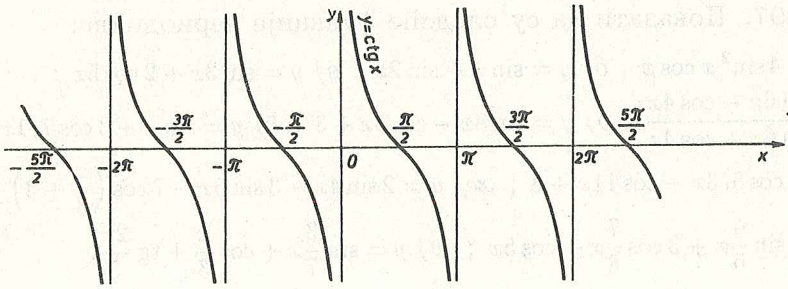
Сл. 10



Сл. 11

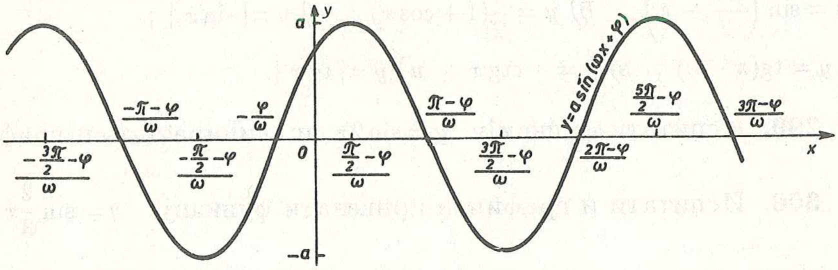


Сл. 12



Сл. 13

На слици 14 је дат график функције $y = a\sin(\omega x + \varphi)$ $(a, \omega \in \mathbf{R} \setminus \{0\},\ \varphi \in \mathbf{R}\ )$.



Сл. 14

△ **292.** Наћи периоде функција:

а) $2\sin(3x-2)$; *б)* $-4\cos(2\pi x+1)$; *в)* $\operatorname{tg}\left(-4x+\frac{\pi}{3}\right)$.

△ **293.** Одредити периоде функција:

а) $y=\frac{1}{3}\sin(2x+1)$; *б)* $y=-3\cos\left(\frac{x}{3}-1\right)$;

в) $y=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{6}\right)$; *г)* $y=\frac{1}{5}\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{x}{3}\right)$.

△ **294.** Испитати парност функција:

а) $f(x)=\sin x-\cos x$; *б)* $f(x)=\sin x+\frac{1}{\sin x}$;

в) $f(x)=\frac{\operatorname{tg} x+\sin x}{\operatorname{ctg} x}$; *г)* $f(x)=\cos x(\operatorname{tg} x-\operatorname{ctg} x)$.

△ **295.** Показати да је основни период функције $f(x)=\sin x-\cos x$ једнак 2π.

△ **296.** Показати да су следеће функције периодичне и одредити њихове основне периоде:

а) $y=\sin^2 x$; *б)* $y=2-3\cos^2 x$; *в)* $y=\sqrt{1+\cos 2x}$; *г)* $y=|\sin x|$;

д) $y=\sin x+\cos x$; *ђ)* $y=\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$; *е)* $y=\cos\varphi\sin x+\sin\varphi\cos x$.

△ **297.** Показати да су следеће функције периодичне:

а) $y = 4\sin^2 x \cos x$; *б)* $y = \sin x + \sin 2x$; *в)* $y = \sin 3x + 2\cos 5x$;

г) $\dfrac{2\sin 6x - \cos 4x}{3\sin 6x + \cos 4x}$; *д)* $y = \sin 8x - \cos 5x + 3$; *ђ)* $y = \sin x + 3\cos 7,1x$;

е) $y = \cos 5,3x - \cos 11x + 3$; *ж)* $y = 2\sin 4x - 3\sin 5x - 7\cos\left(\dfrac{x}{3} + 3\right)$;

з) $y = \sin\dfrac{4}{5}x + 3\cos\dfrac{7}{8}x + \cos 5x$; *и)* $y = \sin\dfrac{3}{7}x + \cos\dfrac{x}{3} + \operatorname{tg}\dfrac{2x}{5}$.

△ **298.** Испитати следеће функције и нацртати њихове графике:

а) $y = 1 + \sin x$; *б)* $y = \sin x - 1$; *в)* $y = 2 - \cos x$; *г)* $y = \sin(x + \pi)$;

д) $y = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)$; *ђ)* $y = \dfrac{1}{2}(1 + \cos x)$; *е)* $y = |\sin x|$;

ж) $y = \operatorname{tg}(\pi - x)$; *з)* $y = -\operatorname{ctg} x$; *и)* $y = |\operatorname{tg} x|$.

△ **299.** Испитати функцију $y = \sin 2x$ и скицирати њен график.

△ **300.** Испитати и графички приказати функцију $y = \sin\dfrac{2}{3}x$.

△ **301.** Испитати функцију $y = 2\sin\left(\dfrac{2x}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right)$ и скицирати њен график.

△ **302.** Нацртати графике следећих функција:

а) $y = \sin\left(x + \dfrac{1}{2}\right)$; *б)* $y = 3\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{3}\right)$; *в)* $y = 2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{2}\right)$;

г) $y = 2\operatorname{ctg}(3x + 1)$; *д)* $y = \dfrac{1}{2}\operatorname{tg}\left(-2x + \dfrac{\pi}{4}\right)$; *ђ)* $y = \sin|2x|$;

е) $y = 3\sin\left|2x - \dfrac{3\pi}{2}\right|$; *ж)* $y = \left|2\operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$.

△ **303.** Одредити највеће и најмање вредности функција:

а) $y = \sin x + 2$; *б)* $y = 5 - \cos x$; *в)* $y = 5\sin^2 x - 2\cos^2 x$;

г) $y = 4 - 3|\sin x|$; *д)* $y = \dfrac{1}{2 - |\cos x|}$.

△ **304.** Одредити највеће и најмање вредности функција:

а) $y = \sin x \cos x$; *б)* $y = \sin x + \cos x$; *в)* $y = \sin x - \cos x$.

△ **305.** Одредити најмању вредност функције $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x} + \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

5.7 АДИЦИОНЕ ФОРМУЛЕ

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} \quad (\cos\alpha \neq 0,\ \cos\beta \neq 0,\ 1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta \neq 0),$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta} \quad (\sin\alpha \neq 0,\ \sin\beta \neq 0,\ \operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta \neq 0).$$

△ **306.** Израчунати тригонометријске функције угла од 75^o.

△ **307.** Израчунати $\cos(\alpha+\beta)$, ако је $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ и $\cos\beta = \frac{4}{5}$, а α и β су углови у првом квадранту.

△ **308.** Израчунати $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, ако је $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $\operatorname{tg}\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

△ **309.** Доказати: ако су α, β и γ углови троугла, и ако ни један од њих није прав угао, тада је $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

△ **310.** Наћи вредности тригонометријских функција углова од: *а)* 105^o ; *б)* 15^o ; *в)* 165^o ; *г)* 195^o ; *д)* 255^o ; *ђ)* 285^o.

△ **311.** Применом адиционих формула доказати да је:
а) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right) = -\sin\alpha$; *б)* $\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$;
в) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right) = -\operatorname{tg}\alpha$; *г)* $\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$;
д) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right) = -\cos\alpha$; *ђ)* $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$.

△ **312.** Проверити једнакости:
а) $\sin 20^o\cos 10^o + \cos 20^o\sin 10^o = \frac{1}{\sqrt{2}}$;
б) $\cos 47^o\cos 17^o + \sin 47^o\sin 17^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
в) $\cos 20^o\cos 40^o - \sin 20^o\sin 40^o = \frac{1}{2}$;
г) $\sin 53^o\cos 7^o + \cos 53^o\sin 7^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
д) $\frac{1+\operatorname{tg}15^o}{1-\operatorname{tg}15^o} = \sqrt{3}$; *ђ)* $\frac{\operatorname{ctg}55^o\operatorname{ctg}25^o+1}{\operatorname{ctg}25^o-\operatorname{ctg}55^o} = \sqrt{3}$.

△ **313.** Упростити изразе:
а) $\cos\frac{7\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5} + \sin\frac{7\pi}{10}\sin\frac{\pi}{5}$; *б)* $\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{8\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{8\pi}{7}$;
в) $\cos\frac{3\pi}{10}\cos\frac{\pi}{5} - \sin\frac{3\pi}{10}\sin\frac{\pi}{5}$; *г)* $\sin\frac{6\pi}{7}\cos\frac{\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}$.

△ **314.** Израчунати:

а) $\sin(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha-\beta)$,

ако је $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\sin\beta = \frac{8}{17}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$;

б) $\sin(\alpha-\beta)$, $\cos(\alpha-\beta)$, $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$,

ако је $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = -\frac{12}{13}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;

в) $\cos(\alpha-\beta)$, ако је $\sin\alpha = \sin\beta = \frac{5}{13}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \pi$;

г) $\sin(\alpha+\beta)$, ако је $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = -\frac{5}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;

д) $\sin(\alpha+\beta)$ и $\sin(\alpha-\beta)$

ако је $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = -\frac{3}{5}$ и $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$;

ђ) $\cos(\alpha+\beta)$ и $\cos(\alpha-\beta)$ ако је $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$;

е) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$ и $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$, ако је $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

ж) $\sin(\alpha+\beta)$, ако је $\cos\alpha = \cos\beta = -\frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$.

△ **315.** Израчунати:

а) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$, ако је $\sin\alpha = \frac{12}{13}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

б) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, ако је $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{3}$;

в) $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$, ако је $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}$, $\operatorname{tg}\beta = \frac{5}{2}$.

△ **316.** Ако је $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\alpha+\beta = \frac{\pi}{3}$ и $\cos\alpha = \frac{11}{13}$, одредити $\cos\beta$.

△ **317.** Ако је $\alpha-\beta = \frac{\pi}{4}$, $\cos\beta = \frac{17\sqrt{2}}{26}$ и $\frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$, одредити $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

△ **318.** Ако је $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{7}$ и $\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$, одредити $\operatorname{tg}\beta$.

△ **319.** Упростити изразе:

а) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha}$; *б)* $\sin\alpha\cos2\alpha+\cos\alpha\sin2\alpha$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha}$; *г)* $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$;

д) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)-\cos^2\alpha$; *ђ)* $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin^2\alpha$;

е) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$; *ж)* $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$

з) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$; *и)* $\dfrac{\sin 35^o\cos 20^o-\cos 35^o\sin 20^o}{\cos 46^o\cos 29^o-\sin 46^o\sin 29^o}$;

ј) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}}{\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{\pi}{14}+\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{\pi}{14}}$.

△ **320.** Доказати:

а) ако је $\sin\alpha=\frac{8}{17}$, $\sin\beta=\frac{15}{17}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, онда је $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$

б) ако су α и β оштри углови и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{3}$, тада је $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$;

в) ако су α и β оштри углови и $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{1}{\sqrt{2}}$, тада је $\alpha-\beta=\frac{\pi}{4}$;

г) ако је $\operatorname{tg}\alpha=\frac{p}{q}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{q-p}{q+p}$ и $-\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}<\beta<\frac{\pi}{2}$, онда је $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$ или $\alpha+\beta=-\frac{3\pi}{4}$.

△ **321.** Доказати идентитете:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)=\cos\alpha$; *б)* $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}=\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$

в) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=\operatorname{tg}\alpha$; *г)* $\dfrac{\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\cos\alpha\cos\beta}=-\operatorname{ctg}\alpha$;

д) $\sin 5\alpha\cos 3\alpha-\cos 5\alpha\sin 3\alpha=\sin 2\alpha$; *ђ)* $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$

е) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=1$; *ж)* $\sin 25^o\cos 35^o+\cos 25^o\sin 35^o=\frac{\sqrt{3}}{2}$

з) $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta+\sin(\alpha+\beta)\sin\beta=\cos\alpha$; *и)* $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\cos\alpha\cos\beta$;

ј) $\sin^2(\alpha+\beta)=\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$;

к) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$;

л) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=2+2\cos(\alpha-\beta)$;

љ) $\dfrac{2\sin\alpha\cos\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-2\sin\alpha\sin\beta}=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$; *м)* $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\dfrac{\operatorname{ctg}\beta+tg\alpha}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{tg}\alpha}$;

н) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$; *њ)* $\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

о) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$;

п) $\dfrac{\operatorname{tg}(45^o+\alpha^o)-\operatorname{tg}(45^o-\alpha^o)}{\operatorname{tg}(45^o+\alpha^o)+\operatorname{tg}(45^o-\alpha^o)}=2\sin\alpha^o\cos\alpha^o$;

р) $\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}3\alpha\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}\alpha$.

$\triangle$ **322.** Доказати да израз
$A=\sin^2(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta\sin(\alpha+\beta)+\cos^2\beta$ не зависи од β.

$\triangle$ **323.** Доказати да $(2+3\operatorname{tg}^2\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}\beta$, ако је $2\operatorname{tg}\alpha-3\operatorname{tg}\beta=0$.

$\triangle$ **324.** Доказати да је $\alpha+\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{4}$,
ако је $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{12}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{2}{5}$, $\operatorname{tg}\gamma=\dfrac{1}{3}$ и ако су α, β, γ оштри углови.

$\triangle$ **325.** Нека су α и β оштри углови и $\sin\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\sin\beta=\dfrac{1}{2}$. Израчунати $\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$.

$\triangle$ **326.** Израчунати $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)$ ако је $\sin\alpha=0,5$, $\sin\beta=0.4$ и $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$.

$\triangle$ **327.** Израчунати $\operatorname{tg}\alpha$ ако је $\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=2$.

$\triangle$ **328.** Ако су α, β, γ оштри углови и $\cos\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\cos\beta=\dfrac{1}{4}$, $\cos\gamma=\dfrac{1}{5}$, наћи $\sin(\alpha-\beta+\gamma)$.

$\triangle$ **329.** Доказати да израз $Y=\cos^2x+\cos^2(x-\alpha)-2\cos x\cos\alpha\cos(x-\alpha)$ не зависи од x.

$\triangle$ **330.** Ако је $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{5}$, израчунати $\operatorname{tg}\alpha$.

$\triangle$ **331.** Доказати идентитете:

а) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$;

б) $\sin mx=2\sin(m-1)x\cos x-\sin(m-2)x$;

в) $\cos mx=2\cos(m-1)x\cos+x-\cos(m-2)x$.

$\triangle$ **332.** Углови α, β, γ троугла задовољавају услов $\alpha-\beta=3\gamma$.
а) Показати да је $\alpha-\gamma=\dfrac{\pi}{2}$. *б)* Ако је $\sin\gamma=\dfrac{3}{5}$, наћи $\sin\alpha$ и $\sin\beta$.

333. Доказати да је $\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{a^2+b^2-2}{2}$, ако је $\sin\alpha+\sin\beta=a$ и $\cos\alpha+\cos\beta=b$.

334. Доказати да из $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}=1$ и $\cos\beta\neq 0$ следи $\operatorname{tg}^2\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

335. Доказати да је $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, ако су α, β, γ оштри углови и $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha=1$.

336. Ако су α, β, γ углови троугла и важи $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2\gamma$, онда је то правоугли троугао. Доказати.

337. Доказати да је $\dfrac{\sin 20^o\cos 10^o+\cos 160^o\cos 100^o}{\sin 21^o\cos 9^o+\cos 159^o\cos 99^o}=1$.

338. Доказати да $f=\dfrac{p\cos^3\alpha-\cos 3\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{p\sin^3\alpha+\sin 3\alpha}{\sin\alpha}$ не зависи од α за $\sin\alpha\cos\alpha\neq 0$.

339. Израчунати $a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)$ ако се зна да су $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{tg}\beta$ решења једначине $ax^2+bx+c=0$ ($a\neq 0$, $b^2-4ac\neq 0$, $a\neq c$).

340. Доказати: $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}>1+\operatorname{ctg}\alpha$.

341. Доказати:
$\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)=\sin\beta\wedge\cos(\alpha+\beta)\neq 0\wedge\cos\alpha\neq 0\Rightarrow\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=2\operatorname{tg}\alpha$.

342. Доказати:
$a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta=(a+b)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\wedge\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\neq 0\Rightarrow a\cos\beta=b\cos\alpha$.

343. Ако је $n\geq 2$, $n\in N$, доказати идентитет:
$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}3\alpha+\ldots+\operatorname{tg}(n-1)\alpha\operatorname{tg}n\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}n\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}-n$.

344. Доказати да је за сваки природан број n:
$\dfrac{\sin 1}{\cos 0\cos 1}+\dfrac{\sin 1}{\cos 1\cos 2}+\ldots+\dfrac{\sin 1}{\cos(n-1)\cos n}=\operatorname{tg}n$.

* **345.** Доказати: ако су α, β, γ углови једног троугла, тада је $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$.

* **346.** Нека је n природан број и α, β, γ углови једног троугла. Доказати да је $\operatorname{ctg}^n\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}^n\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}^n\dfrac{\gamma}{2}\geq 3^{\frac{n+2}{2}}$.

* **347.** Одредити тангенсе бројева x, y, z
ако је $\operatorname{tg}x:\operatorname{tg}y:\operatorname{tg}z=a:b:c$ и $x+y+z=\pi$,
где су a, b, c позитивни реални бројеви.

* **348.** Израчунати збир
$S_n=1+\dfrac{\cos x}{\cos x}+\dfrac{\cos 2x}{\cos^2 x}+\ldots+\dfrac{\cos nx}{\cos^n x}$ $(\cos x\neq 0)$.

* **349.** Дата је функција $f(x)=A\cos x+B\sin x$ (A и B су константе). Ако постоје реални бројеви x_1 и x_2 такви да разлика x_1-x_2 није

целобројни умножак броја π и да је $f(x_1) = f(x_2) = 0$, доказати да за сваки реалан број x важи $f(x) = 0$.

* **350.** Ако је n природан број, а реалан број $2^n x$ није целобројни умножак броја π, доказати да је

$$\frac{1}{\sin 2x} + \frac{1}{\sin 4x} + \ldots + \frac{1}{\sin 2^n x} = \operatorname{ctg} x - \operatorname{ctg} 2^n x.$$

* **351.** Ако ни један од углова α, β, γ, δ конвексног четвороугла $ABCD$ није прав, доказати да важи једнакост

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma + \operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma \operatorname{tg}\delta} = \operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta + \operatorname{ctg}\gamma + \operatorname{ctg}\delta.$$

* **352.** Која алгебарска релација постоји између α, β, γ ако је тачна једнакост $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$?

353. Ако је $\alpha > 0$, $\beta > 0$ и $\alpha + \beta < \frac{\pi}{2}$, доказати да је $\operatorname{tg}(\alpha + \beta) > \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta$.

5.8 ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ УДВОСТРУЧЕНОГ УГЛА

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0,\ \operatorname{tg}\alpha \neq \pm 1),$$

$$\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{\operatorname{ctg}^2\alpha - 1}{2\operatorname{ctg}\alpha} \quad (\sin\alpha \neq 0,\ \operatorname{ctg}\alpha \neq 0).$$

△ **354.** Ако је $\sin\alpha = 0.8$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, израчунати $\cos 2\alpha, \sin 2\alpha, \operatorname{tg} 2\alpha$.

△ **355.** Извести формулу за $\sin 3\alpha$ у функцији од $\sin\alpha$.

△ **356.** Извести следеће формуле за $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ у функцији од $\operatorname{tg}\alpha$: $\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$, $\cos 2\alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$, ако је $\cos\alpha \neq 0$.

△ **357.** Дато је $\sin\alpha = \frac{7}{8}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Израчунати $\cos 2\alpha$ и $\sin 2\alpha$.

△ **358.** Израчунати $\cos 2\alpha$, $\sin 2\alpha$, $\operatorname{tg} 2\alpha$, ако је:

а) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$; *б)* $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

в) $\cos\alpha = -\frac{5}{13}$, $\sin\alpha > 0$; *г)* $\sin\alpha = 0,6$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

△ **359.** Ако је $\operatorname{tg}\alpha = -2$, израчунати $\operatorname{tg} 2\alpha$.

△ **360.** Ако је $\operatorname{ctg}\alpha = 2$, израчунати $\operatorname{tg} 4\alpha$.

△ **361.** Ако је $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}$, $a>0$, $b>0$, $-\dfrac{\pi}{2}<\alpha<0$, израчунати $\cos 2\alpha$ и $\sin 2\alpha$.

△ **362.** Одредити $\cos 2\alpha$ и $\sin 2\alpha$ ако је $\sin\alpha = \dfrac{m-n}{m+n}$, $m>0$, $n>0$, $m>n$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

△ **363.** Израчунати $\cos(2\alpha-\beta)$, ако је:

а) $\sin\alpha = \dfrac{2}{7}$, $\cos\beta = \dfrac{41}{49}$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, $0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$;

б) $\sin\alpha = 0.8$, $\cos\beta = -\dfrac{5}{13}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, $\dfrac{\pi}{2}<\beta<\pi$.

△ **364.** Скратити разломке:

а) $\dfrac{\sin 10^o}{\sin 20^o}$; *б)* $\dfrac{1-\cos 10^o}{2\sin 10^o}$; *в)* $\dfrac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\alpha}$; *г)* $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin 2\alpha}$;

д) $\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\sin 2\alpha}$; *ђ)* $\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$; *е)* $\dfrac{\cos 20^o}{\cos 10^o+\sin 10^o}$.

△ **365.** Израчунати:

а) $\cos 3\alpha$ као функцију од $\cos\alpha$; *б)* $\operatorname{tg} 3\alpha$ као функцију од $\operatorname{tg}\alpha$.

△ **366.** Доказати идентитете:

а) $\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha} = 2(\cos 2\alpha-\cos 4\alpha)$;

б) $\left(\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}\right)^3+\left(\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}\right)^3 = 8\cos 2\alpha\cos 4\alpha+20\cos 2\alpha$.

△ **367.** Изразити $S=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(\alpha+\dfrac{\pi}{3})+\operatorname{tg}\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)$ помоћу $\operatorname{tg} 3\alpha$.

△ **368.** Доказати да је $\sin 2\alpha < 2\sin\alpha$, ако је $0<\alpha<\pi$.

△ **369.** Упростити изразе:

а) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}$; *б)* $1-8\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;

в) $2\cos^2\alpha-\cos 2\alpha$; *г)* $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\alpha}{2}\right)}$; *д)* $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}+\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\pi)}{1-\operatorname{tg}\alpha}$;

ђ) $1-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha$; *е)* $\cos 4\alpha+2\sin^2 2\alpha$; *ж)* $(\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-\sin^2\alpha)^2$.

△ **370.** Доказати идентитете:

а) $1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha$; *б)* $1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$;

в) $1+\sin 2\alpha = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$; *г)* $1-\sin 2\alpha = 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

д) $\sin 4\alpha = 4\sin\alpha\cos\alpha(1-2\sin^2\alpha)$; *ђ)* $\cos 4\alpha = 8\cos^4\alpha-8\cos^2\alpha+1$;

е) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$; *ж)* $2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha = 1$;

з) $\dfrac{\sin 2\alpha - \sin\alpha}{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$; *и)* $\dfrac{2-\sin 4\alpha \operatorname{tg} 2\alpha}{\sin 4\alpha} = \operatorname{ctg} 2\alpha$;

ј) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = 1 - 0,5\sin^2 2\alpha$; *к)* $\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3 = 8\cos^4\alpha$;

л) $\dfrac{(1-\sin^2 2\alpha)[(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2 + 4\operatorname{tg}^2\alpha]}{(1+\sin^2 2\alpha)[(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2 - 4\operatorname{tg}^2\alpha]} = 1$; *љ)* $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$;

м) $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha+1}{\sin\alpha+\cos\alpha-1} = \dfrac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha}$; *н)* $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-6}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha+2} = \cos 4\alpha$;

њ) $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha = \dfrac{\sin 16\alpha}{16\sin\alpha}$.

△ **371.** Одредити $\sin^2 2\alpha$, ако је $\dfrac{1}{\sin^2\alpha} + \dfrac{1}{\cos^2\alpha} + \dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + \dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha} = 7$.

△ **372.** Шта је веће: $\operatorname{tg} 2\alpha$ или $2\operatorname{tg}\alpha$, ако је $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$?

△ **373.** Наћи минимум функције
$$f(x) = \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2 x} + \frac{1}{\sec^2 x} + \frac{1}{\operatorname{cosec}^2 x}.$$

△ **374.** Доказати:

а) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{1+\cos 2\alpha} = 2\sin\alpha$, $(\cos\alpha \neq 0)$;

б) $\dfrac{\cos\alpha-\cos 3\alpha}{1-\cos 2\alpha} = 2\cos\alpha$, $(\sin\alpha \neq 0)$;

в) $\dfrac{\cos\alpha+\cos 3\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha} = 2\cos\alpha$, $(\cos 2\alpha \neq 0)$;

г) $\dfrac{\sin\alpha-\sin 3\alpha}{2\sin^2\alpha-1} = 2\sin\alpha$, $(\cos 2\alpha \neq 0$.

△ **375.** Нека ка је $S = \sqrt{1-\sin 2\alpha} - \sqrt{1+\sin 2\alpha}$. Доказати:

а) $\dfrac{\pi}{4} \le \alpha \le \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow S = -2\cos\alpha$; *б)* $\dfrac{3\pi}{4} \le \alpha \le \dfrac{5\pi}{4} \Rightarrow S = 2\sin\alpha$;

в) $\dfrac{5\pi}{4} \le \alpha \le \dfrac{7\pi}{4} \Rightarrow S = 2\cos\alpha$; *г)* $-\dfrac{\pi}{4} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow S = -2\sin\alpha$.

△ **376.** Одредити реалне бројеве a и b тако да:

а) за $\dfrac{5\pi}{4} \le \alpha \le \dfrac{7\pi}{4}$ важи: $a\sqrt{1-\sin 2\alpha} + b\sqrt{1+\sin 2\alpha} = \cos\alpha$;

б) за $\dfrac{3\pi}{4} \le \alpha \le \dfrac{5\pi}{4}$ важи: $a\sqrt{1+\sin 2\alpha} + b\sqrt{1-\sin 2\alpha} = \sin\alpha$.

△ **377.** Доказати идентитете:

а) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha$; *б)* $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\alpha} + \dfrac{1}{2}\sin 2\alpha \operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{1}{\cos 2\alpha}$;

в) $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\alpha - 2\operatorname{ctg} 2\alpha$; *г)* $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + 4\operatorname{tg} 4x + 8\operatorname{ctg} 8x = \operatorname{ctg} x$;

д) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2}=\dfrac{\sin 2\alpha}{2(1+\sin 2\alpha)}$; *ђ)* $\dfrac{1-2\cos 2\alpha}{1+2\cos 2\alpha}=\dfrac{3\operatorname{tg}^2\alpha-1}{3-\operatorname{tg}^2\alpha}$.

△ **378.** Ако је $\dfrac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma}=\dfrac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma}$ и ако су β и γ оштри углови, тада је $\beta+\gamma=\dfrac{\pi}{2}$ или $\beta=\gamma$. Доказати.

379. Наћи $\cos 2\alpha$, ако је $\operatorname{tg}^2\alpha-a\operatorname{tg}\alpha+1=0$, $a^2-4>0$ и $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$.

380. Ако је $\cos(\alpha+\beta)=0$, тада је $\sin(\alpha+2\beta)=\sin\alpha$. Доказати.

381. Израчунати $\sin 18^o$.

382. Доказати да је $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7}=-\dfrac{1}{8}$.

383. Израчунати $\sin\dfrac{\pi}{24}\sin\dfrac{5\pi}{24}\sin\dfrac{7\pi}{24}\sin\dfrac{11\pi}{24}$.

384. Израчунати $\dfrac{1}{\sin 10^o}-\dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^o}$.

385. Доказати да је:

а) $\cos 20^o\cos 40^o\cos 80^o=\dfrac{1}{8}$; *б)* $\sin 10^o\sin 50^o\sin 70^o=\dfrac{1}{8}$.

5.9 ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ ПОЛОВИНЕ УГЛА

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}\quad(\cos\alpha\neq-1),$$
$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}\quad(\cos\alpha\neq1).$$

△ **386.** Израчунати тригонометријске функције угла од $\dfrac{\pi}{8}$.

△ **387.** Израчунати $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ ако је: *а)* $\alpha=\dfrac{\pi}{12}$, *б)* $\alpha=\dfrac{\pi}{24}$.

△ **388.** Израчунати: $\sin\dfrac{7\pi}{12}$, $\cos\dfrac{3\pi}{16}$, $\operatorname{tg}\dfrac{11\pi}{24}$.

△ **389.** Наћи $\cos\dfrac{\alpha}{2}$, $\sin\dfrac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ ако је:

а) $\cos\alpha=0,8$, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$; *б)* $\sin\alpha=0,6$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

в) $\sin\alpha=\dfrac{4}{5}$, $-\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<-\pi$; *г)* $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$;

д) $\cos\alpha = \frac{7}{32}, \quad -\pi < \alpha < -\frac{3\pi}{4}$; *ђ)* $\operatorname{tg}\alpha = 3\frac{3}{7}, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

е) $\cos\alpha = -\frac{12}{13}, \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; *ж)* $\cos\alpha = \frac{119}{169}, \quad -\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$;

з) $\sin\alpha = \frac{336}{625}, \quad 450^o < \alpha < 540^o$.

△ **390.** Упростити изразе:

а) $\sqrt{\frac{1+\cos 4\alpha}{2}}$; *б)* $2\sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos\alpha$; *в)* $\sqrt{1+\cos 8\alpha}$;

г) $\sqrt{\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) + 1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + 1}}$; *д)* $\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\alpha$;

ђ) $\frac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha} - \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.

△ **391.** Доказати идентитете:

а) $1 + \sin\alpha^o = 2\cos^2\left(45^o - \frac{\alpha^o}{2}\right)$; *б)* $1 - \sin\alpha^o = 2\sin^2\left(45^o - \frac{\alpha^o}{2}\right)$;

в) $\frac{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}{2\sin\alpha + \sin 2\alpha} = \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$; *г)* $2(1+\cos\alpha) - \sin^2\alpha = 4\cos^4\frac{\alpha}{2}$;

д) $\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} + 1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - 1}\right)^2 = \frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$; *ђ)* $\frac{1+\sin\alpha - \cos\alpha}{1+\sin\alpha + \cos\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

△ **392.** Израчунати $\cos^4\frac{\pi}{8} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}$.

△ **393.** Ако је $\cos\alpha = \frac{a}{b+c}$, $\cos\beta = \frac{b}{a+c}$, $\cos\gamma = \frac{c}{a+b}$, $a+b+c \neq 0$, тада је $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2} = 1$. Доказати.

△ **394.** Доказати идентитете:

а) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8} + \alpha\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{8} - \alpha\right) = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}$;

б) $\cos^2\alpha + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} + \alpha\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{3} - \alpha\right) = \frac{3}{2}$;

в) $\frac{2\cos^2\alpha + 3\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha} = \frac{5-\cos 2\alpha}{1+5\cos 2\alpha}$; *г)* $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

△ **395.** Нека је $\operatorname{tg} 2\alpha = a$ и $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$. Наћи $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$.

△ **396.** Доказати неједнакост: $3\sin^2\alpha \leq 2\sin 2\alpha - 1$.

△ **397.** Ако је $\cos 2\alpha = -\dfrac{63}{65}$, $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\beta = \dfrac{7}{\sqrt{130}}$ и $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$, доказати да је $\alpha + \beta = \dfrac{3\pi}{4}$.

398. Ако је $\cos^2\beta = 1 + \cos 2\alpha$ и $\cos\alpha \neq 0$, тада је $\operatorname{tg}^2\alpha = 1 + 2\operatorname{tg}^2\beta$. Доказати.

399. Израз $\sqrt{4\cos^4\alpha - 6\cos 2\alpha + 3} + \sqrt{4\sin^4\alpha + 6\cos 2\alpha + 3}$ не зависи од α. Доказати.

400. Доказати да је за сваки природан број n број $\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ ирационалан.

401. Доказати да је за сваки реалан број x бар један од бројева $|\sin x|$ и $|\sin(x+1)|$ већи од $\dfrac{1}{3}$.

5.10 ТРАНСФОРМИСАЊЕ ЗБИРА И РАЗЛИКЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА У ПРОИЗВОД

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

△ **402.** Представити дати израз као производ или као количник производа тригонометријских функција:

а) $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$; *б)* $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$; *в)* $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$;

г) $\dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta}$; *д)* $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\alpha - \sin\beta}$; *ђ)* $\dfrac{\cos\alpha + \cos\beta}{\cos\alpha - \cos\beta}$.

△ **403.** Трансформисати у производ израз $1 + 2\sin\alpha$.

△ **404.** Представити дате изразе као производе:

а) $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha$; *б)* $\cos 40^o - \sin 45^o$; *в)* $\sin 41^o - \cos 62^o$;

г) $\sin\dfrac{\pi}{10} - \cos\dfrac{\pi}{12}$; *д)* $\sqrt{3} - 2\sin\alpha$; *ђ)* $1 + 2\cos\alpha$; *е)* $1 - 2\sin\alpha$;

ж) $1 + \sqrt{2}\cos\alpha$; *з)* $1 - \sqrt{2}\sin\alpha$; *и)* $\sqrt{3} + 2\cos 6\alpha$; *ј)* $\sqrt{2}\sin 2\alpha - 1$;

к) $\sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha$; *л)* $\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha$; *љ)* $\sin^2 24^o - \sin^2 6^o$;

м) $3-4\sin^2\alpha$; *н)* $3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$; *њ)* $3\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$;

о) $1-\sin\alpha+\cos\alpha$; *п)* $1-\sin\alpha-\cos\alpha$;

р) $1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)$; *с)* $\cos^2\alpha+\cos^2 2\alpha+\cos^2 3\alpha-1$.

$\triangle$ **405.** Представити као производ:

а) $\cos\alpha+\sin 2\alpha-\cos 3\alpha$; *б)* $2\sin^2\alpha+\sqrt{3}\sin 2\alpha$; *в)* $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha$.

$\triangle$ **406.** Представити дате изразе као производе или као количнике производа тригонометријских функција:

а) $\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}$; *б)* $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; *в)* $\dfrac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}$; *г)* $\dfrac{\cos\alpha+1}{\cos\alpha-1}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha+1}$;

д) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha+1}$; *ђ)* $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}$; *е)* $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\beta}{\operatorname{ctg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta}$;

ж) $\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{tg}^2\beta$; *з)* $\dfrac{\dfrac{1}{\sin\alpha}-\dfrac{1}{\cos\alpha}-\sin\alpha+\cos\alpha}{2+\sin 2\alpha}$; *и)* $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$.

$\triangle$ **407.** Израз $\sin 8\alpha-\sin 6\alpha-\cos 8\alpha\sin 2\alpha$ представи као производ.

$\triangle$ **408.** Доказати: $\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha=4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha$.

$\triangle$ **409.** Доказати идентитете:

а) $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=-\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$; *б)* $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$; *г)* $2(1-\cos\alpha)-\sin^2\alpha=4\sin^4\dfrac{\alpha}{2}$;

д) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

ђ) $\dfrac{\sin\alpha-2\sin 2\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha-2\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$;

е) $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha=$
$=4\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$;

ж) $\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha=\dfrac{\sin 8\alpha}{2\sin\alpha}$;

з) $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)=\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

и) $(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2=4\sin^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}$;

ј) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\operatorname{tg}3\alpha$; *к)* $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha}=\operatorname{tg}4\alpha$.

$\triangle$ **410.** Доказати идентитете:

а) $4\cos^3\alpha=\cos 3\alpha+3\cos\alpha$; *б)* $8\cos^4\alpha=\cos 4\alpha+4\cos 2\alpha+3$;

в) $\dfrac{\cos x+\cos\left(y-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\cos y+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)}=\dfrac{\sin x+\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-y\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)-\sin y}$;

г) $\dfrac{\sin x+\cos(2y-x)}{\cos x-\sin(2y-x)}=\dfrac{1+\sin 2y}{\cos 2y}$; *д)* $\dfrac{\cos^2 2\alpha-4\cos^2\alpha+3}{\cos^2 2\alpha+4\cos^2\alpha-1}=\mathrm{tg}^4\alpha$;

* *ђ)* $\cos^3\alpha+\sin^3\alpha+\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=4\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$;

е) $\dfrac{\sin\alpha+\cos(2\beta-\alpha)}{\cos\alpha-\sin(2\beta-\alpha)}=\mathrm{ctg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\beta\right)$;

ж) $\dfrac{2(\sin 2\alpha+2\cos^2\alpha-1)}{\cos\alpha-\sin\alpha-\cos 3\alpha+\sin 3\alpha}=\mathrm{cosec}\,\alpha$;

з) $\sin\alpha+\sin\left(\alpha+\dfrac{2\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\dfrac{4\pi}{3}\right)=0$; *и)* $\dfrac{\sin\alpha-\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}=\mathrm{tg}\,3\alpha$

ј) $3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha=8\sin^4\alpha$; *к)* $\dfrac{1}{\sin\alpha}+\dfrac{1}{\cos\alpha}=\dfrac{2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin 2\alpha}$;

л) $1+\sin\alpha-\cos\alpha=2\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

△ **411.** Доказати идентитет: $\dfrac{\sin^2 4x}{2\cos x+\cos 3x+\cos 5x}=2\sin x\sin 2x$.

△ **412.** Доказати идентитет: $\sin x+2\sin 3x+\sin 5x=4\sin 3x\cos^2 x$.

△ **413.** Доказати идентитет: $\dfrac{\sin 2t-\sin 3t+\sin 4t}{\cos 2t-\cos 3t+\cos 4t}=\mathrm{tg}\,3t$.

△ **414.** Углови троугла, α, β, γ, задовољавају услов $\alpha+\gamma=2\beta$. Израчунати α, β, γ ако је:

а) збир њихових синуса једнак $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$;

б) збир њихових косинуса једнак $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$.

△ **415.** Ако за углове α, β, γ неког троугла важи

а) $\sin\alpha=\dfrac{\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma}$; *б)* $\cos\alpha+\cos\beta=\sin\gamma$; *в)* $\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{\sin\gamma-\sin(\alpha-\beta)}$

тада је то правоугли троугао. Доказати.

416. Доказати: ако су α, β и γ углови једног троугла, тада важе следеће једнакости:

а) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=1+4\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\beta}{2}\sin\dfrac{\gamma}{2}$;

б) $\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma=4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$;

в) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2(1+\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma)$.

417. Нека су α, β и γ углови троугла. Доказати да је $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1-2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$.

418. Доказати да за углове троугла важе следеће релације:

а) $1+\cos 2\alpha+\cos 2\beta+\cos 2\gamma=4\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$;

б) $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha=1$;

в) $\dfrac{\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha}{\sin\beta+\sin\gamma+\sin\alpha}=\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$;

г) $\cos^2\alpha+\cos^2\beta-\cos^2\gamma=1-2\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$;

д) $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=1$;

ђ) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=4\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}\cos\dfrac{\gamma}{2}$;

е) $\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=-4\cos\dfrac{3\alpha}{2}\cos\dfrac{3\beta}{2}\cos\dfrac{3\gamma}{2}$;

ж) $\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=1-4\sin\dfrac{3\alpha}{2}\sin\dfrac{3\beta}{2}\sin\dfrac{3\gamma}{2}$.

419. Показати да је $\operatorname{tg}9^o-\operatorname{tg}27^o-\operatorname{tg}63^o+\operatorname{tg}81^o=4$.

420. Доказати:

а) $4(\cos^3 20^o+\cos^3 40^o)=3\sqrt{3}\cos 10^o$; *б)* $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{4}$;

в) $\cos\dfrac{\pi}{5}+\cos\dfrac{3\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$; *г)* $\sin\dfrac{3\pi}{10}\cdot\sin\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{1}{4}$; *д)* $\sin\dfrac{3\pi}{10}-\sin\dfrac{\pi}{10}=\dfrac{1}{2}$.

421. Доказати:

а) $\sin 495^o-\sin 795^o+\sin 1095^o=0$; *б)* $\cos 24^o+\cos 48^o-\cos 84^o-\cos 12^o=\dfrac{1}{2}$

в) $\sin 47^o+\sin 61^o-\sin 11^o-\sin 25^o=\cos 7^o$; *г)* $\dfrac{2\cos 40^o-\cos 20^o}{\sin 20^o}=\sqrt{3}$.

* **422.** Ако су α, β, γ углови троугла и ако је $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=\sqrt{3}(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$, тада је бар један од углова α, β, γ једнак $\dfrac{\pi}{3}$. Доказати.

* **423.** Ако су α, β, γ углови троугла и $\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=0$, тада је бар један од тих углова једнак $\dfrac{\pi}{3}$. Доказати.

* **424.** Ако су α, β, γ углови троугла и $\cos 3\alpha+\cos 3\beta+\cos 3\gamma=1$, доказати да је један од углова α, β, γ једнак $\dfrac{2\pi}{3}$.

* **425.** За углове α, β, γ троугла важи $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$. Доказати да је тај троугао правоугли.

* **426.** Ако су α, β, γ углови троугла и ако је

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\gamma}{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=2,$$
доказати да је тај троугао правоугли.

* **427.** Ако је $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ и ако је n непаран природан број, доказати да је $\sin n\alpha+\sin n\beta+\sin n\gamma=4\cdot(-1)^{\frac{n-1}{2}}\cos\frac{n\alpha}{2}\cos\frac{n\beta}{2}\cos\frac{n\gamma}{2}$.

428. Доказати:
$\sin\alpha+\sin\beta=a\wedge\cos\alpha+\cos\beta=b\wedge a^2+b^2\neq 0\Rightarrow$
$\Rightarrow\cos(\alpha+\beta)=-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\wedge\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$.

429. Доказати:
$bd\neq 0\wedge ad+bc\neq 0\wedge\dfrac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\dfrac{a}{b}\wedge\dfrac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\dfrac{c}{d}\Rightarrow$
$\Rightarrow\cos(\alpha-\beta)=\dfrac{ac+bd}{ad+bc}$.

* **430.** Каква алгебарска релација постоји између α, β, γ, ако је
$\operatorname{ctg}\alpha+\dfrac{\cos\beta}{\sin\alpha\cos\gamma}=\operatorname{ctg}\beta+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\beta\cos\gamma}$?

* **431.** Доказати да је
а) $\operatorname{tg}\alpha^o+\operatorname{tg}(\alpha^o+60^o)+\operatorname{tg}(\alpha^o+120^o)=3\operatorname{tg}3\alpha^o$, ако је
$\cos\alpha^o\neq 0,\ \cos 2\alpha^o\neq 0,\ \cos 3\alpha^o\neq 0,\ \cos(\alpha^o+60^o)\neq 0,\ \cos(\alpha^o+120^o)\neq 0$.
б) $\operatorname{tg}1^o+\operatorname{tg}5^o+\operatorname{tg}9^o+\ldots+\operatorname{tg}177^o=45$.

* **432.** Ако су α, β, γ углови једног троугла и ниједан од њих није туп, доказати да је $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma>\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$.

* **433.** Ако су α, β, γ углови једног троугла, доказати неједнакост: $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma\leq\dfrac{3}{2}$.

434. Нека су α, β, γ углови троугла. Доказати неједнакост:
$$\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+5}\leq 4\sqrt{3}.$$

* **435.** Ако су α, β, γ углови троугла, доказати да је
$$\frac{\sqrt{\sin\alpha}}{\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}-\sqrt{\sin\alpha}}+\frac{\sqrt{\sin\beta}}{\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\gamma}-\sqrt{\sin\beta}}+$$
$$+\frac{\sqrt{\sin\gamma}}{\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}-\sqrt{\sin\gamma}}\geq 3.$$

* **436.** Одредити најмању и највећу вредност функције
$f(x,y)=\cos x+\cos y-\cos(x+y)$.

* **437.** Ако је n природан број и x није целобројни умножак броја π, онда је

$$\frac{1}{\cos x+\cos 3x}+\frac{1}{\cos x+\cos 5x}+\ldots+\frac{1}{\cos x+\cos(2n+1)x}=$$
$$=\frac{\operatorname{tg}(n+1)x-\operatorname{tg} x}{2\sin x}.$$

* 438. Доказати да не постоји троугао за чије углове би важила релација $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma$.

* 439. Нека је $\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3=0$ и $\cos x_1+\cos x_2+\cos x_3=1$. Доказати да за неки $x_i\in\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$ важи: $\sin x_i=0$ и $\cos x_i=1$.

* 440. Колико решења има систем једначина

$$\begin{aligned}&\cos x_1=x_2\\&\cos x_2=x_3\\&\ldots\\&\ldots\\&\ldots\\&\cos x_{n-1}=x_n\\&\cos x_n=x_1?\end{aligned}$$

* 441. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост $|\sin 1|+|\sin 2|+\ldots+|\sin(3n-1)|+|\sin 3n|>\frac{8n}{5}$.

5.11 ТРАНСФОРМИСАЊЕ ПРОИЗВОДА ТРИГОНОМЕТРИЈСКИХ ФУНКЦИЈА У ЗБИР (ИЛИ РАЗЛИКУ)

$$\boxed{\begin{aligned}\sin\alpha\cos\beta&=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],\\ \cos\alpha\cos\beta&=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],\\ \sin\alpha\sin\beta&=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)].\end{aligned}}$$

△ 442. Трансформисати у збир израз $\cos 4\alpha\cos 5\alpha$.

△ 443. Трансформисати у збир израз $\sin 5\alpha\cos 3\alpha\cos 6\alpha$.

△ 444. Трансформисати израз $\sin^3\alpha\cos^2\alpha$ у збир.

△ 445. Представити следеће изразе у облику збира тригонометријских функција:
а) $\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma$; *б)* $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$; *в)* $\cos\alpha\cos(\alpha+1)$;
г) $2\sin 15^o\cos 10^o$; *д)* $4\sin 25^o\cos 15^o\sin 5^o$; *ђ)* $8\cos 1^o\cos 2^o\cos 4^o\cos 8^o$;
е) $\sin 5\alpha\sin 3\alpha$; *ж)* $\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)$; *з)* $\cos(\alpha+\beta)\cos(2\alpha+\beta)$;
и) $\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$; *ј)* $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha\sin\frac{3\alpha}{2}$; *к)* $2\cos 4\cos 3$;

л) $2\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$.

△ **446.** Представити следеће изразе у облику збира тригонометријских функција:
а) $\sin^2\alpha$; *б)* $\cos^2\alpha$; *в)* $\sin^3\alpha$; *г)* $\cos^3\alpha$; *д)* $\cos^5\alpha$;
ђ) $\sin^4\alpha$; *е)* $\cos^4\alpha$; *ж)* $\sin^5\alpha$; *з)* $\sin^2\alpha\cos^3\alpha$; *и)* $\sin^4\alpha\cos^2\alpha$.

△ **447.** Израчунати:
а) $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}$; *б)* $2\cos\frac{5\pi}{12}\sin\frac{\pi}{12}$; *в)* $\sin\frac{11\pi}{12}\sin\frac{7\pi}{12}$; *г)* $\cos\frac{5\pi}{12}\cos\frac{11\pi}{12}$;
д) $4\sin\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)-2\cos 2$; *ђ)* $\cos^2 3+\cos^2 1-\cos 4\cos 2$.

△ **448.** Доказати идентитете:
а) $4\sin\alpha^o\sin(60^o-\alpha^o)\sin(60^o+\alpha^o)=\sin 3\alpha^o$;
б) $\sin(60^o-\alpha^o)\sin(60^o+\alpha^o)=\frac{1}{4}(1+2\cos 2\alpha^o)$;
в) $2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}=2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1$; *г)* $\sin^2\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}(\cos\alpha-\cos 3\alpha)$;
д) $\sin^3\alpha\cos\alpha=\frac{1}{8}(2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha)$;
ђ) $\sin^2\cos^3\alpha=\frac{1}{16}(2\cos\alpha-\cos 3\alpha-\cos 5\alpha)$;
е) $\sin^3\alpha\cos^3\alpha=\frac{1}{32}(3\sin 2\alpha-\sin 6\alpha)$;
ж) $4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha=\sin 2\alpha+\sin 4\alpha-\sin 6\alpha$;
з) $4\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=\cos 2\alpha+\cos 2\beta-\cos 2(\alpha+\beta)-1$;
и) $\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos 2\alpha=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cos 4\alpha$;
ј) $\frac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\frac{\sin\beta}{\sin\alpha}$.

△ **449.** Показати да израз $A=\cos^2\beta+\cos^2(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta)$ не зависи од β.

△ **450.** Нека је $\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=m$. Наћи $\cos x$.

△ **451.** Израчунати $\cos 2\alpha$ ако је $\sin 3\alpha\sin\alpha=k$ $(k\in\mathbf{R})$.

452. Показати да је $\frac{1}{2\sin 10^o}-2\sin 70^o=1$.

453. Доказати: ако су α, b, γ, δ углови неког четвороугла, тада важи једнакост:
$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\delta}{2}.$$

454. Доказати:
$$\cos\alpha\neq 0\wedge\cos\frac{\beta}{2}\neq 0\wedge\cos\theta=\cos\alpha\cos\beta\Rightarrow\operatorname{tg}\frac{\theta+\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta-\alpha}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}.$$

* **455**. Доказати неједнакост $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2} \geq \operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, под условом да је $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, и $0 < \beta < \dfrac{\pi}{2}$.

456. Доказати да је $\sin 1^o$ ирационалан број.

* **457**. Доказати да за $x \in \mathbf{R}$, $\sin\dfrac{x}{2} \neq 0$, и $n \in \mathbf{N}$ важи:

а) $\cos x + \cos 2x + \ldots + \cos nx = \dfrac{\cos\dfrac{n+1}{2}x \sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$;

б) $\sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \dfrac{\sin\dfrac{n+1}{2}x \sin\dfrac{n}{2}x}{\sin\dfrac{x}{2}}$.

458. Доказати да за $\cos\dfrac{x}{2} \neq 0$ важи једнакост

$$\sin x - \sin 2x + \sin 3x - \ldots + (-1)^{n-1}\sin nx = -\frac{\sin\dfrac{(n+1)(x+\pi)}{2}\sin\dfrac{n(x+\pi)}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}}.$$

* **459**. Доказати идентитет $\sin\alpha + \sin 3\alpha + \sin 5\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha = \dfrac{\sin^2 n\alpha}{\sin\alpha}$, где је n природан број и $\sin\alpha \neq 0$.

* **460**. Доказати да за сваки природан број n важи

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \sin\frac{6\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{2n\pi}{n} = 0.$$

* **461**. Ако је n природан број већи од 1, доказати да је

$$\cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \cos\frac{6\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{2n\pi}{n} = 0.$$

* **462**. Доказати да за $x \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, и $n \in \mathbf{N}$ важи неједнакост

$$|\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \ldots + (-1)^{n-1}\cos nx| \leq \frac{1}{|\cos\dfrac{x}{2}|}.$$

463. Доказати да је

$$\frac{\sin\alpha + \sin 3\alpha + \ldots + \sin(2n-1)\alpha}{\sin\alpha} \geq 0 \text{ за свако } \alpha \neq k\pi,\ k \in \mathbf{Z},\ n \in \mathbf{N}.$$

* **464**. Доказати да за сваки природан број n важи неједнакост

$$\frac{\cos(n+1)x}{\cos nx} < \cos^{2n+1}x, \text{ ако је } 0 < (n+1)x < \frac{\pi}{2}.$$

* **465**. Доказати да је

$$\sqrt[44]{\operatorname{tg}1^o \cdot \operatorname{tg}2^o \cdot \ldots \operatorname{tg}44^o} < \operatorname{tg}22^o30' < \frac{1}{44}(\operatorname{tg}1^o + \operatorname{tg}2^o + \ldots + \operatorname{tg}44^o).$$

* **466.** Доказати да за произвољне реалне бројеве x, y, z важи једнакост

$1-\cos^2 x-\cos^2 y-\cos^2 z+2\cos x\cos y\cos z=$

$=4\sin\dfrac{x+y+z}{2}\sin\dfrac{x+y-z}{2}\sin\dfrac{x-y+z}{2}\sin\dfrac{-x+y+z}{2}.$

* **467.** Ако је $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$, и ако су углови α, β, γ оштри, доказати да је $\alpha+\beta+\gamma<\pi$.

468. Доказати:

а) $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=\dfrac{1}{2}$;

б) $\cos 55^o\cos 65^o+\cos 65^o\cos 175^o+\cos 175^o\cos 55^o=-\dfrac{3}{4}$;

в) $\sin 20^o\ \sin 40^o\sin 80^o=\dfrac{\sqrt{3}}{8}$;

г) $\sin 10^o\sin 20^o\sin 40^o\cos 10^o\cos 20^o\cos 40^o=\dfrac{\sqrt{3}}{64}$

д) $\operatorname{tg}20^o\operatorname{tg}40^o\operatorname{tg}80^o=\sqrt{3}$; *ђ)* $\operatorname{tg}10^o\operatorname{tg}50^o\operatorname{tg}70^o=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

е) $\operatorname{tg}55^o\operatorname{tg}65^o\operatorname{tg}75^o=\operatorname{tg}85^o$; *ж)* $\operatorname{tg}^2 10^o+\operatorname{tg}^2 50^o+\operatorname{tg}^2 70^o=9$.

5.12. ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Ако је a дати број и $|a|\leq 1$, тада јединствено решење једначине $\sin x=a$ које припада интервалу $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ називамо "аркус синус a" и обележавамо са $\arcsin a$, а јединствено решење једначине $\cos x=a$ које лежи у интервалу $[0,\pi]$ називамо "аркус косинус a" и обележавамо са $\arccos a$. За произвољан реалан број a, једнинствено решење једначине $\operatorname{tg}x=a$ у интервалу $\left(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right)$ називамо "аркус тангенс a" и обележавамо са $\operatorname{arctg}a$, док јединствено решење једначине $\operatorname{ctg}x=a$ у интервалу $(0,\pi)$ називамо "аркус котангенс a" и обележавамо са $\operatorname{arcctg}a$.

Скупови решења основних тригонометријских једначина прегледно су приказани таблицом на слици 15.

△ **469.** Решити једначине: *а)* $\sin x=\dfrac{1}{2}$; *б)* $\cos x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

△ **470.** Решити једначине: *а)* $\operatorname{tg}x=-\sqrt{3}$; *б)* $\operatorname{ctg}x=1$.

△ **471.** Решити једначину: $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)=-\dfrac{1}{2}$.

△ **472.** Решити једначине:

а) $\sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; *б)* $\cos x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; *в)* $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$;

г) $\operatorname{ctg} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; *д)* $\sin x = \sin\dfrac{\pi}{10}$.

Једначина	**Решења**
$\sin x = a,\quad \lvert a\rvert \le 1$	$(-1)^k \arcsin a + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
$\cos x = a,\quad \lvert a\rvert \le 1$	$\pm\arccos a + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{tg} x = a$	$\operatorname{arcctg} a + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$
$\operatorname{ctg} x = a$	$\operatorname{arcctg} a + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

Сл. 15.

△ **473.** Написати општи облик бројева x који задовољавају једначину:

а) $\sin 9x = \dfrac{1}{2}$; *б)* $\cos 6x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; *в)* $\operatorname{tg} 5x = 1$; *г)* $\operatorname{ctg} 12x = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$;

д) $\cos\left(6x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; *ђ)* $\sin\left(8x + \dfrac{\pi}{6}\right) = -1$; *е)* $\operatorname{tg}\left(3x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

△ **474.** Решити следеће једначине:

а) $\sin^2 x = \dfrac{1}{4}$; *б)* $\sin\lvert x\rvert = 1$; *в)* $\lvert\sin x\rvert = 1$; *г)* $4\sin^2 x - 3 = 0$;

д) $1 - 4\cos^2 x = 0$; *ђ)* $\cos\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0$;

е) $\sin 3x \sin(1 - x) = 0$; *ж)* $\sin\dfrac{x}{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 0$.

△ **475.** Да ли следеће једначине имају решења:

а) $\sin x \cos x = 2$; *б)* $\cos x \operatorname{tg} x = -2$; *в)* $\sin x \sin 3x = 1$; *г)* $\cos(\cos x) = \dfrac{1}{2}$?

△ **476.** Решити по x једначине:

а) $\sin x = \sin\alpha$; *б)* $\cos x = \cos\alpha$; *в)* $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\alpha$; *г)* $\operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}\alpha$.

△ **477.** Решити једначине:

а) $\sin x = \cos x$; *б)* $\operatorname{tg}\lvert x - 2\rvert = -1$; *в)* $\sin^2 x + 2\sin x = 0$;

г) $2\sin x\cos x - \sin x = 0$; *д)* $\cos 3x + \cos 5x = 0$;

ђ) $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = -\sqrt{2}$; *е)* $\cos 2x - \sqrt{2}\sin x \cos 2x = 0$;

ж) $\operatorname{tg} 3x \cos x = 0$; *з)* $3\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x = 0$.

△ **478.** Решити једначину $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \sin\alpha$, где је αдати реалан број.

△ **479.** Решити једначине:
а) $2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$; *б)* $\cos x + \cos 2x = 0$;
в) $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$; *г)* $2\sin^2 x + 2\sin x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3}$.

△ **480.** Решити једначину: $\sin\dfrac{3x}{2}\cos x = 0$.

△ **481.** Решити једначину: $(1 - \operatorname{tg} x)(1 + \sin 2x) = 1 + \operatorname{tg} x$.

△ **482.** Решити једначину: $\cos^6 x + \sin^6 x = 4\sin^2 2x$.

△ **483.** Решити једначине:
а) $3\sin^2 x - 4\sin x\cos x + \cos^2 x = 0$; *б)* $\sin^2 x + \dfrac{1}{2}\sin 2x = 1$;
в) $2\sin^2 x + (\sqrt{3}-1)\cos x(\sin x - \cos x) = 1$; *г)* $3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin 2x + 7\cos^2 x = 1$.

△ **484.** Решити једначине:
а) $\cos\dfrac{\pi}{6}\sin x + \sin\dfrac{\pi}{6}\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; *б)* $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1$.

△ **485.** Решити једначине:
а) $4\sin x - 3\cos x = 2$; *б)* $2\sin x + \cos x = \sqrt{7}$.

△ **486.** Решити следеће тригонометријске једначине:
а) $\cos\left(\dfrac{x}{3} + \dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{2}{9}$; *б)* $\cos^2\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{3}{4}$; *в)* $\operatorname{tg}^2\left(7x + \dfrac{\pi}{4}\right) = 1$;
г) $\sin^2 3x = \dfrac{3}{4}$; *д)* $\cos^2\left(6x + \dfrac{\pi}{6}\right) = 2$; *ђ)* $\operatorname{tg}\dfrac{x}{7} = 1$;
е) $\sin 3x\cos 2x\operatorname{tg} 7x = 0$; *ж)* $\sin 4x = -\cos 5x$; *з)* $\operatorname{tg} 4x = -\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$;
и) $\sin 17x = -\sin 13x$; *ј)* $\cos 6x = -\cos a$;
к) $\sin\left(x + \dfrac{3\pi}{2}\right) = -\cos(x + 6\pi)$; *л)* $\cos\dfrac{x}{5} = -\cos\dfrac{x}{2}$.

△ **487.** Решити једначине:
а) $5\sin^2 x - 9\sin x + 4 = 0$; *б)* $2\sin^2 x = 3\cos x$; *в)* $2\cos^2 x = \sin^2 x - 1$;
г) $\sin^3 x + \sin x = 0$; *д)* $\sin^2 x - \cos^2 x - 3\sin x + 2 = 0$; *ђ)* $2\operatorname{tg} x + 3\operatorname{ctg} x - 5 = 0$
е) $4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0$; *ж)* $\sin^2 2x - 3\sin 2x + 2 = 0$;
з) $\operatorname{tg}^2 4x + 3\operatorname{tg} 4x - 4 = 0$; *и)* $\cos^2 3x - \dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{2}\cos 3x + \dfrac{\sqrt{6}}{4} = 0$;
ј) $\sin^2 2x + 2\cos^2 2x = \dfrac{7}{4}$.

△ **488.** Наћи она решења једначине $4\sin 2x\cos 2x + 1 = 0$ која задовољавају услов $0 < x < \pi$.

△ **489.** Одредити све реалне бројеве x за које је
$\sin x + \cos x = \dfrac{3}{2}$, (ако такви бројеви постоје).

△ **490.** Решити једначине:

а) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{7}{2}\sin x \cos x$; *б)* $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$;
в) $2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$; *г)* $(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \sin 2x) = 1$;
д) $\sin 3x \sin 2x = \sin 11x \sin 10x$; *ђ)* $\cos x \cos 3x = \cos 5x \cos 7x$;
е) $\cos x \sin 5x = \frac{1}{2}\sin 4x$; *ж)* $\cos 2x \cos 3x = \cos 5x$;
з) $\sin 6x + \sin 4x = 0$; *и)* $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$;
ј) $\cos x = \cos 3x + 2\sin 2x$; *к)* $1 + \cos x + \cos 2x + \cos 3x = 0$.

△ **491.** Одредити решења једначине $\cos 2x + \cos 8x - \cos 6x = 1$, која задовољавају услов $0 < x < \frac{\pi}{2}$.

△ **492.** Решити једначине:

а) $5\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 36\cos^2 x = 0$; *б)* $2\sin^2 x - 5\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$;
в) $\sin^2 x - 4\sin x \cos x + 3\cos^2 x = 0$.

△ **493.** Решити једначине:

а) $\sqrt{3}\sin x + \cos x = 1$; *б)* $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2$; *в)* $\sin x + \sqrt{3}\cos x = -\sqrt{2}$;
г) $\sqrt{2}\sin x - \sqrt{2}\cos x = 1$; *д)* $12\cos x - 5\sin x = -13$; *ђ)* $\sin x + \cos x = 1$;
е) $4\sin x - 6\cos x = 1$; *ж)* $\sin 13x + \cos 13x = \sqrt{2}\sin 17x$.

△ **494.** Решити следеће тригонометријске једначине:

а) $\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; *б)* $\sin x \cos x = \frac{1}{2}$;
в) $\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = \frac{1}{4}$; *г)* $\operatorname{tg}^3 x + \frac{1}{\cos^2 x} - 3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - 4 = 0$;
д) $(\cos x + \sin x)^2 = \cos 2x$; *ђ)* $\cos\frac{x}{2} - \cos x = 1$; *е)* $\sin^4 x - \cos^4 x = \frac{1}{2}$;
ж) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$; *з)* $1 - \sin x = \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right)$; *и)* $\frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin x} = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$;
ј) $\sin x + \cos x + 2\sin x \cos x = 1$; *к)* $\cos x - \cos 3x = \sin 2x$;
л) $\cos x - 2\cos 3x + \cos 5x = 0$; *љ)* $5(\sin x + \cos x)^2 - 12(\sin x + \cos x) + 7 = 0$;
м) $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos x$; *н)* $\sin^4 x + \cos^4 x = 1$.

△ **495.** Има ли смисла једначина $\sin(2 - 3x) - 2\sqrt{2}\cos(2 - 3x) = 4$?

△ **496.** За које вредности параметра λ једначина $\sin x + 2\cos x = \lambda$ има смисла?

△ **497.** Решити једначине:

а) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x = 0$; *б)* $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0$;
в) $2\sin^2 2x + 5\sin 2x - 3 = 0$; *г)* $\sin^2 x + 7\cos x - 13 = 0$;
д) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$;
ђ) $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

△ **498.** Решити једначине:
а) $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 16\cos 2x$; *б)* $\cos 3x - 2\cos 2x + \cos x = 0$;
в) $\sin x + \sin 3x = 4\cos^3 x$; *г)* $\sin x + \sin 2x = \cos x + \cos 2x$;
д) $1+\sin 2x = \sin x + \cos x$; *ђ)* $\cos 3x \cos 4x + \sin 2x \sin 5x = \frac{1}{2}(2\cos 2x + \cos 4x)$.

499. Показати да једначина $\sin x \sin 2x \sin 3x = 1$ нема решења.

500. Решити једначине:
а) $\sin x \cos^3 x - \sin^3 x \cos x = \frac{1}{8}$; *б)* $\sin^3 x + \cos^3 x = 1 - \frac{1}{2}\sin 2x$.

501. Решити једначину $\sin\left(\frac{\pi}{10} + \frac{3x}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{10} - \frac{x}{2}\right)$.

502. Решити једначину $\cos^2 x + \cos^2 2x - \cos^2 3x - \cos^2 4x = 0$.

503. Решити једначину $\sin x - \cos x - |\sin x + \cos x| = 1$.

* **504.** Дата је једначина $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x - m \operatorname{tg} 2x = 0$, где је m реалан параметар.
а) Доказати да су решења ове једначине уједно и решења једначине

$$\sin 2x[2m\cos^2 2x + (m+2)\cos 2x - m] = 0.$$

Решити дату једначину ако је $m = -1$.

505. Решити једначину $\sin 2x + \operatorname{tg} x + 2 = 0$.

* **506.** Решити једначину $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^2 3x = 1$.

507. Дати су реални бројеви a, b, c такви да је $a^2 + b^2 \neq 0$. Доказати да бар једна од једначина $a\sin x + b\cos x + c = 0$ и $a \operatorname{tg} x + b \operatorname{ctg} x + 2c = 0$ има решења.

* **508.** Решити једначину: $\sin x + \cos x + \sin x \cos x = 1$.

509. Доказати да за све реалне бројеве x и y важи: $\cos x^2 + \cos y^2 - \cos xy < 3$.

510. Доказати: ако су α и β решења једначине $a\cos x + b\sin x = c$, $(a,\ b,\ c \in \mathbf{R},\ a^2 + b^2 \neq 0,\ c \leq a^2 + b^2)$,
тада је $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 1$ или $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{c^2}{a^2+b^2}$.

511. Решити једначину $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1-\cos x}{1-|\sin x|}$.

512. Решити једначину $\sin^4 x - \cos^7 x = 1$.

513. Одредити све парове $(m,\ n)$ природних бројева такве да важи $\left(\sin\frac{\pi}{2m}\right)^n = \sin\frac{\pi}{m+4}$.

* **514.** Решити једначину $(a-1)\left(\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin x\cos x}\right)=2$, где је a реалан параметар.

* **515.** Решити једначину $\sin^{10}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+\cos^{10}\left(\frac{\pi}{6}-x\right)=a$ $(a\in\mathbf{R})$.

* **516.** Наћи сва решења једначине $\sin^{2m}x+\cos^{2n}x=1$, где су m и n природни бројеви од којих је бар један већи од 1.

* **517.** Решити једначину $\cos^n x-\sin^n x=1$, ако је n дати природан број.

* **518.** Нека су $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ реалне константе, x реална променљива и $f(x)=\cos(a_1+x)+\frac{\cos(a_2+x)}{2}+\frac{\cos(a_3+x)}{2^2}+\ldots+\frac{\cos(a_n+x)}{2^{n-1}}$. Доказати да из $f(x_1)=f(x_2)=0$ следи да је $x_1-x_2=m\pi$ за неки цео број m.

5.13 ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ

△ **519.** Решити неједначине: *а)* $\sin x\geq\frac{\sqrt{3}}{2}$; *б)* $\cos x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

△ **520.** Решити неједначину $\operatorname{tg}^2 x>3$.

△ **521.** Испитати знак функције $y=\cos^2 x+\frac{3\sqrt{2}}{2}\cos x+1$.

△ **522.** За које бројеве x постоји "y" ако је
а) $y=\sqrt{1+\operatorname{tg}x}$; *б)* $y=\sqrt{1-\operatorname{tg}x}$.

△ **523.** Решити неједначине:
а) $2\sin x-1<0$; *б)* $2\cos x+1>0$; *в)* $\operatorname{tg}x-\sqrt{3}\leq 0$;
г) $\operatorname{ctg}x-\sqrt{3}>0$; *д)* $2\sin x+\sqrt{3}>0$; *ђ)* $\sin x-\cos x>0$;
е) $\sin x+4\cos x>1$; *ж)* $\operatorname{tg}^2 x-1>0$; *з)* $\sin x+\sqrt{3}\cos x>1$.

△ **524.** Решити на интервалу $[0,2\pi]$ следеће неједначине:
а) $(\sin x+1)(2\cos x-1)>0$; *б)* $\cos x\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)<0$.

△ **525.** Испитати знак функције за $0\leq x\leq 2\pi$:
а) $y=3\sin^2 x-10\sin x+3$; *б)* $y=6-\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}^2 x$.

△ **526.** Доказати да за свако $x\in\mathbf{R}$ важи неједнакост:
$|\sin x|+|\cos x|\geq 1$.

△ **527.** За које вредности x важи неједнакост $\sin^2 x>\sin 2x$?

△ **528.** Доказати да за сваки реалан број x важи

$3 + 4\cos x + \cos 2x \leq 0,$
и наћи све вредности x за које је тачна одговарајућа једнакост.

529. Доказати да за сваки реалан број x важи
$\sin(\sin x + \cos x) < \cos\dfrac{\pi}{24}$.

530. Шта је веће: $\cos(\sin x)$ или $\sin(\cos x)$?

* **531.** Наћи сва реална решења x $(0 < x < 2\pi)$ неједначине
$\dfrac{\sin x + \sin 3x + \sin 5x}{\cos x + \cos 3x + \cos 5x} > 1.$

* **532.** Одредити све вредности x из интервала $[0, 2\pi]$ за које важи неједнакост $2(\cos^2 x - \sqrt{3}\sin^2 x) > (\sqrt{3} - 1)\sin 2x$.

* **533.** Решити неједначину: $(1 + \sqrt{3})\sin 2x + 2\cos^2 x \geq 2(1 + \sqrt{3}\cos^2 x)$.

* **534.** Одредити све вредности x које припадају сегменту $[0, 2\pi]$ и задовољавају неједнакости $2\cos x \leq \left| \sqrt{1 + \sin 2x} - \sqrt{1 - \sin 2x} \right| \leq \sqrt{2}$.

* **535.** Одредити све парове бројева (x, y) за које је:
$|\sin x - \sin y| + \sin x \sin y \leq 0$.

* **536.** Бројеви a и b су такви да неједначина $a\cos x + b\cos 3x > 1$ нема решења. Доказати да је $|b| \leq 1$.

* **537.** Нека су a, b, A, B реални бројеви и
$f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - A\cos 2x - B\sin 2x$.
Ако је $f(x) \geq 0$ за сваки реалан број x, доказати да је
$a^2 + b^2 \leq 2$ и $A^2 + B^2 \leq 1$.

5.14 ИНВЕРЗНЕ ТРИГОНОМЕТРИЈСКЕ ФУНКЦИЈЕ

538. Израчунати: *а)* $\cos\left(\arcsin\left(-\dfrac{1}{2}\right)\right)$; *б)* $\operatorname{tg}\left(\arcsin\dfrac{12}{13}\right)$.

539. Израчунати:

а) $\sin(2\arccos\dfrac{3}{5})$; *б)* $\sin(2\operatorname{arctg}\dfrac{3}{4})$; *в)* $\operatorname{ctg}(2\arcsin\dfrac{2}{3})$;

г) $\operatorname{tg}(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{5}{13})$; *д)* $\cos(2\arcsin\dfrac{4}{5})$; *ђ)* $\operatorname{tg}(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{2})$.

540. Израчунати:

а) $\cos(\arcsin\dfrac{4}{5} + \arccos\dfrac{12}{13})$; *б)* $\sin(\arcsin\dfrac{3}{5} + \arccos\dfrac{8}{17})$;

в) $\sin(2\operatorname{arctg}\dfrac{1}{5} - \operatorname{arctg}\dfrac{5}{12})$.

541. Израчунати:

а) $\arcsin(\cos\frac{13\pi}{8})$; *б)* $\arccos(\cos\frac{9\pi}{8})$; *в)* $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\frac{17\pi}{10})$;

г) $\operatorname{arctg}3+\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; *д)* $\arccos(\sin(-\frac{\pi}{7}))$; *ђ)* $\arcsin(\cos\frac{33\pi}{5})$.

542. Доказати: *а)* ако је $|x|\leq 1$ тада је $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$;

б) ако је $|x|\leq 1$, онда је $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$;

в) $\operatorname{arctg}(-x)=-\operatorname{arctg}x$; *г)* $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arcctg}x=\frac{\pi}{2}$;

д) за $x>0$ је $\operatorname{arcctg}x=\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$; *ђ)* $\sin(\operatorname{arctg}x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$;

е) за $0\leq x\leq 1$ је $2\arccos x-\arccos(2x^2-1)=0$.

543. Доказати да:

а) за $|x|\leq 1$, $|y|\leq 1$ и $x\cdot y\geq 0$ важи:

$\arcsin x-\arcsin y=\arcsin(x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2})$;

б) за $x\cdot y\geq 0$ важи $\operatorname{arcctg}x-\operatorname{arcctg}y=\operatorname{arcctg}\frac{x-y}{1+xy}$;

в) за $-1\leq x<1$ и $-1<y\leq 1$ је: $\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}y=\operatorname{arctg}\frac{x+y}{1-xy}$;

г) за $x>1$ и $y\geq 1$ важи: $\operatorname{arcctg}x+\operatorname{arcctg}y=\frac{xy-1}{x+y}$;

д) за $|x|\leq 1$ важи: $\sin(\frac{1}{2}\arcsin x)=\frac{x}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}$;

ђ) за $|x|\leq 1$ важи: $\cos(\frac{1}{2}\arcsin x)=\frac{|x|}{\sqrt{2(1-\sqrt{1-x^2})}}$;

е) ако је $0<x<1$ и $\alpha=2\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$ и $\beta=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$ онда је $\alpha+\beta=\pi$.

544. Доказати да је:

а) $\operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}3=\frac{3\pi}{4}$; *б)* $\operatorname{arctg}3-\operatorname{arcctg}(-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{4}$;

в) $\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}-\arccos\frac{\sqrt{6}+1}{2\sqrt{3}}=\frac{\pi}{6}$;

г) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\operatorname{arctg}(\sqrt{2}+1)^2$;

д) $\operatorname{arctg}\frac{2}{11}+2\operatorname{arctg}\frac{1}{7}=\operatorname{arctg}\frac{1}{2}$; *ђ)* $\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+2\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{\pi}{4}$;

е) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}+\operatorname{arctg}\frac{1}{5}+\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

545. Наћи везу између $\arcsin\cos\arcsin x$ и $\arccos\sin\arccos x$.

546. Доказати да је:

$\operatorname{arcctg}3+\operatorname{arcctg}5+\ldots+\operatorname{arcctg}(2n+1)=$

$= \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} \dfrac{3}{2} + \ldots + \operatorname{arctg} \dfrac{n+1}{n} - n \operatorname{arctg} 1,\ n \in \mathbf{N}.$

547. Решити следеће једначине:

а) $\arcsin 3x = 1$; *б)* $6 \arcsin \sqrt{x} = \pi$; *в)* $6 \arcsin(x^2 - 6x + 8,5) = \pi$;
г) $\arcsin x = \arccos x$; *д)* $(\arccos x)^2 - 2 \arccos x - 8 = 0$.

548. Решити једначине:

а) $\arcsin 2x + \operatorname{arctg} 3x = \pi$; *б)* $2 \arcsin x + \arccos x = 4$;
в) $\arcsin x + 7 \arccos x = 2\pi$; *г)* $\arccos x + \arccos(1-x) = \arccos(-x)$;
д) $\operatorname{arctg} \dfrac{x}{2} + \operatorname{arctg} \dfrac{x}{3} = \operatorname{arctg} x$.

549. Доказати да једначина
$(\arcsin x)^3 + (\arccos x)^3 = k\pi^3$ нема решења за $k < \dfrac{1}{32}$.

550. Решити неједначине:

а) $(\operatorname{arcctg} x)^2 - 3 \operatorname{arcctg} x + 2 < 0$; *б)* $\arccos(x^2 - \dfrac{x}{2}) > \dfrac{\pi}{3}$;
в) $\arcsin(\pi \operatorname{arctg} x) > 0$; *г)* $\arcsin x - \arccos x < -\pi$.

5.15 ПРИМЕНЕ ТРИГОНОМЕТРИЈЕ

За сваки троугао важи:

$$\boxed{\text{Синусна теорема: } \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R}$$

$$\boxed{\text{Косинусна теорема: } a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha}$$

и аналогно за квадрате осталих двеју страница.

△ **551.** Решити троугао у коме је:

а) $a = 7,\ b = 13,\ \beta = 60^o$; *б)* $b = 8,\ c = 13,\ \gamma = 120^o$;
в) $a = 51,\ b = 40,\ \alpha = 143^o7'48''$; *г)* $a = 44,\ b = 39,\ \alpha = 95^o27'9''$.

△ **552.** Решити троугао ако је:

а) $a = 40,\ b = 37,\ \gamma = 18^o55'30''$; *б)* $a = 44,\ c = 15,\ \beta = 53^o7'48''$;
в) $b = 33,\ c = 25,\ \alpha = 126^o52'12''$; *г)* $a = 37,\ b = 20,\ \gamma = 17^o56'43''$;
д) $a = 8,\ b = 3,\ \gamma = 60^o$; *ђ)* $a = 4\sqrt{2},\ b = 7,\ \gamma = 45^o$.

△ **553.** Решити троугао у коме је:

а) $a = 8,\ \beta = 38^o12'48'',\ \gamma = 60^o$; *б)* $a = 5,\ \alpha = 13^o10'25'',\ \gamma = 120^o$;
в) $b = 25,\ \alpha = 81^o12'9'',\ \gamma = 36^o52'12''$;
г) $c = 26,\ \alpha = 112^o37'12'',\ \beta = 39^o18'27''$.

△ **554.** Одредити углове троугла у коме је:

а) $a = 8,\ b = 3,\ c = 7$; *б)* $a = 3,\ b = 5,\ c = 7$;
в) $a = 4\sqrt{2},\ b = 7,\ c = 5$; *г)* $a = 3\sqrt{2},\ b = 1,\ c = 5$;
д) $a = 17,\ b = 10,\ c = 9$; *ђ)* $a = 36,\ b = 29,\ c = 25$;
е) $a = 52,\ b = 51,\ c = 25$.

△ **555.** Одредити трећу страницу троугла у коме је:

а) $a = 7,\ c = 37,\ \gamma = 120^o$; *б)* $a = 13,\ b = 15,\ \alpha = 60^o$;
в) $a = 13,\ c = 15\sqrt{3},\ \alpha = 30^o$; *г)* $a = 7\sqrt{3},\ c = 13,\ \gamma = 150^o$.

△ **556.** Одредити трећу страницу троугла у коме је:

а) $a = 35,\ b = 25,\ \alpha = 2\beta$; *б)* $a = 12,\ b = 9,\ \alpha = 2\beta$;
в) $b = 28,\ c = 33,\ \beta = 2\alpha$; *г)* $a = 6,\ c = 5,\ \alpha = 2\beta$;
д) $b = 8,\ c = 10,\ \alpha = 2\beta$.

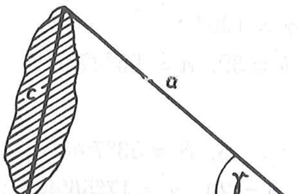
△ **557.** Одредити непознате странице троугла ако је:

а) $a - b = 5,\ c = 7,\ \gamma = 60^o$; *б)* $b - a = 1,\ c = 13,\ \gamma = 120^o$;
в) $b + c = 20,\ a = 5\sqrt{2},\ \gamma = 135^o$; *г)* $a : b = 13 : 1,\ c = 16\sqrt{3},\ \alpha = 30^o$;
д) $a^2 - b^2 = 240,\ c = 8\sqrt{2},\ \alpha = 135^o$.

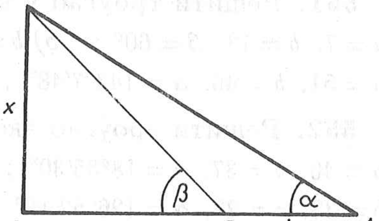
△ **558.** Доказати да за елементе троугла важи једнакост

$$\frac{a}{b+c} = \frac{\sin\dfrac{\alpha}{2}}{\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}.$$

△ **559.** При пројектовању железничке пруге увидело се да би требало између места A и B пробити тунел. Да би се одредила дужина тунела, изабрано је место C доступно местима A и B (сл. 16.). Мерењем је добијено: $a = 675.3$, $b = 548.8$, $\gamma = 58^o54'$. Колика је дужина тунела?



Сл. 16.



Сл. 17.

△ **560.** Израчунати висину стуба OP ако је видни угао из тачке A ($AO \perp OP$) једнак α, а видни угао из тачке B, која припада дужи OA и која је од A удаљена за d, једнак β (Сл. 17.). Специјално, израчунати OP за $\alpha = 30^o$; $\beta = 60^o$; $d = 20\ m$.

△ **561.** Збир двеју различитих висина једнакокраког троугла једнак је s, а угао на основици α. Израчунати странице троугла.

△ **562.** Пресек канала има облик једнакокраког трапеза чија већа основица $a = 16\ m$ образује са краком угао $\alpha = 32^o$, а висина трапеза је $h = 4\ m$. Израчунати површину трапеза.

△ **563.** Израчунати углове паралелограма чије странице су 7 и 8, а дијагонала је 13.

△ **564.** Обим паралелограма износи 22, површина је $12\sqrt{3}$, а један угао је 60^o. Израчунати странице паралелограма.

△ **565.** Површина паралелограма је $669.1\ dm^2$, једна страница износи $a = 13.5\ dm$, а један угао $\alpha = 36^o36'$. Израчунати другу страницу b и већу дијагоналу d.

△ **566.** Паралелограм се састоји од два троугла чије су странице $a = 3$, $b = 5$, $c = 7$, тако да им је страница c заједничка. Одредити углове, другу дијагоналу и површину паралелограма.

△ **567.** Одредити углове трапеза кад су дате паралелне странице $a = 22$, $c = 7$, и краци $b = 13$, $d = 14$.

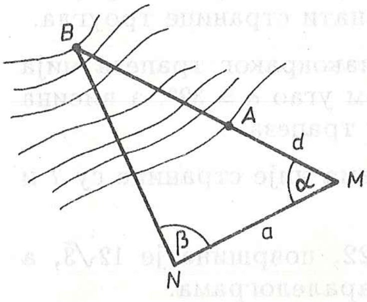
△ **568.** У једнакокраком трапезу дијагонала је $3.9\ m$, мања основица је $2.8\ m$, а оштри углови износе $61^o56'$. Израчунати остале странице и површину.

△ **569.** На хоризонталном путу који води ка споменику, измерена је основица $AB = 14\ m$. У тачкама A и B теодолитом су измерени елевациони углови ка врху споменика: $\alpha = 34^o21'$ и $\beta = 59^o23'$. Одредити висину споменика ако је висина теодолита једнака $h = 1.2\ m$.(Елевациони угао је угао према хоризонтали, изнад ње.)

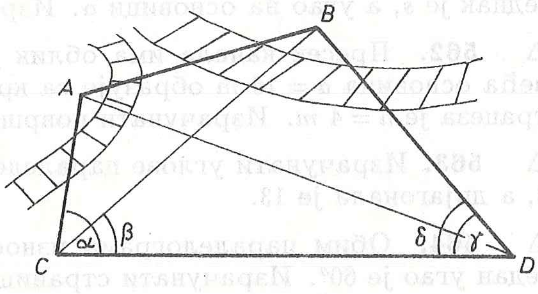
△ **570.** Са врха C светионика, чија је надморска висина $h = CD = = 48\ m$, виде се бродови A и B под депресионим угловима: $\alpha = 11^o28'$ и $\beta = 13^o47'$, а угао под којим се види растојање бродова је $\gamma = = 105^o34'$. Израчунати међусобно растојање бродова. (Депресиони угао је угао према хоризонтали, испод ње.)

△ **571.** Под којим се углом види Земља са висине $H = 16000\ m$ (полупречник Земље $R = 6368\ km$)?

△ **572.** Треба измерити ширину реке између тачака A и B (сл.18.). Ради тога на продужетку BA изабрана је тачка M таква да је $AM = d$. Из M је повучена дуж $MN = a$. Измерени су, даље, углови $\sphericalangle BMN = \alpha$ и $\sphericalangle BNM = \beta$. Израчунати ширину реке, тј. дужину AB, ако је $a = 36\ m$, $d = 50\ m$, $\alpha = 74^o29'$, $\beta = 86^o56'$.



Сл. 18.

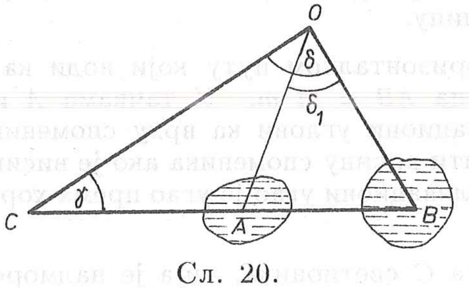


Сл. 19.

△ **573.** Израчунати растојање двеју неприступачних тачака A и B на слици 19, ако је измерено : $CD = 379.5\ m$, $\alpha = 108^o40'$, $b = 79^o20'$, $\gamma = 65^o25'$, $\delta = 30^o45'$.

△ **574.** Ако се у једном тренутку авион A види из места B и C $(BC = 300\ m)$ под угловима $\sphericalangle ABC = 31^o30'$, и $\sphericalangle ACB = 22^o30'$, одредити растојања авиона од B и C у том тренутку.

△ **575.** Израчунати растојање AB неприступачних тачака A и B ако је помоћна тачка C (Сл. 20.) изабрана на правој AB и измерено је $CD = 540\ m$, $\gamma = 59^o20'$, $\delta = 88^o30'$, $\delta_1 = 46^o45'$.



Сл. 20.

△ **576.** Пливач плива брзином од 4 km на сат. Колика је његова брзина ако правац водене струје брзине 12 km на сат гради с правцем кретања пливача: *а)* угао од $65^o30'$; *б)* угао од 115^o?

△ **577.** У троуглу ABC је дато: $a = \sqrt{3}+1$, $b = \sqrt{3}-1$ и $\alpha - \beta = 60^o$. Израчунати његове углове и трећу страницу.

△ **578.** У троуглу ABC је $c = 2b$ и $\alpha = 45^o$. Одредити $\operatorname{tg}\beta$ и $\operatorname{tg}\gamma$.

△ **579.** Углови троугла су $\alpha = 45^o$ и $\beta = 30^o$, а његов обим износи $6(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})$. Наћи странице и површину тог троугла.

△ **580.** У троуглу је дато: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{3}$, $\alpha - \beta = 90^o$ и површина је

$P = 168cm^2$. Одредити $\sin\gamma$, $\cos\gamma$, a, b, c.

$\triangle$ **581.** Полупречник R описаног круга око једнакокраког троугла односи се према полупречнику r уписаног круга као $5:2$. Израчунати углове на основици.

582. Збир квадрата дијагонала паралелограма једнак је збиру квадрата његових страница. Доказати.

583. У сваком трапезу збир квадрата дијагонала једнак је збиру квадрата кракова и двоструког производа основица. Доказати.

584. Доказати да је у сваком троуглу $\dfrac{\cos\alpha}{c\sin\beta}+\dfrac{\cos\beta}{a\sin\gamma}+\dfrac{\cos\gamma}{b\sin\alpha}=\dfrac{1}{R}$.

585. Доказати да за оштроугли троугао важи:
$a\cos\alpha+b\cos\beta+c\cos\gamma=\dfrac{2sr}{R}$ (s – полуобим, r – полупречник уписаног круга, R – полупречник описаног круга).

586. Ако су a, b, c странице троугла и α, β, γ његови углови, доказати једнакост: $\left(\dfrac{b}{c}+\dfrac{c}{b}\right)\cos\alpha+\left(\dfrac{a}{c}+\dfrac{c}{a}\right)\cos\beta+\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)\cos\gamma=3$.

* **587.** Нека су a, b, c странице троугла и α, β, γ његови углови. Доказати да за оштре углове x, y, z који су одређени једнакостима $\cos x=\dfrac{a}{b+c}$, $\cos y=\dfrac{b}{a+c}$, $\cos z=\dfrac{c}{a+b}$, важе следеће једнакости:

а) $\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\dfrac{z}{2}=1$; *б)* $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}\operatorname{tg}\dfrac{y}{2}\operatorname{tg}\dfrac{z}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$.

* **588.** Ако између страница a и b и одговарајућих углова α и β троугла ABC постоји веза $(a^2+b^2)\sin(\alpha-\beta)=(a^2-b^2)\sin(\alpha+\beta)$, доказати да је тај троугао правоугли или једнакокраки.

* **589.** Ако су a, b, c дужине страница и α, β, γ одговарајући углови једног троугла и ако је $a+b=\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta)$, онда је то једнакокраки троугао. Доказати.

* **590.** Нека је S произвољна тачка у унутрашњости троугла ABC чије су странице a, b, c, а углови α, β, γ. Доказати неједнакост $SA\cos\dfrac{\alpha}{2}+SB\cos\dfrac{\beta}{2}+SC\cos\dfrac{\gamma}{2}\geq\dfrac{a+b+c}{2}$.

* **591.** Унутар троугла ABC налази се тачка M таква да је $\sphericalangle MAB=\sphericalangle MBC=\sphericalangle MCA=\varphi$. Доказати да је
$\dfrac{1}{\sin^2\varphi}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\beta}+\dfrac{1}{\sin^2\gamma}$.

* 592. Дат је троугао ABC. Доказати да неједнакост $\sin\alpha\sin\beta \leq \sin^2\frac{\gamma}{2}$ важи ако и само ако на страници AB постоји тачка D таква да је дуж CD геометријска средина дужи AD и BD.

* 593. Доказати да између страница a, b, c и одговарајућих углова α, β, γ троугла постоји веза:
$a^2\cos^2\alpha = b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma + 2bc\cos\beta\cos\gamma\cos 2\alpha$.

* 594. Унутар правоугаоника $ABCD$ дата је произвољна тачка O. Доказати да је $\dfrac{P_{\triangle OAC}}{P_{\triangle OBD}} = \dfrac{\operatorname{tg}\measuredangle AOC}{\operatorname{tg}\measuredangle BOD}$.

* 595. Нека је S пресек дијагонала конвексног четвороугла $ABCD$. Ако је $\measuredangle SAB = \measuredangle SBC = 30^o$, $\measuredangle SCD = \measuredangle SDA = 45^o$, колики је угао између дијагонала?

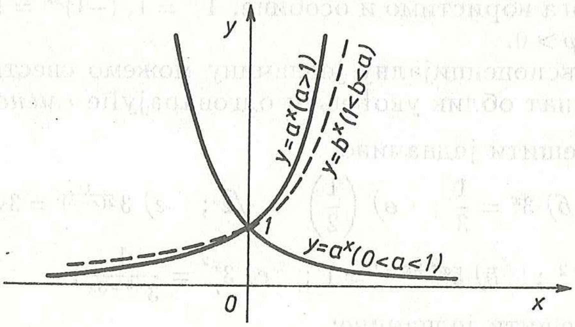
* 596. Дат је конвексан четвороугао $ABCD$, за који је $\measuredangle ABD = 50^o$, $\measuredangle ADB = 80^o$, $\measuredangle ACB = 40^o$, $\measuredangle DBC = \measuredangle BDC + 30^o$. Израчунати $\measuredangle DBC$.

* 597. Над страницама произвољног $\triangle ABC$ споља су конструисани троуглови BPC, CQA, ARB, такви да је $\measuredangle PBC = \measuredangle CAQ = 45^o$, $\measuredangle BCP = \measuredangle QCA = 30^o$, $\measuredangle ABR = \measuredangle RAB = 15^o$. Доказати да је $\measuredangle QRP = 90^o$ и да је $QR = RP$.

ШЕСТА ГЛАВА

ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНА ФУНКЦИЈА

Функцију облика $y = a^x$, где је $a > 0$ и $a \neq 1$, називамо *експоненцијалном.* Дефинисана је за свако реално x и обострано једнозначно пресликава скуп реалних бројева $(-\infty, +\infty)$ на скуп позитивних $(0, +\infty)$. Ако је $0 < a < 1$, тада је функција опадајућа, а ако је $a > 1$, функција $y = a^x$ је растућа.



Сл. 21

За $x = 0$ је $y(0) = a^o = 1$, тј. график сваке од ових функција сече y–осу у тачки $(0, 1)$.

Ако је, рецимо, $1 < b < a$, тада је $b^x > a^x$ за $x > 0$ и $b^x < a^x$ за $x < 0$.

Напоменимо да за степен са реалним експонентом важе иста својства као за степен са рационалним експонентом (видети уводни део 1. главе).

△ **598.** Конструисати графике следећих функција:
а) $y = 3^x$; *б)* $y = 3^{-x}$; *в)* $y = 3^{x-1}$; *г)* $y = 3^x - 1$; *д)* $y = 2 \cdot 3^x$;
ђ) $y = 2^{|x|}$; *е)* $y = 2^{\frac{x^2}{|x|}}$; *ж)* $y = 2^{x-|x|}$; *з)* $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x + 1$.

△ **599.** Скицирати графике следећих функција:
а) $y = 2^{\frac{1}{x}}$; *б)* $y = 2^{-x^2}$; *в)* $y = 2^{\sin x}$; *г)* $y = 2^{\operatorname{tg} x}$;
д) $y = \dfrac{1}{2}(3^x + 3^{-x})$; *ђ)* $y = \dfrac{1}{2}(3^x - 3^{-x})$.

6.1 ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ ЈЕДНАЧИНЕ

Користећи се особинама експоненцијалних функција, решаваћемо експоненцијалне једначине (са непознатом у изложиоцу степена) најчешће "свођењем леве и десне стране једначине на исту основу" или "свођењем леве и десне стране једначине на исти изложилац".

У првом случају имамо:

$$\boxed{0 < a \neq 1 \text{ и } a^{f_1(x)} = a^{f_2(x)} \Leftrightarrow f_1(x) = f_2(x)},$$

а у другом случају важи:

$$\boxed{0 < a, b \neq 1 \text{ и } a^{f(x)} = b^{f(x)} \Leftrightarrow f(x) = 0}.$$

Осим тога користимо и особине: $1^m = 1$, $(-1)^{2k} = 1$, $(-1)^{2k-1} = -1$ и $0^p = 0$, за $p > 0$.

Често експоненцијалну једначину можемо свести на једноставан или познат облик увођењем одговарајуће *смене променљиве.*

△ **600.** Решити једначине:
а) $3^x = 1$; *б)* $3^x = \dfrac{1}{3}$; *в)* $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \sqrt{2}$; *г)* $3^{\frac{1}{2(x-5)}} = 3\sqrt{3}$;
д) $8^{x-2} = 7^{x-2}$; *ђ)* $5^{x^2+x-2} = 1$; *е)* $3^{x^2} = \dfrac{1}{3^{x^2-3x}}$.

△ **601.** Решити једначине:
а) $25^x = 5^{3-x}$; *б)* $3^x \cdot 5^{2x-3} = 45$; *в)* $2^x \cdot 3^{x-1} \cdot 5^{2x+1} = 250$;
г) $2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} = 30$; *д)* $2^{x+4} + 2^{x+2} = 5^{x+1} + 3 \cdot 5^x$;
ђ) $2 \cdot 3^{x+3} + 7 \cdot 3^{x-2} = 493$; *е)* $2^{3x} \cdot 3^x - 2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} + 288 = 0$.

△ **602.** Решити једначине:
а) $4^x + 2^x = 20$; *б)* $3^{x+2} + 9^{x+1} = 810$; *в)* $4^x - 5 \cdot 2^x - 24 = 0$;
г) $\dfrac{2^x + 10}{4} = \dfrac{9}{2^{x-2}}$; *д)* $6 \cdot 4^x - 13 \cdot 6^x + 6 \cdot 9^x = 0$;

ђ) $7 \cdot 4^{x^2} - 9 \cdot 14^{x^2} + 2 \cdot 49^{x^2} = 0$; *е)* $4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5 \cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6$;

ж) $2^{1+2\cos 6x} + 16^{\sin^2 3x} = 9$; *з)* $4^{\operatorname{tg}^2 x} + 2^{\frac{1}{\cos^2 x}} = 80$.

603. Решити једначине:

а) $5^{2x-1} - 5^x = 100$; *б)* $33 \cdot 2^{x-1} - 4^{x+1} = 2$; *в)* $3 \cdot 4^x + 2 \cdot 9^x = 5 \cdot 6^x$;

г) $3^{2x+4} + 45 \cdot 6^x - 9 \cdot 2^{x+2} = 0$; *д)* $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$;

ђ) $5^{1+\frac{2}{x}} - 7 \cdot 10^{\frac{1}{x}} + 2 \cdot 4^{\frac{1}{x}} = 0$; *е)* $4 \cdot \sqrt[x]{81} - 12\sqrt[x]{36} + 9\sqrt[x]{16} = 0$;

ж) $5^{1+x^3} - 5^{1-x^3} = 24$; *з)* $27^x - 13 \cdot 9^x + 13 \cdot 3^{x+1} - 27 = 0$;

и) $5^x - 4 = 5^{\frac{x-1}{2}}$; *ј)* $3^x - 26 = 3^{\frac{x-3}{2}}$.

604. Решити једначине:

а) $(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x + (\sqrt{4-\sqrt{15}})^x = 8$; *б)* $(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 2^x$;

в) $(\sqrt{3+2\sqrt{2}})^x + (\sqrt{3-2\sqrt{2}})^x = 34$; *г)* $(\sqrt{7+\sqrt{48}})^x + (\sqrt{7-\sqrt{48}})^x = 14.$

* **605.** Решити једначине:

а) $(\sqrt[3]{3-\sqrt{8}})^x + (\sqrt[3]{3+\sqrt{8}})^x = 6$;

б) $\left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}+\sqrt{x^2-5x+6}}\right)^x + \left(\sqrt{\sqrt{x^2-5x+8}-\sqrt{x^2-5x+6}}\right)^x =$
$= 2^{\frac{x+4}{4}}$.

* **606.** Решити једначине:

а) $4^x + 9^x + 25^x = 6^x + 10^x + 15^x$; *б)* $3^x + 4^x = 5^x$;

в) $2^{3x} - \dfrac{8}{2^{3x}} - 6 \cdot \left(2^x - \dfrac{1}{2^{x-1}}\right) = 1$; *г)* $2^{x^5} + 4^{x^4} + 256^4 = 3 \cdot 16^{x^3}$.

△ **607.** Решити једначине:

а) $3^{\left|\frac{x+1}{x-3}\right|} = 27$; *б)* $2^{|x^2-2x|} = \dfrac{1}{2}$; *в)* $|2^x - 1| + |2^x - 2| = 1$;

г) $(x-2)^{x^2+2x} = (x-2)^{11x-20}$, $(x > 2)$;

д) $(1+x^2)^{1+\sqrt{x}} = (1+x^2)^{2+\sqrt{x}}$; *ђ)* $(x-1)^x = \sqrt[3]{x-1}$, $(x \geq 1)$;

е) $x^{x+1} = x^{x^2-1}$; *ж)* $|x|^{x^2-2x} = 1$; *з)* $(\operatorname{tg} x)^{\sin x} = (\operatorname{ctg} x)^{\cos x}$.

608. Решити системе једначина:

а) $\begin{cases} 3^x + 2^{x+y+1} = 5 \\ 3^{x+1} - 2^{x+y} = 1 \end{cases}$; *б)* $\begin{cases} 3^x - 2^{2y} = 65 \\ 3^{\frac{x}{2}} - 2^y = 5 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x^{x+y} = y^{24} \\ y^{x+y} = x^6 \end{cases}$; *г)* $\begin{cases} x^{x+y} = y^{x-y} \\ x^2 y = 1 \end{cases}$ $(x,\ y > 0)$.

609. Решити системе једначина:

а) $\begin{cases} 2^{\sin x + \cos y} = 1 \\ 16^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 4 \end{cases}$; *б)* $\begin{cases} 9^{2\operatorname{tg} x + \cos y} = 3 \\ 9^{\cos y} - 81^{\operatorname{tg} x} = 2 \end{cases}$.

610. За које a, $a \in \mathbf{R}$, систем: $\begin{cases} 2^{1+\sqrt{xy}} + 3^{x+y-1} = a \\ 8^{1+\sqrt{xy}} + 27^{x+y-1} = a^3 - 3a^2 + 3a \end{cases}$

има бар једно решење $(x,\ y)$, $x, y \in \mathbf{R}$?

611. Графички решити следеће једначине:

а) $x \cdot 2^x = 1$; *б)* $3^x = x + 3$; *в)* $2^x = 2x$.

6.2 ЕКСПОНЕНЦИЈАЛНЕ НЕЈЕДНАЧИНЕ

Код решавања експоненцијалних неједначина користимо се и искуствима стеченим решавањем експоненцијалних једначина. При прелазу са неједнакости двају степена исте основе на неједнакост између њихових изложилаца морамо пазити да ли је основа већа или мања од 1. Према слици 21 уочавамо различите закључке за ова два случаја, јер је у првом случају одговарајућа експоненцијална функција растућа, а у другом опадајућа. Тако, на пример, важи:

$$\boxed{0 < a < 1 \text{ и } a^{f_1(x)} > a^{f_2(x)} \Leftrightarrow f_1(x) < f_2(x)}$$

односно:

$$\boxed{a > 1 \text{ и } a^{f_1(x)} > a^{f_2(x)} \Leftrightarrow f_1(x) > f_2(x)}$$

612. Решити следеће неједначине:

а) $2^x \geq 1$; *б)* $\left(\dfrac{1}{2}\right)^x \geq 1$; *в)* $3^{x^2} \leq 3$; *г)* $2^{x^2-2x} < 8$;

д) $25^x < 6 \cdot 5^x - 5$; *ђ)* $(x-2)^{x^2-6x+1} > 1$; *е)* $(x^2 - 8x + 15)^{x-6} < 1$;

ж) $12^x + 5^x > 13^x$; *з)* $2^x + 3^x + 4^x + 5^x > 54$;

и) $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x + \left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x > 8$; * *ј)* $\dfrac{1}{2^{2x}+3} \geq \dfrac{1}{2^{x+2}-1}$;

* *к)* $2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}$.

613. Решити следеће неједначине:

а) $1 < 3^{|x^2-x|} < 9$; *б)* $2^{|x-1|} > 4^x$; *в)* $\left(\dfrac{3}{4}\right)^{6x+10-x^2} < \dfrac{27}{64}$;

г) $25 \cdot 2^x - 10^x + 5^x > 25$; *д)* $\dfrac{1}{3^x+5} \leq \dfrac{1}{3^{x+1}-1}$;

ђ) $(x^2+x+1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2+x+1)^3$; *е)* $(x^2-x+1)^{x-2} > 1$.

СЕДМА ГЛАВА

ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА

7.1 ПОЈАМ ЛОГАРИТМА И ОСНОВНА СВОЈСТВА

Под *логаритмом* броја $x > 0$ за основу a, $0 < a \neq 1$, подразумевамо број y, такав да је $a^y = x$. Пишемо $y = \log_a x$. Важи дакле,

$$\boxed{a^{\log_a x} = x.}$$

За логаритме важе следећа својства:

$$\boxed{\begin{array}{ll} 1^o\ \log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y\ , & 4^o\ \log_a x^\alpha = \alpha \log_a x\ ; \\ 2^o\ \log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y\ , & 5^o\ \log_{a^\beta} x = \dfrac{1}{\beta} \log_a x\ ; \\ 3^o\ \log_a x = \dfrac{1}{\log_x a}\ , & 6^o\ \log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}, \end{array}}$$

где смо претпоставили да су сви бројеви такви да су одговарајуће операције и функције дефинисане.

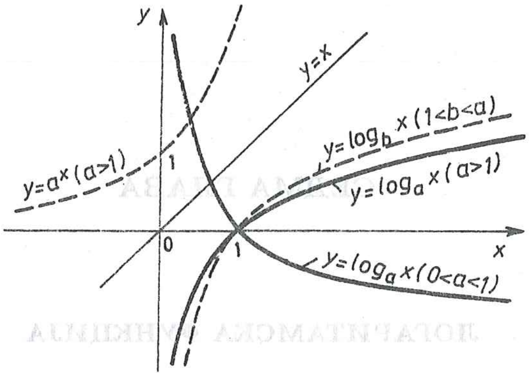
Функцију $y = \log_a x$ $(0 < a \neq 1,\ x > 0)$ називамо *логаритамском*, а график је дат на слици 22.

Логаритамска функција је инверзна одговарајућој експоненцијалној функцији, па су графици симетрични у односу на праву $y = x$ (сл. 22).

За $0 < a < 1$ функција $y = \log_a x$ је монотоно опадајућа, позитивна за $0 < x < 1$, једнака нули за $x = 1$, и мања од нуле за $x > 1$.

За $a > 1$ функција $y = \log_a x$ је монотоно растућа, негативна за $0 < x < 1$, једнака нули за $x = 1$, а позитивна за $x > 1$.

За $a = 10$ уместо да пишемо $\log_{10} x$, писаћемо краће $\log x$.



Сл. 22

На слици 22 приказан је и график функције $\log_b x$ $(1 < b < a)$.

△ **614.** Израчунати:

а) $\log_2 4$; *б)* $\log_2 \frac{1}{2}$; *в)* $\log_2 2\sqrt{2}$; *г)* $\log_{\sqrt{2}} 4$; *д)* $\log_{\frac{1}{3}} \sqrt{3}$;

ђ) $\log_8 12 + \log_{\frac{1}{8}} 3$; *е)* $\log_{\frac{1}{2}} 2 + \log_{\frac{1}{6}} 3$; *ж)* $\log_3 15 - \log_3 5$; *з)* $\dfrac{\log_3 8}{\log_3 2}$;

и) $\dfrac{\log_{3\sqrt{5}} 27}{\log_{25} \sqrt{3}}$.

△ **615.** Израчунати вредности следећих израза:

а) $2^{\log_4 25}$; *б)* $4^{\log_2 3}$; *в)* $(\sqrt{3})^{\log_{\frac{1}{9}} 4}$; *г)* $a^{\log_{\sqrt{a}} 4}$; *д)* $a^{4 \log_{a^2} 5}$;

ђ) $(2a)^{\log_{\sqrt{a}} 1}$; *е)* $3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3}$.

△ **616.** Израчунати вредност следећих израза:

а) $\log_4 5 \log_5 6 \log_6 7 \log_7 8$; *б)* $\log_3 49 \log_{\sqrt{7}} 5 \log_{25} 27$;

в) $\log_{\sqrt{2}+\sqrt{3}}(4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) \log_{\sqrt{6}+1}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \log_{2\sqrt{6}+7}(2\sqrt{6} + 5)$.

617. Упростити следеће изразе:

а) $\sqrt{{}^{\log 6}\sqrt[5]{25} + {}^{\log 8}\sqrt[7]{49}}$; *б)* $5^{\frac{3-\log 5}{\log 25}}$; *в)* $a^{\frac{\log(\log a)}{\log a}}$;

г) $[6(\log_b a \log_{a^2} b + 1) + \log_a b^{-6} + \log_a^2 b]^{\frac{1}{2}} - \log_a b$, $a > 1$;

д) $[(\log_b^4 a + \log_a^4 b + 2)^{\frac{1}{2}} + 2]^{\frac{1}{2}} - \log_b a - \log_a b$;

ђ) $\log_3 2 \log_4 3 \log_5 4 \ldots \log_{99} 98 \log_{100} 99$.

△ **618.** Израчунати:

а) $\log_8 9$ ако је $\log_{12} 18 = a$; *б)* $\log_{49} 32$ ако је $\log_2 14 = a$;

в) $\log_{\sqrt{5}} 27$ ако је $\log_{45} 5 = a$; *г)* $\log_{30} 8$ ако је $\log_{30} 3 = a$ и $\log_{30} 5 = b$;

д) $\log 56$ ако је $\log_2 7 = a$, $\log 2 = b$;

ђ) $\log_{abcd} x$ ако је познато $\log_a x = \alpha$, $\log_b x = \beta$, $\log_c x = \gamma$, $\log_d x = \delta$ и $x \neq 1$.

619. Израчунати:

а) $(\log_2 7 + \log_7 2)^{-1}$ ако је $\log_3 7 = a$, $\log_3 2 = b$;

б) $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ ако је $f(x) = \log_6 x + 3\log_3 9x$.

620. Ако је $b = 8^{\frac{1}{1-\log_8 a}}$ и $c = 8^{\frac{1}{1-\log_8 b}}$, доказати да је $a = 8^{\frac{1}{1-\log_8 c}}$.

621. Ако су x, a, b, c реални позитивни бројеви и различити од 1 и ако је $b^2 = ac$, доказати да је $\dfrac{\log_a x}{\log_c x} = \dfrac{\log_a x - \log_b x}{\log_b x - \log_c x}$.

622. Доказати да из једнакости $2\log_b x = \log_a x + \log_c x$ (x, a, b, c већи 0 и различити од 1) следи једнакост $c^2 = (ac)^{\log_a b}$.

623. Ако су a, b дужине катета, а c - дужина хипотенузе правоуглог троугла, доказати да је $\log_{b+c} a + \log_{c-b} a = 2\log_{b+c} a \cdot \log_{c-b} a$ (где, наравно претпостављамо да су бројеви a, b, c такви да су поменути логаритми дефинисани).

624. Позитивни реални бројеви a, b, c (a, b, $c \neq 1$) задовољавају једнакост $\dfrac{a(b+c-a)}{\log a} = \dfrac{b(a+c-b)}{\log b} = \dfrac{c(a+b-c)}{\log c}$. Доказати да је $a^b b^a = a^c c^a = c^b b^c$.

* **625.** Ако је $n \in \mathbf{N}$ сложен број и ако су $1 = d_0 < d_1 < \cdots < d_{m-1} < d_m = n$ сви природни делиоци броја n, доказати да је $\dfrac{2}{\log n}\sum_{k=1}^{m-1} \log d_k$ природан број.

7.2 ЛОГАРИТАМСКА ФУНКЦИЈА И ЊЕН ГРАФИК

△ **626.** Конструисати графике следећих функција:

а) $y = \log_2(x+1)$; *б)* $y = \log_3(x-2)$; *в)* $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-2)$;

г) $y = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x}$; *д)* $y = \log_{\frac{1}{2}} \dfrac{1}{x-3}$; *ђ)* $y = \log_2 \sqrt{x}$;

е) $y = \log_2 |x|$; *ж)* $y = \log_2 x^2$; *з)* $y = 2 + \log_2 x$;

и) $y = -1 + \log_{\frac{1}{3}} x$; *ј)* $y = 2^{\log_2 x}$; *к)* $y = \log_2 2^x$.

627. Скицирати графике следећих функција:

а) $y = |\log_2 x|$; *б)* $y = \log_2 |x-1|$; *в)* $y = |\log_2 |x-1||$;
г) $y = \log(x^2 - 1)$; *д)* $y = \log(x^2 + 1)$; *ђ)* $y = \log(\sin x)$;
е) $y = \log(\cos x)$; *ж)* $y = \log(\operatorname{tg} x)$; *з)* $y = \log(\operatorname{ctg} x)$;
и) $y = \log_2(\log_2 x)$; *ј)* $y = \log_2(\log_2(\sin x))$.

628. Одредити које су од следећих функција једнаке:

$f_1(x) = 2\log_2 x$, $\quad f_2(x) = \log_2 x^2$, $\quad f_3(x) = 2\log_2 |x|$, $\quad f_4(x) = \dfrac{2}{\log_x 2}$?

629. Одредити који је од датих бројева већи:

а) $\log_3 2$ или $\log_3 5$; *б)* $\log_{\frac{1}{3}} 2$ или $\log_{\frac{1}{3}} 5$; *в)* $\log_2 3$ или $\log_5 3$;
г) $\log_{\frac{1}{3}} 4$ или $\log_{\frac{1}{5}} 4$; *д)* $\log_3 2$ или $\dfrac{2}{3}$; *ђ)* $\log_9 80$ или $\log_7 50$;
е) $\log_2 3 + \log_3 2$ или 2 ; *ж)* $\log_{12} 5$ или $\log_{18} 7$; *з)* $\log_{100} 99$ или $\log_{101} 100$
и) $2^{\log_5 3}$ или $3^{\log_5 \frac{3}{2}}$; * *ј)* $\log_3 4$ или $\log_4 5$.

* **630.** Одредити све рационалне бројеве r за које је $\log_2 r$ и сам рационалан број.

* **631.** Нека су $a_1, a_2, \ldots, a_n$ реални бројеви већи од 1 и $m \in \mathbb{N}$. Доказати да је $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left(\log_{a_1 a_2 \ldots a_{j-1} a_{j+1} \ldots a_n} a_j\right)^{-m} \geq n(n-1)^m$. Када важи једнакост?

* **632.** Доказати да је за свако n, $n \in \mathbb{N}$, испуњено $\log n \geq k \cdot \log 2$, где је k број различитих простих (позитивних) делилаца броја n.

* **633.** Ако је $a > 1,\ b > 1,\ c > 1$ или $0 < a < 1,\ 0 < b < 1,\ 0 < c < 1$, доказати да је $\dfrac{\log_b a^2}{a+b} + \dfrac{\log_c b^2}{b+c} + \dfrac{\log_a c^2}{c+a} \geq \dfrac{9}{a+b+c}$.

* **634.** Одредити највећу вредност израза $\log_2^4 x + 12\log_2^2 x \log_2\left(\dfrac{8}{x}\right)$, ако променљива x варира у интервалу $[1,\ 64]$.

635. Колико цифара има број 3^{100}?

636. Шта је веће: 21^{23} или 23^{21}?

* **637.** Доказати да је $\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 > 4.4$.

* **638.** Доказати да за $a,\ b \in (0,\ 1)$ важи неједнакост:
$\log_a \dfrac{2ab}{a+b} \cdot \log_b \dfrac{2ab}{a+b} \geq 1$.

7.3 ЛОГАРИТАМСКЕ ЈЕДНАЧИНЕ И НЕЈЕДНАЧИНЕ

При решавању логаритамских једначина користимо се обилато особинама логаритамских, али и особинама експоненцијалних функција. Користићемо методу "свођења на једнаке логаритамске основе", као и погодне *смене променљиве.* Често ћемо логаритамске једначине сводити на експоненцијалне једначине, на основу дефиниције логаритма. Обрнуто, неке експоненцијалне једначине, код којих се непозната налази у основи и у изложиоцу, сводимо на логаритамску једначину ("логаритмовањем леве и десне стране једначине").

При решавању логаритамских неједначина морамо водити рачуна да ли је основа a логаритма мања од 1, тј. $0 < a < 1$, или је $a > 1$, тј. да ли је одговарајућа логаритамска функција растућа или опадајућа.

Свеједно да ли се ради о логаритамској једначини или неједначини, мора се водити рачуна о дефинисаности логаритама.

△ **639.** Решити једначине:

а) $\log_2 x = 3$; *б)* $\log_{81} x = \dfrac{1}{2}$; *в)* $\log_{\sqrt{8}} x = 3$; *г)* $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) = -2$;

д) $\log_x 7 = -1$; *ђ)* $\log_x(x-1) = 2$; *е)* $\log_2(2x-1) = 0$; *ж)* $\log_2(\log_2 x) = 0$

з) $\log_3(x+1) - \log_3(x-1) = 1$; *и)* $\log_2(2^x - 3) = 2 - x$;

ј) $\log_{x-1}(x^2 - 5x + 10) = 2$; *к)* $\log_2(\log_2(-x)) = 0$.

△ **640.** Решити једначине:

а) $2^x \cdot 3^{x+1} = 81$; *б)* $3^x \cdot 7^{2x-x^2} = 21$; *в)* $4^{x+3} + 2^{2x+2} = 51$;

г) $2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^{x-2} = 81$; *д)* $4^x + 5^{2x+1} = 6 \cdot 10^x$.

△ **641.** Решити следеће једначине:

а) $\log^2 x - 5\log x + 6 = 0$; *б)* $x^{\log x} = 10000$; *в)* $x^{\log x} = 100x$;

г) $\log^2 x - \log x^6 = \log_2 3 - 9$; *д)* $\sqrt{5\log_2(-x)} = \log_2 \sqrt{x^2}$;

ђ) $3^{\log_3^2 x} + x^{\log_3 x} = 6$; *е)* $x^{\log_x 3} \cdot x^{\log_3 x} = 9$; *ж)* $\sqrt{\log_a x} + \sqrt{\log_x a} = \dfrac{10}{3}$

з) $x^{\frac{\log x + 5}{3}} = 10^{5+\log x}$; *и)* $2^{\log_x 9} = \dfrac{4}{3}x$; *ј)* $(1 + \log_{\frac{1}{3}} x)^7 + (1 - \log_{\frac{1}{3}} x)^7 = 128$

к) $\log_2^3 2x = 2\log_2^2 x - 9$.

642. Решити једначине:

а) $x^{2\log_3 x} = 3x$; *б)* $2 \cdot 4^{\log x} + 5 \cdot 25^{\log x} = 7x$;

в) $\log_3(4 \cdot 3^x - 1) = 2x + 1$; *г)* $\log_2(2^x + 1) \cdot \log_2(2^{x+1} + 2) = 2$;

д) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$; *ђ)* $\dfrac{\log(\sqrt{x+1} + 1)}{\log \sqrt[3]{x-40}} = 3$.

△ **643.** Решити једначине:

а) $\log_2 x - 2\log_8 x + \log_{\sqrt{2}} 2x = \dfrac{20}{3}$; *б)* $\log_{3x}\dfrac{3}{x} + \log_3^2 x = 1$;

в) $\log_x 3 \log_{\frac{x}{3}} 3 + \log_{\frac{x}{81}} 3 = 0$; *г)* $\log_{16} x^3 + \log_{\frac{x}{2}} \sqrt{x} = 2$;

д) $\log_a(ax)\log_x(ax) = \log_{a^2}\dfrac{1}{a}$ $(0 < a \neq 1)$;

ђ) $\log_a(a + \sqrt{a+x}) = \dfrac{2}{\log_x a}$ $(0 < a \neq 1)$;

е) $\log_{\sqrt{x}}(x+12) = 8\log_{x+12} x$, $(x > 1)$; *ж)* $x + \log(1+2^x) = x\log 5 + \log 6$.

△ **644.** Решити једначине:

а) $\log\left|\dfrac{x-1}{2x+1}\right| = 0$; *б)* $\log_{\frac{1}{2}}|1-x| = 2$; *в)* $|\log_{\frac{1}{2}}(1-x)| = 2$;

г) $\log_{|x-1|} 2 = 1$; *д)* $|\log_x 3 - \log_x 2| = \dfrac{1}{2}$; *ђ)* $|\log_{\sqrt{3}} x - 2| - |\log_3 x - 2| = 2$.

* **645.** Решити једначину $\log(\alpha x + \beta) = 2\log(x+1)$, где $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$.

646. Решити једначине:

а) $4^{\log_{64}(x-3)+\log_2 5} = 50$; *б)* $15^{\log_5 3}\cdot x^{\log_5 9x+1} = 1$;

в) $m^{1+\log_3 x} + m^{1-\log_3 x} = m^2 + 1$ $(0 < m \neq 1)$; *г)* $5^x\sqrt[x]{8^{x-1}} = 500$;

д) $\log_{(3x+7)}(4x^2+12x+9) + \log_{(2x+3)}(6x^2+23x+21) = 4$.

* **647.** Одредити сва реална решења једначине $19^x \cdot 89^{2-x^2} = 19\cdot 89$.

648. Логаритми броја x са основама a, ax, ax^2, ax^3 су такви да је разлика првог и другог једнака разлици трећег и четвртог. Наћи те логаритме.

649. Дата је функција $f(x) = \log_a x + \log_{a^2} x$, где је a дати реалан број. У зависности од a решити једначину: $f(x + a^2 - a) = 2f(x)$.

650. За које $k \in \mathbf{R}$ једначина $\dfrac{\log(kx)}{\log(x+1)} = 2$ има само један корен?

651. За које $a \in \mathbf{R}$ једначина $\dfrac{\log x}{\log(x-a-a^2)} = 2$ има бар једно решење? Наћи сва решења.

* **652.** Решити једначину $2\log_x a + \log_{ax} a + 3\log_{a^2x} a = 0$ $(a < 0 \neq 1)$.

653. Решити једначину $\dfrac{\log_{a^2\sqrt{x}} a}{\log_{2x} a} + \log_{ax} a \log_{\frac{1}{a}} 2x = 0$ $(0 < a \neq 1)$.

654. Показати да једначина $\log_{2x}\left(\dfrac{2}{x}\right)\log_2^2 x + \log_2^4 x = 1$ има само једно решење које задовољава услов $x > 1$ и наћи то решење.

655. Одредити $a,\ b \in \mathbf{R}$, тако да једначина

$$1 + \log_b(2\log a - x)\log_x b = \frac{2}{\log_b x}$$

има бар једно решење. Одредити, затим, сва решења једначине.

656. Решити једначине:

а) $(\log_2 \sin x)^2 + \log_2(1-\cos 2x) = 0$; *б)* $\log_{\frac{1}{2}\sin 2x} \sin x = \dfrac{1}{2}$;

в) $\log_{\cos x} 4 \cdot \log_{\cos^2 x} 2 = 1$; *г)* $\log_{\sin x} 4 \cdot \log_{\sin^2 x} 2 = 4$;

д) $\log_{\sin x \cos x} \sin x \cdot \log_{\sin x \cos x} \cos x = \dfrac{1}{4}$; *ђ)* $\log_{\sin x} 2 \cdot \log_{\sin^2 x} a = 1 \quad a \in \Re$;

е) $\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2$.

657. Решити системе једначина:

а) $\begin{cases} \log_6 x = y + 4 \\ x^{y+1} = \dfrac{1}{36} \end{cases}$; *б)* $\begin{cases} 2\log_4 x + \log_2(y-1) = 1 \\ \log_8 x \cdot \log_{\sqrt{2}}(y-1) = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$;

в) $\begin{cases} \log^2 x + \log^2 y = 5 \\ \log x - \log y = 1 \end{cases}$; *г)* $\begin{cases} \log(x^2+y^2) = 1 + 2\log 2 \\ \log(x+y) - \log(x-y) = \log 2 \end{cases}$;

д) $\begin{cases} \log_a x \cdot \log_b y = \log_a b, \ (0 < a \neq 1) \\ a^{\log_{a^2} y} = \sqrt{x}, \ (0 < b \neq 1) \end{cases}$; *ђ)* $\begin{cases} \log_2(x+y) - \log_3(x-y) = 1 \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$.

658. Решити системе једначина:

а) $\begin{cases} x^{\log_8 y} + y^{\log_8 x} = 4 \\ \log_4 x - \log_4 y = 1 \end{cases}$; *б)* $\begin{cases} \log_y(\log_y x)) = \log_x(\log_x y) \\ \log_a^2 x + \log_a^2 y = 8 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x^y = y^x \\ x^p = y^q \ (x,\ y > 0\ ,\ pq > 0\ ,\ p \neq q) \end{cases}$; * *г)* $\begin{cases} x^m = y^n \\ \log_a \dfrac{x}{y} = \dfrac{\log_a x}{\log_a y} \end{cases}$;

д) $\begin{cases} x^y = y^x \\ a^x = b^y \ (x,\ y > 0,\ a,\ b > 0,\ a, b \neq 1) \end{cases}$; *ђ)* $\begin{cases} 3^{\log x} = 4^{\log y} \\ (4x)^{\log 4} = (3y)^{\log 3} \end{cases}$;

е) $\begin{cases} \log_3(\log_2 x) + \log_{\frac{1}{3}}(\log_{\frac{1}{2}} y) = 1 \\ x^2 y = 4 \end{cases}$; *ж)* $\begin{cases} \log_a x + \log_{a^2} y + \log_{a^2} z = d \\ \log_c y + \log_{c^2} z + \log_{c^2} x = d \\ \log_b z + \log_{b^2} x + \log_{b^2} y = d \end{cases}$;

з) $\begin{cases} xy = c^2 \\ (\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 = \dfrac{5}{2}\left(\log_2 c^2\right)^2 \end{cases}$.

△ **659.** Решити неједначине:

а) $\log_2(x-1) < 1$; *б)* $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) > 1$; *в)* $\log_3(x^2-1) > 0$;

г) $\log_{\frac{1}{3}}(x^2-1) > 0$; *д)* $\log_2\left|\dfrac{x-1}{2x+1}\right| < 0$; *ђ)* $\log|x-1| > 0$.

660. Решити неједначине:

а) $3^{x-2} > \dfrac{2}{5^{2x-1}}$; *б)* $2^{\log_{\frac{1}{3}}\frac{2x+3}{x-2}} > \dfrac{1}{4}$; *в)* $\log_{\frac{1}{5}}\left[\log_2\dfrac{3x}{x^2-1}\right] < 0$;

г) $\log_{\frac{1}{9}}(x^2-4) \geq \log_{\frac{1}{9}}(2|x|-1)$; *д)* $\log_{\frac{1}{2}} x + \log_3 x > 1$;

ђ) $x^{\log_a x} > a^2 x \ (a > 1)$; *е)* $x^{2-\log_2^2 x - \log_2 x^2} - \dfrac{1}{x} > 0$.

△ **661.** Решити неједначине:

а) $\log_{x^2-1}(3x-1) < \log_{x^2-1} x^2$; *б)* $\log_a x + \log_a(x-2) > 1, \ (0 < a \neq 1)$;

в) $\log_x \sqrt{x+4} > 1$; *г)* $x^{\log_3 x} > 3$; *д)* $\log_{3-x} x < -1$;

ђ) $\log_{\frac{1}{a}}(x+a) < \log_a(x-a)$, $0 < a \neq 1$.

662. Решити неједначине:

а) $\log_{\frac{1}{3}} x > \log_x 3 - \dfrac{5}{2}$; *б)* $\log_x 2 \cdot \log_{2x} 2 > \log_{4x}^2 2$;

в) $\log_2\sqrt{7-x}\log_{(x-1)} 4 \leq 2$; *г)* $\log_{x^2}(x^2-4x+3) > 1$;

д) $\log_{(x^2-2x+1)}(3-x) \leq 1$; *ђ)* $\log_5\sqrt{3x+4}\cdot\log_x 5 > 1$;

е) $\dfrac{1}{5-\log x} + \dfrac{2}{1+\log x} < 1$.

663. Решити неједначину: $\log(5^x + x - 20) > x - x\log 2$.

664. За које x, $x > 1$ и α, $\alpha \in \mathbf{R}$, важи:
$\log_2 x + \log_x 2 + 2\cos\alpha \leq 0$?

ОСМА ГЛАВА

РЕШЕЊА ЗАДАТАКА

1. *а)* 3; *б)* 5; *в)* 5; *г)* -2 *д)* $\sqrt{(-2)^2} = |-2| = 2$; *ђ)* 3; *е)* 2;
ж) $|a| + a = -a + a = 0$, јер је $a < 0$;
з) -2; *и)* $\dfrac{1}{2}$; *ј)* 2; *к)* $\dfrac{1}{2}$.

2. *а)* $x \geqslant 1$, јер је $\sqrt{(x-1)^2} = |x-1| = x-1$, за $x \geqslant 1$.
б) $x \leqslant 3$; *в)* $x \leqslant 0$; *г)* $x \leqslant 0$; *д)* $x = 0$; *ђ)* $x \geqslant 0$; *е)* $x = 0$;
ж) за свако $x \in \mathbf{R}$;
з) $x < 0$; *и)* $x \geqslant 0$; *ј)* $x \leqslant 0$.

3. *а)* $\sqrt[12]{32}$ јер је нпр. $\sqrt[4]{32\sqrt[3]{4}} = \sqrt[4]{2^5\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt[4]{\sqrt[3]{2^{15}}\cdot\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt[12]{2^{17}} =$
$= \sqrt[12]{2^{12}\cdot 2^5} = 2\sqrt[12]{2^5}$, итд ;
б) $\sqrt{4\cdot 2} - \sqrt{9\cdot 2} + \sqrt{16\cdot 2} - \sqrt{36\cdot 2} = 2\sqrt{2} - 3\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 6\sqrt{2} = -3\sqrt{2}$;
в) слично претходном задатку: $25\sqrt{5} - 4\sqrt{3}$;
г) $21\sqrt{2} - 8\sqrt{3}$; *д)* $2\sqrt{3}$; *ђ)* $3\sqrt{3}$; *е)* $\sqrt{\dfrac{32}{7}}\cdot\sqrt{\dfrac{7}{2}} = \sqrt{\dfrac{32}{7}\cdot\dfrac{7}{2}} = 4$; *ж)* $1\dfrac{1}{5}$;
з) 0; *и)* $\dfrac{5}{6}\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$;
ј) $2\sqrt{2}$, јер је $\sqrt{(1-\sqrt{2})^2} = |1-\sqrt{2}| = -(1-\sqrt{2}) = \sqrt{2} - 1$;
к) $2x - 3$; *л)* 0; *љ)* 0.

4. *а)* $\sqrt{2}$, јер је $\sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$, а $\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4}$;
б) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{3}}$; *в)* $\sqrt{\dfrac{1}{2}}$; *г)* $\sqrt{3}$;
д) $\sqrt{11}$, јер ако је супротно, тада је $\sqrt{2} + \sqrt{3} \geqslant \sqrt{11} \iff (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \geqslant$
$\geqslant 11 \iff 5 + 2\sqrt{6} \geqslant 11 \iff \sqrt{6} \geqslant 3 \iff 6 \geqslant 9$;
ђ) $2\sqrt{6}$; *е)* $\sqrt{3} + 2\sqrt{2}$;

ж) како је $\sqrt{6}+2\sqrt{7}>\sqrt{10}+\sqrt{21} \iff (\sqrt{6}+2\sqrt{7})^2>(\sqrt{10}+\sqrt{21})^2 \iff$ $\iff 34+4\sqrt{42}>31+2\sqrt{210} \iff 3+4\sqrt{42}>2\sqrt{210} \iff (3+4\sqrt{42})^2>$ $>840 \iff 8\sqrt{42}>53 \iff 2688>2809$, то је већи број $\sqrt{10}+\sqrt{21}$;
з) $\sqrt{11}$; *и)* $3-\sqrt{2}$.

5. Претпоставимо супротно, тј. да је $\sqrt{3}=\dfrac{m}{n}$, где је $m,\ n\in\mathbf{N}$ и где су m и n узајамно прости. После квадрирања, добијамо $3=\dfrac{m^2}{n^2} \iff 3n^2=m^2$, па m мора бити дељив са 3. Нека је $m=3m_1$, $m_1\in\mathbf{N}$. Заменом, добијамо $n^2=3m_1^2$, па је и $n=3n_1$, $n_1\in\mathbf{N}$. Дакле, бројеви m и n су дељиви са 3, супротно претпоставци да су узајамно прости, па је $\sqrt{3}$ ирационалан број.
б) Ако би број $2+\sqrt{3}$ био рационалан, тада би смо имали да је и број $(2+\sqrt{3})-2=\sqrt{3}$ такође рационалан, супротно претходном примеру;
в) Нека је $\sqrt{2}+\sqrt{3}=r$, где је r рационалан број. Тада је $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=r^2$, одакле је $\sqrt{6}=\dfrac{r^2-5}{2}$, па би број $\sqrt{6}$ био рационалан. Међутим, може се као у случају задатка *а)* доказати да је $\sqrt{6}$ ирационалан број.
г) и *д)* Слично претходном.
ђ) Лако се показује да се степеновањем броја $2+\sqrt{3}$ природном бројем добија увек број облика $p+q\sqrt{3}$ који је ирационалан.
е) Ако је $\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}=r$, где је r рационалан број, тада је $\sqrt[3]{3}=r-\sqrt{2}$, па се кубирањем обеју страна добија $3=(r-\sqrt{2})^3 \iff \sqrt{2}=\dfrac{r^3+6r-5}{3r^2}$. То би значило да је $\sqrt{2}$ такође рационалан број, што је немогуће.
ж) Поступити као у претходним примерима овог задатка.
з) Ако дати разломак проширимо са $c\sqrt{2}-d$, добићемо да је једнак разломку $\dfrac{(a\sqrt{2}+b)(c\sqrt{2}+d)}{2c^2-a^2}=\dfrac{2ac-bd}{2c^2-a^2}+\dfrac{bc-ad}{2c^2-a^2}\sqrt{2}$. Ако је $bc-ad\neq 0$ и последњи израз једнак неком рационалном броју r, тада је $\sqrt{2}$ једнак неком рационалном броју, што је немогуће. Дакле, тражени услов је $bc-ad=0$.

6. Рационалисањем имениоца, лако закључујемо да је $\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=$ $=\sqrt{3}-\sqrt{2}$, те је потребно доказати да $\sqrt{3}+\sqrt{2}\in S$. Користећи својства скупа S, тј. његову дефиницију, добијамо: $\sqrt{3}+\sqrt{2}\in S \overset{б)}{\Rightarrow} (\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})=5+2\sqrt{6}\in S$, и даље $(-5\in S\wedge 5+2\sqrt{6}\in S)\overset{б)}{\Rightarrow} -5+(5+2\sqrt{6})=2\sqrt{6}\in S$. Слично је $2\sqrt{6}\in S\wedge\sqrt{3}+\sqrt{2}\in S \overset{б)}{\Rightarrow} 2\sqrt{6}(\sqrt{3}+\sqrt{2})=4\sqrt{3}+6\sqrt{2}\in S$. Из аксиома *а)* и *б)* имамо да кад $x,\ y\in S$, тада и произвољна линеарна комбинација $\lambda_1x+\lambda_2y\in S$, где је $\lambda_1,\ \lambda_2\in\mathbf{Z}$. Због тога, из $\sqrt{3}+\sqrt{2}\in S$ и

$4\sqrt{3}+6\sqrt{2}\in S$, имамо $5(\sqrt{3}+\sqrt{2})+(-1)(4\sqrt{3}+6\sqrt{2})=(\sqrt{3}-\sqrt{2})\in S$, што је и требало доказати.

7. Ако ставимо да је $x=\sqrt{\dfrac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}+\sqrt{\dfrac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$, $x\geqslant 0$, тада се лако добија да је $x^2=a+\sqrt{b}$, па је $x=\sqrt{a+\sqrt{b}}$. Слично се доказује други случај.

а) Примењујући претходне резултате, добијамо $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{5-\sqrt{24}}=$
$=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5^2-24}}{2}}+\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5^2-24}}{2}}=\sqrt{3}-\sqrt{2}.$
б) $2\sqrt{2}-\sqrt{3}$; *в)* $3\sqrt{3}+\sqrt{2}$; *г)* $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$.

д) Слично као под *а)*, примењујући задатак **7**, добијамо да је $\sqrt{5+2\sqrt{6}}=$ $=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, па је тражени збир $2\sqrt{3}$.
ђ) $\sqrt{3}$; *е)* $3\sqrt{2}$; *ж)* $\sqrt{5}+\sqrt{3}$.

8. *а)* $\dfrac{3}{\sqrt{3}}=\dfrac{3}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}.$
б) Проширити дати разломак са $\sqrt[3]{a^2}$.
в) $\dfrac{1}{\sqrt{3}-1}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}.$
г) Проширити дати разломак са $\sqrt{2}+3$.
д) Проширити разломак са $\sqrt{3}+\sqrt{2}$.
ђ) Проширивањем датог разломка са $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}$, добијамо
$\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c})^2}=\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}-\sqrt{c}}{(a+b-c)+2\sqrt{ab}}$. На крају је потребно дати разломак проширити са $(a+b-c)-2\sqrt{ab}$, па ће именилац разломка бити једнак $(a+b-c)^2-4ab$.
е) Проширивањем датог разломка са $\sqrt{a}+\sqrt{b}-(\sqrt{c}+\sqrt{d})$, именилац разломка ће бити једнак $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{c}+\sqrt{d})^2=(a+b-c-d)+2(\sqrt{ab}-\sqrt{cd})$. Даљим проширивањем добијеног разломка са $(a+b-c-d)-2(\sqrt{ab}-\sqrt{cd})$, добијамо да ће именилац бити једнак $(a+b-c-d)^2-4(\sqrt{ab}-\sqrt{cd})^2=$ $=\big[(a+b-c-d)^2-4ab+4cd\big]+8\sqrt{abcd}$. На крају је потребно разломак проширити са $\big[(a+b-c-d)^2-4ab+4cd\big]-8\sqrt{abcd}$.
ж) Прво проширити дати разломак са $\sqrt[4]{a}+\sqrt{b}$, а затим са $\sqrt{a}+b$.
з) Прво проширивање ће бити са $\sqrt[4]{3}+\sqrt[8]{2}$, а затим са $\sqrt{3}+\sqrt[4]{2}$, п са $3+\sqrt{2}$.
и) Овде ћемо искористити идентитет $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$, стављајући $a=\sqrt[3]{2}$, $b=1$. Дакле, проширујући дати разломак са $(\sqrt[3]{2})^2+\sqrt[3]{2}+1$, добијамо да је именилац разломка једнак $(\sqrt[3]{2})^3-1=2-1=1$.

ј) Проширити дати разломак са $\sqrt[3]{a}-1$ и искористити идентитет за разлику кубова.
к) Стварајући разлику квадрата у имениоцу разломка, ослободити се прво квадратног корена, а затим одговарајућим проширивањем добити разлику кубова.
л) На основу идентитета
$x^3+y^3+z^3-3xyz=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$,
проширивањем датог разломка са
$(\sqrt[3]{a})^2+(\sqrt[3]{b})^2+(\sqrt[3]{c})^2-\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}-\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}-\sqrt[3]{c}\sqrt[3]{a}$,
добијамо да је именилац разломка једнак
$(\sqrt[3]{a})^2+(\sqrt[3]{b})^2+(\sqrt[3]{c})^2-3\sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b}\sqrt[3]{c}=a+b+c-3\sqrt[3]{abc}$.
На крају се проширивањем добијеног разломка са
$(a+b+c)^2+3(a+b+c)\sqrt[3]{abc}+9(\sqrt[3]{abc})^2$,
добија да је именилац разломка једнак
$(a+b+c)^3-(3\sqrt[3]{abc})^3=(a+b+c)^3-27abc$.

9. *а)* $\sqrt{2}$. *Упутство:* Применом задатка **7.**, добијамо да је
$\sqrt{2+\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ и $\sqrt{2-\sqrt{3}}=\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, итд.
б) Применом задатка **7**, или непосредно, добијамо
$\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2}=\sqrt{3}-1$, $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{3}+1$, $\sqrt{9-12\sqrt{2}+8}=$
$=\sqrt{3^2-2\cdot 3\cdot 2\sqrt{2}+(2\sqrt{2})^2}=\sqrt{(3-2\sqrt{2})^2}=3-2\sqrt{2}$, $\sqrt{9+12\sqrt{2}+8}=$
$=3+2\sqrt{2}$. Зато је дати израз једнак

$$\frac{\sqrt{3}-1}{3-2\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}+1}{3+2\sqrt{2}}=\frac{(\sqrt{3}-1)(3+2\sqrt{2})-(\sqrt{3}+1)(3-2\sqrt{2})}{3^2-(2\sqrt{2})^2}=4\sqrt{6}-6.$$

в) Ако дати израз означимо са x, $x\geqslant 0$, тада је

$$x^2=\frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2\sqrt[4]{8}-2\sqrt{(\sqrt[4]{8})^2-\left(\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2}}=\frac{\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}+1}}{2\left(\sqrt[4]{8}-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)}=\frac{1}{2}, \text{ па је}$$

$x=\frac{1}{\sqrt{2}}$.
г) 1 (Прво множимо трећи и четврти чинилац.)
д) Нека је $x=\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}$. Тада је
$x^3=9+\sqrt{80}+9-\sqrt{80}+3\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}\sqrt[3]{9-\sqrt{80}}(\sqrt[3]{9+\sqrt{80}}+\sqrt[3]{9-\sqrt{80}})$, тј.
$x^3=18+3x \iff x^3-3x-18=0 \iff x^3-27-3(x-3)=0 \iff$

$$\iff (x-3)(x^2+3x+6)=0 \iff (x-3)\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right]=0.$$ Једино реално решење последње једначине је $x=3$, што је и вредност датог израза.
ђ) $2\sqrt{2}$, јер је $(3\pm\sqrt{2})^3=45\pm 29\sqrt{2}$.
е) Дати израз је једнак са

$\sqrt[3]{(26+15\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^3}=\sqrt[3]{(26+15\sqrt{3})(26-15\sqrt{3})}=\sqrt[3]{1}=1.$

ж) Дати израз је једнак нули јер је $(1+2\sqrt{6})^2=25+4\sqrt{6}$.

з) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}+\sqrt{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}=1.$

и) Ако дати израз означимо са A, тада је $A=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(\sqrt{2}+2)+(\sqrt{3}+\sqrt{6})+(\sqrt{8}+2)}=$

$$=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})+\sqrt{3}(1+\sqrt{2})+\sqrt{4}(1+\sqrt{2})}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4}}{(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{4})}=\frac{1}{1+\sqrt{2}}=$$

$=\sqrt{2}-1.$

10. *а)* Лако се добија да је $\left[\dfrac{1}{3}\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25}\right)\right]^2=\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}$, што је еквивалентно траженој једнакости.

б) Доказати да је куб десне стране дате једнакости једнак поткореној величини леве стране једнакости.

в) Доказати да је $\left(\dfrac{\sqrt[4]{5}+1}{\sqrt[4]{5}-1}\right)^4=\dfrac{3+2\sqrt[4]{5}}{3-2\sqrt[4]{5}}$.

г) Како је $1>\sqrt{\sqrt{2}-1}$, лева страна једнакости даје

$$\sqrt{\left(1+\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{\sqrt{2}-1}\right)^2}=1+\sqrt{\sqrt{2}-1}+1-\sqrt{\sqrt{2}-1}=2.$$

д) $4+2\sqrt{3}=3+2\sqrt{3}+1=(\sqrt{3}+1)^2$, итд.

ђ) Користити чињеницу $(A>0$ и $B>0$ и $A^2=B^2)\Rightarrow(A=B)$.

11. *а)* Ако означимо дате количнике са k, тада је $A=ka$, $B=kb$, $C=kc$, $D=kd$. Одавде је $A+B+C+D=k(a+b+c+d)$, па је $\sqrt{Aa}+$ $+\sqrt{Bb}+\sqrt{Cc}+\sqrt{Dd}=\sqrt{k}(a+b+c+d)$, као и $\sqrt{(a+b+c+d)(A+B+C+D)}=$ $=\sqrt{k}(a+b+c+d)$. Стога је дата једнакост заиста тачна..

б) Нека је $ax^3=by^3=cz^3=k$. Тада је $ax^2=\dfrac{k}{x}$, $by^2=\dfrac{k}{y}$, $cz^2=\dfrac{k}{z}$, па је лева страна дате једнакости једнака $\sqrt{ax^3+by^3+cz^3}=\sqrt[3]{k\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)}=\sqrt[3]{k}$,

док је десна страна једнака $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}+\sqrt[3]{c}=\sqrt[3]{\dfrac{k}{x^3}}+\sqrt[3]{\dfrac{k}{y^3}}+\sqrt[3]{\dfrac{k}{z^3}}=$

$=\sqrt[3]{k}\left(\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}\right)=\sqrt[3]{k}$, па је једнакост тачна.

в) Из $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{b_n}=k$, добијамо: $a_1=kb_1$, $a_2=kb_2$, $\ldots$, $a_n=kb_n$, па је $\sqrt{a_1b_1}+\sqrt{a_2b_2}+\cdots+\sqrt{a_nb_n}=(b_1+b_2+\cdots+b_n)\sqrt{k}=$ $\sqrt{b_1+b_2+\cdots+b_n}\cdot\sqrt{k}\cdot\sqrt{b_1+b_2+\cdots+b_n}=\sqrt{kb_1+kb_2+\cdots+kb_n}\cdot\sqrt{b_1+b_2+\cdots+b_n}$.

г) Лева страна једнакости даје: $\sqrt{(\sqrt{a+b}+\sqrt{c})^2}+\sqrt{(\sqrt{a+b}-\sqrt{c})^2}=$

$= |\sqrt{a+b}+\sqrt{c}| + |\sqrt{a+b}-\sqrt{c}| = \sqrt{a+b}+\sqrt{c}+\sqrt{c}-\sqrt{a+b} = 2\sqrt{c}$.

д) Множењем дате једнакости са $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{a_1^2+b_1^2+c_1^2}$, квадрирањем добијене једнакости и мањим трансформацијама, добијамо да је $(ab_1-ba_1)^2+(ac_1-ca_1)^2+(bc_1-cb_1)^2=0$, што је могуће само ако је $ab_1-ba_1=0$, $ac_1-ca_1=0$ и $bc_1-cb_1=0$, тј. $\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{b}{b_1}$, $\dfrac{a}{a_1}=\dfrac{c}{c_1}$ и $\dfrac{b}{b_1}=\dfrac{c}{c_1}$.

12. Трансформишимо општи члан датог збира на следећи начин:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}} = \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} = \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(k+1-k)} =$$

$= \dfrac{1}{\sqrt{k}} - \dfrac{1}{\sqrt{k+1}}$ $(k \geqslant 1)$. Због тога је дати збир једнак $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+$

$$+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{\sqrt{99}}-\frac{1}{\sqrt{100}}\right) = 1-\frac{1}{\sqrt{100}} = \frac{9}{10}.$$

13. Из $0<abc<4$ следи да је $\sqrt{abc}<2$, па имамо

$$\frac{\sqrt{\dfrac{abc+4-4\sqrt{abc}}{a}}}{\sqrt{abc}-2} = \frac{\sqrt{(\sqrt{abc}-2)^2}}{\sqrt{a}(\sqrt{abc}-2)} = \frac{2-\sqrt{abc}}{\sqrt{a}(\sqrt{abc}-2)} = -\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

14. *а)* Ако приметимо да је $x(x+1) = \dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-1}{2} = \dfrac{1}{2}$, као и $(1-x)(x+2) = -x^2-x+2 = -x(x+1)+2 = -\dfrac{1}{2}+2 = \dfrac{3}{2}$, добићемо да је дати израз једнак 6.

б) Слично као у претходном случају, овде је $x(x+5) = \dfrac{\sqrt{7}-5}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{7}+5}{2} =$ $= -\dfrac{9}{2}$. Због тога је $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4) = [(x+1)(x+4)]\,[(x+2)(x+3)] =$

$$= [x(x+5)+4)]\,[x(x+5)+6)] = \left(-\frac{9}{2}+4\right)\left(-\frac{9}{2}+6\right) = -\frac{3}{4}.$$

в) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

г) Пре свега је $x = \dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}$ и $\sqrt{x^2-1} = \sqrt{\left(\dfrac{a+b}{2\sqrt{ab}}\right)^2-1} = \sqrt{\dfrac{(a-b)^2}{4ab}} =$

$$= \frac{|a-b|}{2ab} = \begin{cases} \dfrac{a-b}{2ab}, & a \geqslant b > 0 \\ -\dfrac{a-b}{2ab}, & 0<a<b \end{cases}.$$ Зато се заменом лако добија да је вредност датог израза једнака $a-b$ $(a \geqslant b > 0)$, или $-\dfrac{b}{a}(a-b)$ за $0<a<b$.

д) $a+b$;

ђ) Замењујући x, непосредно добијамо да је $\dfrac{1-ax}{1+ax}=\dfrac{1-\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}}{1+\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}}=$

$=\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{2a-b}}{\sqrt{b}+\sqrt{2a-b}}$ и $\dfrac{1+bx}{1-bx}=\dfrac{1+\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}}{1-\dfrac{b}{a}\sqrt{\dfrac{2a-b}{b}}}=\dfrac{a+\sqrt{(2a-b)b}}{a-\sqrt{(2a-b)b}}=\dfrac{2a+2\sqrt{2a-b}\sqrt{b}}{2a-2\sqrt{2a-b}\sqrt{b}}=$

$=\dfrac{(\sqrt{2a-b}+\sqrt{b})^2}{(\sqrt{2a-b}-\sqrt{b})^2}$. Сада имамо: $\dfrac{1-ax}{1+ax}\sqrt{\dfrac{1+bx}{1-bx}}=\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{2a-b}}{\sqrt{b}+\sqrt{2a-b}}\cdot\dfrac{\sqrt{2a-b}+\sqrt{b}}{|\sqrt{2a-b}-\sqrt{b}|}=$

$=\dfrac{\sqrt{b}-\sqrt{2a-b}}{-(\sqrt{2a-b}-\sqrt{b})}=1$, јер је $0<a<b<2a$.

е) Ако ставимо да је $u=\sqrt[3]{\sqrt{5}+2}$, $v=\sqrt[3]{\sqrt{5}-2}$, тада је $uv=1$, па је $x^3+3x=(u-v)^3+3(u-v)=u^3-v^3-3uv(u-v)+3(u-v)=u^3-v^3=2\sqrt{5}$.

ж) Како је $\sqrt{x+1}=\sqrt{\dfrac{a^2+1}{2a}+1}=\sqrt{\dfrac{(a+1)^2}{2a}}=\dfrac{a+1}{\sqrt{2a}}$ и $\sqrt{x-1}=\sqrt{\dfrac{(a-1)^2}{2a}}=$

$=\dfrac{|a-1|}{\sqrt{2a}}$, то је дати израз једнак $\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}}{\dfrac{1}{\sqrt{x-1}}-\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}}=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}=$

$$=\frac{|a-1|}{a+1-|a-1|}=\begin{cases}\dfrac{1-a}{2a}, & 0<a<1\\[2mm] \dfrac{a-1}{2}, & a\geqslant 1\end{cases}.$$

з) За $x=\sqrt{ab}$, $0<b<a$, имамо да је $(a-x)(x-b)=(a-\sqrt{ab})(\sqrt{ab}-b)=$ $=\sqrt{a}(\sqrt{a}-\sqrt{b})\sqrt{b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})=\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2$, као и $(a+x)(x+b)=\sqrt{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$.

Зато је дати израз једнак $\sqrt{\dfrac{\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})+\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}+\sqrt{b})-\sqrt[4]{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})}}=\sqrt{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}}=\sqrt[4]{\dfrac{a}{b}}$.

15. *а)* 2, ако је $a>0$ и -2, ако је $a<0$.

б) Ако означимо $\dfrac{a+2}{a-2}$ са x, имаћемо да је дати израз једнак $\dfrac{\sqrt{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}=$

$=\dfrac{x+1}{x-1}=\dfrac{a}{2}$, где је a такво да је $\dfrac{a+2}{a-2}>0 \iff a\in(-\infty,\ -2)\cup(2,\ +\infty)$.

в) -1; *Упутство:* Приметимо да је

$$\frac{1-a}{\sqrt{1-a^2}-1+a}=\frac{(\sqrt{1-a})^2}{\sqrt{1-a}\sqrt{1+a}-(\sqrt{1-a})^2}=\frac{\sqrt{1-a}}{\sqrt{1+a}-\sqrt{1-a}}.$$

г) Дати израз је дефинисан ако је $a^2-9\geqslant 0$, $2a+2\sqrt{a^2-9}\geqslant 0$ и $2a-2\sqrt{a^2-9}>0$, што даје $a\geqslant 3$. За такво a је $2a+2\sqrt{a^2-9}=$

$= a-3+2\sqrt{a-3}\sqrt{a+3}+a+3=\left(\sqrt{a-3}+\sqrt{a+3}\right)^2$ и, слично
$2a-2\sqrt{a^2-9}=\left(\sqrt{a-3}-\sqrt{a+3}\right)^2$. Зато је дати израз једнак

$$\frac{\sqrt{(\sqrt{a-3}+\sqrt{a+3})^2}}{\sqrt{(\sqrt{a-3}-\sqrt{a+3})^2}}=\frac{\sqrt{a-3}+\sqrt{a+3}}{|\sqrt{a-3}-\sqrt{a+3}|}=\frac{\sqrt{a-3}+\sqrt{a+3}}{-\left(\sqrt{a-3}-\sqrt{a+3}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt{a-3}+\sqrt{a+3}\right)^2}{(\sqrt{a-3})^2-(\sqrt{a+3})^2}=\frac{2a+2\sqrt{a^2-9}}{6}=\frac{a+\sqrt{a^2-9}}{3}.$$

Задатак се лакше решава ако израз пишемо у облику $\sqrt{\dfrac{2a+2\sqrt{a^2-9}}{2a-2\sqrt{a^2-9}}}$, а затим рационалишемо именилац разломка под кореном.

д) Израз је дефинисан за $x>4$ (за $x=4$ именилац разломка једнак је нули) и важи: $\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}=\sqrt{x-4-4\sqrt{x-4}+4}=\sqrt{(\sqrt{x-4}-2)^2}=$ $=|\sqrt{x-4}-2|$, $\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}=\sqrt{x-4}+2$. Према томе дати израз је једнак

$$\frac{|\sqrt{x-4}-2|+2}{\sqrt{x-4}}=\begin{cases}\dfrac{4-\sqrt{x-4}}{\sqrt{x-4}}, & 4<x<8\\ 1, & x\geqslant 8\end{cases}$$

ђ) $\sqrt{a}-\sqrt{1-a}$ за $0\leqslant a<\frac{1}{2}$, $\sqrt{1-a}-\sqrt{a}$ за $\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 1$

е) Поступајући слично као у случајевима *г)* и *д)*, добијамо да је израз једнак $\dfrac{\sqrt{(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})^2}-\sqrt{a-b}}{\sqrt{(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})^2}+\sqrt{a-b}}=\dfrac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}}=1.$

ж) Како је $\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}=\sqrt{\dfrac{2+2\sqrt{1-x^2}}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{1+x+2\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}+1-x}=$ $=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$, и $(\sqrt{1+x})^3-(\sqrt{1-x})^3=$ $=(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})((\sqrt{1+x})^2+\sqrt{1+x}\sqrt{1-x}+(\sqrt{1x})^2)=(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(2+$ $+\sqrt{1-x^2})$, то се заменом добија да је дати израз једнак $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{1+x}+$ $+\sqrt{1-x})(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+x-(1-x))=\dfrac{2x}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}x\quad(-1\leqslant x\leqslant 1).$

з) Слично као у случају *е)* имамо да је $x+4\sqrt{x-4}=(\sqrt{x-4}+2)^2$ и $x-4\sqrt{x-4}=(\sqrt{x-4}-2)^2$, па је дати израз једнак $\dfrac{\sqrt[3]{(\sqrt{x-4}+2)^3}}{\sqrt[3]{(\sqrt{x-4}-2)^3}}\cdot\dfrac{(\sqrt{x-4}-2)^2}{2}=$

$$=\frac{\sqrt{x-4}+2}{\sqrt{x-4}-2}\cdot\frac{(\sqrt{x-4}-2)^2}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{x-4}+2)(\sqrt{x-4}-2)=\frac{1}{2}((x-4)-4)=\frac{x-8}{2}.$$

и) $4x - \sqrt{4x^2 - 1}$. *Упутство:* Уочити да је
$2x + 2\sqrt{4x^2 - 1} = \left(\sqrt{2x-1} + \sqrt{2x+1}\right)^2$, итд.

ј) Лако се добија да је $\sqrt{\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}} + \sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}} - 2} = \sqrt{\dfrac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1})^2}{\sqrt{x^2-1}}} =$
$= \dfrac{\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}}{\sqrt[4]{x^2-1}}$ и $\left(\sqrt{x+1}\right)^3 - \left(\sqrt{x-1}\right)^3 = \left(\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1}\right)\left(2x + \sqrt{x^2-1}\right)$
па је дати израз једнак $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2-1}}$.

16. Раставимо трином $x^3 - 3x - 2$ на чиниоце: $x^3 - 3x - 2 = (x^3 - 4x) + (x-2) = x(x^2-4) + (x-2) = (x-2)(x^2+2x+1) = (x-2)(x+1)^2$. Слично је $x^3 - 3x + 2 = (x+2)(x-1)^2$, па је израз $\dfrac{(x-2)(x+1)^2 + (x^2-1)\sqrt{x^2-4}}{(x+2)(x-1)^2 + (x^2-1)\sqrt{x^2-4}} =$
$= \dfrac{(x+1)\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x+2}} \cdot \dfrac{(x+1)\sqrt{x-2} + (x-1)\sqrt{x+2}}{(x-1)\sqrt{x+2} + (x+1)\sqrt{x-2}} = \dfrac{(x+1)\sqrt{x-2}}{(x-1)\sqrt{x+2}}$.

17. Дату једнакост трансформишемо: $\left(a^2 - a\sqrt{2} + \dfrac{1}{2}\right) + (b - 2\sqrt{b} + 1) = 0$, односно $\left(a - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (\sqrt{b} - 1)^2 = 0$. Одавде је $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $b = 1$.

18. *а)* Нека је $a = \sqrt[3]{3 + \sqrt[3]{3}}$ и $b = \sqrt[3]{3 - \sqrt[3]{3}}$. Тада је $a^3 + b^3 = 6$. Полазећи од $(a-b)(a^2 - b^2) > 0$, добијамо $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2 = ab(a+b)$. Даље је $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b) < 4(a^3 + b^3) = 24$, па је $a + b < \sqrt[3]{24} = 2\sqrt[3]{3}$.
б) Користећи познату неједнакост: за $a > 0$ и $a \neq 1$ је $a + \dfrac{1}{a} > 2$ (која се лако доказује), добићемо: $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+2}} = \dfrac{a^2+2+1}{\sqrt{a^2+2}} = \sqrt{a^2+2} + \dfrac{1}{\sqrt{a^2+2}} > 2$.
в) Изрази $(a-b)$ и $(\sqrt{a} - \sqrt{b})$ су истог знака, па из $(a-b)\cdot(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \geqslant 0$, добијамо: $a\sqrt{a} + b\sqrt{b} \geqslant a\sqrt{b} + b\sqrt{a}$. Дељењем са $\sqrt{ab}$ добијамо тражену неједнакост.

19. *а)* $\sqrt[12]{x^30y^31}$; *б)* $\sqrt[12]{\dfrac{x}{yz}}$; *в)* $\sqrt[4]{a^3}$; *г)* $a^2 - b^2$; *д)* 8; *ђ)* $\dfrac{75}{4}$;
е) -7; *ж)* $\dfrac{4}{625}$; *з)* $x^{-\frac{12}{5}} z^{-\frac{4}{5}}$; *и)* 0;
ј) Ако имамо на уму да је $a \pm x = (\sqrt[3]{a})^3 \pm (\sqrt[3]{x})^3 =$
$= (\sqrt[3]{a} \pm \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{a^2} \mp \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{x^2})$, добијамо да је израз једнак
$\left[\sqrt[3]{a^2} + \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{x} - (\sqrt[3]{a}^2 - \sqrt[3]{ax} + \sqrt[3]{x})\right] \cdot 2(ax)^{-\frac{1}{3}} = 2(ax)^{\frac{1}{3}} 2 \cdot (ax)^{-\frac{1}{3}} = 4$.
к) Како је $3a + \sqrt{6a-1} = \dfrac{1}{2}\left(6a + 2\sqrt{6a-1}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\sqrt{6a-1} + 1\right)^2$ и

$3a-\sqrt{6a-1}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{6a-1}-1\right)^2$, где је, због дефинисаности задатка претпостављено да је $6a-1\geqslant 0\left(\iff a\geqslant\frac{1}{6}\right)$ $\sqrt{6a-1}-1\neq 0$ $\left(\iff\sqrt{6a-1}\neq 1\iff a\neq\frac{1}{3}\right)$. За такве a имамо да је дати израз једнак $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{6-a}+1)^2}}+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(\sqrt{6-a}-1)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6-a}+1}+\frac{\sqrt{2}}{|\sqrt{6-a}-1|}$, а одавде је последњи израз једнак $\frac{\sqrt{2}}{3a-1}$ за $\frac{1}{6}\leqslant a<\frac{1}{3}$, а $\frac{\sqrt{2(6a-1)}}{3a-1}$ за $a>\frac{1}{3}$.

л) $2\sqrt{a-1}$; *љ)* $\frac{(x+y)^2}{4xy}$; *м)* $-\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$; *н)* $2(a+b)$; *њ)* $\frac{x^2-3x+2}{3x}$.

20. *а)* Множењем чинилаца под кореном на левој страни једнакости, добијамо да је тај производ једнак $2(a^2+b^2)-2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}+2ab=$ $=(a+b)^2-2(a+b)\sqrt{a^2+b^2}+\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2=\left(a+b-\sqrt{a^2+b^2}\right)^2$, па је тражена једнакост очигледна, јер је $a+b>\sqrt{a^2+b^2}$ за $a>b$, $b>0$.

б) До тражене једнакости долазимо на сличан начин као у случају *а)*.

21. Треба дате изразе заправо средити. Резултати:

а) $8+i$; *б)* $-2+3i$; *в)* $3-6i$; *г)* $-1-2i$; *д)* $3-i$; *ђ)* $-2i$; *е)* $-11-2i$.

ж) Непосредно се добија да је $i^4=1$, па је $i^8=i^4\cdot i^4=1$.

з) $i^{17}=(i^4)^4\cdot i=i$.

и) Како је $i^3=i^2\cdot i=-i$, то је $i^4=i^3\cdot i=(-i)\cdot i=1$, $i^5=i^4\cdot i=i$, $i^6=i^5\cdot i=i\cdot i=-1$, итд. Закључујемо, дакле, да се вредности i^n циклично понављају и да је период 4. Нека је $n=4n_1+r$, где је $n_1\in\mathbf{N}$, $0\leqslant r\leqslant 3$ цео број. Тада је $i^n=i^{4n_1+r}=(i^4)^{n_1}\cdot i^r=i^r$. Коначно је $i^{4n_1}=1$, $i^{4n_1+1}=i$, $i^{4n_1+2}=-1$, $i^{4n_1+3}=-i$.

ј) Како је $(1+i)^2=2i$, то је $(1+i)^{26}=\left[(1+i)^2\right]^{13}=2^{13}\cdot i^{13}=2^{13}i$ (видети претходни задатак *и)*).

к) -2^{50}. Видети *и)* и *ј)*.

л) 4; *љ)* 8.

22. *а)* Помножићемо и поделити дати израз (тј. проширити) са $1+i$ да бисмо се ослободили „имагинарности“ у имениоцу:
$$\frac{1}{1-i}=\frac{1}{1-i}\cdot\frac{1+i}{1+i}=\frac{1+i}{1-i^2}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i.$$

б) Поступајући као у претходном примеру, добићемо $\frac{3}{1+2i}=\frac{3}{5}-\frac{6}{5}i$.

в) $-\frac{1}{13}-\frac{5}{13}i$; *г)* $2-i$; *д)* $-i$; *ђ)* i.

е) Како је $\frac{1}{i^{25}}=\left(\frac{1}{i}\right)^{25}=\left(\frac{1}{i}\cdot\frac{i}{i}\right)^{25}=(-i)^{25}=-i^{25}$, то се применом задатка

21.*и)* добија резултат $-i$.

ж) Поступајући као у задатку **21.***ј)*, добијамо да је израз једнак $-\dfrac{1}{2^5}i$.

з) $\dfrac{1}{5}+\dfrac{3}{5}i$; *и)* $0+\dfrac{1}{8}i$; *ј)* $-\dfrac{6}{5}-\dfrac{12}{5}i$; *к)* $-\dfrac{3}{5}+\dfrac{11}{5}i$; *л)* $-\dfrac{24}{169}+\dfrac{10}{169}i$;
љ) $1+0\cdot i=1$.

23. *а)* Ако ставимо $z_1=x_1+iy_1$ и $z_2=x_2+iy_2$, тада је $z_1+z_2=(x_1+x_2)+$ $+i(y_1+y_2)$, па је $\overline{z_1+z_2}=(x_1+x_2)-i(y_1+y_2)=(x_1-iy_1)+(x_2-iy_2)=\overline{z_1}+\overline{z_2}$. Слично се доказује и случај за знаком „$-$".
б) Ако уведемо ознаке као у *а)*, добићемо $\overline{z_1z_2}=x_1x_2-y_1y_2-i(x_1y_2+x_2y_1)$. Слично $\overline{z_1}\,\overline{z_2}=x_1x_2-y_1y_2-i(x_1y_2+x_2y_1)$, итд.
в) Ако ставимо $z=x+iy$ тада је $z^{-1}=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+iy}=\dfrac{1}{x+iy}\cdot\dfrac{x-iy}{x-iy}=$
$=\dfrac{x}{x^2+y^2}-i\dfrac{y}{x^2+y^2}$, тј. $\overline{z^{-1}}=\dfrac{x}{x^2+y^2}+i\dfrac{y}{x^2+y^2}=\dfrac{x+iy}{x^2+y^2}=\dfrac{x+iy}{(x+iy)(x-iy)}=$
$=\dfrac{1}{x-iy}=(\overline{z})^{-1}$.

г) Примењујући резултат *б)* и *в,)* добија се $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\overline{(z_1z_2^{-1})}=\overline{z_1}\,\overline{z_2^{-1}}=$
$=\overline{z_1}(\overline{z_2})^{-1}=\dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
д) $(\overline{\overline{z_1}})=\overline{(x-iy)}=x+iy=z$.

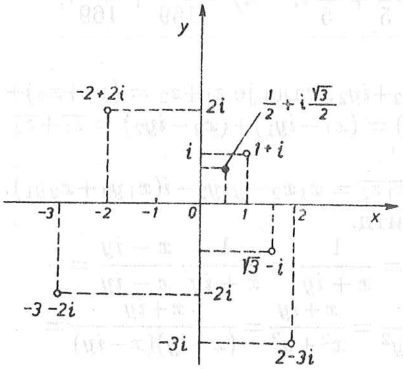
24. *а)* Ако уведемо ознаке као у **23.** *а)*, тада је $|z_1z_2|^2=(x_1x_2-y_1y_2)^2+$ $(x_1y_2-x_2y_1)^2=x_1^2x_2^2-y_1^2y_2^2+x_1^2y_2^2-x_2^2y_1^2=(x_1^2+y_1^2)(x_2^2+y_2^2)=|z_1|^2|z_2|^2$, одакле је $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$.
б) Применити резултат из *а)*.
в) Ако је $z=x+iy$, тада је $z\overline{z}=(x+iy)(x-iy)=x^2+y^2=|z|^2$.
г) Показати да је $\left|\dfrac{1}{z_2}\right|=\dfrac{1}{|z_2|}$, а затим применити резултат из *б)*.

25. *а)* Примењујући резултате из задатака **23.** и **24.** имамо $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)\overline{(z_1+z_2)}+(z_1-z_2)\overline{(z_1-z_2)}=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+$ $+\overline{z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}=2|z_1|^2+2|z_2|^2$.
б) Применити поступак као у *а.)*
в) Поступити као у *а)*, знајући да $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}z$, за произвољно $z\in\mathbf{C}$.

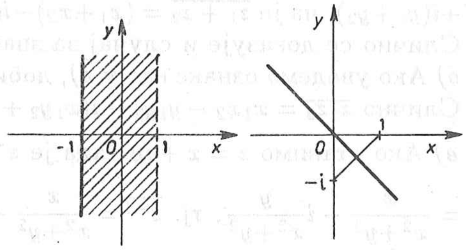
26. *а)* – *и)* Дати бројеви су представљени на слици 23.

27. *а)*2; *б)*1; *в)* 1; *г)* 3; *д)* $\sqrt{2}$; *ђ)* 2; *е)* 1; *ж)* $\sqrt{13}$;
з) $2\sqrt{2}$; *и)* $\sqrt{13}$.

28. Како се сваком комплексном броју $z=x+iy$ може додоати вектор $\overrightarrow{OM}$, где је O координатни почетак, а $M\,(x,\,y)$ тачка која одговара броју z и како се сабирање (одузимање) комплексних бројева своди на сабирање (одузимање) одговарајућих вектора, то је $|z_1 - z_2|$ једнак модулу вектора $\overrightarrow{M_1M_2}$ који спаја тачке $M_2(z_2)$ и $M_1(z_1)$, тј. растојању између тачака одређених бројевима z_1 и z_2.



Сл. 23.



Сл. 24.

29. *а)* Ако је $z = x + iy$ то је $\mathrm{Re}z > 0 \iff x > 0$, па је скуп тражених тачака десна полураван чија је граница y-оса, не укључујући тачке на њој.
б) Скупу тачака из *а)* додати и тачке на y-оси.
в) Видети сл 24. лево.
г) $\mathrm{Im}z < 0 \iff y < 0$, тј. скуп тачака је доња полураван ограничена x-осом (не укључујући тачке на x-оси).
д) $\mathrm{Im}z \leqslant 1 \iff -1 \leqslant y \leqslant 1$, тј. скуп тачака је део равни ограничене правим $y = -1$ и $y = 1$, укључујући и њих.
ђ) То је скуп тачака које су од координатног почетка удаљене не више од 1, а то је круг полупречника 1.
е) Тачке изван круга полупречника 1.
ж) То је скуп тачака које су подједнако удаљене од тачака $-i$ и 1, а то је симетрала дужи која спаја тачке одређене бројевима $-i$ и 1 (видети сл. 24. десно).

30. Ако ставимо $z = x + iy$ то је $\mathrm{Re}z \leqslant |z| \iff x \leqslant \sqrt{x^2 + y^2}$, што није тешко доказати. Слично поступити и у случају неједнакости $\mathrm{Im}z \leqslant |z|$.

31. Примењујући својства **24.** *в)* и *г)* и претходни задатак имамо $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)\overline{(z_1 + z_2)} = (z_1 + z_2)(\overline{z_1} + \overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\mathrm{Re}\{z_1\overline{z_2}\} \leqslant |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1\overline{z_2}| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2$, одакле је $|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$. Користећи управо доказану неједнакост, имамо $|z_1| = |(z_1 + z_2) + (-z_2)| \leqslant |z_1 + z_2| + |-z_2| = |z_1 + z_2| + |z_2|$, одакле је $|z_1 + z_2| \geqslant |z_1| - |z_2|$. Слично, полазећи од $|z_2|$, долазимо до неједнакости $|z_1 + z_2| \geqslant |z_2| - |z_1| = -\big(|z_1| - |z_2|\big)$, па је заиста $|z_1 + z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|$. Геометријско тумачење неједнакости своди се на однос збира или разлике двеју страница троугла према трећој.

32. *а)* Дата једначина је еквивалентна једначини $x + 2y + i(x + y) = 5 + 3i$, а ова систему $x + 2y = 5$, $x + y = 3$, што даје $x = 1$, $y = 2$. Решење је $z = 1 + 2i$.
б) $z = 3 - 2i$; *в)* $x = 12$, $y = -26$; *г)* $x = 1$, $y = -2$;
д) $z = \dfrac{3}{2} - 2i$; *ђ)* $z = -1 - i$;
е) Стављајући $z = x + iy$, добијамо систем једначина $\sqrt{x^2 + (y-2)^2} = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y+1)^2}$. Квадрирањем обеју страна датих једначина и сређивањем, добија се систем $-4y + 4 = 0$, $-2x = 2y$, тј. $x = -1$, $y = 1$, па је решење $z = -1 + i$.

33. $bc = ad$.

34. Како је $\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{1^2 - i^2} = i$, то је $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^n = i^n = 1$ за $n = 4k$, $k \in \mathbb{N}$ (упоредити са **21.** *и)*).

35. Проширивањем датог разломка са $\overline{z+1}$ $(= \overline{z} + 1)$, добијамо да је $\dfrac{(z-1)(\overline{z}+1)}{|z+1|^2} = \dfrac{|z|^2 - 1 + z - \overline{z}}{|z+1|^2} = \dfrac{|z|^2 - 1 + 2\mathrm{Im} z}{|z+1|^2}$. Последњи број је реалан ако и само ако је $\mathrm{Im} z = 0$ и $z \neq -1$, тј. ако $z \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$.

36. Примењујући поступак из претходног задатка, добијамо да је $\dfrac{z-1}{z+1}$ чисто имагинаран ако и само ако је $|z|^2 - 1 = 0 \iff |z| = 1$ и $z \neq -1$.

37. Доказ следи из следећег низа једнакости: $\dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} = \dfrac{z_1+z_2}{1+z_1z_2} \cdot \dfrac{\overline{1+z_1z_2}}{\overline{1+z_1z_2}} =$

$$= \frac{(z_1+z_2)(1+\overline{z_1z_2})}{|1+z_1z_2|^2} = \frac{z_1+z_2+|z_1|^2\overline{z_2}+\overline{z_1}|z_2|^2}{|1+z_1z_2|^2} = \frac{(z_1+\overline{z_1})+(z_2+\overline{z_2})}{|1+z_1z_2|^2} = \frac{2\mathrm{Re}z_1+2\mathrm{Re}z_2}{|1+z_1z_2|^2}$$

$\in \mathbb{R}$, где су примењена својства дата у задацима **23.** и **24.**

38. Показати да важи $|\zeta|^2 = \zeta\overline{\zeta} = 1$.

39. *а)* $P(z) = 0$; *б)* $P(z) = 1 - i\sqrt{3}$.

40. Ставимо $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $(y_1 \neq 0,\ y_2 \neq 0)$. Како је $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ и $z_1z_2 = (x_1y_1 - x_2y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$, то су бројеви $z_1 + z_2$ и z_1z_2 реални ако и само ако је $y_1 + y_2 = 0$ и $x_1y_2 + x_2y_1 = 0$. Одавде је $y_1 = -y_2$, па се заменом у другој релацији, добија
$y_1(x_1 - x_2) = 0 \iff x_1 = x_2$ (јер је $y_1 \neq 0$ по претпоставци).
Зато је $z_1 = x_2 - iy_2 = \overline{z_2}$. Обрнуто се лако доказује.

41. Број a је реалан ако и само ако је $a = \overline{a}$. У нашем случају је $\dfrac{u - \overline{u}z}{1 - z} = \overline{\left(\dfrac{u - \overline{u}z}{1 - z}\right)}$, одакле се добија $\dfrac{u - \overline{u}z}{1 - z} = \dfrac{\overline{u} - u\overline{z}}{1 - \overline{z}}$, а затим, после множења и сређивања, $(\overline{u} - u)(1 - z\overline{z}) = 0$, $z \neq 1$. Из последње релације закључујемо да ако је $u = \overline{u}$, тј. ако је u реалан, тада је решење сваки комплексан број $z \neq 1$, а ако је $u \notin \mathbf{R}$, тада је
$1 - z\overline{z} = 0 \iff 1 - |z|^2 = 0 \iff |z| = 1$,
тј. решење је сваки комплексни број чији је модуо једнак 1 $(z \neq 1)$.

42. Из $|a| = |b| = |c| = 1$ имамо $|a|^2 = |b|^2 = |c|^2 = 1$, тј. $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$, па је $|ab + bc + ca| = |abc| \left|\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right| = |\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}| = |\overline{a + b + c}| = |a + b + c|$.

43. Нека су тражени бројеви z_1, z_2 и z_3. По претпоставци је $z_1 + z_2 + z_3 = 1$; $z_1 z_2 z_3 = 1$ и $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$. Зато је $z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_3 z_1 = \dfrac{1}{z_3} + \dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2} = \dfrac{\overline{z_3}}{|z_3|^2} + \dfrac{\overline{z_1}}{|z_1|^2} + \dfrac{\overline{z_2}}{|z_2|^2} = \overline{z_1 + z_2 + z_3} = 1$. Елиминишимо из ових релација z_2 и z_3 на следећи начин. Последњу релацију пишимо у облику $z_1(z_2 + z_3) + \dfrac{z_1 z_2 z_3}{z_1} = 1$. Одавде је $z_1(1 - z_1) + \dfrac{1}{z_1} = 1 \iff z_1^2(z_1^2 + 1) = 0$. Решења последње једначине су 1, i или $-i$. Ако је, рецимо, $z_1 = 1$, тада из првих релација имамо $z_2 + z_3 = 0$, $z_2 z_3 = 1$, одакле се добија $z_2 = i$, $z_3 = -i$. Дакле тражени бројеви су $1, i$ и $-i$ (или у било којем другом поретку).

44. Запазимо да су бројеви 1986 и 1990 облика $4k + 2$, $k \in \mathbf{N}$. Како је
$$f(4k + 2) = \left(\frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)^{4k+2} + \left(\frac{1 - i}{\sqrt{2}}\right)^{4k+2} = \left[\left(\frac{1 + i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{2k+1} + \left[\left(\frac{1 - i}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^{2k+1} =$$
$= i^{2k+1} + (-i)^{2k+1} = i^{2k+1} - i^{2k+1} = 0$, то је и тражени збир такође једнак нули.

45. *а), б)* Применити идентитет $|z|^2 = z\overline{z}$.

46. *а)* Поћи од чињенице да је $z_1 - z_2 = (z_1 - z_3) + (z_3 - z_2)$, а затим применити неједнакост из задатка **31.**
б) Из претходне неједнакости из *а)* имамо да је, рецимо, $|z_1 - z_2| \leqslant |z - z_1| + |z - z_2|$. Исту неједнакост применити и на $|z_1 - z_3|$ и $|z_3 - z_1|$.

47. Десна страна неједнакости из задатка **31.** може се генералисати и на n бројева $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Наиме, важи $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n| \leqslant |z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$. Ову неједнакост можемо геометријски интерпретирати на следећи начин: ако уочимо радијус-векторе одређене бројевима $z_1, z_2, \ldots, z_n$, а затим их саберемо надовезивањем, тада је растојање крајње тачке последњег вектора у том низу од координатног почетка, а то је $|z_1 + z_2 + \cdots + z_n|$, мање од збира $|z_1| + |z_2| + \cdots + |z_n|$, тј. мање од дужине изломљене линије која спаја две поменуте тачке. Тражена неједнакост следи стављајући $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$, $\dots$, $z_n = x_n + iy_n$.

48. По услову задатка је $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$ и $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| = |z_3 - z_1| = a$ (видети геометријску интерпретацију величине $|z_1 - z_2|$ у задатку **28.**). Зато имамо $|z_1z_2 - z_2z_3| = |z_2(z_1 - z_3)| = |z_2||z_1 - z_3| = ra$, $|z_1z_2 - z_3z_1| = |z_1||z_2 - z_3| = ra$ и $|z_1z_3 - z_2z_3| = |z_3||z_1 - z_2| = ra$, па је $|z_1z_2 - z_3z_1| = |z_1z_2 - z_3z_1| = |z_1z_3 - z_2z_3|$. Дакле заиста су z_1z_2, z_2z_3 и z_3z_1 темена једнакостраничног троугла.

49. *а)* $x_1 = x_2 = 0$; *б)* $x_{1,2} = \pm 1$; *в)* $x_{1,2} = \pm\sqrt{3}$; *г)* $x_{1,2} = \dfrac{\pm i}{\sqrt{2}}$;
д) $x_1 = -3$, $x_2 = 0$; *ђ)* $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{2}{3}$; *е)* $x_1 = -\dfrac{1}{2}$; $x_2 = 0$; *ж)* $x_1 = -2$, $x_2 = 1$.

50. *а)* $x_1 = 2$, $x_2 = 3$; *б)* $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; *в)* $x_1 = x_2 = 2$;
г) $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = 1$; *д)* $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$; *ђ)* $x_{1,2} = \dfrac{3 \pm i\sqrt{11}}{2}$;
е) $x_{1,2} = \dfrac{\sqrt{2} \pm i\sqrt{10}}{6}$; *ж)* $z_1 = \dfrac{3 - 5i}{2}$, $z_2 = -\dfrac{1 + i}{2}$;
з) Растављањем на чиниоце добијамо: $(x+1)(x^2+3x+3) = 0$. Решења су: $x = -1 \vee x_2 = \dfrac{-3 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

51. *а)* $x_{1,2} = \pm\dfrac{5}{3}$;
б) Уз услов $x \neq a$ и $x \neq b$ дата квадратна једначина се своди на еквивалентну једначину $2x^2 - 3(a+b)x + (a+b)^2 = 0$. Решавањем се добија $x_1 = \dfrac{1}{2}(a+b)$, $x_2 = a + b$, где је $a \neq -2b$, $a \neq -3b$, $b \neq -2a$, $b \neq -3a$ (због услова $x \neq a$, $x \neq b$).
в) $x_1 = -5$, $x_2 = 1$;
г) Дата једначина је еквивалентна једначини $3(a-b)x(x-a+b) = 0$. Ако је $a = b$, тада је решење свако реално x, а ако је $a \neq b$ решења су $x_1 = 0$, $x_2 = a + b$.
д) $x_{1,2} = \dfrac{4 \pm \sqrt{5}}{4}a$, $a \neq 0$. За $a = 0$ једначина нема решења.
ђ) $x_{1,2} = \pm 2$; *е)* За $a = \pm b$ је $x = \dfrac{b}{a}$. За $a \neq \pm b$ је $x_1 = \dfrac{ab}{a-b}$, $x_2 = \dfrac{ab}{a+b}$.

52. *а)* Како је $x^2 = |x|^2$, то је дата једначина еквивалентна једначини $|x|\big(|x| - 1\big) = 0 \iff |x| = 0 \vee x = -1 \vee x = 1$.
б) $x = 0$;
в) Дату једначину пишемо у облику $|x|^3 - 3|x| + 2 = 0$. Решавањем се добија $|x| = 1$ или $|x| = 2$, па су решења $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 2$. Иначе, полазну једначину можемо решавати и разматрањем случајева $x \geqslant 0$ и

$x < 0$.

г) Дата једначина је еквивалентна са $(x-1)(x+2) = \pm 4$. Једначина $(x-1)(x+2) = 4$ има решења $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, док једначина $(x-1)(x+2) = -4$ нема реалних решења.

д) Дату једначину пишемо у облику $(x+1)^2 - 3|x+1| + 2 = 0 \iff |x+1|^2 - 3|x+1| + 2 = 0$. Дакле, добили смо квадратну једначину по $|x+1|$, чијим се решавањем добија $|x+1| = 1$ или $|x+1| = 2$, тј $x+1 = \pm 1$ или $x+1 = \pm 2$. Решења су $x_1 = -2$ $x_2 = 0$, $x_3 = -3$, $x_4 = 1$.

ђ) Како је $x^2 - 8x + 12 = (x-4)^2 - 4 = (x-4)^2 - 2^2 = (x-6)(x-2)$, то се лако добија да је овај трином позитиван за $x \in (-\infty,\ 2) \cup (6,\ +\infty)$, негативан за $x \in (2,\ 6)$ и једнак нули за $x = 2$ или $x = 6$. Имајући у виду дефиницију апсолутне вредности реалног броја добијамо за $x \in (-\infty,\ 2] \cup [6,\ +\infty)$ једначину $x^2 - 8x + 12 = x^2 - 8x + 12$ која је задовољена за све такве вредности x, док за $x \in (2,\ 6)$ имамо једначину $x^2 - 8x + 12 = -(x^2 - 8x + 12) \iff x^2 - 8x + 12 = 0 \iff x = 2 \vee x = 6$, што у овом случају нису решења. Дакле, решење је свако $x \in (-\infty,\ 2] \cup [6,\ +\infty)$.

е) $x_{1,2} = \pm 4$; *ж)* $x_{1,2} = \pm 2$; *з)* $x_1 = 1$, $x_2 = \dfrac{5}{2}$; *и)* Свако $x \in [-1,\ 1]$.

53. *а)* $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm i$; *б)* $x_{1,2} = 0$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$;

в) Стављајући $x^2 = t$, добијамо квадратну једначину $t^2 - 10t + 1 = 0$, чија су решења $t_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$. Сада је $x^2 = 5 - 2\sqrt{6}$ или $x^2 = 5 + 2\sqrt{6}$, тј. имамо решења $x_{1,2} = \pm\sqrt{5 - 2\sqrt{6}}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{5 + 2\sqrt{6}}$.

г) $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm i\sqrt{\dfrac{2}{3}}$; *д)* $x_{1,2} = 0$, $x_{3,4} = \pm\dfrac{3\sqrt{2}}{2}i$; *ђ)* $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm 3i$.

54. *а)* Уведимо смену $x + \dfrac{1}{x} = t$. Тада је $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 2$, па имамо једначину $3(t^2 - 2) - 7t = 0 \iff 3t^2 - 7t - 6 = 0 \iff t = -\dfrac{2}{3} \vee t = 3$. За $t = -\dfrac{2}{3}$ добијамо $x + \dfrac{1}{x} = -\dfrac{2}{3}$, а одавде је $x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm 2\sqrt{2}i}{3}$, док за $t = 3$ имамо $x_{3,4} = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

б) Увести смену $x - \dfrac{1}{x} = t$. Решења су $x_1 = -\dfrac{1}{2}$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = 1 \pm \sqrt{2}$.

в) $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = -2 \pm \sqrt{3}$; *г)* $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$.

д) Дата једначина је дефинисана за $x \neq 0$ и $x \neq 1$. Множењем обеју страна једначине са x^2, добијамо једначину $x^2 + \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 - 1 = 0$, а одавде допуном до потпуног квадрата, добијамо $\left(x - \dfrac{x}{x+1}\right)^2 + 2\dfrac{x^2}{x+1} =$

$= 0 \iff \left(\dfrac{x^2}{x+1}\right)^2 + 2\dfrac{x^2}{x+1} - 1 = 0$. Увођењем смене $\dfrac{x^2}{x+1} = t$, долазимо до једначине $t^2 + 2t - 1 = 0$, чија су решења $t_{1,2} = -1 \pm \sqrt{2}$. Зато је $\dfrac{x^2}{x+1} = -1 \pm \sqrt{2}$. Решавањем последње једначине добијамо решења

$x_{1,2} = \dfrac{\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$, $x_{3,4} = \dfrac{-1 - \sqrt{2} \pm i\sqrt{2\sqrt{2} + 1}}{2}$.

ђ) Једначина је дефинисана за све $x \neq 0$ и $x \neq -2$. Како једначину можемо писати у облику $\dfrac{x(x+2)+2}{[x(x+2)]^2} = \dfrac{5}{9}$, то се увођењем смене $x(x+2) = t$ добија једначина $\dfrac{t+2}{t^2} = \dfrac{5}{9} \iff 5t^2 - 9t - 18 = 0 \iff t = -\dfrac{6}{5} \vee t = 3$. На крају, решавањем једначина $x(x+2) = -\dfrac{6}{5}$ и $x(x+2) = 3$, долазимо до решења

$x_{1,2} = \dfrac{-5 \pm i\sqrt{5}}{5}$, $x_3 = -3$, $x_4 = 1$.

е) Множењем првог и четвртог и другог и трећег фактора леве стране дате једначине, добијамо $(x^2+3x)(x^2+3x+2) = 1$. Даље је потребно увести смену $x^2 + 3x = t$ и проблем свести на решавање квадратних једначина. Решења су $x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$ (два двострука).

ж) Увести смену $x^2 + x + 1 = t$. Решења су

$x_1 = -2$, $x_2 = 1$, $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{19}}{2}$.

з) Непосредно проверавамо да $x = 0$ није решење дате једначине. Деобом обеју страна са x^2 $(\neq 0)$, добијамо једначину $\left(2x - 3 + \dfrac{1}{x}\right)\left(2x + 5 + \dfrac{1}{x}\right) = 9$, или, ако ставимо $2x + \dfrac{1}{x} = t$, једначину $(t-3)(t+5) = 9$. Из последње једначине добијамо $t_1 = -6$, $t_2 = 4$, а затим $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm \sqrt{2}}{2}$, $x_{3,4} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{7}}{2}$.

и) Множењем првог и четвртог и другог и трећег фактора леве стране дате једначине, добијамо једначину $(x^2 + 14x + 24)(x^2 + 11x + 24) = 4x^2$. Надаље спровести поступак из претходног задатка *з)*. Решења су:

$x_{1,2} = \dfrac{-15 \pm \sqrt{129}}{2}$, $x_3 = -3$, $x_4 = -2$.

ј) $x_1 = -1$, $x_2 = 2$ $x_{3,4} = \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$; *к)* $x_{1,2} = 2 \pm 3i$, $x_3 = 1$, $x_4 = 3$.

л) Сменом: $x - 2 = t$, добијамо: $t(t-1)(t-2) = 6 \iff t^3 - 3t^2 + 2t - 6 = 0 \iff$ $\iff (t-3)(t^2+2) = 0 \iff t = 3 \vee t = \pm i\sqrt{2}$. Коначно $x_1 = 5$, $x_{2,3} = 2 \pm i\sqrt{2}$.

љ) Трансформишемо леву страну: $(x^4 - 2x^3 + x^2) - (x^2 - x) - \dfrac{3}{4} = 0 \iff$ $\iff (x^2 - x)^2 - (x^2 - x) - \dfrac{3}{4} = 0$. Сменом $x^2 - x = t$, добијамо $t^2 - t - \dfrac{3}{4} =$

$= 0 \iff t_1 = -\frac{3}{2} \vee t_2 = \frac{1}{2}$. Враћајући се на x, добићемо: $x^2 - x = -\frac{3}{2}$ или $x^2 - x = \frac{1}{2}$. Решења су $x_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{5}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

м) Сменом $x - \frac{1}{2} = t$, добијамо: $\left(t + \frac{1}{2}\right)^4 + \left(t - \frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$, одакле је $t^2(2t^2 + 3) = 0$, итд. Решења по x су $x_{1,2} = \frac{1}{2}$, $x_{3,4} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

н) Слично претходном задатку, уводимо смену: $x + \frac{a+b}{2} = t$, итд.

њ) Слично задацима *м)* и *н)*. Решења су: $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{17}$.

о) $x_{1,2} = \pm i\sqrt{3 + 2\sqrt{3}}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{-3 + 2\sqrt{3}}$.

п) Једначина је еквивалентна са: $x^5 + 1^5 = (x+3)^5 - 2^5$, па уводимо смену $x + \frac{3}{2} = t$. Решења су: $x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_{3,4} = \frac{1}{3}(-3 \pm i\sqrt{19})$.

р) $x^6 + 1 \geqslant 0$, па нема реалних решења.

с) Стављајући: $x^3 = t$, добијамо једначину $2t^2 - 11t + 40 = 0$, која има решења $t_1 = -\frac{5}{2}$, $t_2 = 8$, па је $x_1 = -\sqrt[3]{\frac{5}{2}}$, $x_2 = 2$.

т) $x_1 = -\sqrt[3]{6}$, $x_2 = 1$.

55. *а)* Како $x = 0$ није решење, то се деобом једначине са x^2 добија једначина $x^2 - 2x - 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \iff x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\left(x + \frac{1}{x}\right) - 1 = 0$. Уведимо смену $x + \frac{1}{x} = t$. С обзиром да је $x^2 + \frac{1}{x^2} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2 = t^2 - 2$, једначина ће имати облик $t^2 - 2t - 3 = 0 \iff t = -1 \vee t = 3$. Враћањем на смену $x + \frac{1}{x} = t$. лако добијамо решења полазне једначине: $x_{1,2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$, $x_{3,4} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

б) Поступити као у случају *а)*: $x_{1,2} = 1$, $x_{3,4} = \frac{-11 \pm \sqrt{57}}{8}$.

в) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$, $x_{3,4} = \frac{-11 \pm \sqrt{105}}{4}$.

г) Овде се ради о симетричној једначини са највише непарним степеном од x, а код таквих једначина једно решење је $x = -1$ (што се, иначе, лако проверава). Деобом полинома на левој страни једначине са $x + 1$, добијамо полином (симетрични) четвртог степена, чије нуле налазимо као у претходним примерима. У нашем случају, после деобе са $x + 1$ добили смо једначину $4x^4 - 3x^3 - 2x^2 - 3x + 4 = 0$. Поступајући као у примеру *а)*, налазимо преостала решења. Решења су: $x_1 = -1$, $x_{2,3} = 1$,

$x_{4,5} = \dfrac{-5 \pm i\sqrt{39}}{8}$.

д) Дату једначину напишимо у облику $2(x^3+1) - 5x(x+1) = 0 \iff$ $\iff 2(x+1)(x^2-x+1) - 5x(x+1) = 0 \iff (x+1)(2x^2-7x+2) = 0 \iff$ $\iff x = -1 \vee x = \dfrac{7-\sqrt{33}}{4} \vee x = \dfrac{7+\sqrt{33}}{4}$.

ђ) Поступити као у примеру *г)*. Решења су: $x_1 = -1$, $x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}$, $x_4 = \dfrac{1}{2}$, $x_5 = 2$.

56. *а)* Деобом обеју страна дате једначине са $x^2 \neq 0$ ($x = 0$ није решење) и после груписања чланова, добијамо једначину $9x^2 + \dfrac{1}{x^2} - 2\left(3x + \dfrac{1}{x}\right) - 18 = 0$. Ако уведемо смену $3x + \dfrac{1}{x} = t$, тада је $9x^2 + \dfrac{1}{x^2} = t^2 - 6$, па једначина постаје $t^2 - 2t - 24 = 0 \iff$ $\iff t = -4 \vee t = 6$. Враћајући се на смену, за $t = -4$ имамо једначину $3x + \dfrac{1}{x} = -4$, чија су решења $x_1 = -1$, $x_2 = -\dfrac{1}{3}$, док за $t = 6$ имамо једначину $3x + \dfrac{1}{x} = 6$ и решења $x_{3,4} = \dfrac{3 \pm \sqrt{6}}{2}$.

б) Задатак се решава слично претходном примеру. Решења су $x_{1,2} = -2 \pm 2\sqrt{3}$, $x_3 = -1$, $x_4 = 3$.

в) $x_1 = -\dfrac{2}{3}$. $x_2 = 1$, $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{97}}{12}$.

г) Једначина је непарног степена, па има бар једно реално решење. Налазимо (по Безуовом ставу) да је то $x = 2$, па једначина постаје: $(x+2)(x^4 + 2x^3 + 2x + 1) = 0$. Даље као у задатку 55. Решења су: $x_1 = 2$, $x_{2,3} = \dfrac{-1 - \sqrt{3} \pm \sqrt[4]{12}}{2}$, $x_{4,5} = \dfrac{\sqrt{3} - 1 \pm i\sqrt[4]{12}}{2}$.

д) Деобом једначине са x^3 ($x = 0$ није решење) и груписањем сабирака, долазимо до једначине $x^3 - \dfrac{1}{x^3} - 2\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right) - \left(x - \dfrac{1}{x}\right) + 3 = 0$. Увођењем смене $x - \dfrac{1}{x} = t$, добијамо: $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 + 2 = t^2 + 2$, $x^3 - \dfrac{1}{x^3} = \left(x - \dfrac{1}{x}\right)\left(x^2 + \dfrac{1}{x^2} + 1\right) = t(t^2+3)$, па једначина има облик $t(t^2+3) - 2(t^2+2) - t + 3 = 0 \iff t^3 - 2t^2 + 2t - 1 = 0 \iff t^3 - 1 - 2t(t-1) =$ $= 0 \iff (t-1)(t^2 - t + 1) = 0 \iff t = 1 \vee t = \dfrac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$. Реална решења добијамо за $t = 1$, тј. из једначине $x - \dfrac{1}{x} = 1$, а то су $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

ђ) $x^5 + 1 = (x+1)(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)$, итд: $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \dfrac{1 + \sqrt{5} \pm i\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}$,

$$x_{4,5} = \frac{1-\sqrt{5}\pm i\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

57. *а)* Једначина има облик $P(x)=0$. За кососиметричне једначине важи: $P(1)=0$, па је, према Безуовом ставу, $P(x)$ дељиво са $(x-1)$. У датом случају је $P(x)=(x-1)(2x^4+9x^3+14x^2+9x+2)=0$. Дакле, $x_1=1$, или $2x^4+9x^3+14x^2+9x+2=0$. Нова једначина се решава као у случају задатка **55.** Решења су: $x_1=1$, $x_2=-2$, $x_3=-\frac{1}{2}$, $x_{4,5}=-1$.

б) $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=\frac{1}{2}$, $x_4=-\frac{2}{3}$, $x_5=-\frac{3}{2}$; *в)* $x_1=1$ $x_{2,3}=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_{4,5}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$; *г)* $x_1=1$, $x_2=-1$, $x_{3,4}=1$, $x_{5,6}=\frac{1\pm i\sqrt{3}}{2}$.

58. *а)* Дискриминанта дате једначине је $D=b^2-4ac=1-8(k+1)=$ $=-8k-7$. Решења су реална и једнака ако је $D=0$, тј. за $k=-\frac{7}{8}$, а решења су два реална различита броја ако је $D>0$, тј. за $k<-\frac{7}{8}$. Решења су конјуговано комплексни бројеви за за $k>-\frac{7}{8}$.

б) За $k=6$ је $x_1=x_2\in\mathbf{R}$, за $k<6$ је $x_1\neq x_2$, реална решења и за $k>6$ је $x_{1,2}=\alpha\pm\beta i$.

в) $D=9+8k$, па је $x_1=x_2\in\mathbf{R}$ за $k=-\frac{9}{8}$. Решења су два различита реална броја за $k>-\frac{9}{8}$, а $x_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ за $k<-\frac{9}{8}$.

г) $D=(k+2)^2\geqslant 0$. За $k=-2$ је $x_1=x_2$, а за $k\neq-2$ је $x_1\neq x_2$. Решења су увек реална.

д) $D=k^2-100=0$, за $k=10$ или $k=-10$.

ђ) $D=12k-23$, $k=\frac{23}{12}$; *е)* $k=\frac{5}{16}$; *ж)* $k=2$; *з)* $k<\frac{11}{4}$; *и)* $k>\frac{1}{12}$; *ј)* $k>0$.

к) $D=4k^2+13>0$, па решења не могу бити комплексни бројеви.

л) Решења су реална, ако је $D\geqslant 0$. У датом случају $D=12-8k>0$ за $k\leqslant\frac{3}{2}$.

љ) $k\geqslant-4$; *м)* $k\geqslant-\frac{1}{12}$; *н)* $D=4k^2+9>0$ за свако k – решења су увек реална.

59. *а)* За $x\neq\pm p$ множењем обеју страна једначине са $a(x^2-p^2)$, добијамо еквивалентну једначину $2ax=x^2-p^2$, а одавде $x^2-2ax-p^2=0$. Решавањем последње једначине, имамо $x_{1,2}=a\pm\sqrt{a^2+p^2}$, па су решења увек реална. Испитајмо могућност за $x=\pm p$ коју смо одбацили на почетку. Наиме, из $x=\pm p$ имамо $a\pm\sqrt{a^2+p^2}=\pm p$ или $\pm\sqrt{a^2+p^2}=-a\pm p$. Квадрирањем ове једнакости, добија се $a^2+p^2=a^2+p^2\mp 2ap \iff p=0$ (јер је по претпоставци $a\neq 0$). Међутим, за $p=0$ из полазне једначине добијамо једначину $\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{a} \iff x=2a$. Дакле, полазна једначина има реална решења $x_{1,2}=a\pm\sqrt{a^2+p^2}$ за $p\neq 0$ и $x=2a$ за $p=0$.

б) За $a=0$ једначина има облик $2x=0 \iff x=0$. За $a\neq 0$ решења су $x_{1,2}=-(a+1)\pm\sqrt{(a+1)^2-2a^2}$. Испитајмо природу решења једначине у зависности од дискриминанте: $D=(a+1)^2-2a^2$. Како је $D=(a+1)^2-$ $-(\sqrt{2}a)^2=\left[a(1+\sqrt{2})+1\right]\left[a(1-\sqrt{2})+1\right]=-\left(a+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right)\left(a-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right)$, то се лако добија да је $D\geqslant 0$ за $a\in\left[-\dfrac{1}{\sqrt{2}+1},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right]$, док је $D<0$ за $a\in\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}\right)\cup\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}+1},\ +\infty\right)$. У првом случају решења су реална, а у другом коњуговано-комплексна.

в) $x_{1,2}=2\left(-k\pm\sqrt{k^2+k+1}\right)$ и реална за свако $k\in\mathbf{R}$, јер је $k^2+k+1=\left(k+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$.

60. *а)* Ако једначина $x^2+px+q=0$ $(p,\ q\in\mathbf{R})$ има реална решења, тада је $p^2-4q>0$. Дискриминанта дате једначине је $D=(p+2a)^2-4(q+ap)=$ $=p^2-4q+4a^2>0$, па и та једначина има различита и реална решења.

б) У овом случају је дискриминанта једначине $D=\left[(p+a)^2-3(q+ap)\right]=$ $=3(p^2-4q)+(p-a)^2$ заиста позитивна за $p^2-4q>0$.

61. Корени дате једначине су реални бројеви ако и само ако је дискриминанта квадрат неког целог броја. У нашем случају је $D=(1-2k)^2-$ $-4k(k-2)=1+4k=(2l+1)^2$, $l\in\mathbf{Z}$, јер је $1+4k$ непаран број, што је испуњено за $k=\dfrac{(2l+1)^2-1}{4}=l(l+1)$, $l\in\mathbf{Z}$.

62. Нека су коефицијенти a, b, c једначине $ax^2+bx+c=0$ редом непарни бројеви $2k_1+1$, $2k_2+1$, $2k_3+1$. Тада је $D=b^2-4ac=(2k_1+1)^2-$ $-4(2k_2+1)(2k_3+1)=4k_1(k_1+1)+1-8(2k_2k_3+k_2+k_3)-4=8l-3$, где је $l\in\mathbf{Z}$, јер је $k_1(k_1+1)$ дељив са два. Међутим, квадрат ниједног непарног броја није облика $8l-3$, већ $8l+1$. Дакле, дискриминанта није квадрат ниједног целог броја, па једначина нема рационалних корена.

63. Нека је $x=\dfrac{r}{s}$ корен једначине, где $r\in\mathbf{Z}$, $s\in\mathbf{N}$ и $(r,\ s)=1$. Тада је $\left(\dfrac{r}{s}\right)^2+p\dfrac{r}{s}+q=0\Rightarrow r^2+prs+qs^2=0$, одакле закључујемо са је $s|r^2$, па како је $(r,\ s)=1$, то мора бити $s=1$ па је корен једначин заиста цео број.

64. Претпоставимо да обе једначине имају комплексне корене. Тада је $p_1^2-4q_1<0$ и $p_2^2-4q^2<0$. Одавде је сабирањем, $p_1^2+p_2^2-4(q_1+q_2)<0$, или, с обзиром на релацију $p_1p_2 = 2(q_1+q_2)$, $p_1^2+p_2^2-2p_1p_2<0 \iff$ $\iff (p_1-p_2)^2<0$, што је контрадикција.

65. Решења дате једначине су $x_{1,2} = a \pm \sqrt{a^2+a+3}$. Да би решења били цели бројеви, неопходно је $a^2+a+3=k^2$ $k \in \mathbf{Z}$. Одавде је $a_{1,2} = \dfrac{-1\pm\sqrt{4k^2-11}}{2}$, па да би a био цео број, неопходно је $4k^2-11=l^2$, $l \in \mathbf{Z}$, тј. $4k^2-l^2=11 \iff (2k-l)(2k+l)=11$. Како је 11 прост број, а $k,\ l \in \mathbf{Z}$, то се разматрањем свих могућности за чиниоце $2k-l$ и $2k+l$, долази до закључка да мора бити $k=-3$ или $k=3$. Сада је у оба случаја $a=-3$ $(\Rightarrow x=0 \vee x=-6)$, или $a=2$ $(\Rightarrow x=-1 \vee x=5)$.

66. Дату једначину можемо посматрати као квадратну једначину по a. Зато је пишемо у облику $a^2-(2x^2+1)a+x^4-x=0$. Њена решења су $a_{1,2} = \dfrac{2x^2+1\pm\sqrt{(2x^2+1)^2-4(x^4-x)}}{2} = \dfrac{2x^2+1\pm\sqrt{(2x+1)^2}}{2} =$ $= \dfrac{2x^2+1\pm(2x+1)}{2}$. Имамо две могућности: $a=x^2-x$ или $a=x^2+x+1$. Решавањем ових квадратних једначина по x, добијамо редом решења $x_{1,2} = \dfrac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}$, $x_{3,4} = \dfrac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$.

67. Нека је x_0 заједнички корен. Тада је $x_0^2+ax_0+8=0$, $x_0^2+x_0+a=0$. Одавде се елиминацијом x_0^2 (што постижемо одузимањем одговарајућих страна једнакости) добија $(a-1)x_0+8-a=0$. За $a=1$ имамо $7=0$! За $a\neq 1$, добијамо $x_0=\dfrac{a-8}{a-1}$. Заменом ове вредности у једној од једначина добија се $\left(\dfrac{a-8}{a-1}\right)^2+\dfrac{a-8}{a-1}+a=0$. Одавде се лако долази до једначине $a^3-24a+72=0 \iff a^3+6^3-24(a+6)=0 \iff (a+6)(a^2-6a+12)=0 \iff$ $\iff a=-6 \vee a=3-i\sqrt{3} \vee a=3+i\sqrt{3}$. За $a=-6$ непосредно проверавамо да је $x_0=2$ заједнички корен. Међутим, једноставније је из друге једначине изразити $a=-x^2-x$ и заменити у првој. Добија се $x^3=8$, што даје један реалан корен $x=2$.

68. Поступићемо као у задатку **67.** Наиме, ако је x_0^2 заједнички корен датих једначина, тада је $3x_0^2-4x_0+p-2=0$ и $x_0^2-2px_0+5=0$. Ако заменимо x_0^2 из друге у прву једначину, добићемо $2(3p-2)x_0+p-17=0$. Ако је $p=\dfrac{2}{3}$, тада је из претходне једнакости $\dfrac{2}{3}-17=0$! За $p\neq\dfrac{2}{3}$ имамо $x_0=\dfrac{17-p}{2(3p-2)}$, па се заменом у једној од једначина, рецимо другој, добија $12p^3-31p^2-138p+369=0 \iff 12p^2(p-3)-5p(p-3)-123(p-3)=0 \iff$ $\iff (p-3)(12p^2-5p-123)=0$. Једино цело решење ове једначине је $p=3$, док је заједнички корен $x_0=1$.

69. $k = 1$.

70. Нека је x_0 заједнички корен. Тада $ax_0^2+bx_0+c=0$ и $cx_0^2+bx_0+a=0$. Одузимањем ових двеју једнакости, имамо $(a-c)x_0^2-(a-c)=0 \iff$ $\iff (a-c)(x_0^2-1)=0 \iff x_0^2-1=0 \iff x_0=\pm 1$ (јер је $a \neq c$). Заменом у датим једначинама, добијамо да је $a+b+c=0$ или $a-b+c=0$, тј. $a+c=-b$ или $a+c=b$, па је у сваком случају $(a+c)^2=b^2$.

71. Размотримо следеће случајеве:

1° $a=0$, $b\neq 0$: добијамо једначину

$$\frac{b^2}{x-1}=1 \iff (x-1=b^2 \wedge x\neq 1) \iff x=b^2+1;$$

2° $a\neq 0$, $b=0$: слично претходном, добијамо решење $x=a^2$

3° $a\neq 0$, $b\neq 0$: лако се долази до еквивалентне једначине $x^2-(a^2+b^2+1)x+a^2=0$, чија је дискриминанта $D=(a^2+b^2+1)^2-$ $-4a^2=\left[(a-b)^2+1\right]\left[(a+b)^2+1\right]>0$, па су решења увек реална.

72. $x_1=\dfrac{5}{2}$, $x_{2,3}=\dfrac{5\pm\sqrt{17}}{2}$, $x_{4,5}=\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{2}$. *Упутство:* Ако групишемо сабирке једначине са истим броиоцем, а затим их саберемо добићемо једначину $(2x-5)\left(\dfrac{3}{x(x-5)}+\dfrac{4}{(x-2)(x-3)}+\dfrac{1}{(x-1)(x-4)}\right)=0 \iff$ $\iff \left(2x-5=0 \vee \dfrac{3}{x^2-5x}+\dfrac{4}{x^2-5x+6}+\dfrac{1}{x^2-5x+4}=0\right)$. Да би смо решили другу од једначина, потребно је увести смену $x^2-5x=t$, итд.

73. Мања славина пуни базен за x сати, а већа за $x-5$. Ако су обе славине одврнуте 1 сат, напуниће $\dfrac{1}{6}$ базена, што показује једначина: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-5}=\dfrac{1}{6}$, $x>5$. Сређивањем добијамо једначину $x^2-17x+30=0$, чија су решења $x_1=15$, $x_2=2$. Због услова $x>5$, једино решење је $x=15$ сати. Толико времена треба да се базен напуни само мањом славином.

74. Тражени бројеви су x и $x+10$, а према датим условима је $x(x+10)-40=39x+22$, итд. То су бројеви 31 и 41.

75. Ако је $x\,km/h$ брзина првог аутомобила, други се креће брзином $(x-2)\,km/h$. Упоређујући времена путовања $\left(t=\dfrac{s}{v}\right)$, добијамо једначину: $\dfrac{36}{x}=\dfrac{36}{x-2}-\dfrac{1}{4}$, која сређивањем прелази у: $x^2-2x-288=0$. Њена решења су $x_1=18$, $x_2=-16$. Због $x>0$ је $x=18\,km/h$. То је брзина првог аутомобила, а брзина другог је $18-2$, тј. $16\,km/h$.

76. Нека је теретно возило путовало x сати. Тада је путничко возило провело на путу $(x-1)$ сати, $x > 1$. Означимо дужину пута AB са s. Нека је C место у којем би се сусрела возила. Тада је $AC + CB = s$. Брзина теретног возила је $\frac{s}{x}$, а путничког $\frac{s}{x-1}$. Време до сусрета возила је $\frac{6}{5}$ сати, па је $AC = \frac{s}{x}\cdot\frac{6}{5}$ и $BC = \frac{s}{x-1}\cdot\frac{6}{5}$. Тако добијамо једначину $\frac{s}{x}\cdot\frac{6}{5} + \frac{s}{x-1}\cdot\frac{6}{5} = s$, односно $\frac{6}{5x} + \frac{6}{5(x-1)} = 1$. Решења су $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{2}{5}$. Због $x > 1$ је $x = 3$ сата.

77. Ако са A и B означимо положаје возила после 10 секунди, добићемо правоугли троугао ABC, хипотенузе $AB = 130$ метара. Ако је $x\,m/sec$ брзина првог возила, тада, на основу Питагорине теореме, добијамо једначину: $(270-20x)^2 + (125-10x)^2 = 130^2$, која даје решења: $x_1 = 7.5\,m/sec$, $x_2 = 19.1\,m/sec$ (или $27\,km/h$, односно $68.8\,km/h$). То су могуће брзине споријег возила.

78. Користећи се Виетовим формулама, од једначине $ax^2+bx+c=0$ прелазимо на једначину $a[x^2-(x_1+x_2)+x_1x_2]=0$, где је $a\neq 0$ и x_1, x_2 су решења једначине. Па, дакле, ако желимо формирати квадратну једначину чије корене знамо, тада ћемо имати бесконачно много таквих једначина, јер $a\neq 0$ може бити произвољно. За $a=1$ имамо једначин $x^2-(x_1+x_2)+x_1x_2=0$ што ћемо договорно сматрати траженом једначином. Све остале се могу добити множењем ове једначине произвољним $a\neq 0$. У конкретном случају је $x^2-(0-3)x+0\cdot 3=0 \iff x^2-3x=0$. Слично поступамо и са осталим случајевима. Решења су:
б) $x^2+4x+4=0$; *в)* $x^2-2x-3=0$; *г)* $x^2-2x-1=0$;
д) $x^2-2(1+2\sqrt{3})x+3(3+2\sqrt{3})=0$;
ђ) $x^2-\frac{5}{7}x+\frac{1}{28}=0$ $(\Rightarrow 28x^2-20x+1=0)$;
е) $x^2+1=0$; *ж)* $x^2-2\sqrt{2}x+6=0$.

79. *а)* $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}=\frac{b^2-2ac}{a^2}$;

б) $x_1^3+x_2^3=(x_1+x_2)\left[(x_1+x_2)^2-3x_1x_2\right]=\frac{3abc-b^3}{a^3}$;

в) $x_1^4+x_4^2=(x_1^2+x_2^2)^2-2x_1^2x_2^2=\left[(x_1+x_2)^2-2x_1x_2\right]^2-2(x_1x_2)^2=$
$=\left(\frac{b^2-2ac}{a^2}\right)^2-2\left(\frac{c}{a}\right)^2$;

г) $-\frac{b}{c}$; *д)* $\frac{b^2-2ac}{c^2}$;

ђ) $|x_1-x_2|=\sqrt{|x_1-x_2|^2}=\sqrt{|(x_1-x_2)^2|}=\sqrt{|(x_1+x_2)^2-4x_1x_2|}=$

$$= \sqrt{\left|\frac{b^2}{a^2} - 4\frac{c}{a}\right|} = \frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{|a|}.$$

е) Коришћењем резултата из *ђ)*, имамо $\left|\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right| = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_1 x_2|} = \frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{|c|}$.

ж) $\frac{|b|\sqrt{|b^2 - 4ac|}}{a^2}$; *з)* $\frac{\sqrt{|b^2 - 4ac|}(b^2 - ac)}{|a|a^2}$.

80. *а)* Тражене вредности су редом једнаке 13, 35, 97, $\frac{13}{36}$, 1, $\frac{1}{6}$, 5, 19; *б)* $\frac{9}{4}a^2+2$; $\left(\frac{9}{4}a^2+2\right)^2-2$; $-\frac{3a}{2}$; $\frac{9}{4}a^2+2$; $\frac{\sqrt{9a^2+16}}{2}$; $\frac{\sqrt{9a^2+16}}{2}$; $\frac{3|a|}{4}\sqrt{9a^2+16}$; $\frac{9a^2+4}{8}\sqrt{9a^2+16}$.

81. Користимо формулу: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$. *а)* $\frac{x+2}{2x-1}$, $x \neq 3$; *б)* $\frac{x-1}{x+1}$, $x \neq -\frac{3}{2}$; *в)* $\frac{x(1-x)}{2(2x-1)}$, $x \neq 0$, $x \neq -3$; *г)* $\frac{x-3}{x+3}$, $x \neq 1$, $x \neq 2$; $x \neq -4$; *д)* $\frac{x-2}{2x-1}$, $x \neq 1$, $x \neq -\frac{1}{2}$, $x \neq -\frac{3}{2}$; *ђ)* x, $x \neq -1$. $x \neq 2$.

82. *а)* $x_1 \cdot x_2 = 6 > 0$, па су x_1 и x_2 истог знака и $x_1 + x_2 = 5 > 0$. Дакле, x_1 и x_2 су позитивни.
б) $x_1 x_2 = 3 > 0$ и $x_1 + x_2 = -4 < 0$, па су x_1 и x_2 оба негативна.
в) $x_1 x_2 = -3$ и $x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}$, па су x_1 и x_2 различитог знака, а негативан број има већу апсолутну вредност, итд.

83. Ако су x_1 и x_2 корени једначине $ax^2 + bx = c = 0$, тада је $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$.
а) Ако су y_1 и y_2 корени једначине коју тражимо тада је по претпоставци $y_1 = x_1^2$, $y_2 = x_2^2$ $y_1 + y_2 = x_1^2 + x_2^2 = \frac{b^2 - 2ac}{a^2}$ и $y_1 y_2 = (x_1 x_2)^2 = \frac{c^2}{a^2}$ (видети задатак **79.** *а)*.). Зато тражена једначина има облик (уз претпоставку да је коефицијент уз x^2 једнак 1): $y^2 - (y_1 + y_2) + y_1 y_2 = 0 \iff$ $\iff y^2 - \frac{b^2 - 4ac}{a^2} y + \frac{c^2}{a^2} = 0 \iff a^2 y^2 - (b^2 - 2ac)y + c^2 = 0$ (ознака непознате није битна).
б) $a^3 y^2 - (3abc - b^3)y + c^3 = 0$. *Упутство:* Видети задатак **79.***б)*.

84. Како је $x_1^{-3} + x_2^{-3} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{(x_1 x_2)^3} = \frac{(x_1 + x_2)[(x_1 + x_2)^2 - 3x_1 x_2]}{(x_1 x_2)^3}$, $x_1^{-3} x_2^{-3} = (x_1 x_2)^{-3}$ и како је за дату једначину $x_1 + x_2 = 8$, $x_1 x_2 = 2$, то је $x_1^{-3} + x_2^{-3} = 58$ и $x_1^{-3} x_2^{-3} = \frac{1}{8}$. Зато тражена једначина има облик

$x^2 - 58x + \frac{1}{8} = 0.$

85. *а)* За дату једначину је $x_1+x_2=4k$, $x_1x_2=7k^2$ па је $x_1^2+x_2^2=2$ еквивалентно са $(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2 \iff 16k^2-14k^2=2 \iff k=\pm1$.
б) $\alpha=\pm\frac{1}{2}$; *в)* $p_1=10$, $p_2=2$; *г)* $m_1=0$, $m_2=3$.

86. Како је $x_1+x_2=4$, то из $x_1^2-x_2^2=16$ имамо да је $(x_1-x_2)(x_1+x_2)= =16$, одакле је $x_1-x_2=4$. Из система $x_1+x_2=4$, $x_1-x_2=4$, добијамо $x_1=4$, $x_2=0$, па се заменом једне од ових вредности у дату једначину закључује да је $p=0$.

87. Из дате једначине добијамо да је $x_1+x_2=3a+2$, $x_1x_2=a^2$. Из система $x_1x_2=a^2$, $x_1=9x_2$ имамо $9x_2^2=a^2 \iff x_2=\pm\frac{a}{3}$, па је $x_1=\pm3a$. Ако ове вредности заменимо у релацију $x_1+x_2=3a+2$, наћи ћемо да је $a=-\frac{6}{19}$ или $a=6$.

88. *а)* $\frac{3}{4}$; *б)* $a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=1$; *в)* 1; *г)* 0;

д) Не постоји $a\in\mathbf{R}$ са траженом особином; *ђ)* $a_1=-\frac{1}{8}$, $a_2=\frac{23}{14}$.

89. $a=\pm\sqrt{2}$.

90. $a=-\frac{5^3}{2}$ или $a=\frac{3^3}{2}$.

91. $a=c$.

92. *а)* $\frac{1}{3}$; *б)* $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

93. Ако су x_1, x_2 и x_1', x_2' корени редом датих једначина, тада је $x_1+x_2=a$, $x_1x_2=b-4$, $x_1'+x_2'=b$, $x_1'x_2'=\frac{4a-1}{4}$. Ако је $x_1'=\frac{1}{x_1}$ и $x_2'=\frac{1}{x_2}$, тада је $x_1'+x_2'=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}$ и $x_1'x_2'=\frac{1}{x_1x_2}$, па је, с обзиром на претходно поменуте Виетове формуле, $b=\frac{a}{b-4}$ и $\frac{4a-1}{4}=\frac{1}{b-4}$. Решавањем претходног система, добија се $a_1=0$, $b_1=0$; $a_2=\frac{9}{4}$, $b_2=\frac{9}{2}$; $a_3=-\frac{7}{4}$, $b_3=\frac{7}{2}$.

94. *а)* $ax^2-bx+c=0$; *б)* $cx^2+bx+a=0$;
в) $ax^2+(b-2m)x+(am^2-bm+c)=0$; *г)* $a^2n^2x^2+bnx+c=0$.

95. $x^2 - 2(p^2 - 2q) + p^2(p^2 - 4q) = 0$.

96. Дату једначину пишимо у облику $(1+m)x^2-(6+5m)x+5+6m = 0$. За $m \neq -1$ по Виетовим формулама је $x_1 + x_2 = \dfrac{6+5m}{1+m} = \dfrac{1}{1+m} + 5$, $x_1x_2 = \dfrac{5+6m}{1+m} = 6 - \dfrac{1}{1+m}$. Сабирањем одговарајућих страна ових једнакости, имамо $x_1 + x_2 + x_1x_2 = 11$.

97. По Виетовим формулама и услову задатка, имамо $p + q = -p$, $pq = q$. Ако је $q \neq 0$, из друге једначине се добија $p = 1$, а затим из прве $q = -2$. За $q = 0$ из прве имамо $p = 0$.

98. Нека, рецимо, такви бројеви постоје. Тада је према Виетовим формулама $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$, $x_2x_3 = \dfrac{a}{b}$, $x_3x_1 = \dfrac{b}{c}$. Зато је $x_1^2x_2^2x_3^2 = 1$, односно $x_1x_2x_3 = \pm 1$. Узмимо да је $x_1x_2x_3 = 1$. Из претходних Виетових формула сада добијамо $x_3 = \dfrac{a}{c}$, $x_1 = \dfrac{b}{a}$ и $x_2 = \dfrac{c}{b}$. Према Виетовим формулама је такође $x_1+x_2 = -\dfrac{bd}{a}$, $x_2+x_3 = -\dfrac{cd}{b}$, $x_3+x_1 = -\dfrac{ad}{c}$. Заменом нађених вредности за x_1, x_2, x_3, одавде имамо $\dfrac{b}{a}+\dfrac{c}{b} = -\dfrac{bd}{a}$, $\dfrac{c}{b}+\dfrac{a}{c} = -\dfrac{cd}{b}$, $\dfrac{a}{c}+\dfrac{b}{a} = -\dfrac{ad}{c}$. Одавде се после мањих трансформација и имајући на уму да је a, b, $c \neq 0$, добија $abc = -b^3(1+d)$, $abc = -c^3(1+d)$, $abc = -a^3(1+d)$, што непосредно даје $b^3 = c^3 = a^3$, тј. $a = b = c$. То би значило да су све три једначине исте, па би и њихова решења била иста, супротно претпоставци у задатку. Случај $x_1x_2x_3 = -1$ се доказује аналогно.

99. Означимо са x_1 заједнички корен датих једначина. Тада из система $x_1^2 + ax_1 + bc = 0$, $x_1^2 + bx_1 + ca = 0$, добијамо (одузимањем) да је $(x_1 - c)(a - b) = 0 \iff x_1 = c$ (јер је $a \neq b$). Ако $x_1 = c$ заменимо у једној од једначина добијамо (због $c \neq 0$): $c^2 + ac + bc = 0 \iff a + b + c = 0$. Ако друге корене датих једначина означимо редом са x_2 и x_2', добијамо $x_1 + x_2 = a$, $x_1x_2 = bc$ и $x_1 + x_2' = -b$, $x_1x_2' = ca$. Из последњих релација је $x_2 + x_2' = -a - b - 2x_1 = -a - b - 2c = -c$ и $x_2x_2' = \dfrac{abc^2}{x_1^2} = ab$ (где смо применили претходне једнакости $x_1 = c$, $a + b + c = 0$). Дакле, бројеви x_2 и x_2' задовољавају једначину $x^2 + cx + ab = 0$.

100. Нека је прво $|x_1| = |x_2| = 1$. Применом Виетових формула, имамо $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = q$. Зато је $|p| = |x_1 + x_2| \leqslant |x_1| + |x_2| = 2$, $|q| = |x_1||x_2| = 1$, док је $\dfrac{p^2}{q} = \dfrac{(x_1+x_2)^2}{x_1x_2} = \dfrac{x_1}{x_2} + \dfrac{x_2}{x_1} + 2 = \dfrac{x_1\overline{x_2}}{|x_2|^2} + \dfrac{x_2\overline{x_1}}{|x_2|^2} + 2 = x_1\overline{x_2} + \overline{x_1\overline{x_2}} + 2 =$ $= 2\mathrm{Re}\{x_1\overline{x_2}\} + 2 \geqslant 2(-1) + 2 = 0$, јер је $\left|\mathrm{Re}\{x_1\overline{x_2}\}\right| \leqslant |x_1\overline{x_2}| = 2$.

Обрнуто, нека је $|p| \leqslant 2$, $|q| = 1$ и $\dfrac{p^2}{q} = k \geqslant 0$. Тада је $|k| = \dfrac{|p|^2}{|q|} \leqslant 4$. Нека је r комплексан број такав да је $r^2 = q$. Одавде је $|r|^2 = |q| = 1$, тј. $|r| = 1$. Ставимо, даље $\dfrac{p}{r} = s$. Како је $k = \dfrac{p^2}{q} = \dfrac{p^2}{r^2} = s^2 \geqslant 0$, то је s реалан број и $|s| \leqslant 2$. Коначно је $x_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2} = \dfrac{-sr \pm \sqrt{s^2r^2 - 4r^2}}{2} =$
$= \dfrac{-s \pm i\sqrt{4 - s^2}}{2} r$, а одавде је $|x_{1,2}| = \dfrac{\sqrt{s^2 + (4 - s^2)}}{2} |r| = 1$.

101. Замењујући $\dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, дата неједнакост се трансформише у еквивалентну неједнакост
$p^2 - 4q \pm 2\lambda\sqrt{p^2 - 4q} + \lambda^2 \geqslant 0 \iff \left(\sqrt{p^2 - 4q} \pm \lambda\right)^2 \geqslant 0$.

102. За дату једначину је $x_1 + x_2 = -p$, $x_1x_2 = -\dfrac{1}{2p^2}$, па је
$x_1^4 + x_2^4 = \left[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - 2x_1^2x_2^2 = 2 + p^4 + \dfrac{1}{2p^4} \geqslant 2\sqrt{p^4 \cdot \dfrac{1}{2p^4}} = 2 + \sqrt{2}$.

103. Према Виетовим формулама је $x_1 + x_2 - p$, $x_1x_2 = 1$, $x_1' + x_2' = -q$, $x_1'x_2' = 1$. Множењем првог и трећег, и другог и четвртог фактора у производу $(x_1 - x_1')(x_2 - x_2')(x_1 - x_2')(x_2 - x_1')$ добијамо да је једнак
$\left[x_1^2 - x_1(x_1' + x_2') + x_1'x_2'\right]\left[x_2^2 - x_2(x_1' + x_2') + x_1'x_2'\right] = (x_1^2 + qx_1 + 1)(x_2^2 + qx_2 + 1) =$
$= (x_1^2 + qx_1 + x_1x_2)(x_2^2 + qx_2 + x_1x_2) = x_1x_2(x_1 + x_2 + q)(x_1 + x_2 + q) = (q - p)^2$.

104. $\sqrt[4]{-p + 6\sqrt{q} + 4\sqrt[4]{q}\sqrt{-p + 2\sqrt{q}}}$. *Упутство:* Ако поменути збир означимо са s, тада је (груписањем) $s^4 = x_1 + x_2 + 4\sqrt[4]{x_1x_2}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}) +$ $+ 6\sqrt{x_1x_2}$, па остаје да се изрази $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ помоћу p и q. Међутим, $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} = \sqrt{(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2})^2} = \sqrt{x_1 + x_2 + 2\sqrt{x_1}\sqrt{x_2}} = \sqrt{-p + 2q}$. итд.

105. Како је $x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2 = \dfrac{c}{a}$, то је $-\dfrac{b}{a}S_{n+1} = (x_1 + x_2)(x_1^{n+1} +$ $x_2^{n+1}) = x_1^{n+2} + x_2^{n+2} + x_1x_2(x_1^n + x_2^n) = S_{n+2} + \dfrac{c}{a}S_n$ па је $aS_{n+2} + bS_{n+1} + cS_n = 0$.

106. $S_1 = -p$, $S_2 = p^2 - 2q$, $S_3 = p^3 + 3pq$, $S_4 = -p^3 - 4p^2q + 2q^2$, $S_5 = p^4 + 3p^3q + -5pq^2$, $S_{-n} = \dfrac{S_n}{q^n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$. *Упутство:* Из задатка имамо $S_{n+2} + pS_{n+1} + qS_n = 0$, тј. $aS_{n+2} = -pS_{n+1} - qS_n = 0$. па за $n = 1$, 2, 3 (уз претходно израчунато S_1 и S_2) добијамо S_3, S_4, S_5. Како је $S_{-n} = \dfrac{1}{x_1^n} + \dfrac{1}{x_2^n} = \dfrac{x_1^n + x_2^n}{(x_1x_2)^n} = \dfrac{S_n}{q^n}$ $n \in \mathrm{N}$, то се једноставно изражава и S_{-n}.

107. Како је $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=b+1$, то имамо да је
$a^2+b^2=(x_1+x_2)^2+(x_1x_2-1)^2=x_1^2+x_2^2+x_1^2x_2^2+1=(x_1^2+1)(+x_2^2+1)$,
а ово је сложен број јер су оба фактора природни бројеви већи од 1.

108. *а)* Замењујући $y=x+3$ из друге у прву једначину, добијамо једначину $x^2+x-6=0 \iff x=-3 \vee x=2$, па је $y=0$ или $y=5$. Дакле решења система су $x_1=-3$, $y_1=0$ и $x_2=2$, $y_2=5$.
б) Слично претходном задатку:
$x_1=\dfrac{-3+i\sqrt{19}}{2}$, $y_1=\dfrac{-3-i\sqrt{19}}{2}$; $x_2=\dfrac{-3-i\sqrt{19}}{2}$, $y_2=\dfrac{-3+i\sqrt{19}}{2}$;.
в) Решења су $(-1,\ -1)$, $(1,\ 3)$.
г) Ако из прве једначине изразимо y и заменимо у другој, добићемо једначину $x(3-x)=2 \iff x^2-3x+2=0 \iff x=-1 \vee x=2$. Одговарајуће вредности су редом $y=2 \vee y=1$. До истог закључка можемо доћи користећи Виетове формуле. Наиме x и y су решења једначине (јер знамо збир и производ решења) $t^2-3t=0 \iff t=1 \vee t=2$, па је $x=1$, $y=2$ или $x=2$, $y=1$.
д) Решења су: $x_1=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y_1=\sqrt{2}$; $x_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $y_2=-\sqrt{2}$.
ђ) $x_1=-1$, $y_1=-4$ и $x_2=1$, $y_2=2$.

109. *а)* $x=\pm 3$, $y=\pm 4$ (четири решења; ставити $x^2=u$, $y^2=v$);
б) $x=\pm\sqrt{2}$, $y=\pm\sqrt{2}i$ (четири решења); *в)* $x_1=-5$, $y_1=2$; $x_2=5$, $y_2=2$.
г) $x(x+3y)=18 \vee y(3y+x)=6 \Rightarrow \dfrac{x}{y}=3$, итд. Решења су: $x_1=-3$, $y_1=-1$ и $x_2=3$, $y_2=1$.

110. Права ће додиривати параболу ако систем једначина
$\begin{cases} y=-2x+p \\ y=3x^2-7x+4 \end{cases}$ има двоструко решење. Замењујући y из прве у другу једначину, добијамо квадратну једначину $3x^2-5x-p+4=0$. Она ће имати двоструко решење ако је дискриминанта те једначине једнака нули, тј. ако је $25-12(-p+4)=0 \iff p=\dfrac{23}{12}$. Координате тачке додира можемо добити решавањем поменутог система за добијено p.

111. Ако је $a=6$ тада имамо функцију $y=-12x+1$ и $y=-2$, чији се графици секу у тачки $M\left(-\dfrac{1}{4},\ -2\right)$. Ако је $a\neq 6$, тада се елиминацијом променљиве y, добија једначина $(a-6)x^2-2ax-3=0$, која нема реалних решења ако и само ако је $a^2+3(a-6)<0 \iff a^2+3a-18<0 \iff$
$\iff (a+6)(a-3)<0 \iff a\in(-6,\ 3)$.

112. *а)* $a\in(-1,\ 1)$. *Упутство:* Посматрати посебно случајеве $a=\pm 1$ и $a\neq\pm 1$.
б) Заменимо y из прве у другу једначину и добијемо квадратну једначину

чија је дискриминанта: $D = (8m - 6m^2) - 4(1 + m^2)(9m^2 - 24m - 9) = 0$, одакле је $m = -\dfrac{3}{4}$.

113. $a_1 = -1$, $a_2 = 3$.

114. Слично задатку **110.** *а)* За $n = -6$ решење је $x = 8$, $y = 2$, а за $n = 2$ је $x = 4$, $y = 6$.
б) За $k = 3$ је $x = -2$, $y = 1$, а за $k = -1$ је $x = 0$, $y = -1$.
в) За $k = 0$ је $x = -1$, $y = -3$, а за $k = \dfrac{4}{3}$ је $x = \dfrac{3}{5}$, $y = -\dfrac{11}{5}$.

115. *а)* $x_1 = 1$, $y_1 = \dfrac{1}{2}$; $x_2 = \dfrac{1}{2}$, $y_2 = 1$.
б) Из прве једначине имамо $(x+y)^2 - 2xy = 41$, што због $xy = 20$, даје $(x+y)^2 = 81 \iff x + y = \pm 9$. Решавањем система $x + y = 9$, $xy = 20$, добијамо $x_1 = 5$, $y_1 = 4$ или $x_2 = 4$, $y_2 = 5$, док из система $x + y = -9$, $xy = 20$, имамо $x_3 = -5$, $y_3 = -4$ или $x_4 = -4$, $y_4 = -5$.
в) Из прве једначине, због $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$ и $x + y = 6$, добијамо $xy = 9$. Сада се лако долази до решења: $x_1 = 2$, $y_1 = 4$ и $x_2 = 4$, $y_2 = 2$.
г) $x_1 = 2$, $y_1 = 3$ и $x_2 = 3$, $y_2 = 2$.
д) Прву од једначина пишимо у облику $\left[(x+y)^2 - 2xy\right]^2 - 2x^2y^2 = 82$, одакле се, због друге једначине $x + y = 4$, добија једначина $(xy)^2 - 32xy + 87 = 0 \iff xy = 3 \vee xy = 29$. На крају, решавањем система једначина $x + y = 4$, $xy = 3$ и $x + y = 4$, $xy = 29$ добијамо решења: $x_1 = 1$, $y_1 = 3$; $x_2 = 3$, $y_2 = 1$; $x_3 = 2 - 5i$, $y_3 = 2 + 5i$; $x_4 = 2 + 5i$, $y_4 = 2 - 5i$.
ђ) Увести смену $x + y = u$, $xy = v$. Решења су: $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 1$; $x_3 = 1$, $y_3 = -3$; $x_4 = -3$, $y_4 = 1$.
е) Нека је $z = x - y$. Узимајући у обзир другу једначину, добијамо: $x = \dfrac{1}{2}(a+z)$ и $y = \dfrac{1}{2}(a-z)$, па прва једначина постаје: $(a+z)^4 + (a-z)^4 = 166^4$, односно: $z^4 + 6a^2z^2 + (a^2 - 8b^4) = 0$. Ако је $a^4 - 8b^4 > 0$, систем нема реалних решења, а ако је $a^4 - 8b^4 < 0$, тада је $z^2 = -3a^2 + \sqrt{8(a^4 + b^4)}$, па је $z_{1,2} = \pm\sqrt{-3a^2 + \sqrt{8(a^4 + b^4)}}$. Решења система су $x_1 = \dfrac{1}{2}(a + z_1)$, $y_1 = \dfrac{1}{2}(a - z_1)$ и $x_2 = \dfrac{1}{2}(a + z_2)$, $y_2 = \dfrac{1}{2}(a - z_2)$.
ж) Решавање слично претходном:
$x_1 = 0$, $y_1 = a$ и $x_2 = a$, $y_2 = 0$, $x_{3,4} = \dfrac{a}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$ и $y_{3,4} = \dfrac{a}{2}(1 \mp i\sqrt{3})$.

116. *а)* Нека је $y \neq 0$. Деобом прве једначине са y^2 и стављајући $\dfrac{x}{y} = t$, добијамо једначину $t^2 - 5t + 6 = 0 \iff t = 2 \vee t = 3$. Дакле, $\dfrac{x}{y} = 2 \iff x = 2y$ или $\dfrac{x}{y} = 3 \iff x = 3y$. Сада из система једначина $x = 2y$, $x^2 + y^2 = 10$, добијамо $x_1 = 2\sqrt{2}$, $y_1 = \sqrt{2}$; $x_2 = -2\sqrt{2}$, $y_2 = -\sqrt{2}$, док из система $x = 3y$, $x^2 + y^2 = 10$, добијамо $x_3 = -3$, $y_3 = -1$; $x_4 = 3$ $y_4 = 1$. За $y = 0$ из прве једначине добили бисмо $x = 0$. Међутим, због друге једначине, то није решење система.

б) Множењем друге једначине са -6 и сабирањем са првом, добијамо еквивалентни систем $\begin{cases} x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \\ xy - y^2 = 2 \end{cases}$ који решавамо као под *а)*. Решења су иста као у *а)*.

в) $x_1 = y_1 \dfrac{5}{2}$; $x_2 = \dfrac{8}{3}$, $y_2 = 2$;

г) $x_1 = 2$, $y_1 = 1$; $x_2 = -\dfrac{16}{7}$, $y_2 = -\dfrac{8}{7}$; $x_3 = y_3 = \dfrac{-1 - \sqrt{65}}{4}$,

$x_4 = y_4 = \dfrac{-1 + \sqrt{65}}{4}$, $y_2 = -\sqrt{2}$

д) $x_1 = 20$, $y_1 = 10$; $x_2 = -20$, $y_2 = -10$; $x_3 = -\dfrac{40}{\sqrt{7}}$, $y_3 = -\dfrac{10}{\sqrt{7}}$; $x_4 = \dfrac{40}{\sqrt{7}}$, $y_4 = -\dfrac{10}{\sqrt{7}}$.

ђ) Решења су $(3,\ 5)$, $\left(36,\ -\dfrac{23}{2}\right)$, $(-3,\ -5)$, $\left(-36,\ \dfrac{23}{2}\right)$.

е) $\left(\dfrac{40\sqrt{7}}{7}, -\dfrac{10\sqrt{7}}{7}\right)$, $\left(-\dfrac{40\sqrt{7}}{7}, \dfrac{10\sqrt{7}}{7}\right)$

ж) Решења су $(3,\ 5)$, $(-3,\ -5)$, $\left(\dfrac{15\sqrt{58}}{29}, \dfrac{4\sqrt{58}}{29}\right)$, $\left(-\dfrac{15\sqrt{58}}{29}, -\dfrac{4\sqrt{58}}{29}\right)$.

117. Ако ставимо $x + y = u$, $xy = v$, тада је систем једначина еквивалентан систему $\begin{cases} u^2 - 2v = 13 \\ u(u^2 - 3v) = 19 \end{cases}$. Замењујући v из прве у другу једначину, имамо $u^3 - 39u + 38 = 0 \iff (u^3 - u)(u - 1) = 0 \iff$ $\iff (u-1)(u^2 - u - 38) = 0 \iff u = 1 \vee u^2 + u - 38 = 0 \iff u = 1 \vee u = = \dfrac{-1 \pm \sqrt{153}}{2}$. За $u = 1$ имамо $v = -6$, па из система $x + y = 1$, $xy = -6$, добијамо решења: $x_1 = -2$, $y_1 = 3$; $x_2 = 3$, $y_2 = -2$. За преостале вредности u реалних решења нема.

б) Како тражимо реална решења, то из прве једначине закључујемо да је $0 \leqslant |x| \leqslant 1$, $0 \leqslant |y| \leqslant 1$, а из друге да мора бити $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$. Даље је $x^5 \leqslant x^2$, $y^5 \leqslant y^2$, где једнакост важи само за $x = 0$ или $x = 1$, односно $y = 0$ или $y = 1$. Како је $1 = x^2 + y^2 \leqslant x^5 + y^5 = 1$, то мора важити једнакост. па је $x_1 = 0$, $y_1 = 1$; $x_2 = 1$, $y_2 = 0$.

в) $x_1 = 6 - 6\sqrt{2}$ $y_1 = 6 + 6\sqrt{2}$; $x_2 = 6 = 6\sqrt{2}$, $y_2 = 6 - 6\sqrt{2}$; $x_3 = -3 - 3\sqrt{5}$, $y_3 = -3 + 3\sqrt{5}$; $x_4 = -3 + 3\sqrt{5}$, $y_4 = -3 - 3\sqrt{5}$.

г) Множењем друге једначине са 2 и сабирањем са првом, добијамо $(x^2 + y^2)^2 = 4y^4 \iff (x^2 + y^2)^2 - 2(y^2)^2 = 0 \iff (x^2 - y^2)(x^2 + 3y^2) = = 0 \iff x^2 - y^2 = 0 \vee x^2 + 3y^2 = 0$. Ако је $x^2 - y^2 = 0$, тј. ако је $x^2 = y^2$, тада се из прве једначине лако добија да је $x^4 = y^4 = 1$, па су реална

решења траженог система: $x_1 = -1$, $y_1 = -1$; $x_2 = -1$, $y_2 = 1$; $x_3 = 1$, $y_3 = -1$; $x_4 = 1$, $y_4 = 1$. Ако је, пак, $x^2 + 3y^2 = 0 \iff x = y = 0$, тада се лако уверавамо да то није решење система.
д) $x_1 = \sqrt{2}, y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = \sqrt{2}$.

118. *а)* Решавајући систем по x^3 и y^3, добијамо $x^3 = 8$, $y^3 = -1$, или $x^3 = -1$, $y^3 = 8$, па су реална решења $x = 2$, $y = -1$, или $x = -1$, $y = 2$.
б) Систем схватамо као систем линеарних једначина са непознатим x^2y^3 и x^3y^2. Решавањем добијамо $x^2y^3 = 8$, $x^3y^2 = 32$, одакле, множењем, имамо $(xy)^5 = 32$, па је једино реално решење $xy = 2$. Сада лако закључујемо да је $x = 1$, $y = 1$ решење (реално) полазног система једначина.
в) $x_1 = 1$, $y_1 = 4$; $x_2 = 4$, $y_2 = 1$.
г) Уведимо смену $x + y = u$, $xy = v$. Деобом прве једначине са другом, добијамо $\dfrac{x^2+y^2}{xy} = \dfrac{5}{2}$ (да решења не могу задовољити услове $x = 0$, $y = 0$ или $y = \pm x$ може се непосредно проверити), одакле је $u = \pm 3\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{7}}$, $v = \dfrac{6}{\sqrt{7}}$.

Враћањем на првобитно уведену смену имамо решења: $x_1 = 2\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{7}}$, $y_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{7}}$; $x_2 = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{7}}$, $y_2 = 2\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{7}}$; $x_3 = -2\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{7}}$, $y_3 = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{7}}$; $x_4 = -\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{7}}$, $y_4 = -2\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{7}}$.
д) $x_1 = 1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = 1$; *ђ)* $x_1 = -1$, $y_1 = 2$; $x_2 = 2$, $y_2 = -1$.

119. *а)* $x_1 = 1$, $y_1 = 2$, $z_1 = 4$; $x_2 = -1$, $y_2 = 2$, $z_2 = -4$. *Упутство:* Сабрати дате једначине.
б) $x_1 = \dfrac{7}{6}$, $y_1 = 1$, $z_1 = \dfrac{5}{6}$; $x_2 = -\dfrac{7}{6}$, $y_2 = -1$, $z_2 = -\dfrac{5}{6}$.
в) $x_1 = \dfrac{1}{5}$, $y_1 = \dfrac{5}{4}$, $z_1 = -\dfrac{1}{2}$; $x_2 = 2$, $y_2 = -1$, $z_2 = 4$.

120. *а)* Приметимо најпре да је систем симетричан у односу на непознате x, y, z, па поступак можемо скратити. Најпре, ако од прве једначине одузмемо другу, добићемо $(x - y)(x + z - 10 = 0 \iff (x = z \vee x = 1 - z)$. Слично, одузимањем треће од прве једначине, имамо $y = z \vee y = 1 - z$. Дакле, систем можемо решавати елиминацијом непознатих x и y и разматрањем свих могућности. Тако, имамо:

1° $x = z$, $y = z$, $x^2 + y^2 + z = 2$: лако се добија $x = y = z = \dfrac{-1 \pm \sqrt{17}}{4}$;

2° $x = z$, $y = 1 - z$, $x^2 + y^2 + z = 2$: у овом случају имамо решења $x_1 = z - 1 = -\dfrac{1}{3}$, $y_1 = \dfrac{3}{2}$ и $x_2 = y_2 = 1$, $y_2 = 0$; Аналогно бисмо, цикличним пермутовањем, добили преостала решења.
б) Очигледно, ако је $x = 0$, тада је и $y = z = 0$ па је $x = y = z = 0$ једино решење система. Нека су x, y, z реални бројеви различити од нуле. Систем пишимо у облику $y^2 + 1 = \dfrac{x}{z}$, $z^2 + 1 = \dfrac{y}{x}$, $x^2 + 1 = \dfrac{z}{y}$. Одавде

се множењем добија $(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)=1$, што је немогуће, јер је сваки од фактора већи од 1. Дакле, $x=y=z=0$ је једино реално решење датог система једначина.

121. Елиминишимо x и y из система на следећи начин. Пошто важе идентитети $x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$и $xy=\frac{1}{2}\left[(x+y)^2-(x^2+y^2)\right]$, то имамо једначину по z: $z=z^3-\frac{3}{2}(z^2-z) \iff z^3-3z^2+2z=0 \iff$ $\iff z(z-1)(z-2)=0 \iff z=0 \vee z=1 \vee z=2$.

1° Ако је $z=0$, тада је $x+y=0$, $xy=0$, па је $x=y=0$.

2° Ако је $z=1$, онда имамо $x+y=1$, $xy=0$, па су x и y решења квадратне једначине $t^2-t=0 \iff t=0 \vee t=1$, па је $x=0$, $y=1$ или $x=1$, $y=0$.

3° За $z=2$ добијамо систем $x+y=2$, $xy=1$, па су x и y решења квадратне једначине $t^2-2t+1=0 \iff (t-1)^2=0 \iff t=1$. Зато је $x=y=1$. Дакле, имамо четири решења: $x_1=y-1=z_1=0$; $x_2=0$, $y_2=1$, $z_2=1$; $x_3=1$, $y_3=0$, $z_3=1$; $x_4=y_4=1$, $z_4=2$.

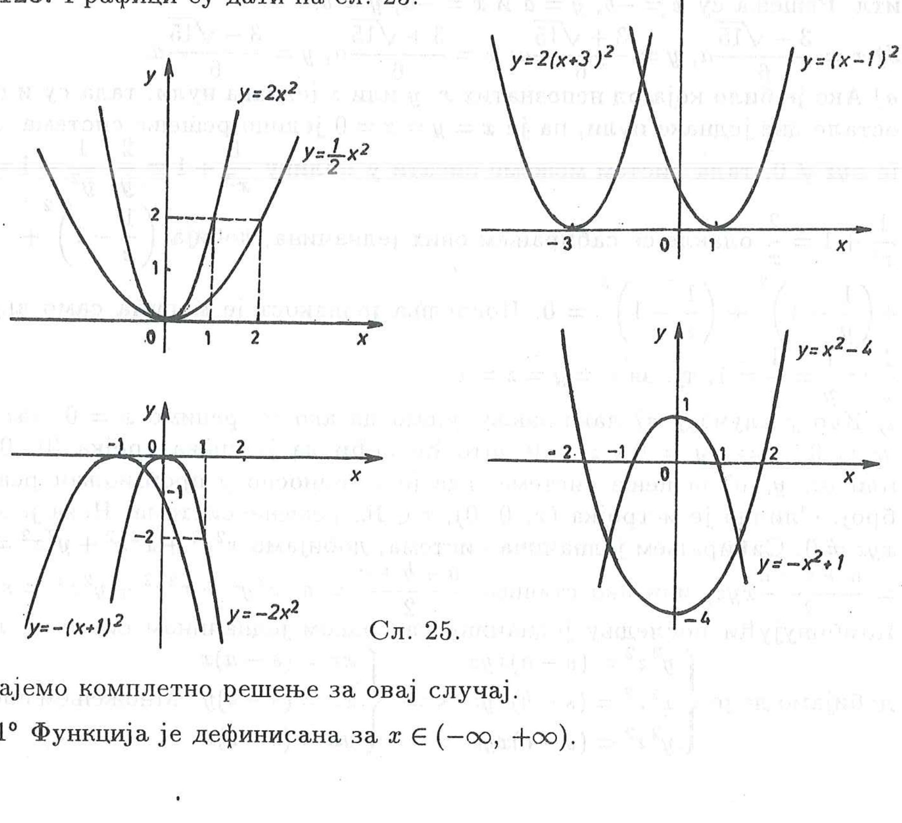
122. *а)* Стављајући $x-y=t$, $xy=s$, добијамо да је $t=a-b$, $s=ab$, итд. Решења су $x=-b$, $y=a$ и $x=-a$, $y=b$.
б) $x=\frac{3-\sqrt{15}}{6}a$, $y=\frac{3+\sqrt{15}}{6}a$; $x=\frac{3+\sqrt{15}}{6}a$, $y=\frac{3-\sqrt{15}}{6}a$.
в) Ако је било која од непознатих x, y или z једнака нули, тада су и преостале две једнаке нули, па је $x=y=z=0$ једино решење система. Ако је $xyz\neq 0$, тада систем можемо писати у облику $\frac{1}{x^2}+1=\frac{2}{y}$, $\frac{1}{y^2}+1=\frac{2}{z}$, $\frac{1}{z^2}+1=\frac{2}{x}$ одакле се сабирањем ових једначина, добија $\left(\frac{1}{x}-1\right)^2+$ $+\left(\frac{1}{y}-1\right)^2+\left(\frac{1}{z}-1\right)^2=0$. Последња једнакост је могућа само ако је $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}=\frac{1}{z}=1$, тј. за $x=y=z=1$.
г) Као у случају *в)* лако закључујемо да ако је, рецимо $x=0$, тада је $yz=0 \iff y=0 \vee z=0$, што ће рећи да је свака тројка $(0,\ 0,\ z)$ или $(0,\ y,\ 0)$ решење система, где је z, односно y произвољан реалан број. Слично је и тројка $(x,\ 0,\ 0)$, $x\in\mathbb{R}$, решење система. Нека је зато $xyz\neq 0$. Сабирањем једначина система, добијамо $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=$ $=\frac{a+b+c}{2}xyz$, или ако ставимо $\frac{a+b+c}{2}=s$: $x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2=sxyz$. Комбинујући последњу једначину са сваком једначином система, лако добијамо да је $\begin{cases} y^2z^2=(s-a)xyz \\ x^2z^2=(s-b)xyz \\ y^2z^2=(s-c)xyz \end{cases} \iff \begin{cases} xz=(s-a)x \\ xz=(s-b)y \\ yx=(s-c)z \end{cases}$. Множењем послед-

њих једначина система имамо да је $xyz = (s-a)(s-b)(s-c)$, где је због $xyz \neq 0$, $(s-a)(s-b)(s-c) \neq 0$. Користећи последњу једначину, лако добијамо да је $\begin{cases} x^2 = (s-b)(s-c) \\ y^2 = (s-a)(s-c) \\ z^2 = (s-a)(s-b) \end{cases}$. Због дефинисаности последњег система, неопходно је $s-a < 0$, $s-b < 0$, $s-c < 0$ или $s-a > 0$, $s-b > 0$, $s-c > 0$. С друге стране, због $xyz = (s-a)(s-b)(s-c)$, имамо следеће могућности:

1° $s-a < 0$, $s-b < 0$, $s-c < 0$: решења су уређене тројке: $\left(\sqrt{(s-b)(s-c)},\right.$ $\left.\sqrt{(s-a)(s-c)}, -\sqrt{(s-b)(s-b)}\right)$, $\left(\sqrt{(s-b)(s-c)}, -\sqrt{(s-a)(s-c)},\right.$ $\left.\sqrt{(s-b)(s-b)}\right)$, $\left(-\sqrt{(s-b)(s-c)}, \sqrt{(s-a)(s-c)}, \sqrt{(s-b)(s-b)}\right)$

2° $s-a > 0$, $s-b > 0$, $s-c > 0$: решења су уређене тројке: $\left(\sqrt{(s-b)(s-c)},\right.$ $\left.\sqrt{(s-a)(s-c)}, \sqrt{(s-b)(s-b)}\right)$, $\left(\sqrt{(s-b)(s-c)}, -\sqrt{(s-a)(s-c)},\right.$ $\left.-\sqrt{(s-b)(s-b)}\right)$, $\left(-\sqrt{(s-b)(s-c)}, \sqrt{(s-a)(s-c)}, -\sqrt{(s-b)(s-b)}\right)$ $\left(-\sqrt{(s-b)(s-c)}, -\sqrt{(s-a)(s-c)}, \sqrt{(s-b)(s-b)}\right)$.

123. Графици су дати на сл. 25.



Сл. 25.

e) Дајемо комплетно решење за овај случај.

1° Функција је дефинисана за $x \in (-\infty, +\infty)$.

2° нуле функције су $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$.

3° $y > 0$ за $x \in (-1,\ 1)$, а $y < 0$ за $x \in (-\infty,\ -1) \cup (1,\ +\infty)$.

4° Домен функције је $y \in (-\infty,\ 1)$.

5° Функција расте $(y\nearrow)$ за $x \in (-\infty,\ 0)$, а опада $(y\searrow)$ за $x \in (0,\ +\infty)$.

6° Функција има екстремум: $y_{\max} = 1$, за $x = 0$.

124. Потребно је прво сваку од функција писати у канонском облику $y = a(x-m)^2+n$. Из таквог облика добијамо теме $T(m,\ n)$. Код конструкције графика могу нам помоћи и нуле функције (реалне, ако их има), као и пресек графика и y-осе, који се добија за $x = 0$. На сл. 26. су дати графици функција *б), г)* и *е)*. Дајемо комплетно решење за случај *б)*.

1° Функција је дефинисана за $x \in (-\infty,\ +\infty)$.

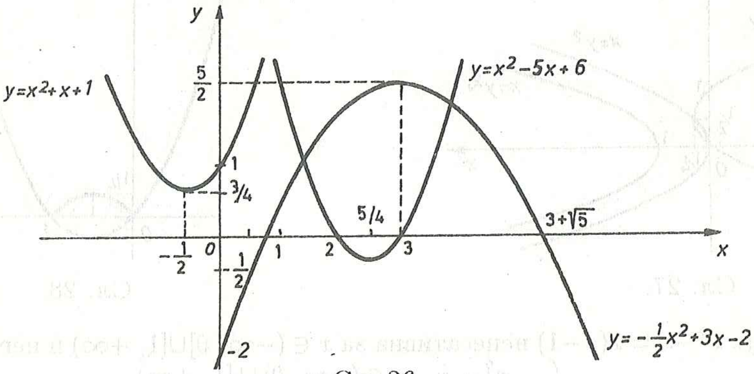
2° Нема нула

3° $y > 0$ за свако x

4° Домен функције је $y \in (\frac{3}{4},\ +\infty)$.

5° Ток: функција опада за $x \in (-\infty,\ 0)$, а расте за $x \in (-\frac{1}{2},\ +\infty)$.

6° Функција има минимум: $y_{\min} = \frac{3}{4}$, за $x = -\frac{1}{2}$.



Сл. 26.

Канонични облици функција су:

б) $y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$; *г)* $y = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$; *е)* $y = -\frac{1}{2}(x-3)^2 + \frac{5}{2}$.

125. Потражимо функцију $y = ax^2 + bx + c$ чији график садржи дате тачке. То значи да координате тачака задовољавају једначину те функције, што у овом случају даје систем једначина: $0 = a(-1)^2 + b(-1) + c$, $0 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$, $-4 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$, еквивалентан систему: $a - b + c = 0$,

$4a+2b+c=0$, $c=-4$. Решење последњег система је $a=2$, $b=-2$, $c=-4$, па је $y=2x^2-2x-4$.

Сличним поступком испитајмо и остале случајеве.

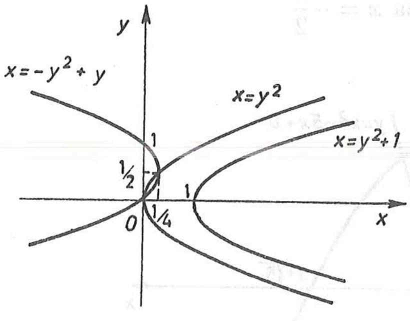
б) $y=-x^2+2x+3$; *в)* $y=-\frac{3}{2}x^2-\frac{13}{2}x-5$.

г) Ако поступимо као у *а)*, добијамо $a=b=c=0$, па таква функција не постоји. Исти закључак можемо извести из чињенице да би таква функција имала три реалне нуле, што је немогуће.

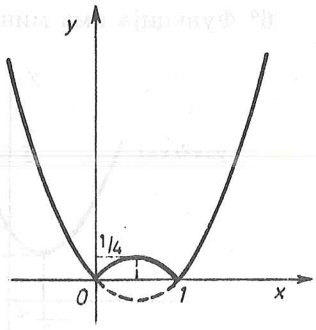
126. *а)* Задатак се разликује од претходног у томе што уместо треће тачке, која би припадала графику, имамо услов да је апсциса темена $m=-\frac{b}{2a}$. У нашем случају, из услова да тачке $A(0,\ 1)$ и $B(1,\ 3)$ припадају графику функције $y=ax^2+bx+c$, имамо једначине $1=c$, $3=a+b+c$, а како је $A(0,\ 1)$ теме параболе, и једначину $0=-\frac{b}{2a}$. Одавде се лако добија $a=2$, $b=0$, $c=1$, па је $y=2x^2+1$.

б) $y=-x^2+6x-8$; *б)* $y=-x^2+4x$.

127. У случајевима *а)*, *б)*, *в)* променљиву y можемо сматрати независно променљивом, па имамо квадратне функције по y. Графици су дати на сл. 27.



Сл. 27.



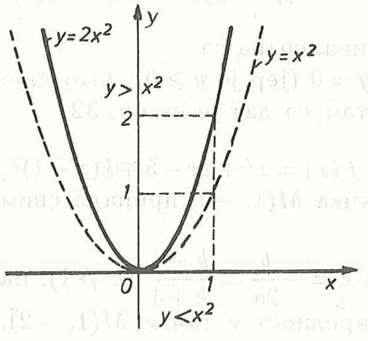
Сл. 28.

г) Како је $x^2-x=x(x-1)$ ненегативна за $x\in(-\infty,\ 0]\cup[1,\ +\infty)$ и негативна за $x\in(0,\ 1)$, то је $y=\begin{cases} x^2-x, & x\in(-\infty,\ 0]\cup[1,\ +\infty) \\ -(x^2-x), & x\in(0,\ 1)\end{cases}$ (сл. 28).

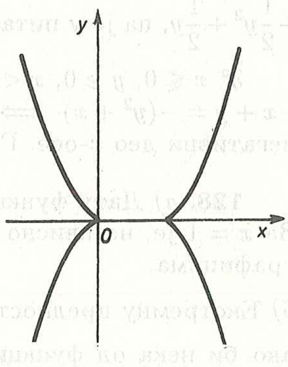
Можемо поступити и на следећи начин: прво нацртамо график функције $y=x^2-x$, а затим делове графика x-осе (негативне вредности функције) пресликамо симетрично у односу на x-осу.

д) График функције $y=x^2$ дели координатну раван на два дела. У једном од њих за координате тачака важи $y>x^2$, док је у другом $y<x^2$ (сл. 29.). Зато је за $y\geqslant x^2$ једначина датог скупа тачака $x^2=y-x^2 \iff y=2x^2$, док је за $y<x^2$: $x^2=-(y-x^2) \iff y=0$.

Дакле, тражени скуп тачака је унија тачака које припадају графику функције $y = 2x^2$ и x-оси.

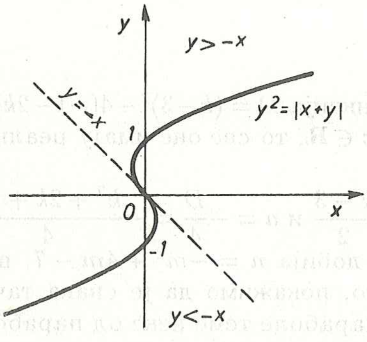


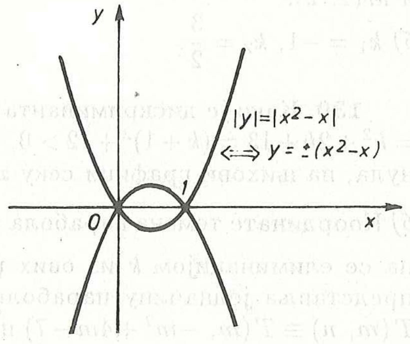
Сл. 29.



Сл. 30.

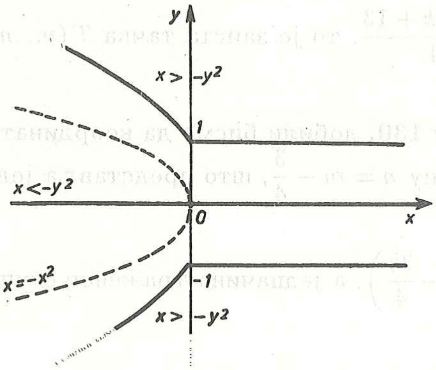
ђ) Једначина датог скупа је дефинисана за $x^2 - x \geqslant 0 \iff$ $\iff x \in (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$ и за такве x има облик $y = \pm(x^2 - x)$ (сл. 30.).





Сл. 31.

з) Координате осе и график функције $x = -y^2$ разбијају раван на 6 делова и у сваком од њих једначина датог скупа тачака имаће одговарајуће облике. Како се једначина не мења ако уместо y ставимо $-y$, то је график симетричан у односу на x-осу, па је довољно посматрати вредности $y \geqslant 0$.



Сл. 32.

1° $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$: имамо једначину $x + y = y^2 + x \iff y = 0 \vee y = 1$ (јер је и $y^2 + x \geqslant 0$), што даје негативни део x-осе и део праве $y = 1$ у првом квадранту.

2° $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x \geqslant -y^2$: у овом случају је $-x + y = y^2 + x \iff x =$

$-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y$, па је у питању део графика квадратне функције по y (сл. 32).

3° $x \leqslant 0$, $y \geqslant 0$, $x < -y^2$: једначина је еквивалентна са $-x+y=-(y^2+x) \iff y=0 \vee y=-1 \iff y=0$ (јер је $y \geqslant 0$), што даје негативни део x-осе. График читавог скупа тачака дат је на сл. 32.

128. *а)* Дату функцију пишимо у облику $f(x)=x^2+2x-5+k(x-1)^2$. За $x=1$ је, независно од k, $f(1)=-2$, па тачка $M(1,\ -2)$ припада свим графицима.

б) Екстремну вредност функција достиже за $x=-\frac{b}{2a}=\frac{k-1}{k+1}$ $(k \neq 1)$, па ако би нека од функција имала екстремну вредност у тачки $M(1,\ -2)$, тада бисмо имали $\frac{k-1}{k+1}=1 \iff -1=1$, што је немогуће.

129. *а)* Поступити као у задатку **128.** *а)*. Сталне тачке су $M(-1,\ 8)$ и $M(2,\ 2)$.

б) $k_1=-1$, $k_2=\frac{3}{2}$.

130. Како је дискриминанта датих функција $D=(k-3)^2-4(-1-2k)=$ $=k^2+2k+13=(k+1)^2+12>0$, за свако $k \in \mathbf{R}$, то све оне имају реалних нула, па њихови графици секу x-осу.

б) Координате темена парабола су $m=-\frac{k-3}{2}$ и $n=-\frac{D}{4}=-\frac{k^2+2k+13}{4}$, па се елиминацијом k из ових релација, добија $n=-m^2+4m-7$, што представља једначину параболе. Обрнуто, покажимо да је свака тачка $T(m,\ n) \equiv T(m,\ -m^2+4m-7)$ поменуте параболе теме неке од парабола из датог скупа. Одговарајућу вредност за k добићемо из релације $m=-\frac{k-3}{2} \iff k=3-2m$, а како је за такву вредност k испуњена једнакост $n=-m^2+4m-7=-\frac{k^2+2k+13}{4}$, то је заиста тачка $T(m,\ n)$ теме параболе за коју је $k=3-2m$.

131. Ако поступимо као у задатку **130.** добили бисмо да координате темена $T(m,\ n)$ задовољавају једначину $n=m-\frac{3}{4}$, што представља једначину праве.

132. Заједничка тачка је $M\left(-\frac{3}{2},\ -\frac{25}{4}\right)$, а једначина траженог скупа тачака је $n=m^2+3m-4$.

133. *а)* Права $n=m-1$ (видети задатке **130.** и **131.**);

б) $M(1,\ 0)$.

в) Како је дата једначина еквивалентна једначини

$x^2-1+k(x-1)^2=0 \iff (x-1)\big((1+k)x-(k-1)\big)=0,$

па једначина има стално решење $x=1$ и промењиво $x=\dfrac{k-1}{k+1}$ $(k\neq -1)$.

г) Како је промењиво решење $x=1-\dfrac{2}{k+1}$, то ћемо тражено x добити ако је $\dfrac{2}{k+1}$ једнако $\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{9}$ или $\dfrac{2}{9}$, а што се добија за k једнако редом $5, 2, 17, 8$.

134. Теме параболе је тачка $T(-a,\ 13-a^2)$, а растојање од координатног почетка $OT=\sqrt{a^2+(13-a^2)^2}=\sqrt{a^4-25a^2+169}$. Услов задатка $OT=5$, је еквивалентан са
$\sqrt{a^4-25a^2+169}=5 \iff a^4-25a^2+144=0 \iff a=\pm 3 \vee a=\pm 4.$

135. *а)* Потражимо такве вредности $a\in\mathbf{R}$ за које постоји бар једно $x\in\mathbf{R}$ такво да је $x+\dfrac{1}{x}=a$. Последња једначина је еквивалентна једначини $x^2-ax+1=0\wedge x\neq 0 \iff x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$, а ова вредност је реална ако и само ако је $a^2-4\geqslant 0 \iff a\in(-\infty,\ 2]\cup[2,\ +\infty)$, што даје област вредности дате функције.
б) $(-\infty,\ +\infty)$.
в) Ако је $\dfrac{x^2-10x+7}{2x^2-1}=a$, тада је $(1-2a)x^2-10x+a+7=0\wedge 2x^2-1\neq 0$.
Ако бисмо имали $2x^2-1=0 \iff x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, тада бисмо за такво x добили из једначине $\dfrac{3}{2}\mp\sqrt{2}=0$, што је апсурд. Даље, за $a=\dfrac{1}{2}$ имамо линеарну једначину $-10x+\dfrac{15}{2}=0 \iff x=\dfrac{3}{4}$. За $a\neq\dfrac{1}{2}$ имамо квадратну једначину чија је дискриминанта $D=8\left(a^2+\dfrac{13}{2}a+9\right)=8(a+2)\left(a+\dfrac{9}{2}\right)$, која је ненегативна за $a\in\left(-\infty,\ -\dfrac{9}{2}\right]\cup[-2,\ +\infty)$, $a\neq\dfrac{1}{2}$. Како је и вредност $a=\dfrac{1}{2}$ укључена претходним разматрањем, то је област вредности полазне функције $\left(-\infty,\ -\dfrac{9}{2}\right]\cup[-2,\ +\infty)$.
г) $\left[-\dfrac{3}{5},\ 1\right]$; *д)* $\left[-1,\ \dfrac{1}{3}\right]$; *ђ)* $[-1,\ 1]$.

136. Како је $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=-a^2+12a-27$, то се највећа вредност достиже за $a=6$ и износи 9.

137. Ако заменимо $b=1-a$ у дати израз, добићемо трином $2a^2-2a+1$, који достиже минималну вредност $\frac{1}{2}$ за $a = \frac{1}{2}$.

138. $\dfrac{(ad-bc)^2}{a^2+c^2}$.

139. $m = 1$;

140. Најмања (највећа) вредност дате функције биће реципрочна највећа (најмања) вредност функције $y_1 = x^2 + x + 1$. Функција y_1 има минимум $y_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}$. Како је $y_1(-1) = 1$ и $y_1(1) = 3$, то је највећа вредност ове функције једнака 3. Дакле, највећа вредност полазне функције је $\frac{4}{3}$, а најмања $\frac{1}{3}$.

141. Како је $y = \left(x^2 + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$, то је очигледно најмања вредност функције $y(0) = 2$, а највећа $y(3) = 110$.

142. Дату функцију напишимо у облику $y = [x(x+3)]\left[(x+1)(x+2)\right] = (x^2+3x)\left[(x^2+3x)+2\right] = t^2+2t$, где је $x^2+3x = t$. Функција $y = t^2+2t$ има минимум $y(-1) = -1$, који се достиже за $t = -1$. Одговарајуће вредности за x добијамо из једначине $x^2 + 3x = -1 \iff x_{1,2} = \dfrac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$.

143. Ако преостале странице означимо са x и y, тада су странице троугла c, x, $y = 2s - c - x$, а површина троугла (према Хероновом обрасцу): $P = \sqrt{s(s-c)(s-x)(s-c+x)}$. Површина је максимална када је израз $(s-x)(s-c+x)$ максималан. Ако тај израз означимо са $f(x)$, имаћемо $f(x) = -x^2 + (2s-c)x + s(c-s)$. Функција f достиже максимум за $x = -\dfrac{2s-c}{-2} = s - \dfrac{c}{2}$. У том случају је $y = 2s - c - s + \dfrac{c}{2} = s - \dfrac{c}{2}$, па се дакле ради о равнокраком троуглу.

144. Пошто је $f(x) = nx^2 - 2(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)x + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2$, то се минимум достиже за $x = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.

145. Највећа вредност је $y = \dfrac{1}{2\sqrt{ab}}$ и достиже се за $x = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$. *Упутство:* Поступити као у задатку **135**, тј. наћи скуп вредности функције.

146. Тражена вредност је $y(\sqrt{2}-1) = 2\sqrt{2} - 2$.

147. Из $2x + 4y = 1$ изразити y, а затим проблем свести на квадратну функцију по x.

148. Покажимо да за свако $k \in \mathbf{R}$ постоји бар једно реално x, тако да је $\dfrac{(ax+b)(cx+d)}{(bx+a)(dx+c)} = k$. Из претходне једначине имамо $(ac-kbd)x^2+(1-k)(bc+ad)x+bd-kac=0$. Покажимо да ова једначина увек има реална решења, уз дате услове. Нека је $ac-kbd \neq 0$. Тада је дискриминанта последње једначине једнака $D=(1-k)^2(bc+ad)^2-4(ac-kbd)(bd-kac) = (bc-ad)^2k^2-2\big[(bc+ad)^2-2(a^2c^2+b^2d^2)\big]k+(bc-ad)^2$, тј. једнака је квадратном триному по k. Како је дискриминанта тог тринома $D_1=4(ac+bd)^2(a^2-b^2)(c^2-d^2)<0$, то је $D>0$ за све $k \in \mathbf{R}$, $ac-kbd \neq 0$, па полазна квадратна једначина има реална решења. Ако је $ac-kbd=0$ и $bd \neq 0$, то је $k=\dfrac{ac}{bd}$. јасно, због $ac-bd \neq 0$ и $k \neq 1$, па ако је $bc+ad \neq 0$, тада се полазна квадратна једначина своди на линеарну, која има решења. Ако би било $bc+ad=0$ тада бисмо из исте једначине имали $bd+ac=0$, што је немогуће, јер би било $(a^2-b^2)(c^2-d^2)=(a-b)(c-d)(a+b)(c+d) = (ac+bd-bc-ad)(a+b)(c+d)=0$.

Случај $ac-kbd=0$ и $bd=0$, слично испитујемо.

149. Неједнакост је еквивалентна неједнакости $a(x_1-x_2)^2 \geqslant 0$, која је тачна јер је $a>0$.

150. Нека је $m=\min\{P(-1),\ P(1)\}=\min\{1-p+q,\ 1+p+q\}$ и $M = \max\{P(-1),\ P(1)\}$. Дати полином достиже минимум $q-\dfrac{p^2}{4}$ за $x=-\dfrac{p}{2}$. Ако је $-1<-\dfrac{p}{2}<1$, тј. $-2<p<2$, тада полином $P(x)$ за $x\in[-1,\ 1]$ узима све вредности интервала $\left[q-\dfrac{p^2}{4},\ M\right]$, а ако је $|p| \geqslant 2$, тада је полином $P(x)$ монотона функција на интервалу $[-1,\ 1]$, па узима све вредности из интервала $[m,\ M]$.

151. Претпоставимо да је $2x^2-x-36=p^2$, где је p прост број. Растављањем на чиниоце, добијамо $(x+4)(2x-9)=p^2$, па имамо следеће могућности за факторе на левој страни: $1,\ p^2;\ -1,\ -p^2;\ p,\ p;\ -p,\ -p;\ p^2,\ 1;\ -p^2,\ -1$. Испитивањем ових могућности добијамо тражене вредности $x=5$ $(p=3)$ и $x=13$ $(p=17)$.

152. По претпоставци бројеви $f(0)=c$, $f(1)=a+b+c$ и $f(-1) = a-b+c$ су цели, па и бројеви $a+b=f(1)-c$ и $2a=f(1)+f(-1)-2c$ су такође цели.

153. *а)* По услову задатка је $|f(0)|=|c|\leqslant 1$, $|f(-1)|=|a-b+c|\leqslant 1$, па је зато, $|2a|=|(a+b+c)+(a-b+c)-2c|\leqslant |a+b+c|+|a-b+c|+2|c|\leqslant 4$ па следи $|a|\leqslant 2$.
б) $f(x)=2x^2-1$.

154. Нека $k\in\mathbf{Z}$. Тада је $|y(k+1)-y(k)|=|2k+1+p|\geqslant 1 \iff$

$\iff 2k+1+p \leqslant -1 \vee 2k+1+p \geqslant 1 \iff k+1 \leqslant -\frac{p}{2} \vee k \geqslant -\frac{p}{2}$. Дакле, модуо разлике вредности функције у двема узастопним целобројним вредностима k и $k+1$ није мањи од 1 ако и само ако је $k+1 \leqslant \frac{p}{2}\left(\Rightarrow k < -\frac{p}{2}\right)$ или $k \geqslant -\frac{p}{2}\left(\Rightarrow k+1 > -\frac{p}{2}\right)$, тј. ако и само ако су тачке k и $k+1$ са исте стране праве $x = -\frac{p}{2}$ (оса симетрије графика функције). Од три узастопне целобројне тачке бар две су са исте стране поменуте праве, па је горњи услов испуњен. Ако би обе вредности функције у тим тачкама биле мање од 1 по модулу, тада би и модуо њихове разлике био мањи од 1, што би био апсурд.

155. Претпоставимо супротно, да је $f(x_1) = 0$ за неко $x \in (-1,\, 1)$ (не може бити $f(-1) = 0$ или $f(1) = 0$, због $f(-1)f(1) > 0$). Тада постоји $r \in (x_1,\, 1)$ тако да је $f(-1)f(r) < 0$. Међутим, због $f(-1)f(1) > 0$, сада је и $f(r)f(1) < 0$, па постоји $x_2 \in (r,\, 1)$ тако да је $f(x_2) = 0$. Дакле, ако функција има нула у $(-1,\, 1)$, тада их има две. За њих је сада $|q| = |x_1x_2| < 1$, што је супротно са $1 < |f(0)| = |q|$. Дакле, функција f нема нула на интервалу $[-1,\, 1]$.

157. Нека је $f(x) = ax^2 + bx + c$. Тада је $f(0)f(2) = c(4a + 2b + c) = c\big[(5a + 3b + 3c) - a - b - 2c\big] = -c(a + b + c) - c^2 = -f(0)f(1) - c^2$.

Ако је $f(0)f(1) \leqslant 0$, тада f има бар једну нулу у $[0,\, 1]$, а ако је $f(0)f(1) > 0$, тада је $f(0)f(2) < 0$, па f има бар једну нулу у интервалу $(0,\, 2)$, чиме је доказ завршен.

158. Покажимо да за $|x| \leqslant 1$ важи $|f(2x)| \leqslant 7$. Имамо да $|f(2x)| = |4ax^2 + 2bx + c| = |(ax^2 + bx + c) + (3ax^2 + bx)| \leqslant |ax^2 + bx + c| + |x||3ax + b| \leqslant 1 + |3ax + b|$. Функција $|3ax + b|$ највећу вредност достиже на крајевима интервала $[-1,\, 1]$, па је, дакле, довољно доказати да је $|3ax \pm b| \leqslant 6$. Из $|f(0)| = |c| \leqslant 1$, $|f(1)| = |a + b + c| \leqslant 1$ и $|f(-1)| = |a - b + c| \leqslant 1$, добијамо: $|3a+b| = |2(a+b+c)+(a-b+c)-3c| \leqslant 2|a+b+c|+|a-b+c|+3|c| \leqslant 2+1+3 = 6$. Слично бисмо добили да је и $|3a - b| \leqslant 6$, чиме је доказ завршен.

159. Уведимо ознаке $f(x) = ax^2 + bx + c$, $g(x) = cx^2 + bx + a$. Тада је $|c| = |f(0)| \leqslant 1$ и $|g(1)| = |f(1)| \leqslant 1$, $|g(-1)| = |f(-1)| \leqslant 1$. Претпоставимо супротно, тј. да постоји $x \in (-1,\, 1)$ тако да је $|g(x)| > 2$. Тада ће, с обзиром да је $|g(1)| \leqslant 1$, $|g(-1)| \leqslant 1$ и за теме параболе $y = g(x)$, нека је то тачка $T\big(x_0,\, g(0)\big)$, важити $|x_0| < 1$, $|g(x_0)| > 2$. Ако функцију $g(x)$ пишемо у канонском облику $g(x) = c(x - x_0)^2 + g(x_0)$, и ако уместо x ставимо вредност -1 или 1, у зависности која је тачка ближа тачки x_0, нека је то рецимо 1, имаћемо $g(1) = c(1 - x_0)^2 + g(x_0)$, одакле добијамо $|g(x_0)| = |g(1) - c(1 - x_0^2)^2| \leqslant |g(1)| + |c||1 - x_0| \leqslant 2$ (јер смо претпоставили да је $|1 - x_0|^2 \leqslant 1$). Последња неједнакост је противречна са $|g(x_0)| > 2$.

160. Ако једначина $f(x)=x$ нема реалних корена тада је $f(x)>x$ за свако x (ако је $a>0$) и $f(x)<x$ за свако x (ако је $a<0$). У првом случају је $f\big(f(x)\big)>f(x)>x$, а у другом $f\big(f(x)\big)<f(x)<x$, па и једначина $f\big(f(x)\big)=x$ такође нема реалних решења.

161. *а)* $x\in(-1,\ 1)$; *б)* $x\in(-\infty,-2]\cup[2,\ +\infty)$; *в)* $x\in(0,\ 1)$;
г) $x\in(-\infty,\ 0]\cup[2,\ +\infty)$; *д)* $x\in\left(-\infty,\ -\dfrac{1}{\sqrt2}\right]\cup\left[\dfrac{1}{\sqrt2},\ +\infty\right)$;
ђ) $x\in(-\infty,\ +\infty)$; *е)* ни за једно $x\in\mathbf{R}$.
ж) Дата неједначина је еквивалентна неједначини $2\left(x+\dfrac12\right)(x-1)\geqslant 0$, а ова је задовољена за свако $x\in\left(-\infty,\ -\dfrac12\right]\cup[1,\ +\infty)$. До последњег закључка можемо доћи или посматрањем знакова оба фактора последње неједначине или, пак цртањем графика дате функције.
з) Није задовољена ни за једно $x\in\mathbf{R}$; *и)* $x\in(-\infty,\ 2]\cup[3,\ +\infty)$;
ј) $x\in\left[\dfrac{-1-\sqrt5}{2},\ \dfrac{-1+\sqrt5}{2}\right]$; *к)* $x\neq 3$.

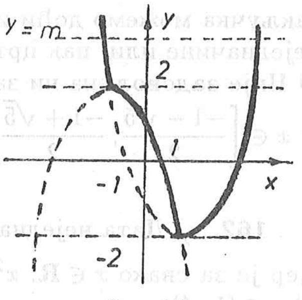
162. *а)* Дата неједначина је еквивалентна $\dfrac{x(x-4)}{x^2-x+1}\leqslant 0\iff x(x-4)\leqslant 0$ (јер је за свако $x\in\mathbf{R}$: $x^2-x+1>0$) $\iff x\in[0,\ 4]$.
б) $x\in(1,\ 4)$.
в) $\dfrac{x^2+5x+4}{x^3+1}\geqslant 1\iff\dfrac{(x+1)(x+4)}{(x+1)(x^2-x+1)}-1\geqslant 0\iff\dfrac{x+4}{x^2-x+1}-1\geqslant$ $\geqslant 0\wedge x\neq -1\iff\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-x+1}\leqslant 0\wedge x\neq-1\iff x^2-2x-3\leqslant 0\wedge x\neq -1\iff$ $\iff (x-3)(x+1)\leqslant 0\wedge x\neq -1\iff x\in(-1,\ 3]$.
г) $x\in(-2,\ -1)$; *д)* $x\in(-1,\ 1)\cup\left(1,\ \dfrac52\right)$.
ђ) Дата неједначина је еквивалентна са $\dfrac{(x-1)(2x+1)^2}{x^2(x-2)(x+2)}>0\iff$ $\iff (x-1)(x-2)(x+2)>0\wedge x\neq 0\wedge x\neq -\dfrac12\iff$ $\iff x\in\left(-2,\ -\dfrac12\right)\cup\left(-\dfrac12,\ 0\right)\cup(0,\ 1)\cup(2,\ +\infty)$.
е) $x\in(-\infty,\ +\infty)$; *ж)* $x\in(-1,\ 0)\cup(1,\ 2)$; *з)* $x\in[-4,\ -3]\cup[0,\ +\infty)$;
и) $x\in(-1,\ 3)\cup(3,\ +\infty)$ *ј)* $x\in(-4,1)$.

163. *а)* Дата неједначина је еквивалентна са $-2<x^2-1<2\iff$ $\iff -1<x^2<3\iff -\sqrt3<x<\sqrt3$.
б) Како је $x^2=|x|^2$, то имамо неједначину $|x|^2-2|x|-3>0\iff$ $\iff \big(|x|+1\big)\big(|x|-3\big)>0\iff |x|-3>0\iff |x|>3\iff$ $\iff x\in(-\infty,\ -3)\cup(3,\ +\infty)$, јер је $|x|+1>0$, за свако $x\in\mathbf{R}$.

в) $|3x^2-x-1|>1 \iff 3x^2-x-1<-1 \vee 3x^2-x-1>1 \iff 3x\left(x-\frac{1}{3}\right)<0 \vee 3\left(x+\frac{2}{3}\right)(x-1)>0 \iff x\in\left(-\infty,\,-\frac{2}{3}\right)\cup\left(0,\,\frac{1}{3}\right)\cup(1,\,+\infty)$.
г) Треба разликовати случајеве $x<0$ и $x\geqslant 0$. Резултат је $x\in(-\infty,\,3)$.
д) $x\in\left[-3,\,\sqrt{5}-1\right)$ (разликовати случајеве $x<-3$ и $x\geqslant -3$).
ђ) $\big||x^2-1|-1\big|<2 \iff -2<|x^2-1|-1<2 \iff -1<|x^2-1|<3 \iff$
$\iff |x^2-1|<3 \iff -3<x^2-1<3 \iff -2<x^2<4 \iff x^2<4 \iff x\in(-2,\,2)$.

164. *а)* Како је $|x^2-1|=x^2-1$, за $|x|\geqslant 1$ и $|x^2-1|=-(x^2-1)$, за $|x|<1$, то дата функција има облик $\begin{cases} x^2-2x-1, & \text{за } |x|\geqslant 1 \\ -x^2-2x+1, & \text{за } |x|<1 \end{cases}$, што видимо на сл. 33.

б) На сл. 33. је испрекиданом линијом означен график праве $y=m$. За дискусију користимо пресеке графика функције из *а)* са $y=m$. Ако са X означимо скуп решења једначине, добићемо: за $m<-2$ је $X=\emptyset$; за $m=-2$ је $X=\{1\}$; за $-2<m\leqslant 2$ је $X=\left\{-1+\sqrt{2-m},\,-1-\sqrt{2-m}\right\}$; за $m>2$ је $X=\left\{1+\sqrt{2-m},\,1-\sqrt{2-m}\right\}$.



Сл. 33.

165. *а)* Због $D=k^2-4\geqslant 0$ је $k\leqslant -2$ или $k\geqslant 2$. За $k=-2$ је $(x-1)^2>0$ за $x\neq 1$, а за $k=2$ је $x+1>0$ за $x\neq -1$. За $k<-2$ или $k>2$ решења су $x<\dfrac{-k-\sqrt{k^2-4}}{2}$ или $x>\dfrac{-k+\sqrt{k^2-4}}{2}$.
б) За $k=0$, неједнакост важи за свако x. За $k\neq 0$, дискриминанта $D\geqslant 0$ за $k^2+k\geqslant 0$, тј. за $k\leqslant -1$ или $k>0$. За $k>0$ је $1-\sqrt{1+\frac{1}{k}}<x<1+\sqrt{1+\frac{1}{k}}$.
За $k\leqslant -1$ је $x>1+\sqrt{1+\frac{1}{k}}$ или $x<1-\sqrt{1+\frac{1}{k}}$. Ако је $-1<k<0$, тада је $k<0$ и $D<0$, па је неједнакост $kx^2-2kx-1<0$ задовољена за свако x.
в) Ако је $|k|\leqslant\frac{2}{3}$ неједначина нема решења, а ако је $|k|>\frac{2}{3}$, тада је решење $x\in(x_1,\,x_2)$, где су x_1 и x_2 решења једначине $x^2-3kx+1=0$.

166. *а)* За $k=0$ је $x=0$. За $D\geqslant 0$, тј. $16-8k^2\geqslant 0$, решења квадратне једначине су реална. Дакле $k\in\left[-\sqrt{2},\,\sqrt{2}\right]$.
б) $k\leqslant 0$ или $k\geqslant 4$.
в) За $k=1$ имамо једначина $-2x+4=0 \iff x=2$. За $k\neq 1$ квадратна једначина има реална решења ако и само ако је дискриминанта $\geqslant 0$, тј. $D=4\left[k^2-(k-1)(k+3)\right]\geqslant 0 \iff k\leqslant\frac{3}{2}$. Решење је: $k\leqslant\frac{3}{2}$.

167. *a)* Морају бити задовољени услови $D \geqslant 0$, $x_1+x_2<0$ и $x_1x_2>0$, односно: $m^2-2m-15 \geqslant 0$, $m+1<0$ и $m+4>0$. Решења су: $-4<m\leqslant -3$.
б) $\frac{5}{9}<m\leqslant 1$.
в) Мора бити $D\geqslant 0$, $x_1+x_2>0$ и $x_1x_2>0$, итд. Решење је $p>2$.
г) $0<n\leqslant 4$; *д)* $-1<m<2$.

168. *a)* За $k=1$, имамо функцију $y=2$, а за $k=-1$ је $y=-4x+2$, која није позитивна за свако $x\in\mathbf{R}$. За $k^2-1\neq 0 \iff k\neq\pm 1$, тај услов је испуњен ако и само ако је $k^2-1>0$ и $D=4\big[(k-1)^2-2(k^2-1)\big]<0 \iff$ $\iff -k^2-2k+3<0 \iff k^2+2k-3>0$. Систем $k^2-1>0 \vee k^2+2k-3>0$ је еквивалентан са $k\in(-\infty,\ -1)\cup(1,\ +\infty) \vee k\in(-\infty,\ -3)\cup(1,\ +\infty)$. Имајући у виду да је за $k=1$ испуњен захтев задатка, имамо коначно, тражене вредности $k\in(-\infty,\ -3)\cup[1,\ +\infty)$.
б) За $k=1$ је $f(x)=2>0$ за свако $x\in\mathbf{R}$. Нека је $k\neq 1$. За $x\geqslant 1$ имамо $f(x)=(k-1)^2x^2+(k-1)x+2$, и она је позитивна за свако $x\in\mathbf{R}$, јер је дискриминанта ове функције $D=-7(k-1)^2<0$, па тим пре и за $x\geqslant 1$.

За $x<1$ функција има облик $f(x)=(k-1)^2x-(k-1)x+2k$. Сада је дискриминанта једнака $D=(k-1)^2(1-8k)$. За $1-8k<0 \iff k>\frac{1}{8}$ имамо да је $D<0$, па је $f(x)>0$ за свако $x\in\mathbf{R}$, па и за $x<1$. Међутим, за $k\leqslant\frac{1}{8}$, функција има реалне нуле $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{1-8k}}{2(k-1)}$, од којих је $x_1=\frac{1+\sqrt{1-8k}}{2(k-1)}<0$, тј. функција за $k\leqslant\frac{1}{8}$ и $x<1$ може узимати и негативне вредности. Дакле, да би функција била позитивна за свако $x\in\mathbf{R}$ потребно је и довољно да је $k>\frac{1}{8}$.

169. *a)* Поступите слично као у задатку **168.** *a)*. Разлика је само у захтеву да коефицијент уз x^2 буде негативан. Резултат: $k\in(-\infty,\ -2)$.
б) $k\in(2,\ 4)$.

170. Како је $b^2>0$ и како је $D=(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2=$ $=(b^2+c^2-a^2-2bc)(b^2+c^2-a^2+2bc)=\big[(b-c)^2-a^2\big]\big[(b+c)^2-a^2\big]=$ $=(b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+c+a)<0$ (јер је, због односа дужина страница код троугла, први фактор негативан а остали позитивни), то је функција позитивна за свако $x\in\mathbf{R}$.

171. *Упутство:* Ако се $q=1-p$ замени у датој релацији, добија се $c^2p^2+(a^2-b^2-c^2)p+b^2>0$. Потребно је показати да је ова неједначина испуњена за свако $p\in\mathbf{R}$ ако и само ако су испуњени услови за конструкцију троугла ($a+b-c>0$, $a+c-b>0$, $b+c-a>0$).

172. Како је $a>0$ и $D=(b-a-c)^2-4ac=a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc=$ $=\big[(a-b)^2-c^2\big]+\big[(a-c)^2-b^2\big]+\big[(b-c)^2-a^2\big]<0$, јер је сваки од сабирака негативан (рецимо $(a-b)^2-c^2=(a-b-c)(a-b+c)<0$, због односа страница троугла), то је трином заиста позитиван за свако $x \in \mathbf{R}$.

173. *а)* Како је дискриминанта $D = 4(m-2)(m-4)$, то је дати трином позитиван за свако $x \in \mathbf{R}$, ако је $D < 0 \iff m \in (2,\ 4)$.
б) За свако $x \in \mathbf{R}$, осим једне вредности, ако је $D \leqslant 0 \iff m \in [2,\ 4]$.

174. *а)* Како је $2x^2 - 2x + 3 > 0$ за свако x, то је дата неједначина еквивалентна са $x^2+mx-1 < 2x^2-2x+3$, односно са $-x^2+(m+2)x-4 < 0$. Мора бити $D = (m+2)^2 - 16 < 0$, па је $m \in (-6,\ 2)$.
б) $m \in (-7,\ 1)$; *в)* $m < -\dfrac{1}{2}$; *г)* $-1 < m < 2$; *д)* $-3 < p < 6$.

175. Нека је $\sqrt{x} = t\ (t \geqslant 0)$ и нека је $f(t) = (a+b-c)t^2 - 2\sqrt{abc}t + {}$ $+(a+b)c - ab > 0$ за свако $t > 0$. Мора бити $a+b-c \neq 0$, јер је у супротном линеарна функција за велике позитивне вредности t. $f(t) > 0$ за свако $t > 0$ ако је:

1° $a+b-c > 0 \land D < 0$ или

2° $a+b-c > 0 \land D \geqslant 0 \land t_1 \leqslant 0 \land t_2 \leqslant 0$ (D – дискриминанта, а t_1, t_2 – нуле функције).

Лако се добија да је $D = 4(a+b)(c-a)(c-b)$. Сада је први услов испуњен ако је $a+b-c > 0 \land (c-a)(c-b) < 0$, што је заиста еквивалентно са $\min\{a,\ b\} < c < \max\{a,\ b\}$. Случај 2° није могућ јер је $t_1 + t_2 = 2\sqrt{abc}$, па је бар један корен позитиван. Обрнуто закључујемо да је
$\min\{a,\ b\} < c < \max\{a,\ b\} \Rightarrow a+b-c > 0 \land D < 0$, па је $f(t) > 0$ за свако $t \in \mathbf{R}$, па и за $t > 0$.

176. Ако су дате неједнакости испуњене за свако реално x, тада је $a > 0$ и $b^2 - ac < 0$, као и $p > 0$ и $q^2 - pr < 0$. Сада за трином $apx^2 + 2bqx + cr$ имамо да је $ap > 0$ и $D = 4(b^2q^2 - apcr) = 4q^2(b^2-ac) + 4ac(q^2-pr) < 0$ (због претходних неједнакости и чињенице да је $ac > b^2 \geqslant 0$), па је тај трином позитиван за свако $x \in \mathbf{R}$.

177. *а)* Према Виетовим формулама је $x_1 + x_2 = -k$, $x_1x_2 = 1$, па је
$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \frac{x_1^4 + x_2^4}{(x_1x_2)^2} = \frac{\left[(x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2\right]^2 - 2(x_1x_2)^2}{(x_1x_2)^2} = (k^2-2)^2 - 2 =$$
$= k^4 - 4k^2 + 2$. Зато је дата неједначина еквивалентна са $k^4 - 4k^2 > 0 \iff$ $\iff k^2(k^2-4) > 0 \iff k^2 - 4 > 0 \iff k \in (-\infty,\ -2) \cup (2,\ +\infty)$.
б) $x_1^2 + x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \dfrac{1-4k-k^2}{(k+1)^2} \geqslant 1$, па је $k \in [-3,\ -1) \cup (-1,\ 0]$.
в) $\dfrac{1}{x_1^2} + \dfrac{1}{x_2^2} = \dfrac{x_1^2 + x_2^2}{x_1^2x_2^2}$, итд. $k \in \left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right) \cup (0,\ 2)$
г) $D = 4(a^2-4) > 0$. итд. Решење је $a < -2$ или $2 < a \leqslant 4$.
д) $x_1^2 + x_2^2 = (k+1)^2$, па је $k = -1$.
ђ) $x_1^3 + x_2^3 = (x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2) = -\dfrac{k^2}{2} - \dfrac{k}{2} + 1$, па је $k = -\dfrac{1}{2}$.

е) $x_1 - x_2 = \sqrt{D} = 2\sqrt{-k^2+6k-5}$, па је $k=3$.

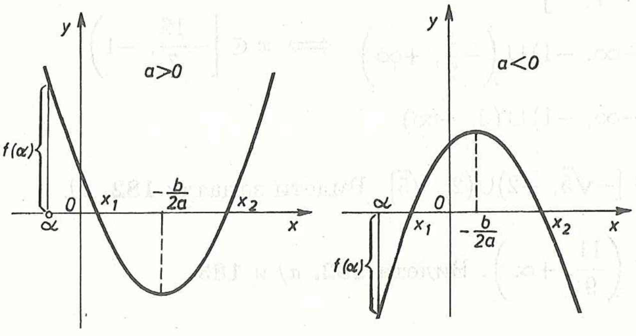
178. *Упутство:* Показати да је $D \geqslant 0$, или, уз претпоставку $a \leqslant b \leqslant c$, да је $f(a)f(b) \leqslant 0$.

179. *Упутство:* Показати да је $f(a)f(c) \leqslant 0$ за свако λ.

180. Према услову је $2a\alpha^2+b\alpha+c=0$, одакле је $b\alpha+c=2a\beta^2$. За доказ тврђења довољно је утврдити да је $f(\alpha)f(\beta)<0$, где је $f(x)=ax^2+bx+c$. Заиста, $f(\alpha)f(\beta)=(a\alpha^2+b\alpha+c)(a\beta^2+b\beta+c)=(a\alpha^2-2a\alpha^2)(a\beta^2+2a\beta^2)=$ $=-3a^2\alpha^2\beta^2<0$.

181. Претпоставићемо супротно, тј. да постоје различити цели бројеви a, b, c за које важи $|a^2+ap+q|<\frac{1}{2}$, $|b^2+bp+q|<\frac{1}{2}$ $|c^2+cp+q|<\frac{1}{2}$. Одавде је $\Big|(a-b)(a+b+p)\Big| = \Big|(a^2+ap+q)-(b^2+bp+q)\Big| \leqslant |a^2+ap+q|+|b^2+bp+q| < \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$, па као је $a\neq b$ и a и b су цели, то је $|a-b|\geqslant 1$, те је $|a+b+p|<1$. Сада је $|a-c|=\Big|(a+b+p)-(b+c+p)\Big| \leqslant |a+b+p|+|b+c+p|<1+1=2$, па како су a и c цели бројеви мора бити $|a-c|\leqslant 1$, Слично добијамо да је и $|b-c|\leqslant 1$ и $|a-b|\leqslant 1$. Ово је немогуће, јер ако су a, b, c међусобно различити и цели бројеви и ако је, рецимо, $a<b<c$, тада је $|c-a|\geqslant 2$.

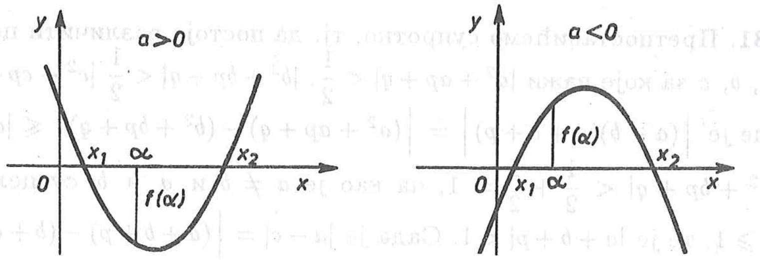
182. *а)* Из услова $\alpha<x_1\leqslant x_2$ имамо еквивалентне услове $x_1-\alpha>0$, $x_2-\alpha>0$, ($x_1\leqslant x_2$ имамо из договора да мањи корен означимо са x_1). Последњи услови су испуњени ако и само ако је збир и производ бројева $x_1-\alpha$ и $x_2-\alpha$ такође позитиван. Из $(x_1-\alpha)+(x_2-\alpha)>0$ добијамо $\alpha<\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{b}{2a}$, док из $(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)>0$ следи $\alpha^2-\alpha(x_1+x_2)+x_1x_2>0 \iff$ $\iff af(\alpha)>0$. Успут смо користили Виетове формуле. Наравно први услов, $D=b^2-4ac\geqslant 0$, је потребан и довољан да би решења била реална. Геометријска интерпретација дата је на слици 34.



Сл. 34.

б) Видети *а)*.

в) Нека су x_1 и x_2 реални корени и задовољавају услов $x_1 < \alpha < x_2$. Тада је $x_1 - \alpha < 0$, $x_2 - \alpha > 0$, па је $(x_1 - \alpha)(x_2 - \alpha) < 0 \iff$ $\iff \alpha^2 - \alpha(x_1 + x_2) + x_1 x_2 < 0 \iff af(\alpha) < 0$. Обрнуто, ако је $af(\alpha) < 0$, тада је $af(\alpha) = a^2\left(\alpha - \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{D}{4} < 0 \Rightarrow D > 4a^2\left(\alpha - \dfrac{b}{2a}\right)^2 \geqslant 0$, па су решења реална. Ако, даље, α не би било између x_1 и x_2, тада би према *а)* и *б)* имали да је $af(a) > 0$, супротно претпоставци. Геометријски је то приказано на слици 35.



Сл. 35.

г) Комбиновати *а)* и *б)*.

183. Овај задатак је илустрација задатка 182. *а)* за $\alpha = 1$. У овом случају имамо услове $\begin{cases} D = -28k\left(k + \dfrac{16}{7}\right) \geqslant 0 \\ (k+1)f(1) = 2(k+1)\left(k + \dfrac{1}{2}\right) > 0 \iff \\ 1 < \dfrac{-3k}{2(k+1)} \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} k \in \left[-\dfrac{16}{7},\ 0\right] \\ k \in (-\infty,\ -1) \cup \left(-\dfrac{1}{2},\ +\infty\right) \\ k \in (-\infty,\ -1) \cup (2,\ +\infty) \end{cases} \iff x \in \left[-\dfrac{16}{7},\ -1\right).$$

184. $k \in [-\sqrt{5},\ -2) \cup (2,\ \sqrt{5}]$. Видети задатак **182.** *б)*.

185. $k \in \left(\dfrac{11}{9},\ +\infty\right)$. Видети **182.** *а)* и **183.**

186. Према задатку **182.** *б)*, имамо да је услов $1 \cdot f(3) < 0$ потребан и довољан да је испуњен услов $x_1 < 3 < x_2$. У нашем случају је $f(3) = 15k\left(k - \frac{2}{3}\right) < 0 \iff k \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$.

187. *а)* Применом задатка **182.** *г)*, долазимо до решења $k \in (3, 4)$.
б) За $k \neq 0$, решења су реална ако је $D = 4k^2 - 8k + 1 \geqslant 0$, тј. за $k \in (-\infty, 0) \cup \left(8, \frac{2-\sqrt{3}}{2}\right] \cup \left[\frac{2+\sqrt{3}}{2}, +\infty\right)$. Провером утврдимо да за $k = \frac{2 \pm \sqrt{3}}{2}$ применом задатка **182.** *г)*, добијамо: $kf(-1) = 2(2-k) > 0$, $kf(1) = 3k^2 > 0$, $D > 0$, $-1 < -\frac{2k-1}{k} < 1$, итд. Решење је $k \in \left(\frac{1}{4}, 2\right)$. Сем тога, решење је $x = 1$, па је $k \neq 0$.
в) Слично претходном задатку, решење је $k \in \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{4}\right) \cup (12, +\infty)$. За $k = 1$ је $x = \frac{1}{6}$, што такође представља решење задатка.

188. $a \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (0, +\infty)$.

189. Према **182.** *б)*, довољно је показати да $1 \cdot f(a+b+c) < 0$, где је f функција дефинисана левом страном дате једначине. Заиста, $f(a+b+c) = -(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) = -\frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right] < 0$, јер су a, b, c различити реални бројеви.

190. Пре свега, да би једначина имала реалних решења потребно је и довољно да је $D = 4(4k^2 - 1) \geqslant 0 \iff k \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$. Даље, како је $f(0) = 1$ и $1 \cdot f(0) = 1 > 0$ то број 0 не може бити корен, нити може бити $x_1 < 0 < x_2$, видети **182.** *б)*. Потражимо зато k тако да је $0 < x_1 \leqslant x_2$ и $k \leqslant x_1 \leqslant x_2$. Према задатку **182.** *а)*, осим услова $D \geqslant 0$, неопходно је и довољно још да је $1 \cdot f(0) = 1 > 0$, $1 \cdot f(k) = 1 - 3k^2 \geqslant 0 \iff$

$$\iff k \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right],\ 0 < -\frac{b}{2a} = 2k \iff k > 0 \text{ и } k \leqslant -\frac{b}{2a} = 2k \iff k \geqslant 0.$$

Комбинујући све ове услове, долазимо до решења $k \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.

191. Непосредно добијамо да је дискриминанта $D = 4(m+1)(m-4)$. Такође се добија да је $f(-2)f(3) = -\frac{25}{4}D$, па ако је $D > 0$, тада је $f(-2)f(3) < 0$, па једначина има бар један корен у интервалу $(-2, 3)$. Ако би имала два корена у истом интервалу, било би $f(-2)f(3) > 0$, супротно претходном.

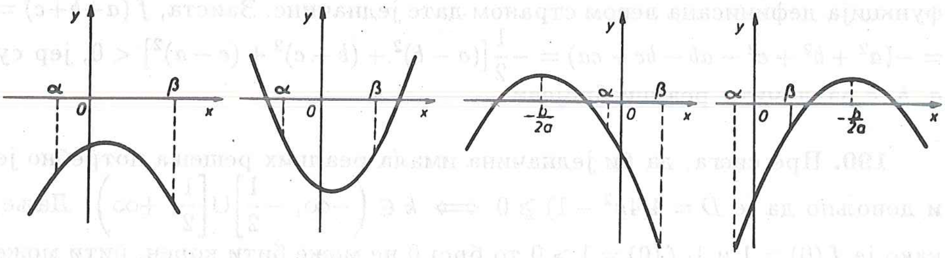
192. Треба доказати да је бар један корен из интервала $(-1,\ 1)$. Како је $D = m^2 + 40 > 0$ и $a = 2 > 0$, то мора бити задовољен услов: $(f(-1)f(1) < 0) \vee \left(f(1) > 0 \wedge f(-1) > 0 \vee -\frac{b}{2a} < 0\right)$. Први услов: $f(-1)f(1) < 0 \iff (m-3)(-m-3) < 0 \iff m < -3 \vee m > 3$. То је решење задатка јер други услов није могућ.

193. $k \in \left[\frac{16}{17},\ 2\right)$. Видети задатке **182.** *а)* и **183.**

194. Другим речима требало би да буде испуњен услов $x_1 < 2 < 3 < x_2$, што је, према **182.** *б)*, еквивалентно систему $\begin{cases} (a-2)f(2) < 0 \\ (a-2)f(3) < 0 \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} 4(a-2)(a-5) < 0 \\ 7(a-2)\left(a - \frac{36}{7}\right) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a \in (2,\ 5) \\ a \in \left(2,\ \frac{36}{7}\right) \end{cases} \iff a \in (2,\ 5).$$

195. Геометријска интерпретација свих могућности је на слици 36.

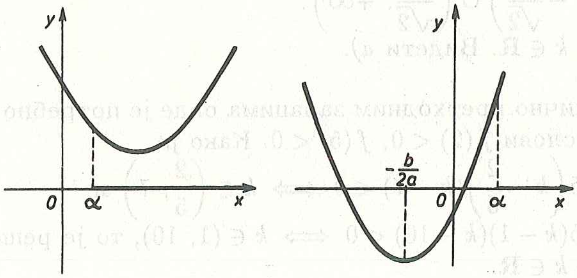


Сл. 36.

Напоменимо да је, аналогно претходном, неједнакост $ax^2 + bx + c > 0$ задовољено за свако $\alpha < x < \beta$ ако и само ако : $\begin{cases} D < 0 \\ a > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} a < 0 \\ f(\alpha) \geqslant 0 \\ f(\beta) \geqslant 0 \end{cases} \vee$

$$\vee \begin{cases} D \geqslant 0 \\ a > 0 \\ f(\alpha) \geqslant 0 \\ -\frac{b}{2a} < \alpha \end{cases} \vee \begin{cases} D \geqslant 0 \\ a > 0 \\ f(\beta) \geqslant 0 \\ -\frac{b}{2a} > \beta \end{cases}.$$

196. Геометријски се уверавамо у тачност тврђења (сл. 37.).



Сл. 37.

197. Видети задатке **195.** и **196.**

198. Претходно одредимо све величине које се појављују у задацима **195**, **196.** и **197**, а односе се на наш случај. Тако имамо:
$D = b^2 - 4ac = -4(2k^2 - k - 4)$, $a = k$, $-\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2k} = \dfrac{2}{k}$,
$f(0) = 2k - 1$, $f(-1) = 3(k+1)$, $f(1) = 3k - 5$.
а) Према задатку **196.** потребно је идовољно да буду испуњени услови (према претходно израчунатом): $\begin{cases} -4(2k^2-k-4)<0 \\ k>0 \end{cases} \vee \begin{cases} -4(2k^2-k-4)\geqslant 0 \\ k>0 \\ 2k-1\geqslant 0 \\ \dfrac{2}{k}<0 \end{cases}$.

Први систем је задовољен за $k \in \left(\dfrac{1+\sqrt{33}}{4}, +\infty\right)$, а други није задовољен ни за једно реално $k \in \mathbb{R}$, па је решење $k \in \left(\dfrac{1+\sqrt{33}}{4}, +\infty\right)$.

б) $k \in \left(\dfrac{1+\sqrt{33}}{4}, +\infty\right)$ Видети задатак **195.**

в) $k \in \left(\dfrac{1+\sqrt{33}}{4}, +\infty\right)$ Видети задатак **197.**

199. У овом случају је $a = 1 > 0$, $D = 4\left[(k^2-1)^2 + 4k^2\right] > 0$.
а) Ни за једно $k \in \mathbb{R}$, јер функција $f(x) = x^2 - 2(k^2-1)x - 4k^2$ може имати негативне вредности само за x између корена једначине (због $a > 0$, $D > 0$).
б) Користећи задатак **195.** закључујемо да постоји само друга могућност

$$\begin{cases} a>0 \\ f(0)\leqslant 0 \\ f(1)\leqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1>0 \\ f(0)=-4k^2\leqslant 0 \\ f(1)=-6\left(k^2-\dfrac{1}{2}\right)\leqslant 0 \end{cases} \iff$$

$\iff k \in \left(-\infty,\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ +\infty\right).$

б) Ни за једно $k \in \mathbf{R}$. Видети *а)*.

200. *а)* Слично претходним задацима овде је потребно и довољно да су испуњени услови $f(2) < 0$, $f(5) < 0$. Како је

$f(2) < 0 \iff 5\left(k - \dfrac{2}{5}\right)(k-7) < 0 \iff k \in \left(\dfrac{2}{5},\ 7\right)$ и

$f(5) < 0 \iff 5(k-1)(k-10) < 0 \iff k \in (1,\ 10)$, то је решење $k \in (1,\ 7)$.

б) Ни за једно $k \in \mathbf{R}$.

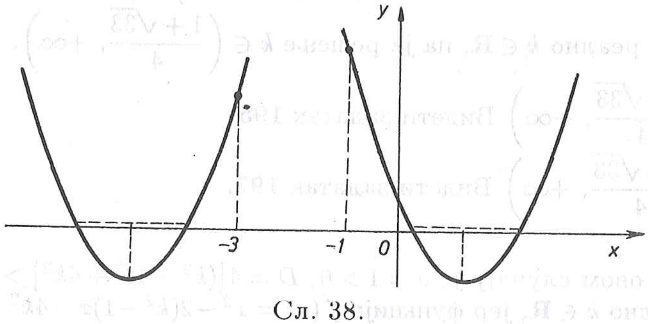
201. *а)* За $m = 0$ је $x = 0$, што није решење. За $m \neq 0$ је $D = (6m^2+1)^2 > 0$ за свако m, па су решења реална и различита. Да би били испуњени услови: $x_1 < 1 < x_2 < 3$, мора да важи: $3m \cdot f(1) < 0$ и $3mf(3) > 0$. Решење је $m \in \left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(\dfrac{1}{9},\ \dfrac{1}{3}\right)$.

б) Слично претходном: $m \in \left(\dfrac{1}{16},\ \dfrac{1}{8}\right)$.

202. *а)* Како је $x^2 - 1 < 0 \iff x \in (-1,\ 1)$, потребно је одредити $k \in \mathbf{R}$ тако да је $x^2 + 2k^2x - 3k^2 < 0$ за свако $x \in (-1,\ 1)$. То је, с обзиром да је $a = 1 > 0$, могуће ако и само ако је $f(-1) \leqslant 0$ и $f(1) \leqslant 0$. Последњи захтеви су еквивалентни са неједначинама:

$1 - 2k^2 - 3k^4 < 0 \iff 3k^4 + 2k^2 - 1 > 0 \iff k \in \left(-\infty,\ -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ +\infty\right)$

и $1 + 2k^2 - 3k^4 < 0 \iff 3k^4 - 2k^2 - 1 > 0 \iff k \in (-\infty,\ -1] \cup [1,\ +\infty)$, што даје решење (заједничко) $k \in (-\infty,\ -1] \cup [1,\ +\infty)$.



Сл. 38.

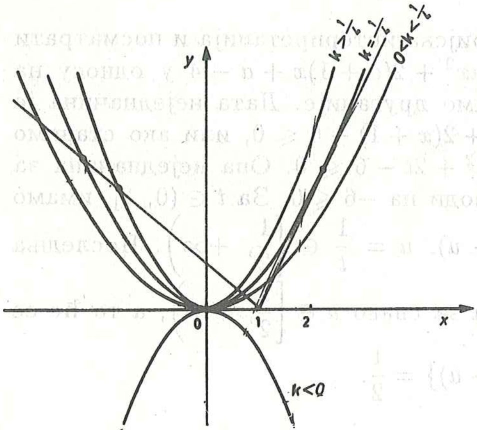
б) Непосредно закључимо да $x^2 + 4x + 3 > 0 \iff (x+1)(x+3) > 0 \iff$ $\iff x \in (-\infty,\ -3) \cup (-1,\ +\infty)$. Зато је потребно одредити m тако да график функције $f(x) = x^2 - m(1+m^2)x + m^4$ има негативне вредности само у области $x \in (-\infty,\ -3) \cup (-1,\ +\infty)$, као на слици 38. Користећи геометријску интерпретацију лако закључујемо да је проблем еквивалентан проблему да су нуле функције f мање од -3, или веће од -1, тј. ако је $D > 0 \wedge f(-3) > 0 \wedge -\dfrac{b}{2a} < -3$, или $D > 0 \wedge f(-1) > 0 \wedge -\dfrac{b}{2a} > -1$. У овом случају је $D = m^2(1+m^2)^2 > 0$ за $m \neq \pm 1$, $f(-3) = (m-3)(m^3+3) > 0 \iff m \in (-\infty,\ -3) \cup (-\sqrt[3]{3},\ +\infty)$, $f(-1) = (m+1)^2(m^2-m+1) > 0$ за $m \neq \pm 1$, $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{m(1+m^2)}{2} < -3 \iff m^3+m+6 < 0 \iff (m^3+3)+(m+3) < 0$, што комбиновано са $f(-3)$ значи да је $m^3+3 < 0 \wedge m+3 < 0$, тј $m < -3$. Даље је $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{m(1+m^2)}{2} > -1 \iff m^3+m+2 > 0 \iff (m^3+1)+(m+1) > 0 \iff$ $\iff (m+1)(m^2-m+2) > 0 \iff m > -1$. Одавде лако закључујемо да су претходно наведени захтеви испуњени за $m \in (-\infty,\ -3) \cup (-1,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$.

203. *а)* Услови су (нацртати одговарајућу слику): $D > 0$, $f(0) > 0$, $f(1) > 0$ $0 < -\dfrac{b}{2a} < 1$. Ови услови су еквивалентни систему $(k+1)^2-16 > 0$, $2 > 0$, $3-k > 0$, $0 < \dfrac{k+1}{2} < 1$, а одавде се лако закључује да такво k не постоји.

б) Поступити слично као у претходном задатку. Такво k не постоји.

204. Слично задатку **187.** Решење је $p \in \left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{4}\right)$.

205. За $k = 0$ имамо неједначину $-|x-1| \leqslant 0$, која је задовољена за свако $x \in \mathbb{R}$. За $k \neq 0$ покушаћемо да задатак решимо посматрајући графике функција $y = kx^2$ и $y = |x-1|$ (видети слику 39.). За $k < 0$ решење је очигледно свако $x \in \mathbb{R}$. Зато је потребно размотрити случај $k > 0$. Дата неједначина је еквивалентна неједначини $kx^2 - x + 1 \leqslant 0$ за $x \geqslant 1$, а неједначини $kx^2 + x + 1 \leqslant 0$ за $x < 1$. Решење једначина $kx^2 - x + 1 = 0$ и $kx^2 + x + 1 = 0$ су редом $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{1-4k}}{2k}$, $x_{3,4} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4k}}{2k}$ и реална су за $1 - 4k \geqslant 0 \iff k \leqslant \dfrac{1}{4}$ у првом, и за $1 + 4k \geqslant 0 \iff k \geqslant -\dfrac{1}{4}$ у другом случају, што је испуњено због претпоставке $k > 0$.



Сл. 39.

На основу претходног и слике 39, закључујемо да су тачке графика

$y = kx^2$ испод (или су једнаке) тачака графика $y = |x-1|$ за исто x у следећим случајевима:

1° $0 < k < \frac{1}{4}$: $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{1+4k}}{2k}, \frac{-1+\sqrt{1+4k}}{2k}\right] \cup \left[\frac{1-\sqrt{1-4k}}{2k}, \frac{1+\sqrt{1-4k}}{2k}\right]$;

2° $k = \frac{1}{4}$: $x \in [-2-2\sqrt{2}, -2+2\sqrt{2}] \cup \{2\}$;

3° $k > \frac{1}{4}$: $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{1+4k}}{2k}, \frac{-1+\sqrt{1+4k}}{2k}\right]$;

4° $k \leqslant 0$: $x \in \mathbf{R}$.

206. Неједначина је дефинисана за $x \neq \pm a$. Дата неједначина се трансформише у неједначину $\dfrac{(x-3a)(x+2a)}{(x-a)(x+a)} > 0$, која се лако решава. Тако, ако је $a = 0$, имамо неједначину $\dfrac{x^2}{x^2} > 0 \iff (1 > 0 \wedge x \neq 0) \iff$ $\iff x \in (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$; за $a < 0$ решење је $x \in (-\infty, 3a) \cup (a, -a) \cup (-2a, +\infty)$, а у случају $a > 0$ решење је $x \in (-\infty, -2a) \cup (-a, a) \cup (3a, +\infty)$.

207. Задатак можемо решавати на сличан начин као задатак **165.** Међутим, тада с обзиром да су корени једначине $ax^2+(1-a^2)x-a=0$ једнаки $x_1 = a$, $x_2 = -\dfrac{1}{a}$, можемо и једноставније. Наиме, ако је $a \geqslant 0$, тада неједначину задовољавају велике вредности x (по апсолутној вредности) па мора бити $a < 0$. Даље, из услова $-2 \leqslant x_1 \leqslant 2$ и $-2 \leqslant x_2 \leqslant 2$ имамо $-2 \leqslant a \leqslant -\dfrac{1}{2}$.

208. Може се применити геометријска интерпретација и посматрати положај графика функције $f(x) = ax^2 + 2(a+1)x + a - 4$ у односу на интервал $[-1, 1]$. Међутим, поступимо другачије. Дата неједначина је еквивалентна неједначини $a(x+1)^2 + 2(x+1) - 6 \leqslant 0$, или ако ставимо $x + 1 = t$, $t \in [0, 2]$, неједначини $at^2 + 2t - 6 \leqslant 0$. Ова неједначина за $t = 0$ испуњена за свако a, јер се своди на $-6 \leqslant 0$. За $t \in (0, 2]$, имамо $a \leqslant \dfrac{2(3-t)}{t^2} = 2\left(\dfrac{3}{t^2} - \dfrac{1}{t}\right) = 2(3u^2 - u)$, $u = \dfrac{1}{t} \in \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$. Последња неједнакост треба да буде испуњена за свако $u \in \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$, а то ће се догодити ако је $a \leqslant \min\limits_{u \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)} \{2(3u^2 - u)\} = \dfrac{1}{2}$.

209. *a)* Једначина је дефинисана са $x \geqslant 1$. После квадрирања обеју страна, добијамо еквивалентну једначину $x^2 - x + 1 = 0$, која нема реалних решења.

б) Једначина је дефинисана са $3x+1 \geqslant 0 \iff x \geqslant -\frac{1}{3}$. Како је лева страна ненегативна, то је неопходно $x \geqslant 2$. Зато, после квадрирања, имамо еквивалентну једначину $3x+1=(x-2)^2$, $x \geqslant 2$, а ова је даље еквивалентна са $x = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{2}$, $x \geqslant 2$, тј. $x = \frac{7+\sqrt{37}}{2}$.
в) Нема решења. *г)* $x_1=-4$, $x_2=3$; *д)* $x=1$; *ђ)* $x=3$.
е) За $3x^2-7x+3 \geqslant 0$ и $1-x \geqslant 0$, једначина је еквивалентна са $(1-x)^2 = 3x^2-7x+3$. Једино решење је $x=\frac{1}{2}$.

210. *а)* $x_1=4$, $x_2=11$.
б) Једначина је дефинисана за $x \geqslant 3$. Квадрирањем обеју страна и сређивањем, добијамо $2\sqrt{(2x+1)(x-3)} = 3(2-x)$. Како је лева страна ненегативна, то је неопходно $2-x \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$, што је супротно претходном услову $x \geqslant 3$.
в) Једначина је дефинисана за $x \geqslant 2$. Низ еквивалентних једначина даје $(\sqrt{x+7}=9-\sqrt{x-2} \wedge x \geqslant 2) \iff (x+7=(9-\sqrt{x-2})^2 \wedge 9-\sqrt{x-2}>0 \wedge x \geqslant 2) \iff$
$\iff \left(\sqrt{x-2}=4 \wedge \sqrt{x-2} \leqslant 9 \wedge x \geqslant 2\right) \iff (x=18 \wedge x \leqslant 85 \wedge x \geqslant 2) \iff$
$\iff x=18$.
г) $x=8$ (видети претходни задатак);
д) $x=20$; *ђ)* нема решења; *е)* $x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

211. *а)* Уведимо смену: $x^2-3x+76=t>0$, итд. Решења су: $x_1=15$, $x_2=-12$.
б) $x=2$. *Упутство:* Једначину писати у еквивалентном облику $\sqrt{x^2+5x+2} = 3+\sqrt{x^2-3x+3}$, а затим квадрирати обе стране.
в), *г)*, *д)*, *ђ)*, *е)* слично задатку *а)*. Дајемо резултате:
в) $x_1=-\frac{1}{2}$, $x_2=2$; *г)* $x_1=0$, $x_2=2$; *д)* $x_1=0$, $x_2=2$;
ђ) $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$; *е)* $x_1=1$, $x_2=-\frac{8}{3}$.
ж) Једначина има смисла за $x \leqslant -3 \wedge x \geqslant 3$. Уводимо смену $x^2=t \geqslant 9$ и после квадрирања, добијамо: $\sqrt{t^2-81}=25+4\sqrt{34}-t$. За $9 \leqslant t \leqslant 25+4\sqrt{34}$ квадрирамо поново и добијамо $t=25$. Дакле $x_{1,2}=\pm 5$.
з) Дату једначину напишимо у облику:
$\sqrt{2(x+2)(x+4)}+\sqrt{x(x+2)}-2(x+2)=0$, односно као:
$\sqrt{x+2}\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{x}-2\sqrt{x+2}\right)=0$, итд. Резултат: $x_1=-2$, $x_2=0$.

212. *а)* $x=4$.
б) Једначина има смисла за $\left(x \geqslant -\frac{7}{2} \wedge x \geqslant \frac{9}{4} \wedge x \geqslant -\frac{1}{3}\right) \iff \left(x \geqslant \frac{9}{4}\right)$. Да бисмо могли квадрирати, удесимо да обе стране једнакости буду пози-

тивне, па из $\sqrt{2x+7} = \sqrt{4x-9} + \sqrt{6x+2}$, после квадрирања, добијамо $7-4x = \sqrt{(4x-9)(6x+2)}$. Десна страна једнакости је ненегативна, па мора бити и $7-4x \geqslant 0$, одакле је $x \leqslant \frac{7}{4}$, што није могуће (због $x \geqslant \frac{9}{4}$). Дакле, једначина нема решења.
в) За $x \geqslant 0$ је $\sqrt{x}+\sqrt{x+9} = \sqrt{x+4}+\sqrt{x+1}$. После квадрирања налазимо да је $x=0$ једино решење.
г) $x = \frac{7}{2}$; *д)* $x = \frac{1}{2}(\sqrt{13}-1)$; *ђ)* $x=5$; *е)* $x=11$.
ж) Све поткорене величине су позитивне, па, после квадрирања, из $\sqrt{2x^2+3x+2}\sqrt{2x^2-3x+2} = \sqrt{7x^2+8}$ добијамо: $2\sqrt{4x^4-x^2+4} = 3x^2+4$. Како су обе стране једнакости позитивне, квадрирамо поново и добијамо: $7x^4-28x^2=0$, одакле је $x^2=0$ или $x^2=4$. Решења једначине су $x_1=0$, $x_2=2$, $x_3=-2$.

213. *а)* Стављајући $\sqrt[12]{x} = t$, $t \geqslant 0$, у дату једначину, добијамо $t^4\left[(t^{21})^2 - 5t^{21} - 6\right] = 0$, а одавде $t=0$ или $t^{21}=1$, или $t^{21}=-6$, одакле, с обзиром на услов $t \geqslant 0$, имамо реална решења $t=0$ или $t=1$. Зато је $x=0$ или $x=1$.
б) Ако уведемо смену $\sqrt{x-2}=t$, $t \geqslant 0$, добићемо једначину $\sqrt{t^2+t-2} - \sqrt{t^2-t-1} = 1$, која даје решење $t=2$, па је $x=6$.
в) Дату једначину напишимо као $\sqrt{(\sqrt{x+2}-2)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+2}-3)^2}=1 \iff$ $\iff |\sqrt{x+2}-2|+|\sqrt{x+2}-3|=1$. Разликоваћемо следеће случајеве:

1° $\sqrt{x+2} \geqslant 3 \iff x \geqslant 7$: једначина има облик $(\sqrt{x+2}-2)+(\sqrt{x+2}-3)=1 \iff \sqrt{x+2}=3 \iff x=7$;

2° $2 \leqslant \sqrt{x+2} < 3 \iff 2 \leqslant x < 7$: једначина постаје $(\sqrt{x+2}-2)-(\sqrt{x+2}-3)=1 \iff 1=1$, па је решење $2 \leqslant x < 7$;

3° $\sqrt{x+2} < 2 \iff -2 \leqslant x < 2$: једначина има облик $-(\sqrt{x+2}-2)-(\sqrt{x+2}-3)=1 \iff \sqrt{x+2}=2 \iff x=2$ што не прихватамо за решење због ограничења $-2 \leqslant x < 2$ (мада смо $x=2$ укључили у случај 2°). Дакле решење дате једначине је свако $2 \leqslant x \leqslant 7$;
г) За $x \geqslant -1$ уводимо смену: $\sqrt{x+1} = t \geqslant 0$ и добијамо: $\sqrt{(t-2)^2} = t-2$, тј. $|t-2| = t-2$. Ово важи за $t \geqslant 2$, па је решење дате једначине $x \geqslant 3$.
д) и *ђ)* решавамо сменом $\sqrt{x-1} = t \geqslant 0$, за $x \geqslant 1$, и даље слично претходном задатку. Решења су:
д) $2 \leqslant x \leqslant 5$; *ђ)* $5 \leqslant x \leqslant 10$.
е) Решење је свако $\frac{5}{2} \leqslant x \leqslant 5$. *Упутство:* Увести смену $\sqrt{10x-25} = t$, $t \geqslant 0$, а затим поступити као у претходним задацима.
ж) За $0 \leqslant x \leqslant 1$, квадрирањем добијамо: $\sqrt{1-x} = 2\sqrt{x}-1$, па поновним квадрирањем добијамо $4\sqrt{x} = 5x$. Одавде је $x=0$ или $x = \frac{16}{25}$. За $x=0$

дата једначина нема смисла, а $x = \dfrac{16}{25}$ је јединствено решење.

з) Увођењем смене $\sqrt{x^2 - 3x + 11} = t$, $t > 0$, долазимо до једначине $4t^2 - t - 33 = 0$, чијим решавањем добијамо $t = 3$, а затим $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

и) Једначина је дефинисана за $x(x-2) \geqslant 0 \iff x \in (-\infty,\ 0] \cup [2,\ +\infty)$. Имајући у виду да је $a\sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$ за $a \geqslant 0$ и $a\sqrt{b} = -\sqrt{a^2 b}$ за $a \leqslant 0$, дата једначина ће имати облик $(x^2-2x)^3 + \sqrt{(x^2-2x)^3} = 2$ за $x \in [2,\ +\infty)$, а облик $(x^2-2x)^3 - \sqrt{(x^2-2x)^3} = 2$ за $x \in (-\infty,\ 0]$. Даље је потребно увести смену $\sqrt{(x^2-2x)^3} = t$, $t \geqslant 0$ и проблем свести на квадратну једначину. Решења су: $x_1 = 1 + \sqrt{2}$, $x_2 = 1 - \sqrt{1 + \sqrt[3]{4}}$.

ј) Једначина је дефинисана за $x \geqslant -5$. Непосредно проверавамо да $x = -5$ није решење дате једначине, па посматрајмо само $x > -5$. Деобом дате једначине са $x + 5$, добијамо једначину $4\left(\dfrac{x}{\sqrt{x+5}}\right)^2 + 5\dfrac{x}{\sqrt{x+5}} - 44 = 0$.

Ако уведемо смену $\dfrac{x}{\sqrt{x+5}} = t$, добићемо једначину

$4t^2 + 5t - 44 = 0 \iff t = -4 \vee t = \dfrac{11}{4}$, Решавањем једначина

$\dfrac{x}{\sqrt{x+5}} = -4$ и $\dfrac{x}{\sqrt{x+5}} = \dfrac{11}{4}$, доћиђемо до решења $x_1 = -4$ и $x_2 = 11$.

к) Дата једначина је дефинисана за $x \geqslant -1$. Како $x = -1$ није решење, то ако једначину пишемо у облику $2\big[(x^2-x+1)+(x+1)\big] = 5\sqrt{(x+1)(x^2-x+1)}$.

Поделимо једначину са $x+1$ и добићемо $2\dfrac{x^2-x+1}{x+1} - 5\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}} + 2 = 0$.

Сменом $\sqrt{\dfrac{x^2-x+1}{x+1}} = t$, долазимо до квадратне једначине, итд. Решења су $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{37}}{2}$.

л) Квадрирајући три пута, за $x \leqslant 15$, добијамо на крају једначину: $x^2 + 31x - 222 = 0$, чија су решења $x_1 = 6$ и $x_2 = -37$.

214. *а)* Уведимо смену $\sqrt[3]{x+1} = t$, па је $t^2 + t = 0$, итд. Решења су $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$.

б) Први начин. Ако кубирамо обе стране дате једначине и имамо у виду да је $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$, добићемо

$(2+x) + (2-x) + 3\sqrt[3]{(2+x)(2-x)}\ \left(\sqrt[3]{2+x} + \sqrt[3]{2-x}\right) = 1$.

Ако израз у последњој загради претходне једначине заменимо са 1, добићемо једначину $4+3\sqrt[3]{4-x^2} = 1$, одакле лако добијамо $x = \pm\sqrt{5}$. Проверимо да је, рецимо, $x = \sqrt{5}$ решење дате једначине. Заиста, имамо

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{5}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{5}} = \sqrt[3]{\frac{16-8\sqrt{5}}{8}} + \sqrt[3]{\frac{16+8\sqrt{5}}{8}} = \frac{\sqrt[3]{(1+\sqrt{5})^3}}{2} + \frac{\sqrt[3]{(1-\sqrt{5})^3}}{2} =$$

$= \dfrac{(1+\sqrt{5})^3}{2} + \dfrac{(1-\sqrt{5})^3}{2} = 1.$

Други начин. Ставимо $\sqrt[3]{2+x} = u$, $\sqrt[3]{2-x} = v$. Тада имамо систем $\begin{cases} u+v=1 \\ u^3+v^3=4 \end{cases}$. Другу од ових једначина можемо писати у облику $(u+v)\left[(u+v)^2-3uv\right]=4$, или, ако узмемо у обзир прву једначину $u+v=1$, добићемо $1-3uv=4 \iff uv=-1$. Дакле u и v су решења једначине $t^2-t-1=0 \iff t_{1,2}=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$. Враћајући се на првобитну непознату x, лако добијамо $x=\pm\sqrt{5}$.

в) Ако поступимо као у случају *б)*, добићемо $x=2$, што није решење.

г) $x=2$;

д) Користећи први начин приказан у задатку *б)*, добијамо решења $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 1$ $x_{4,5}=\sqrt{1+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$.

ђ) Увођењем смене $\sqrt[3]{\dfrac{12-2x}{x-1}}=t$, долазимо до решења $t_1=2$, $t_2=\dfrac{1}{2}$, а затим $x_1=2$ и $x_2=\dfrac{97}{17}$.

е) Слично претходном задатку: $\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{5x+2}}=t$, итд. Решења су $x_1=5$, $x_2=-\dfrac{30}{127}$.

ж) Слично задатку *б)*. Резултат: $x=\dfrac{28}{27}$.

з) Степеновањем на куб једначине $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}=-\sqrt[3]{x+3}$, добијамо: $\sqrt[3]{(x+1)(x+2)}\left(\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x+2}\right)=-x-2$, па заменом израза у загради са $-\sqrt[3]{x+3}$, добијамо $\sqrt[3]{(x+1)(x+2)(x+3)}=x+2$. Одавде је $(x+1)(x+2)(x+3)=(x+2)^3$. Једино решење је $x=-2$.

и) Слично претходном задатку, добијамо биквадратну једначину $26x^4+571x^2-2700=0$, са решењима: $x^2=4$, $x^2=-\dfrac{625}{26}$. Решења дате једначине су $x_1=2$, $x_2=-2$.

ј) Како је $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{7+x}\neq 0$ за свако реално x (што се може проверити претпостављајући да је $\sqrt[3]{2-x}+\sqrt[3]{7+x}=0$), то се множењем обеју страна дате једначине овим изразом добијају решења $x_1=6$, $x_2=1$.

к) Дата једначина је дефинисана за $(x-2)(x-3)\geqslant 0$ одакле је: $x\in(-\infty,\ 2]\cup[3,\ +\infty)$. Међутим, за $x\leqslant 2$ лева страна једначине је негативна, а десна ненегативна, па мора бити $x\geqslant 3$. Делећи обе стране једначине са $\sqrt[3]{x-2}=\sqrt[6]{(x-2)^2}$ (због $x\geqslant 3$), долазимо до једначине $6\sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x-2}}-5\sqrt[6]{\dfrac{x-3}{x-2}}+1=0$, тј. квадратне једначине по $\sqrt[6]{\dfrac{x-3}{x-2}}$. Лако добијамо решења $x_1=\dfrac{22}{7}$, $x_2=\dfrac{79}{26}$.

л) Увести смену $\sqrt[3]{x^3+x-2}=t$. Решење је $x=2$.
љ) Једначина је дефинисана за $x\in(0,\,1)\cup(1,\,+\infty)$. За такве вредности x, једначина се трансформише у једначину $x-\sqrt[3]{x^2}-6\sqrt{x}=0 \iff$ $\iff t^3(t^3-3t-6)=0 \iff t^3(t-2)(t^2+2t+3)=0$. чија су реална решења $t_1=0$, $t_2=2$. За $t=0$ имамо $x=0$, што, према претходном, одбацујемо, док за $t=2$, добијамо $x=2^6=64$.
м) Нека је $\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{x-1}}=t$. Добијамо једначину: $(3-x)t^2-2t+(x-1)=0$. Њена решења су $t_1=1$ и $t_2=\dfrac{x-1}{3-x}$. Решења дате једначине добијамо из $\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{x-1}}=1$ и $\sqrt[3]{\dfrac{3-x}{x-1}}=\dfrac{x-1}{3-x}$. Обе ове везе дају исто решење: $x=2$.

215. Једначина је дефинисана за $x\geqslant 8$. Ставимо $\sqrt[4]{x+8}+\sqrt[4]{x-8}=t$. Тада из система $\sqrt[4]{x+8}-\sqrt[4]{x-8}=2$, $\sqrt[4]{x+8}+\sqrt[4]{x-8}=t$ непосредно добијамо (сабирањем и одузимањем): $2\sqrt[4]{x+8}=t+2$ и $2\sqrt[4]{x-8}=t-2$. Степеновањем обеју страна ових једнакости са 4, добијамо редом $16(x+8)=t^4+8t^3+24t^2+32t+16$ и $16(x-8)=t^4-8t^3+24t^2-32t+16$, а одавде елиминацијом x (тј. одузимањем), добијамо једначину по t: $t^3+4t-16=0 \iff (t^3-8)+4(t-2)=0 \iff (t-2)(t^2+2t+8)=0$. Реално решење последње једначине је $t=2$, па се заменом, рецимо у једначини $2\sqrt[4]{x-8}=t-2$, добија $x=8$. Лако се проверава да је ово заиста и решење полазне једначине.
б) Понављањем поступка као у случају *а)*, добијамо $x=2$.
в) Дата једначина је дефинисана за $18+5x\geqslant 0$ и $64-5x\geqslant 0$, што даје $-\dfrac{18}{5}\leqslant x\leqslant\dfrac{64}{5}$. Ако уведемо смену $\sqrt[4]{18+5x}=u$, $\sqrt[4]{64-5x}=v$ $(u,\ v\geqslant 0)$, тада долазимо до система $u+v=4$, $u^4+v^4=82$. Другу од ових једначина пишимо у облику $\left[(u+v)^2-2uv\right]^2-2(uv)^2=82$, одакле, с обзиром на прву једначину $(u+v=4)$, добијамо
$(16-2uv)^2-2(uv)^2=82 \iff (uv)^2-32(uv)+87=0 \iff uv=3\vee uv=29$.
Сада имамо системе $u+v=4\wedge uv=3$ или $u+v=4\wedge uv=29$. Први има решења $u_1=1$, $v_1=3$, или $u_2=3$, $v_2=1$. Враћајући се на почетну смену, добијамо да је $x_1=-\dfrac{17}{5}$, $x_2=\dfrac{63}{5}$. Други систем нема реалних решења.
г) $x_1=4$, $x_2=548$ (видети претходни задатак);
д) $x_1=3$, $x_2=178$; *ђ)* $x_1=11$, $x_2=186$;
е) Једначина је дефинисана за $|x|\geqslant 1$. Како $x=\pm 1$ нису решења дате једначине, то се дељењем једначине са $\sqrt[4]{x^2-1}\neq 0$, добија једначина $\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}-\sqrt[4]{\dfrac{x+1}{x-1}}=\dfrac{3}{2}$. Увођењем смене $\sqrt[4]{\dfrac{x-1}{x+1}}=t$, добијамо квадратну једначину, итд. Решење је $x=-\dfrac{17}{15}$.
ж) Слично задатку *в)*, добијамо $x_1=2$, $x_2=3$.

з) Стављајући $u=\sqrt[3]{x+2}$, $v=\sqrt{x-2}$, добијамо $u=v$, $u^3-v^2=4$, $v\geqslant 0$, $x\geqslant 2$. Заменом v добијамо $u^3-u^2\,4=0$, одакле је $u=2$, па је $x=6$.

и) $x_{1,2}=\dfrac{(1\pm\sqrt{5})^m-2^m}{(1\pm\sqrt{5})^m+2^m}$. Видети случај *е)*.

ј) Ако је n паран број, тада мора бити $x>0$ и $a+x>0$. У противном, нема ограничења за x. Извуцимо $\sqrt[n]{a+x}$ пред заграду. Добијамо $\sqrt[n]{a+x}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\sqrt[n]{x}}{b}$, а одавде је $\sqrt[n]{\left(\dfrac{a+x}{x}\right)^{n+1}}=\dfrac{a}{b}$. Лева страна је позитивна и мора бити $\dfrac{a}{b}>0$. Даље: $\dfrac{a}{x}+1=\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{n+1}{n}}$ и $a=x\left(\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{n+1}{n}}-1\right)$. Ако је израз у великој загради различит од нуле, тј. $a\neq b$, тада налазимо: $\dfrac{a}{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}}$. Да би x и $a+x=x\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{n}{n+1}}$ били позитивни, мора бити $a>0$ и $\dfrac{a}{b}>1$ или $a<0$ и $\dfrac{a}{b}<1$. У првом случају је $a>b>0$, а у другом $0>a>b$. Ако је n непаран број, знак за a и b није ограничен (само је $a\neq b$), а у том случају имамо два решења: $\pm\sqrt[n+1]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^n}$

216. Квадрирањем обеју страна једначине, добијамо $x^2+\dfrac{1}{x^2}-2+$ $+2\sqrt{(x^2+x)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=0 \iff \left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2\sqrt{(x^2+x)\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}=0$. С обзиром на негативност оба сабирка, последња једначина може бити здаовољена само ако су оба сабирка једнака истовремено нули, а то се постиже само за $x=-1$. Замењујући ову вредност у полазну једначину уверавамо се да је $x=-1$ заиста решење једначине.

б) Једначина је дефинисана за $x\geqslant 1$. Даље имамо да је једначина еквивалентна са $\left(\left(x-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}\right)^2=\left(\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}\right)^2\wedge x\geqslant 1\right)\iff$

$$\iff\left(x^2-x+1=2x\sqrt{1-\frac{1}{x}}\wedge x\geqslant 1\right)\iff\left((x^2-x+1)^2=4x^2-4x\wedge x\geqslant 1\right)\iff$$

$$\iff\left((x^2-x-1)^2=0\wedge x\geqslant 1\right)\iff\left(x^2-x-1=0\wedge x\geqslant 1\right)\iff x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

в) Једначина $\sqrt{4x-y^2}=\sqrt{y+2}+\sqrt{4x+y^2}$ је последица полазне једначине. Квадрирањем обеју страна и мањим трансформацијама долазимо до нове последице: $(2x-1)^2+(y+1)^2+2\sqrt{y+2}\sqrt{4x^2+y}=0$, што је могуће само за $x=\dfrac{1}{2}$ и $y=-1$. Да је ово и заиста решење полазне једначине, непосредно можемо проверити.

г) Ставимо $x^2 = t > 0$ и добијамо једначину $\sqrt{12-\dfrac{12}{t}} = t - \sqrt{t-\dfrac{12}{t}}$.

Квадрирањем ове једначине добијамо: $t^2 - 12 - 2t\sqrt{t-\dfrac{12}{t}} + t = 0$. Поделимо са t, па имамо: $t - \dfrac{12}{t} - 2\sqrt{t-\dfrac{12}{t}} + 1 = 0$, односно $\left(\sqrt{t-\dfrac{12}{t}} - 1\right)^2 = 0$.

Одавде је $t - \dfrac{12}{t} = 1$, па је $t_1 = 4$ и $t_2 = -3$. Провером у горњој неједначини уверавамо се да $t = -3$ није решење, па из $t = 4$, добијамо $x_1 = 2$, $x_2 = -2$.

д) Једначина има смисла са $x < 1$ и $x \neq 0$. Сређивањем леве стране добијамо: $\dfrac{2\sqrt{1-x}}{x} = \dfrac{\sqrt{3}}{x}$, па из $2\sqrt{1-x} = \sqrt{3}$, добијамо решење $x = \dfrac{1}{4}$.

ђ) Слично претходном задатку, добијамо $4x^2 - 2 = 34$, одакле је $x_1 = 3$, $x - 2 = -3$.

е) За $x \geqslant 4$, ослободимо се разломка. Слично зад. **211.** *е)*. Решење: $x = 5$.

ж) Како је $x \neq 0$, можемо поделити једначину са $\sqrt[4]{x}$ и добићемо: $\sqrt{\sqrt{x}+1} - \sqrt{\sqrt{x}-1} = \dfrac{3}{2\sqrt{\sqrt{x}+1}}$. Затим уведимо смену $\sqrt{x}+1 = t$, итд.

Решење је $x = \dfrac{25}{16}$.

217. Једначину пишемо у еквивалентном облику

$$\sqrt[4]{3}\sqrt{(\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt[4]{3}\sqrt{x} - \sqrt[4]{3}\sqrt{y} \iff \sqrt[3]{3} - 1 = \sqrt{x} - \sqrt{y} \iff$$
$$\iff (\sqrt{3}-1)^2 = (\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 \land x \geqslant y \geqslant 0) \iff (4 - 2\sqrt{3} = x + y - 2\sqrt{xy} \land$$
$$\land x \geqslant y \geqslant 0) \iff 2\sqrt{xy} = (x+y-4) + 2\sqrt{3} \land x \geqslant y \geqslant 0 \iff$$
$$\iff 4xy = (x+y-4)^2 + 4\sqrt{3}(x+y-4) + 12 \land x \geqslant y \geqslant 0.$$

Ако би било $x + y - 4 \neq 0$, тада би се број $\sqrt{3}$ изразио у рационалном облику, што је немогуће. Дакле, $x + y - 4 = 0$. Сада је из последње једначине, $xy = 3$, па се решавањем по x и y добија (због $x \geqslant y \geqslant 0$) $x = 3$, $y = 1$. Непосредно се уверавамо (користећи еквивалентну једначину $\sqrt{3} - 1 = \sqrt{x} - \sqrt{y}$). да је ово заиста тражено решење.

218. Лако закључујемо да је дата једначин дефинисана за $1 \leqslant x$, $y \leqslant 5$ (јер је x, $y \in \mathbb{Z}$). Даље, једначина је еквивалентна једначини $\sqrt{5x-1} + \sqrt{5y-1} = 5 \iff \sqrt{5x-1} = 5 - \sqrt{5y-1}$. Квадрирањем обеју страна последње једначине, добијамо њену последицу: $2\sqrt{5y-1} = y - x + 5$. Одсавде следи да $5y-1$ мора бити квадрат целог броја, а то је с обзиром да је $y \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$, могуће само за $y = 1$ или $y = 2$. Одговарајуће вредности за x су тада $x = 2$ или $x = 1$. Да су ово заиста решења, непосредно проверавамо заменом у полазној једначини.

219. *а)* Полазна једначина је дефинисана за $x - 4a + 16 \geqslant 0$, $x - 2a + 4 \geqslant 0$, $x \geqslant 0$. Ако једначину пишемо у облику $\sqrt{x-4a+16} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x-2a+4}$, а затим квадрирањем обе стране, добићемо једначину $\sqrt{x(x-4a+16)} = x-2a$. Ако је уз напред наведене услове и $x-2a \geqslant 0$, квадрирамо обе стране последње једначине, добићемо $x = \frac{a^2}{4}$. Треба одредити $a \in \mathbf{R}$ тако да решење задовољава све претходно наведене услове. Како су неједнакости $\frac{a^2}{4}-4a+16 \geqslant 0 \iff (a-8)^2 \geqslant 0$, $\frac{a^2}{4}-2a+4 \geqslant 0 \iff (a-4)^2 \geqslant 0$, $\frac{a^2}{4} \geqslant 0$, задовољене за свако реално a, и како је $\frac{a^2}{4}-2a \geqslant 0 \iff a(a-8) \geqslant 0 \iff a \in (-\infty,\ 0] \cup [8,\ +\infty)$, то закључујемо да је решење $x = \frac{a^2}{4}$ за $a \in (-\infty,\ 0] \cup [8,\ +\infty)$.

б) Једначина има смисла за $x^2 \geqslant 4$. Ставимо: $\sqrt{x^2-4} = y \geqslant 0$, па ћемо добити систем $x+y = a \wedge x^2-y^2 = 4$, одакле је $x+y = a \wedge x-y = \frac{4}{a}$, односно $x = \frac{a}{2}+\frac{2}{a}$ и $y = \frac{a}{2}-\frac{2}{a}$. На основу познате неједнакости нађено x задовољава услов $x \geqslant 2$, па је $x^2 \geqslant 4$. Услов за a ћемо добити из $y \geqslant 0$, тј. из $\frac{a}{2}-\frac{2}{a} \geqslant 0$. Ово важи за $-2 \leqslant a \leqslant 0$ или $a \geqslant 2$.

в) Једначина је дефинисана за $ax+1 \geqslant 0$, $x-1 \geqslant 1$, $(a-1)x \geqslant 0$. Закључујемо да је $x \geqslant 1$, $a \geqslant 1$. Ако једначину пишемо у облику $\sqrt{ax+1} = \sqrt{x-1}+\sqrt{(a+1)x}$, а затим квадрирамо обе стране, добићемо еквивалентну једначину $\sqrt{(x-1)(a-1)x} = 1$ $(x \geqslant 1,\ a \geqslant 1)$. Поновним квадрирањем имамо једначину $(a-1)x^2-(a-1)x-1 = 0$. За $a = 1$ следи $-1 = 0$, што је апсурд, док за $a > 1$, имамо увек реална решења
$x_{1,2} = \frac{a-1 \pm \sqrt{(a-1)^2+4(a-1)}}{2(a-1)} = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+3}{a-1}}$. Због захтева $x \geqslant 1$, имамо, коначно, решење једначине $x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a+3}{a-1}}$, $a > 1$.

г) Стављајући $y = x^3$, добићемо једначину: $\sqrt{y}+\sqrt{y-2} = b$, у којој је $b > 0$ и $y \geqslant 2$. Даље имамо: $\sqrt{y-2} = b-\sqrt{y}$, па је $\sqrt{y} = \frac{b^2+2}{2b}$. Решење полазне једначине је $x = \sqrt[3]{\left(\frac{b^2+2}{2b}\right)^2}$, за $b \geqslant \sqrt{2}$. За $b < \sqrt{2}$ нема решења.

д) $x = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{a}\sqrt[4]{4-a^2}}$, $\sqrt{2} \leqslant a < 2$;

ђ) За $ab \neq 0$ и $a \neq \pm b$ решење је $x = 0$, док је за $ab \neq 0$ и $a = \pm b$ решење свако реално x.

е) Слично задатку **214.** *б)*. Решења су $x_{1,2} = \pm a$.

ж) $x = 0$ за свако $a \in \mathbf{R}$. Видети поступак дат у задатку **214.** *j)*.

з) Дата је једначина дефинисана за $x \geqslant \frac{a}{2}$, $x \geqslant b$. Уз такве услове, после квадрирања обеју страна добијамо квадратну једначину $x^2-2(b+1)x+$

$a+b^2=0$. Њена решења су $x_1=b+1-\sqrt{2b-a+1}$, $x_2=b+1+\sqrt{2b-a+1}$ и реална су за $2b-a+1\geqslant 0 \iff \frac{a}{2}\leqslant b+\frac{1}{2}$. Да бисмо лакше испитали положај корена x_1 и x_2 у односу на првобитно постављене услове $\left(x\geqslant\frac{a}{2},\ x\geqslant b\right)$, ставимо $f(x)=x^2-2(b+1)x+a+b^2$. Лако се добија да је прва координата темена параболе $b+1$, као и $f\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{(a-2b)^2}{4}\geqslant 0$, $f(b)=a-2b$. Сада имамо (видети и одељак о положају корена квадратне једначине у односу на дате бројеве):

1° Ако је $\frac{a}{2}<b$, тада је $f(b)<0$, па важи $\frac{a}{2}<x_1<b<x_2$, па је решење само x_2;

2° $b\leqslant\frac{a}{2}<b+\frac{1}{2}$, даје $f(b)\geqslant 0$, па пошто је $b\leqslant\frac{a}{2}<b+\frac{1}{2}<b+1$ то је $b\leqslant\frac{a}{2}\leqslant x_1<x_2$, па су решења оба корена x_1 и x_2;

3° Ако је $\frac{a}{2}=b+\frac{1}{2}$, тада је $b<\frac{a}{2}<x_1=x_2=b+1$, па је $x=b+1$ решење.

Наравно за $\frac{a}{2}>b+\frac{1}{2}$ једначина нема реалних решења.

и) За $a=2$ решење је свако $x\in[1,\ 2)$, а за $a\geqslant 2$ решење је $x=1+\frac{a^2}{4}$. За $a<2$ нема решења.

ј) $x_1=0$ за $a=0$, $x_2=\frac{-1+\sqrt{4a-3}}{2}$ $(a\geqslant 1)$.

220. *а)* За леву страну дате једначине важи: $\sqrt{3(x+1)^2+4}+$ $+\sqrt{5(x+1)^2+9}\geqslant 5$, а за десну: $1-2x-x^2=5-(x+1)^2\leqslant 5$, па је једнакост могућа само ако су обе стране једнаке 5, тј. за $x=-1$.

б) Како су корени у једначини, који не садрже y, дефинисани за $|x|\leqslant 2$, $1+4x\geqslant 0$ и $|x|\geqslant 2$, то закључујемо да је једина могућност $x=2$. Замењујући такву вредност у дату једначину, добијамо једначину $3+\sqrt{3+y^2-2y}=5-y$, одакле се лако добија решење $y=\frac{1}{2}$. Дакле, решење дате једначине је $x=2$, $y=\frac{1}{2}$.

221. *а)* $x>5$; *б)* $|x|<7$; *в)* $x\in\left(-\infty,\ \frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right)\cup\left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2},\ +\infty\right)$;

г) Због дефинисаности квадратног корена неопходно је $x^2-x-1\geqslant 0 \iff$ $\iff x\in\left(-\infty,\ \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right]\cup\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ +\infty\right)$. За такве x неједначина је еквивалентна са $x^2-x-1<1 \iff x^2-x-2<0 \iff (x+1)(x-2)<0 \iff$ $\iff x\in(-1,\ 2)$. Тражена решења су пресек скупа $(-1,\ 2)$ и области дефинисаности, а то је $x \in \left(-1, \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, 2\right)$.

д) $x \in (-\infty, -1) \cup \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$; *ђ)* $x \in (-\infty, -3) \cup [1, +\infty)$; *е)* $|x| \geqslant 7$.

ж) Неједначина има смисла за $x \leqslant 3$. Уз овај услов неједнакост је задовољена за свако x, за које је $x-2<0$, а то је за $x \leqslant 2$. Ако је $x>2$, неједначина је еквивалентна са $3-x>(x-2)^2$, што важи за x из интервала $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$. Дакле, решење полазне неједначине је $x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

222. *а)* Неједначина је дефинисана за $8-x \geqslant 0$ и $x \geqslant 3$, тј. за $3 \leqslant x \leqslant 8$. Квадрирањем обеју страна добијамо еквивалентне неједначине $\left(\sqrt{(8-x)(x-3)}>2 \wedge 3 \leqslant x \leqslant 8\right) \iff ((8-x)(x-3)>3 \wedge 3 \leqslant x \leqslant 8) \iff$
$\iff (x^2-11x+28<0 \wedge 3 \leqslant x \leqslant 8) \iff (4<x<7 \wedge 3 \leqslant x \leqslant 8) \iff 4<x<7$.

б) $x \in \left[-\dfrac{3}{2}, \dfrac{4-\sqrt{34}}{3}\right) \cup \left(\dfrac{4+\sqrt{34}}{3}, +\infty\right)$;

в) Неједначина је дефинисана за

$3x^2-2x-1 \geqslant 0 \iff x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right] \cup [1, +\infty)$. Ако је $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right]$, тада је лева страна неједначине ненегативна, а десна негативна, па је решење свако $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right]$. Ако је $x \in [1, +\infty)$, тада се квадрирањем и сређивањем добија неједначина $x^2-5x+6 \leqslant 0$, која је задовољена за свако $x \in [2, 3]$. Дакле, решење је $x \in \left(-\infty, -\dfrac{1}{3}\right] \cup [2, 3]$.

г) $x \in \left(\dfrac{74}{13}, +\infty\right)$; *д)* $x \in \left(\dfrac{-5+\sqrt{13}}{2}, 1\right]$.

ђ) Неједначина је дефинисана за $x+3 \geqslant 0$ и $9-x \geqslant 0$, тј за $-3 \leqslant x \leqslant 9$, $x=0$ је решење јер неједначина постаје $2\sqrt{3}>\sqrt{3}$. За $-3 \leqslant x<0$ имамо да је $\sqrt[4]{9-x}<\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}$, док за $0<x \leqslant 9$ важи $\sqrt{x+3}>\sqrt{3}$, па је тим пре у оба случаја $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}>\sqrt[4]{3}$. Дакле, решење је свако $x \in [-3, 9]$.

е) Неједначина има смисла за $(x \leqslant 1 \wedge x \geqslant 2) \wedge x \geqslant \dfrac{1}{2}$, тј. за

$x \in \left[\dfrac{1}{2}, 1\right] \cup [2, +\infty)$. Квадрирањем добијамо $(2x-1)^2>x^2-3x+2$, односно

$3x^2-x-1>0$. Ово је испуњено за $x<\dfrac{1-\sqrt{13}}{6}$ или $x>\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}$. Дакле, решење дате неједначине је $\dfrac{1+\sqrt{13}}{6}<x \leqslant 1$, $x \geqslant 2$.

ж) Слично задатку **221.** *ж)*. Решење је $x \in (-1, 3]$.

з) За $x \in \left[\dfrac{1}{3}, 7\right]$ квадрирамо неједначину $\sqrt{3x-1} \leqslant 2+\sqrt{7-x}$ и добијамо $x-3 \leqslant \sqrt{7-x}$. Последња неједнакост важи за свако $x \leqslant 3$, јер је тад лева страна негативна. За $x > 3$ квадрирамо и добијамо $x^2 - 5x + 2 \leqslant 0$, итд. Решење је $x \in \left[\frac{1}{3},\ \frac{5+\sqrt{17}}{2}\right]$.

и) Слично претходном задатку. Решење је $x \in \left[-6,\ \frac{-5-\sqrt{85}}{8}\right]$.

j) Неједначина има смисла ако је $x \geqslant -1$, $x \geqslant 2$ и $x \leqslant 2$, тј. само за $x = 2$. Провером утврдимо да је $x = 2$ решење.

к) Неједначина има смисла за $x \in [-2,\ 2]$, итд. Решење је $x \in \left(\frac{\sqrt{13}-3}{2},\ 2\right]$.

л) Неједначина има смисла за $x \leqslant -1$ или $x \geqslant -\frac{2}{3}$. Уведемо смену $3x^2 + 5x + 2 = t$, итд. Решење је $x \in (-2,\ -1] \cup \left[-\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right)$.

223. *а)* Нема решења.

б) Неједначина је дефинисана за $8 + x \geqslant 0 \iff x \geqslant -8$. Ако је $-8 \leqslant x < 7$, тада је лева страна неједначине ненегативна, а десна негативна, па је свако такво x решење неједначине. За $x \geqslant 7$, урадимо следеће трансформације: $\left(\frac{x-1}{3+\sqrt{8+x}} \cdot \frac{3-\sqrt{8+x}}{3-\sqrt{8+x}}\right)^2 > x - 7 \iff \left(\sqrt{8+x} - 3\right)^2 > x - 7 \iff$ $\iff \sqrt{8+x} < 4 \iff x < 8$, па је решење $7 \leqslant x < 8$. Дакле решење неједначине је свако $-8 \leqslant x < 8$.

в) За $2 - x \geqslant 0$ и $x \neq 1$, тј. за $1 \neq x \leqslant 2$, дату неједначину трансформишемо у еквивалентни облик $x + 1 + 2x\sqrt{2-x} \geqslant -(x-1)^2$, а одавде $x^2 - x + 2 + 2x\sqrt{2-x} \geqslant 0 \iff x^2 + 2x\sqrt{2-x} + (\sqrt{2-x})^2 \geqslant 0 \iff$ $\iff (x + \sqrt{2-x})^2 \geqslant 0$. Значи, решење је свако $x \in (-\infty,\ 1) \cup (1,\ 2]$.

г) Неједначину пишемо у облику $\sqrt{x^2 - x + 1} < 2(x^2 - x + 1) - 1$. Сменом $\sqrt{x^2 - x + 1} = t$, $t > 0$ (јер за свако реално x је $x^2 - x + 1 > 0$), добијамо неједначину $(t < 2t^2 - 1 \wedge t > 1) \iff (2t^2 - t - 1 > 0 \wedge t > 1) \iff t > 1 \iff$ $\iff \sqrt{x^2 - x + 1} > 1 \iff x^2 - x > 0 \iff x(x-1) > 0 \iff x \in (-\infty,\ 0) \cup (1,\ +\infty)$.

д) Неједначина има смисла за $x \leqslant -\sqrt[4]{2}$ и $x \geqslant -\sqrt[4]{2}$. За $x \geqslant -\sqrt[4]{2}$ неједначина прелази у $\sqrt{2 - x^4} < x$, за за $x \leqslant -\sqrt[4]{2}$ имамо $\sqrt{2 - x^4} > x$, итд. Решења су $-\sqrt[4]{2} < x < 0$, $1 < x < \sqrt[4]{2}$.

ђ) Десна страна неједнакости је позитивна па је $x > 2$. После квадрирања, добијамо: $4x^2 - x + 4 < 0$, а ово нема решења. Дакле, полазна неједначина нема решења.

е) $x \in [-2,\ +\infty)$.

ж) Неједначина има смисла за $x \neq 0$. За $x > 0$, она је еквивалентна са $\sqrt{2 - x + 4x^2} - 3 \geqslant 2x$, а за $x < 0$ је $\sqrt{2 - x + 4x^2} - 3 \leqslant 2x$, итд. Решења су: $x \in \left(-\infty,\ -\frac{7}{13}\right] \cup [0,\ +\infty)$.

з) Мора бити $x > 0$. Тада можемо квадрирати неједначину: $\sqrt{x} > 1-$

$-\sqrt[3]{1-x}$, па имамо: $x > \left(1-\sqrt[3]{1-x}\right)^2$. Ставимо $\sqrt[3]{1-x} = y$, итд. Решења су $0 < x < 1 \vee x > 9$.

и) За $x \geqslant 1$ је $2 - x > \left(1-\sqrt{x-1}\right)^3$. Ставимо $\sqrt{x-1} = t$, итд. Решење је $x \in (1,\ 2) \cup (10, +\infty)$.

224. *а)* Неједначина је дефинисана за $x \geqslant 0$, $a + \sqrt{x} \geqslant 0$ и $a - \sqrt{x} \geqslant 0$. Из трећег услова закључујемо да је $a \geqslant 0$ и $x \leqslant a^2$. Дакле, услови су $0 \leqslant x \leqslant a^2$, $a \geqslant 0$. Уз такве услове, после квадрирања обеју страна дате неједначине, добијамо еквивалентну неједначину $\sqrt{a^2 - x} < 1 - a$. Одавде имамо и да је $1 - a > 0 \iff a < 1$. Поновним квадрирањем (уз све претходне услове), добијамо $x > 2a - 1$. Спроведимо следећу дискусију:

1° $(0 \leqslant a < 1 \wedge 2a - 1 \geqslant 0) \iff \dfrac{1}{2} \leqslant a < 1$: с обзиром да је увек $2a - 1 \leqslant a^2$ и имајући у виду претходно изложено, имамо да је решење свако x које задовољава услов $2a - 1 < x \leqslant a^2$.

2° $(0 \leqslant a < 1 \wedge 2a - 1 < 0) \iff 0 \leqslant a < \dfrac{1}{2}$: решење је свако x за које је $0 \leqslant x \leqslant a^2$.

б) $1 - \sqrt{a} < x < 1 + 2\sqrt{a}$ за $0 < a \leqslant 1$ и $-a \leqslant x < 1 + 2\sqrt{a}$ за $a > 1$.

в) $x \geqslant b^2$ за $b < 0$; $x > 0$ за $b = 0$; $x > \dfrac{25b^2}{16}$ за $b > 0$.

г) Неједначина има смисла за $-|a| \leqslant x \leqslant |a|$. За $0 \leqslant x \leqslant |a| \neq 0$ неједначина је задовољена. За негативно x квадрирамо и добијамо $5x^2 < a^2$, итд. Решење је $-\dfrac{|a|}{\sqrt{5}} < x \leqslant |a|$, $a \neq 0$.

225. Користимо формулу: $\varphi^\circ = \dfrac{\pi \cdot \varphi}{180}$.

а) $\dfrac{\pi}{2}$; *б)* $\dfrac{\pi}{12}$; *в)* $\dfrac{3\pi}{2}$; *г)* $\dfrac{\pi}{6}$; *д)* $\dfrac{\pi}{4}$; *ђ)* $\dfrac{5\pi}{3}$; *е)* $\dfrac{5\pi}{36}$; *ж)* $\dfrac{5\pi}{12}$; *з)* $\dfrac{3\pi}{4}$; *и)* $\dfrac{\pi}{10}$; *ј)* $\dfrac{5\pi}{4}$; *к)* $\dfrac{\pi}{5}$; *л)* $\dfrac{5\pi}{6}$; *љ)* $\dfrac{19\pi}{12}$; *м)* $\dfrac{\pi}{3}$

226. Користимо формулу: $\alpha\,\mathrm{rad} = \left(\dfrac{180\alpha}{\pi}\right)^\circ$.

а) 90°; *б)* 15°; *в)* 270°; *г)* 30°; *д)* 45°; *ђ)* 300°; *е)* 105°; *ж)* 135°; *з)* 210°; *и)* 144°; *ј)* 240°; *к)* 315°.

227. *а)* $\dfrac{5\pi}{2}$; *б)* $\dfrac{13\pi}{3}$; *в)* $\dfrac{50\pi}{9}$; *г)* $-\dfrac{7\pi}{12}$; *д)* $-\dfrac{11\pi}{6}$; *ђ)* $-\dfrac{9\pi}{2}$.

228. *а)* 720°; *б)* -135°; *в)* -270°; *г)* -540°; *д)* 1200°; *ђ)* -648°; *е)* 585°.

229. Ако часовник показује 10^h његова мала казаљка је на 10, а велика на 12. Угао који оне тада образују једнак је шестини пуног угла, тј. $\frac{\pi}{3}$.

б) $\frac{5\pi}{6}$; *в)* $\frac{\pi}{2}$; *г)* π; *д)* $\frac{2\pi}{3}$; *ђ)* $\frac{\pi}{6}$; *е)* 3300°.

230. *а)* $\frac{4\pi}{3}$; *б)* $\frac{20\pi}{3}$; *в)* $\frac{46\pi}{3}$; *г)* $\frac{10\pi}{3}$; *д)* $\frac{29\pi}{3}$; *ђ)* $\frac{40\pi}{3}$;

231. *а)* $-\frac{32\pi}{9}$; *б)* $-\frac{70\pi}{9}$; *в)* -20π; *г)* $-\frac{\pi}{3}$; *д)* -10π; *ђ)* $-\frac{15\pi}{2}$.

232. $\cos 0 = 1$, $\sin 0 = 0$, $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{ctg} 0$ не постоји;
$\cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ не постоји, $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2} = 0$;
$\cos\pi = -1$, $\sin\pi = 0$, $\operatorname{tg}\pi = 0$, $\operatorname{ctg}\pi$ не постоји;
$\cos\frac{3\pi}{2} = 0$, $\sin\frac{3\pi}{2} = -1$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}$ не постоји, $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{2} = 0$;
$\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$, $\operatorname{tg} 2\pi = 0$, $\operatorname{ctg} 2\pi$ не постоји;

233. $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$, $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1$, $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ не постоји, $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0$;
$\cos(-\pi) = -1$, $\sin(-\pi) = 0$, $\operatorname{tg}(-\pi) = 0$, $\operatorname{ctg}(-\pi)$ не постоји;
$\cos\left(\frac{-3\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{-3\pi}{2}\right) = 1$, $\operatorname{tg}\left(\frac{-3\pi}{2}\right)$ не постоји, $\operatorname{ctg}\left(\frac{-3\pi}{2}\right) = 0$;
$\cos\left(\frac{-5\pi}{2}\right) = 0$, $\sin\left(\frac{-5\pi}{2}\right) = -1$, $\operatorname{tg}\left(\frac{-5\pi}{2}\right)$ не постоји, $\operatorname{ctg}\left(\frac{-5\pi}{2}\right) = 0$.

234. $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = \operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -1$.

235. Видети приложену таблицу.

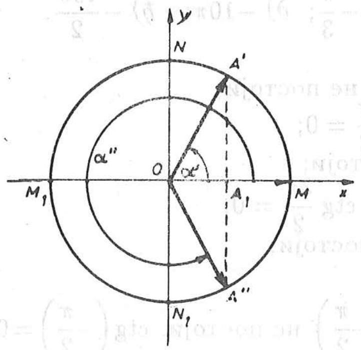
	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$
$\cos\alpha$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\sin\alpha$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	1	-1	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	1	-1	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$

Сл. 40.

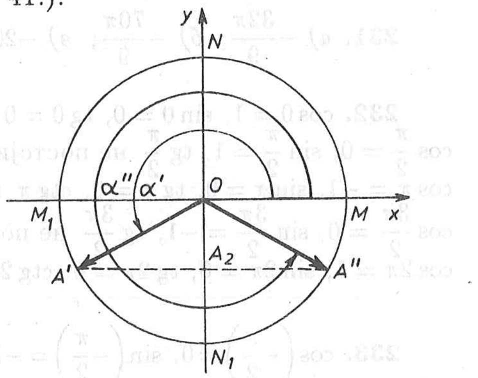
236. *а)* у другом ; *б)* у трећем ; *в)* у четвртом ; *г)* у трећем ; *д)* у првом или у трећем ; *ђ)* у трећем или у четвртом.

237. *а)* 1 ; *б)* 1 ; *в)* 2 ; *г)* $\frac{7}{6}$; *д)* $a^2+\frac{1}{3}b^2$; *ђ)* $3b+c^2$; *е)* 0 ; *ж)* $-a$.

238. *а)* Најпре одређујемо тачку A_1 као тачку са апсцисом $\frac{1}{2}$ на оси Ox. Затим налазимо тачке A' и A" на тригонометријском кругу чија пројекција на осу Ox је тачка A_1 (Сл. 41.).

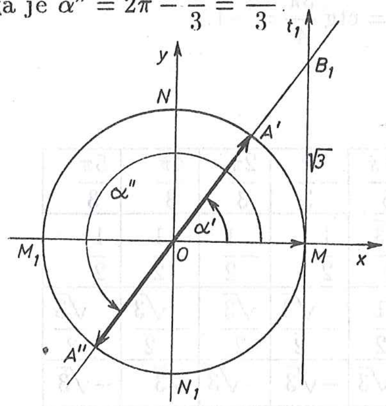


Сл. 41.

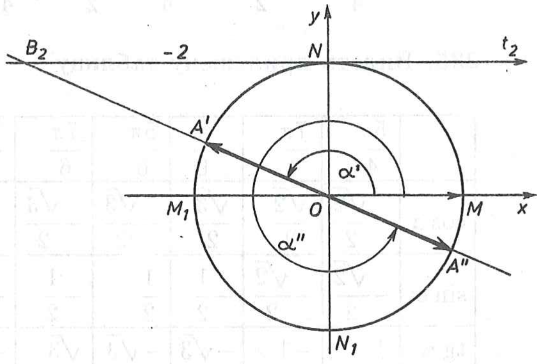


Сл. 42.

Углови α' и α" са завршним векторима $\overrightarrow{OA}'$ и $\overrightarrow{OA}$" су тражени углови. Угао α' је оштар и $\cos\alpha' = \frac{1}{2}$, па је $\alpha' = \frac{\pi}{3}$. Због симетричности тачака A' и A" у односу на осу Ox, угао MOA" је такође једнак $\frac{\pi}{3}$, тако да је $\alpha" = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$.



Сл. 43.

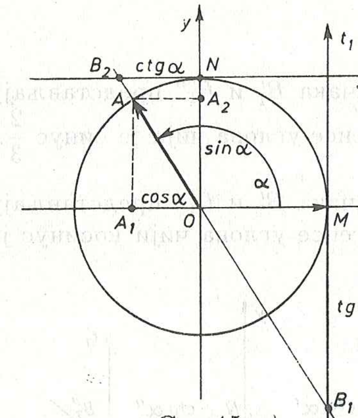


Сл. 44.

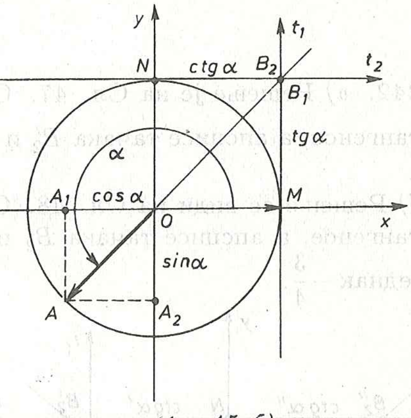
б) Аналогно претходном задатку. Помоћу тачке A_2 са ординатом $-\frac{1}{2}$ на оси Ox, налазимо тачке A' и A" (Сл. 42) и углове α' и α". Сада су углови A_2OA' и A_2OA" оштри углови чији је косинус једнак $\frac{1}{2}$, па су оба ова угла једнака $\frac{\pi}{3}$. Зато је $\alpha' = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{7\pi}{6}$ и $\alpha" = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{11\pi}{6}$.

в) Прво налазимо тачку B_1 на тангенти t_1 са ординатом $\sqrt{3}$ (Сл. 43). Затим налазимо тачке A' и A" као пресечне тачке праве OB_1 и тригонометријског круга. Углови α' и α" са завршним векторима $\overrightarrow{OA'}$ и $\overrightarrow{OA}$" су тражени углови. Угао α' је оштар угао за који је $\operatorname{tg}\alpha' = \sqrt{3}$, па је $\alpha' = \frac{\pi}{3}$, и $\alpha" = \frac{\pi}{3} + \pi = \frac{4\pi}{3}$.

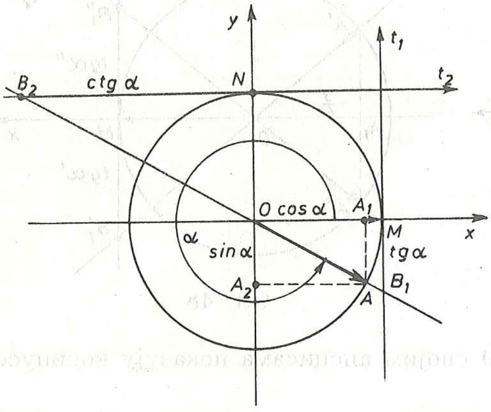
239. Аналогно задатку 238 *в)*. Помоћу тачке B_2 са апсцисом -2 на тангенти t_2, налазимо тачке A' и A" (Сл. 44). Оријентисане дужи $\overrightarrow{OA'}$ и $\overrightarrow{OA}$" су тражени завршни вектори углова чији котангенс је једнак -2.



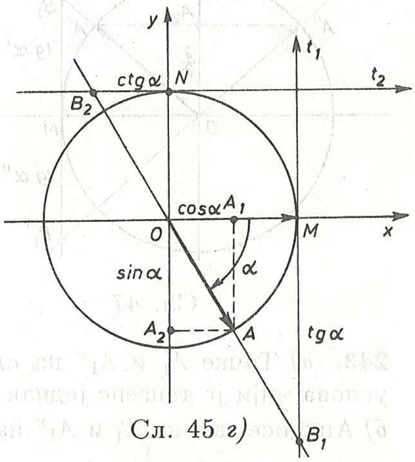
Сл. 45 *а)*



Сл. 45 *б)*



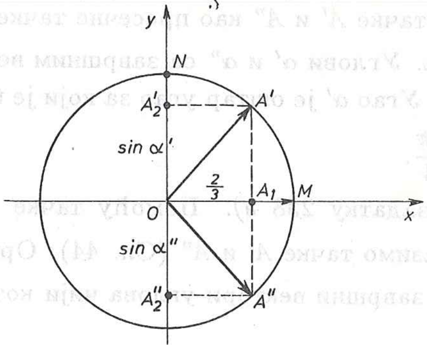
Сл. 45 *в)*



Сл. 45 *г)*

240. Видети сл. 45 *а) -г)*. Случајеви *д) - ж)* решавају се на сличан начин.

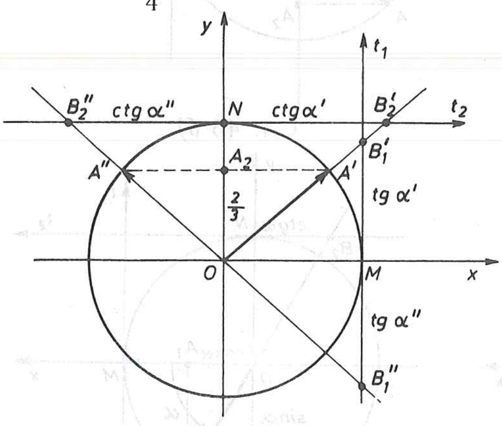
241. Решење се види на сл. 46. Ординате тачака A_2' и A_2'' представљају синусе углова чији косинус је једнак $\frac{2}{3}$.



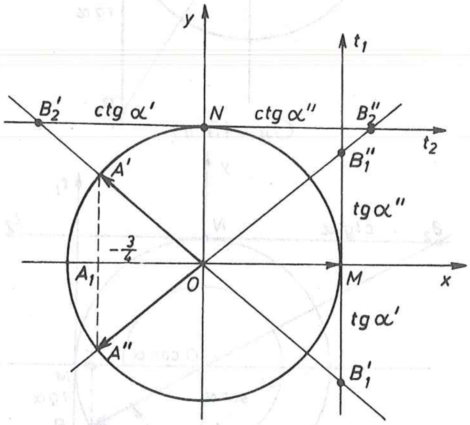
Сл. 46.

242. *а)* Решење је на Сл. 47. Ординате тачака B_1' и B_1'' представљају тангенсе, а апсцисе тачака B_2' и B_2'' котангенсе углова чији је синус $\frac{2}{3}$.

б) Решење се види на Сл. 48. Ординате тачака B_1' и B_1'' представљају тангенсе, а апсцисе тачака B_2' и B_2'' котангенсе углова чији косинус је једнак $-\frac{3}{4}$.



Сл. 47

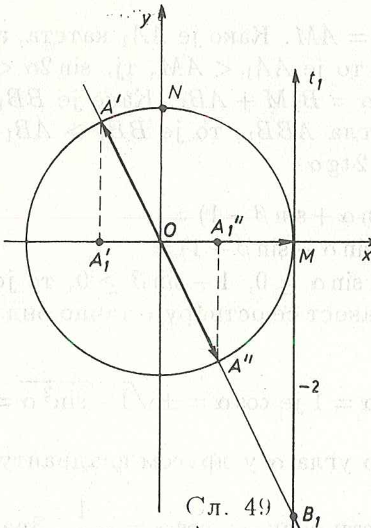


Сл. 48

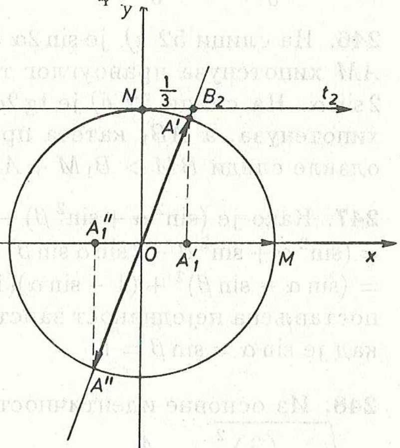
243. *а)* Тачке A_1' и A_1'' на сл. 49 својим апсцисама показују косинусе углова чији је тангенс једнак -2.

б) Апсцисе тачака A_1' и A_1'' на сл. 50 једнаке су косинусима углова чији котангенс износи $\frac{1}{3}$.

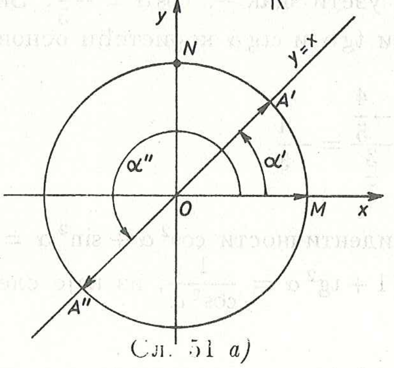
244. Као у задацима 238-240 решења задатака *ђ)* и *е)* су приказана на Сл. 51 *а)* - *б)*. Тражени углови су $\alpha' = \dfrac{\pi}{4}$ и $\alpha" = \dfrac{5\pi}{4}$.



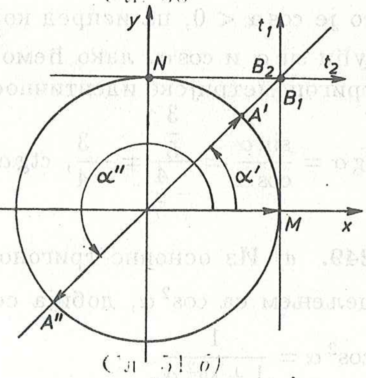
Сл. 49



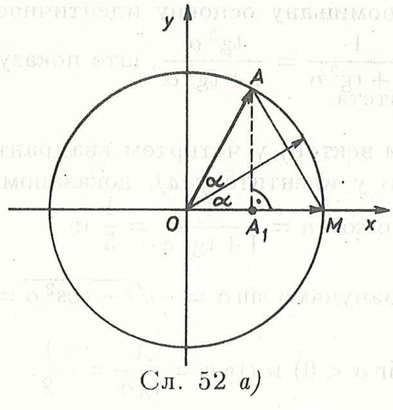
Сл. 50



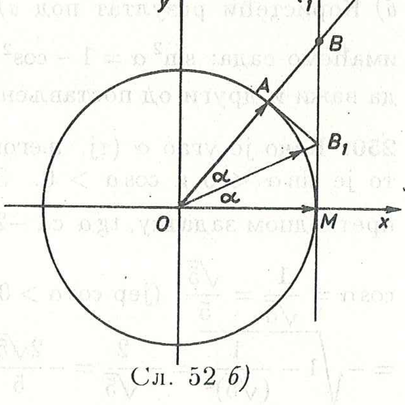
Сл. 51 *а)*



Сл. 51 *б)*



Сл. 52 *а)*



Сл. 52 *б)*

245. Као у задатку 238. Резултати
а) $\alpha_1 = \frac{\pi}{6}$, $\alpha_2 = \frac{5\pi}{6}$; *б)* $\alpha_1 = \frac{3\pi}{4}$, $\alpha_2 = \frac{5\pi}{4}$.

246. На слици 52 *а)* је $\sin 2\alpha = AA_1$ и $2\sin\alpha = AM$. Како је AA_1 катета, а AM хипотенуза правоуглог троугла AA_1M то је $AA_1 < AM$, тј. $\sin 2\alpha < 2\sin\alpha$. На слици 52 *б)* је $\operatorname{tg} 2\alpha = BM$ и $2\operatorname{tg}\alpha = B_1M + AB_1$. Како је BB_1 хипотенуза, а AB_1 катета правоуглог троугла ABB_1, то је $BB_1 > AB_1$, одакле следи $BM > B_1M + AB_1$, тј. $\operatorname{tg} 2\alpha > 2\operatorname{tg}\alpha$.

247. Како је $(\sin^2\alpha + \sin^2\beta) - (\sin\alpha\sin\beta + \sin\alpha + \sin\beta - 1) =$
$= (\sin^2\alpha + \sin^2\beta - 2\sin\alpha\sin\beta) + (\sin\alpha\sin\beta - \sin\alpha - \sin\beta + 1) =$
$= (\sin\alpha - \sin\beta)^2 + (1 - \sin\alpha)(1 - \sin\beta)$ и $1 - \sin\alpha \geq 0$, $1 - \sin\beta \geq 0$, то је постављена неједнакост заиста тачна. Једнакост се остварује тачно онда кад је $\sin\alpha = \sin\beta = 1$.

248. Из основне идентичности $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ је $\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = \pm\frac{4}{5}$. Како је завршни вектор угла α у другом квадранту, то је $\cos\alpha < 0$, па испред корена треба узети знак $-$: $\cos\alpha = -\frac{4}{5}$. Знајући $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, лако ћемо израчунати $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ користећи основне тригонометријске идентичности:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}, \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = -\frac{4}{3}.$$

249. *а)* Из основне тригонометријске идентичности $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$, дељењем са $\cos^2\alpha$, добија се релација $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, из које следи $\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$.
б) Користећи резултат под *а)* и већ спомињану основну идентичност, имаћемо сада: $\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$, што показује да важи и други од постављених идентитета.

250. Како је угао α (тј. његов завршни вектор) у четвртом квадранту, то је $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha > 0$. Заменивши у идентитету *а)*, доказаном у претходном задатку, $\operatorname{tg}\alpha$ са -2 рачунамо $\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{5}$ и

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$. (јер $\cos\alpha > 0$). Даље рачунамо $\sin\alpha = -\sqrt{1 - \cos^2\alpha} =$
$= -\sqrt{1 - \frac{1}{(\sqrt{5})^2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ (јер је $\sin\alpha < 0$) и $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{1}{2}$.

251. Поделимо бројилац и именилац овог разломка са $\cos^3\alpha$. (Услов $\cos^3\alpha \neq 0$ испуњен је, јер $\operatorname{tg}\alpha$ постоји.) Добићемо

$$Y = \frac{3\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} - 4}{5\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha} + 1} = \frac{3\operatorname{tg}^3\alpha - 4}{5\operatorname{tg}^3 + 1}.$$

Како је $\operatorname{tg}\alpha = a$ то је $Y = \dfrac{3a^3 - 4}{5a^3 + 1}$ $(5a^3 + 1 \neq 0)$.

252. Кад се на левој страни изврше квадрирања и сређивање, добије се $2\operatorname{tg}^2\alpha + 2$. Како је

$$2\operatorname{tg}^2\alpha + 2 = 2\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 2 = \frac{2\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)}{\cos^2\alpha} = \frac{2}{\cos^2\alpha},$$

то горњи идентитет важи (под условом да је $\cos\alpha \neq 0$).

253. Као у задатку 248. Резултати: $\sin\alpha = \dfrac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{4}{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$.

254. Као у задатку 248. Резултати: $\sin\alpha = -\dfrac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{5}{12}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{12}{5}$.

255. Као у задатку 250. Резултати: $\operatorname{tg}\alpha = -\dfrac{3}{4}$, $\cos\alpha = -\dfrac{4}{5}$, $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}$.

256. Као у задатку 248. Резултати: $\cos\alpha = -\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

257. *а)* Најпре се, као у задатку 248., израчуна $\cos\alpha = -\dfrac{24}{25}$, а затим се израчуна вредност датог израза, која износи $\dfrac{17}{31}$.

б) Као у задатку 251. Резултат: $\dfrac{125}{108}$.

258. $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{p^2 - q^2}{p^2 + q^2}$, $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{2pq}{p^2 + q^2}$.

259. $Y = 13(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 13.$

260. *а)* $(1 - \cos^2\alpha)(1 + \operatorname{tg}^2\alpha) = (1 - \cos^2\alpha)\left(1 + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right) =$

$= (1 - \cos^2\alpha)\dfrac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \sin^2\alpha \cdot \dfrac{1}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha$ $(\cos\alpha \neq 0)$;

б) $(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)(1 - \sin^2\alpha) = \left(1 + \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)\cos^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ $(\cos\alpha \neq 0)$

в) $\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha}{\cos^2\alpha} - \operatorname{ctg}^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \left(\dfrac{1}{\cos^2\alpha} - 1\right) = \operatorname{ctg}^2\alpha \cdot \dfrac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} =$

$= \dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} \cdot \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1$ $(\sin\alpha \neq 0,\ \cos\alpha \neq 0)$;

г) $\dfrac{1}{\cos\alpha}-\sin\alpha\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\cos\alpha}-\sin\alpha\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha\quad(\cos\alpha\neq 0)$;

д) Као у задатку 252 ;

ђ) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\cdot\operatorname{ctg}^2\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+1}{\operatorname{ctg}^2\alpha+1}=$

$=\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+1}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+1}=\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+1}{\dfrac{1+\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha}}=\operatorname{tg}^2\alpha\quad(\cos\alpha\neq 0,\ \sin\alpha\neq 0)$;

е) $(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha+2\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=$
$=2-2\sin\alpha+2\cos\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=2(1-\sin\alpha)+2\cos\alpha(1-\sin\alpha)=$
$=2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$;

ж) $\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}+\operatorname{tg}\alpha\right)\left(\dfrac{1}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}\alpha\right)=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\operatorname{tg}^2\alpha=\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=1$
$(\cos\alpha\neq 0)$;

з) $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1-\cos^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=$
$=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha\quad(\sin\alpha\neq 0,\ \cos\alpha\neq 0)$;

и) $\left(\sin\alpha+\dfrac{1}{\sin\alpha}\right)^2+\left(\cos\alpha+\dfrac{1}{\cos\alpha}\right)^2=$
$=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+4+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}=$
$=5+\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=5+1+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$
$=7+\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha=7+\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha\quad(\sin\alpha\neq 0,\ \cos\alpha\neq 0)$;

ј) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}-\dfrac{\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\dfrac{-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=$
$=\dfrac{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1}{\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-1}=\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+1}{\operatorname{tg}^2\alpha-1}\quad(\cos\alpha\neq 0,\ \operatorname{tg}\alpha\neq 1,\ \operatorname{tg}\alpha\neq -1)$;

к) $\dfrac{1}{1-\sin\alpha}-\dfrac{1}{1+\sin\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha}\quad(\cos\alpha\neq 0)$.

261. *а)* $3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha=$
$=3\sin\alpha-\sin^2\alpha-3\sin^3\alpha$;

б) $\cos^3\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha=\cos\alpha(\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha)=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}(1-4\sin^2\alpha)$;

в) $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha)(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)=\sin^2\alpha-(1-\sin^2\alpha)=$
$=2\sin^2\alpha-1$;

г) $\cos^4\alpha\sin^2\alpha-\sin^6\alpha=\sin^2\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=$
$=\sin^2\alpha(1-2\sin^2\alpha)$;

д) $\cos^6\alpha-\sin^4\alpha\cos^2\alpha=\cos^2\alpha(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=$
$=(1-\sin^2\alpha)(1-2\sin^2\alpha)=1-3\sin^2\alpha+2\sin^4\alpha$;

ђ) $\cos^4\alpha-2\cos^2\alpha+1=(1-\cos^2\alpha)^2=\sin^4\alpha$.

262. *а)* $\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1-\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}}=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\quad(\cos\alpha\neq 0,\ \operatorname{tg}\alpha\neq\pm1)$;

б) $\dfrac{3\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{4\cos^3\alpha-3\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha(3-4\sin^2\alpha)}{\cos\alpha(4\cos^2\alpha-3)}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\dfrac{3\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha}=$

$=\operatorname{tg}\alpha\cdot\dfrac{3-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{1-3\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\dfrac{3-\operatorname{tg}^2\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}\quad\left(\cos\alpha\neq0,\ \operatorname{tg}\alpha\neq\dfrac{\sqrt3}{3},\ \operatorname{tg}\alpha\neq-\dfrac{\sqrt3}{3}\right)$

в) $\dfrac{3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin\alpha}{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}=\dfrac{2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}}{1-\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}}=$

$=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-\operatorname{tg}^3\alpha}$

$(\cos\alpha\neq0,\ \cos\alpha\neq\sin\alpha)$;

г) $\dfrac{\cos^3\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\dfrac{\cos^3\alpha-3\sin^2\alpha\cos\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}=$

$=\dfrac{1-3\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}{\left(1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)\left(1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}=\dfrac{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}{(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}\quad(\cos\alpha\neq0,\ \cos\alpha\neq$

$-\sin\alpha)$

д) $\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}=\dfrac{\cos^4\alpha-\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha+\sin^4\alpha}=\dfrac{1-\dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}}{1+\dfrac{\sin^4\alpha}{\cos^4\alpha}}=\dfrac{1-\operatorname{tg}^4\alpha}{1+\operatorname{tg}^4\alpha}\quad(\cos\alpha\neq0)$;

ђ) $\dfrac{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos^5\alpha-\sin^5\alpha}=\dfrac{(\cos^3\alpha+\sin^3\alpha)(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)}{\cos^5\alpha-\sin^5\alpha}=$

$=\dfrac{\left(1+\dfrac{\sin^3\alpha}{\cos^3\alpha}\right)\left(1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}{1-\dfrac{\sin^5\alpha}{\cos^5\alpha}}=\dfrac{(1+\operatorname{tg}^3\alpha)(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-\operatorname{tg}^5\alpha}$

$(\cos\alpha\neq0,\ \cos\alpha\neq\sin\alpha)$.

263. *а)* $A=4\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=4\quad(\cos\alpha\neq0,\ \sin\alpha\neq0)$;

б) $B=\dfrac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2-(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2}{\operatorname{tg}^2\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}\cdot\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=$

$=\dfrac{4}{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=\dfrac{4}{-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)}=-4$

$(\cos\alpha\neq0,\ \sin\alpha\neq0,\ \operatorname{tg}\alpha\neq1;\ \operatorname{tg}\alpha\neq-1)$;

в) $C = \dfrac{\sqrt{(1-\cos\alpha)^2}+\sqrt{(1+\cos\alpha)^2}}{\sqrt{1-\cos^2\alpha}} = \dfrac{|\,1-\cos\alpha\,|+|\,1+\cos\alpha\,|}{\sqrt{\sin^2\alpha}} =$
$= \dfrac{1-\cos\alpha+1+\cos\alpha}{|\sin\alpha|} = \dfrac{2}{|\sin\alpha|}\quad (\sin\alpha\neq 0)$;

г) као под *в)* $D = \dfrac{2\cos\alpha}{|\sin\alpha|}\quad(\sin\alpha\neq 0)$;

д) $E = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} = \dfrac{\sin\alpha+1}{\cos\alpha(1+\sin\alpha)} =$
$= \dfrac{1}{\cos\alpha}\quad(\cos\alpha\neq 0)$;

ђ) $F = \operatorname{tg}^2\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^2\alpha = \dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\cos^2\alpha-\sin^2\alpha = 0\quad(\cos\alpha\neq 0).$

264. *а)* $\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\beta = (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)+\cos^2\alpha+\cos^2\beta =$
$= 1-\cos^2\alpha-\cos^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha+\cos^2\beta = 1+\cos^2\alpha\cos^2\beta.$

б) $\dfrac{\cos\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha-1} = \dfrac{\cos\alpha}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}-\dfrac{\sin\alpha}{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}-1} =$
$= \dfrac{\cos^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}-\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha} = \cos\alpha+\sin\alpha$
$(\cos\alpha\neq 0,\ \sin\alpha\neq 0,\ \operatorname{tg}\alpha\neq 1)$.

в) $\dfrac{\sec^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+2\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \dfrac{\dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha}}{\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \dfrac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)}$
$= \dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)} = \dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{\cos\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)} = \dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha} = 1+\operatorname{tg}\alpha$
$(\cos\alpha\neq 0,\ \operatorname{tg}\alpha\neq -1)$;

г) $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}-\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}\right) = \dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}-(\operatorname{ctg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha) =$
$= \dfrac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}-(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha)^2+2\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}-\left(\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2+2$
$= \dfrac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}-\left(\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2+2 = \dfrac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}-\left(\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2+2 = 2$
$(\sin\alpha\neq 0,\ \cos\alpha\neq 0)$;

д) $\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\dfrac{\sin^3\alpha-\cos^3\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha} =$
$= (\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha)+(\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha) =$
$= 2(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha) = 2\quad(\sin\alpha\neq\pm\cos\alpha)$;

ђ) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2}+\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha}{(1+\operatorname{ctg}^2\alpha)^2} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2}+\dfrac{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}{\left(1+\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}\right)^2} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2}+$

$$+\frac{\operatorname{tg}^3\alpha}{(\operatorname{tg}^2\alpha+1)^2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}{(1+\operatorname{tg}^2\alpha)^2}=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=$$

$$=\sin\alpha\cos\alpha \quad (\cos\alpha\neq 0,\ \sin\alpha\neq 0).$$

е) $$(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{cosec}\alpha)^2=\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2=\frac{(1+\cos\alpha)^2}{\sin^2\alpha}=\frac{(1+\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}=$$

$$=\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}\quad (\sin\alpha\neq 0)\ ;$$

ж) $$\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-2\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\sin^2\alpha=$$

$$=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)-2\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\sin^2\alpha=$$

$$=-\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\sin^2\alpha(-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+1)=0.$$

з) $$\frac{(1-\sin\alpha-\cos\alpha)(1-\sin\alpha+\cos\alpha)}{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}=\frac{(1-\sin\alpha)^2-\cos^2\alpha}{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}=$$

$$=\frac{(1-\sin\alpha)^2-2(1-\sin^2\alpha)}{\sin\alpha(1-\sin\alpha)}=\frac{(1-\sin\alpha)-(1+\sin\alpha)}{\sin\alpha}=-2$$

$(\sin\alpha\neq 0,\ \sin\alpha\neq 1)$.

265. $$(1-\cos\beta\cos\gamma)^2-2(1-\cos\beta\cos\gamma)-\sin^2\beta\sin^2\gamma+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=$$

$$=(1-\cos\beta\cos\gamma)(1-\cos\beta\cos\gamma-2)-\sin^2\beta\sin^2\gamma+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=$$

$$=-(1-\cos^2\beta\cos^2\gamma)-\sin^2\beta\sin^2\gamma+1-\cos^2\beta+\sin^2\gamma=$$

$$=-\cos^2\beta(1-\cos^2\gamma)+(-\sin^2\beta+1)\sin^2\gamma=-\cos^2\beta\sin^2\gamma+\cos^2\beta\sin^2\gamma=0.$$

266. Обележимо $\sin\alpha\cos\alpha$ са p. Како је α оштар угао, то је $\sin\alpha>0$, $c\alpha>0$, $\operatorname{tg}\alpha>0$, $\operatorname{ctg}\alpha>0$ и $p>0$. Даље је:

$$\sqrt{\sin\alpha}\sqrt[4]{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\cos\alpha}\sqrt[4]{\operatorname{ctg}\alpha}=\sqrt{\sin\alpha}\sqrt[4]{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}+\sqrt{\cos\alpha}\sqrt[4]{\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=$$

$$=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sqrt[4]{\sin\alpha\cos\alpha}}=\frac{\sqrt{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}}{\sqrt[4]{\sin\alpha\cos\alpha}}=\frac{\sqrt{1+2p}}{\sqrt[4]{p}}=$$

$$=\frac{\sqrt{(1-\sqrt{2p})^2+2\sqrt{2p}}}{\sqrt[4]{p}}\geq\frac{\sqrt{2\sqrt{2p}}}{\sqrt[4]{p}}=\sqrt[4]{8},$$

што показује да је постављена неједнакост тачна. Знак једнакости важи ако је $p=\dfrac{1}{2}$.

267. Приметимо да је: $t=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}$, као и да је $t>0$ и $m>0$, јер је α оштар угао. Квадрирајмо дату једнакост:

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}=m^2.\ \text{Следи: } \frac{1+\dfrac{2}{t}}{\dfrac{1}{t^2}}=m^2,\ \text{тј. } t^2+2t-m^2=0.$$

Решења ове квадратне једначине су $-1 \pm \sqrt{1+m^2}$. Како је $t > 0$, то је $t = -1 + \sqrt{1+m^2}$.

268. Утврдимо да је $\sin\alpha\cos\alpha \le \frac{1}{4}(\sin\alpha+\cos\alpha)^2$ и $\sin\alpha+\cos\alpha \le \sqrt{2}$.

Прво следи из: $4\sin\alpha\cos\alpha = \left(2\sqrt{\sin\alpha\cos\alpha}\right)^2 =$
$= (\sin\alpha+\cos\alpha-(\sqrt{\sin\alpha}-\sqrt{\cos\alpha})^2)^2 \le (\sin\alpha+\cos\alpha)^2$,
а друго из: $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha =$
$= 1+2\sin\alpha\cos\alpha = 2-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha = 2-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2 \le 2$.
На оба места знак једнакости важи ако је $\sin\alpha = \cos\alpha$. На основу овога је

$$\left(1+\frac{1}{\sin\alpha}\right)\left(1+\frac{1}{\cos\alpha}\right) = 1+\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+1}{\sin\alpha\cos\alpha} \ge 1+\frac{\sin\alpha+\cos\alpha+1}{\frac{1}{4}(\sin\alpha+\cos\alpha)^2} =$$

$$= 1+\frac{4}{\sin\alpha+\cos\alpha}+\frac{4}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2} \ge 1+\frac{4}{\sqrt{2}}+\frac{4}{2} = 3+2\sqrt{2},$$

при чему знак једнакости важи у случају $\sin\alpha = \cos\alpha$.

269. Како је $2\mid\sin x\cos x\mid = 1-\sin^2 x-\cos^2 x+2\mid\sin x\cos x\mid =$
$= 1-(\mid\sin x\mid-\mid\cos x\mid)^2$, то је $\mid\sin x\cos x\mid \le \frac{1}{2}$, уз једнакост у случају $\mid\sin x\mid = \mid\cos x\mid$. Зато $\frac{1}{\sin^4 x}+\frac{1}{\cos^4 x} = \left(\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{1}{\cos^2 x}\right)+\frac{2}{\sin^2 x\cos^2 x} \ge$

$$\ge \frac{2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 8,$$

кад год је $\sin x\cos x \ne 0$, при чему знак једнакости важи ако је $\mid\sin x\mid = \mid\cos x\mid$.

270. Како је $\frac{13\pi}{3} = 4\pi+\frac{\pi}{3}$, то су тригонометријске функције угла $\frac{13\pi}{3}$ једнаке тригонометријским функцијама угла $\frac{\pi}{3}$. Зато је $\cos\frac{13\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{13\pi}{3} = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{13\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{13\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

271. Довољно је да се за сваку од ових једнакости нађе по један пар вредности α и m за које она није тачна. Прва једнакост није тачна за $\alpha = 0$ и $m = 1$, јер је $\cos\pi = -1$, а $\cos 0 = 1$. Друга једнакост није тачна за $\alpha = \frac{\pi}{2}$ и $m = 1$, јер је $\sin(\pi+\frac{\pi}{2}) = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$, а $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

272. *a)* Како $\cos\alpha$ у првом квадранту опада од 1 до 0, то функција $3-\cos\alpha$ расте од 2 до 3. У другом квадранту $\cos\alpha$ опада од 0 до -1, тако да функција $3-\cos\alpha$ расте од 3 до 4. На исти начин закључујемо да дата функција у трећем квадранту опада од 4 до 3 и да у четвртом квадранту опада од 3 до 2.

б) Како у првом квадранту $\operatorname{tg}\alpha$ расте од 0 до $+\infty$, то $1+\operatorname{tg}\alpha$ расте од 1 до $+\infty$. Даље, у другом квадранту $\operatorname{tg}\alpha$ расте од $-\infty$ до 0, па функција $1+\operatorname{tg}\alpha$ расте од $-\infty$ до 1. У трећем, односно у четвртом квадранту, дата функција се понаша исто као у првом, односно у другом квадранту.

273. *а)* Углови од $\frac{5\pi}{6}$ и од $\frac{5\pi}{7}$ радијана имају завршне векторе у другом квадранту, где синус опада. Зато из $\frac{5\pi}{6} > \frac{5\pi}{7}$ следи $\sin\frac{5\pi}{6} < \sin\frac{5\pi}{7}$, тако да је разлика $\sin\frac{5\pi}{6} - \sin\frac{5\pi}{7}$ негативна.

б) Углови од 319^o и 327^o леже у четвртом квадранту (тј. њихови завршни вектори су у четвртом квадранту), а тамо котангенс опада. Зато из $319^o < 327^o$ следи $\operatorname{ctg}319^o > \operatorname{ctg}327^o$, тако да је разлика $\operatorname{ctg}319^o - \operatorname{ctg}327^o$ позитивна.

274. Као у задатку 272. Резултати:

а) У првом и другом квадранту опада, у трећем и четвртом расте ;

б) У првом и трећем расте, у другом и четвртом квадранту опада ;

в) У другом и трећем расте, у првом и четвртом квадранту опада ;

г) Расте у сваком интервалу $\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}\right)$, $k \in \mathbf{Z}$;

д) Опада у сваком квадранту ;

ђ) У првом и трећем квадранту расте, а у другом и четвртом опада.

275. Као у задатку 273. Резултати:

а) $\cos 0.7\pi > \cos 0.71\pi$; *б)* $\sin 1.6\pi < \sin 1.7\pi$; *в)* $\operatorname{tg}0.5 > \operatorname{tg}(-0.4)$;

г) $\operatorname{ctg}6.2\pi > \operatorname{ctg}6.8\pi$.

276. Као у задатку 273. Резултати:

а) позитиван ; *б)* негативан ; *в)* позитиван ; *г)* позитиван ;

д) негативан ; *ђ)* позитиван ; *е)* позитиван ; *ж)* позитиван.

277. Како је $\sin\alpha \le 1$ и $\cos\alpha \le 1$, то једнакост $2\sin\alpha + 5\cos\alpha = 7$ може да буде тачна једино ако је $\sin\alpha = \cos\alpha = 1$. Међутим, када је $\sin\alpha = 1$ онда је $\cos\alpha = 0$. Према томе, такав угао α не постоји.

278. *а)* $\cos 21.7\pi = \cos(20\pi + 1.7\pi) = \cos 1.7\pi = \cos(2\pi - 0.3\pi) = \cos 0.3\pi$;

б) $\sin 1000^o = \sin(2\cdot 360^o + 280^o) = \sin 280^o = \sin(360^o - 80^o) = -\sin 80^o$;

в) $\operatorname{tg}(-126^o) = -\operatorname{tg}126^o = -\operatorname{tg}(180^o - 54^o) = \operatorname{tg}54^o$;

г) Угао од 1.74 радијана налази се између углова од $\frac{\pi}{2}$ $(= 1.57...)$ и од π $(= 3.14...)$ радијана. Зато је угао $\pi - 1.74$ оштар, па ћемо имати $\operatorname{ctg}1.74 = \operatorname{ctg}[\pi - (\pi - 1.74)] = -\operatorname{ctg}(\pi - 1.74)$.

279. Користећи формуле за свођење на први квадрант свешћемо све тригонометријске функције које фигуришу у датом изразу на тригонометријске функције угла α, па ће бити

$$A = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha(-\operatorname{tg}\alpha)}{-\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha} = 2\cos\alpha \quad (\cos\alpha \neq 0,\ \sin\alpha \neq 0).$$

280. Збир углова од $\frac{\pi}{6}+\alpha$ и $\frac{4\pi}{3}-\alpha$ је $\frac{3\pi}{2}$, па је
$\sin\left(\frac{4\pi}{3}-\alpha\right) = \sin\left[\frac{3\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\right] = -\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$, и према томе
$\sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin^2\left(\frac{4\pi}{3}-\alpha\right) = \sin^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right) = 1.$

281. *а)* $\frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$, $\cos\frac{2\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3} = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3} = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6} = -\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{3} = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
б) $\frac{3\pi}{4} = \pi-\frac{\pi}{4}$, $\cos\frac{3\pi}{4} = -\cos\frac{\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{3\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = -1$, $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4} = -\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = -1$.
в) $\frac{4\pi}{3} = \pi+\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,
$\operatorname{tg}\frac{4\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{3} = \operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.
г) $\frac{7\pi}{6} = \frac{3\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$, $\cos\frac{7\pi}{6} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\frac{7\pi}{6} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$,
$\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6} = \operatorname{ctg}\frac{pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{6} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$.

282. Као у задатку 278. Резултати:
а) $\sin 50^o45'$; *б)* $\cos 58^o$; *в)* $\sin 0.22\pi$; *г)* $\operatorname{tg} 51^o$;
д) $\operatorname{ctg} 40^o$; *ђ)* $-\operatorname{tg} 0.3\pi$; *е)* $-\operatorname{ctg}(20\pi-62)$.

283. *а)* $\sin 23 = \sin[7.5\pi-(7.5\pi-23)] = -\cos(7.5\pi-23)$.
б) $\cos 14.71\pi = \cos(14.5\pi+0.21\pi) = -\sin 0.21\pi$.
в) $\cos(-930^o) = \cos 930^o = \cos(5\cdot 360^o+30^o) = -\cos 30^o$.
г) $\sin 3529^o = \sin(19.5\cdot 180^o+19^o) = -\cos 19^o$.
д) $\operatorname{tg} 15.29\pi = \operatorname{tg}(15.5\pi-0.21\pi) = \operatorname{ctg} 0.21\pi$.
ђ) $\operatorname{ctg} 3000^o95' = \operatorname{ctg}(16.5\cdot 180^o+30^o95') = -\operatorname{tg} 30^o95'$.

284. Као у задатку 281. Резултати:
а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; *б)* $-\frac{1}{2}$; *в)* 0 ; *г)* $\frac{1}{2}$; *д)* $\frac{1}{2}$; *ђ)* 0 ; *е)* $-\sqrt{3}$; *ж)* $\frac{\sqrt{3}}{3}$; *з)* 1.

285. $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \frac{4}{5}$ (јер, из $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, следи: $\cos\alpha>0$), па је

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{3}{4}$; $\beta = \dfrac{\pi}{2} - \alpha$, $\cos\beta = \sin\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\operatorname{ctg}\beta = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{3}{4}$;
$\dfrac{\sin\alpha + \cos\beta}{\operatorname{tg}\alpha} + \sqrt[4]{\beta} = \dfrac{47}{20}$.

286. Као у задатку **279.** Резултати:
а) $-2\operatorname{tg}^2 70^o \sin 36^o \quad (\cos\alpha^o \neq 0)$; *б)* $-\cos\alpha^o \sin\alpha^o + \cos^2\alpha^o$;
в) 0 ; *г)* $2\cos\alpha$; *д)* $a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha^o$; *ђ)* 0 ; *е)* $2\operatorname{tg}\alpha \quad (\cos\alpha \neq 0)$;
ж) $3(\sin\alpha^o \neq,\ \cos\alpha \neq 0)$; *з)* $1 \quad (\cos\alpha^o \neq 0,\ \sin\alpha^o \neq 0)$;
и) $-\operatorname{tg}^2 50^o \quad (\sin\alpha^o \neq 0,\ \cos\alpha^o \neq 0)$; *ј)* $\cos\alpha^o \quad (\cos\alpha^o \neq 0,\ \sin\alpha^o \neq 0)$;
к) $\sin 40^o - 2\sin 20^o$;
л) $-2 \quad (\cos\beta^o \neq 0,\ \sin\beta^o \neq 0,\ \cos\alpha^o \neq 0,\ \sin\alpha^o \neq 0,\ \cos\gamma \neq 0)$;
љ) $-\operatorname{ctg}^2\beta + 1 \quad (\cos\alpha \neq 0,\ \sin\alpha \neq 0,\ \sin\beta \neq 0,\ \cos\beta \neq 0)$;
м) $\cos\alpha^o - \sin\alpha^o$; *н)* $\dfrac{1}{5}$; *њ)* $\dfrac{1}{\cos^2\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0, \sin\alpha \neq 0)$.

287. Као у задатку 280.

288. $A = 0 \quad (\cos\alpha^o \neq 0,\ \sin\alpha^o \neq 0,\ a \neq b)$.

289. Као у задатку 281. Резултати:
а) $-\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$; *б)* $1 + \sqrt{3}$; *в)* 2 ; *г)* 6.

290. Као у задатку 281. Резултати:
а) 0 ; *б)* $-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$; *в)* 3 ; *г)* 0 ; *д)* -1.

291. Из дате једнакости $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ добијамо једнакост: $\cos^2\alpha = 1 - \cos^2\beta$, односно $\cos^2\alpha = \sin^2\beta$, која је тачна, на пример, ако је $\cos\alpha = -\sin\beta$, тј. $\cos\alpha = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \beta\right)$, што се остварује у случају кад је $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + \beta$. Тада је $\gamma = \dfrac{\pi}{2} - 2\beta$ и $0 < \beta < \dfrac{\pi}{4}$. Троугао са таквим угловима није провоугли. Дакле, троугао чији углови α и β задовољавају дату једнакост не мора да буде правоугли.

292. *а)* $\dfrac{2\pi}{3}$; *б)* 1 ; *в)* $\dfrac{\pi}{4}$.

293. *а)* π ; *б)* 6π ; *в)* 12π ; *г)* 3π.

294. *а)* Ни парна ни непарна. *б)* Непарна. *в)* Парна. *г)* Непарна.

295. Јасно је да је f периодична функција и да је 2π један од њених периода, јер су функције $\sin x$ и $\cos x$ периодичне са периодом 2π. Ако би постојао период p функције f такав да је $0 < p < 2\pi$, тада би било $\sin(x+p) - \cos(x+p) = \sin x - \cos x$ за сваки $x \in \mathbb{R}$. Специјално, било би $\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + p\right) - \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + p\right) = 0$, тј. $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4} + p\right) = 1$. Но због $\dfrac{\pi}{4} < \dfrac{\pi}{4} + p < \dfrac{\pi}{4} + 2\pi$, то би значило да је $p = \pi$, што је немогуће, јер је

$\sin(x+\pi) - \cos(x+\pi) = -\sin x + \cos x$, за $x \in \mathbf{R}$.
Дакле, такав период p не постоји, па је 2π основни период функције f.

296. *а)* Како је $y(x+\pi) = y(x)$ за сваки $x \in \mathbf{R}$, то је дата функција периодична и један њен период је π. Ако је p неки период ове функција, тј. ако је $y(x+p) = y(x)$ за сваки $x \in \mathbf{R}$, тада је $y(p) = 0$, тј. $\sin p = 0$, одакле следи да је $p = k\pi$ за неки цео број k различит од нуле. Према томе, не постоји позитиван период ове функције мањи од π, тако да је њен основни период једнак π.

б) $y = 3\sin^2 x - 1$; према резултату под *а)*, основни период дате функције је π.

в) π.

г) $y = \sqrt{\sin^2 x}$; према резултату под *а)*, основни период ове функције је π.

д) Као у задатку 295. Резултат: 2π.

ђ) Као у задатку 295. (Ставити $x = -\dfrac{\pi}{3}$ при доказивању да не постоји позитиван период мањи од 2π). Резултат је 2π.

е) Као у задатку 295 (ставити $x = -\varphi$); резултат: 2π.

297. *а)* Функције $\sin^2 x$ и $\cos x$ имају заједнички период 2π.

б) Као под *а)*.

в) Функције $\sin 3x$ и $\cos 5x$ имају заједнички период 2π $\left(= 3 \cdot \dfrac{2\pi}{3} = 5 \cdot \dfrac{2\pi}{5}\right)$.

г) Функције $\sin 6x$ и $\cos 4x$ имају заједнички период π.

д) Функције $\sin 8x$ и $\cos 5x$ имају заједнички период 2π.

ђ) Функције $\sin x$ и $\cos 7.1x$ имају заједнички период 20π $\left(= 71 \cdot \dfrac{2\pi}{7.1}\right)$.

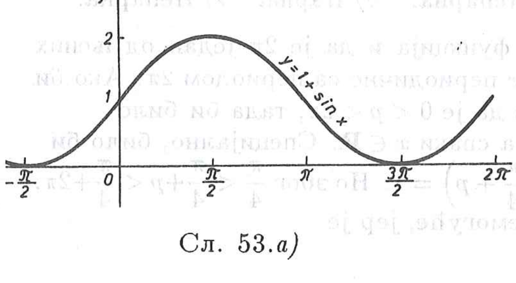
е) Функције $\cos 5.3x$ и $\cos 11x$ имају заједнички период 20π.

ж) Функције које својим збиром одређују y имају заједнички период 6π.

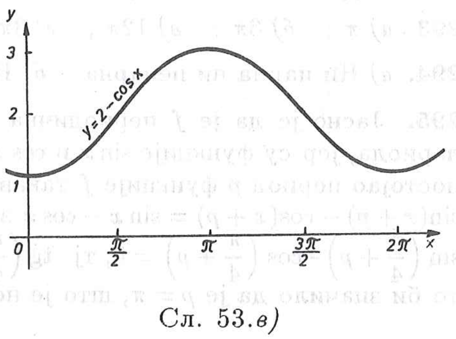
з) Функције чији збир је y имају заједнички период 80π.

и) Функције чији збир је y имају заједнички период 210π.

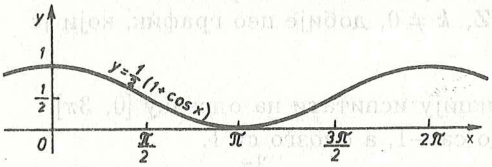
298. Графици неких функција приказани су сликама 53.*а)* - *и)*.



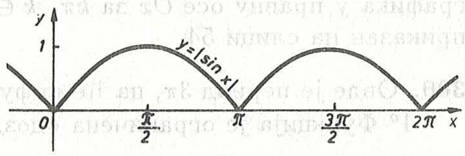
Сл. 53.*а)*



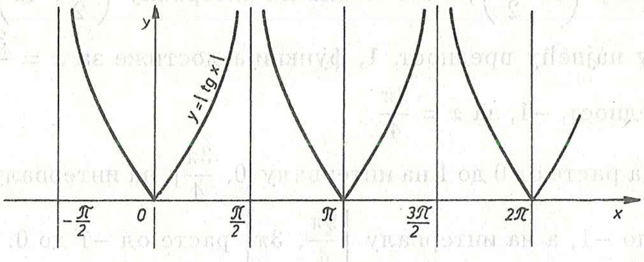
Сл. 53.*в)*



Сл. 53.ђ)



Сл. 53.е)

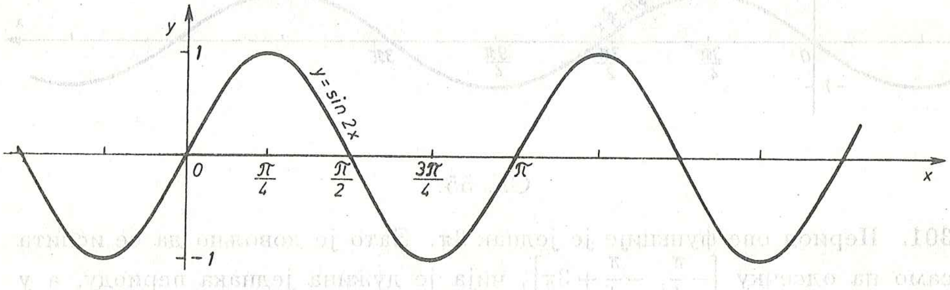


Сл. 53. и)

299. Како је период дате функције једнак π, то је довољно да се она испита само на одсечку $[0, \pi]$.

1^o Функција је ограничена одоздо са -1, а одозго са 1.

2^o На уоченом одсечку ова функција има ове нуле: $0, \dfrac{\pi}{2}, \pi$. Функција је позитивна у интервалу $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, а негативна у интервалу $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$.



Сл. 54

3^o Своју највећу вредност, 1, функција достиже за $x = \dfrac{\pi}{4}$, а своју најмању вредност, -1, за $x = \dfrac{3\pi}{4}$.

Функција расте од 0 до 1 на интервалу $\left[0, \dfrac{\pi}{4}\right]$, затим на интервалу $\left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}\right]$ опада од 1 до -1, а на интервалу $\left[\dfrac{3\pi}{4}, \pi\right]$ расте од -1 до 0.

Наведени подаци о датој функцији омогућују да се скицира њен график над одсечком $[0,\ \pi]$, а затим да се, паралелним померањем овог дела графика у правцу осе Ox за $k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$, добије цео график, који је приказан на слици 54.

300. Овде је период 3π, па ћемо функцију испитати на одсечку $[0,\ 3\pi]$.

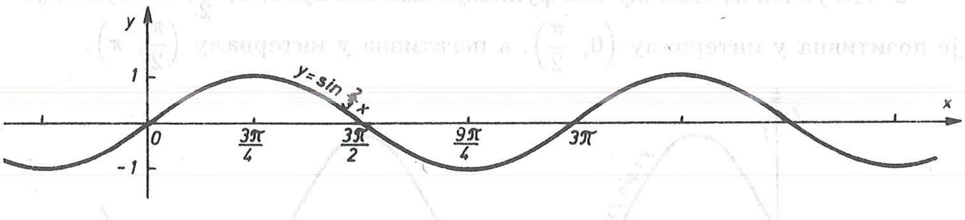
1° Функција је ограничена одоздо са -1, а одозго са 1.

2° Функција има ове нуле на уоченом одсечку: 0, $\frac{3\pi}{2}$, 3π. Позитивна је на интервалу $\left(0,\ \frac{3\pi}{2}\right)$, а негативна на интервалу $\left(\frac{3\pi}{2},\ 3\pi\right)$.

3° Своју највећу вредност, 1, функција достиже за $x = \frac{3\pi}{4}$, а своју најмању вредност, -1, за $x = \frac{9\pi}{4}$.

Функција расте од 0 до 1 на интервалу $[0,\ \frac{3\pi}{4}]$, на интервалу $\left[\frac{3\pi}{4},\ \frac{9\pi}{4}\right]$ опада од 1 до -1, а на интервалу $\left[\frac{9\pi}{4},\ 3\pi\right]$ расте од -1 до 0.

Као и у претходном задатку, на основу наведених података скицирамо део графика дате функције над уоченим одсечком, а од тог дела добија се цео график паралелним померањем у правцу осе Ox за $3k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$. Овај график дат је на слици 55.



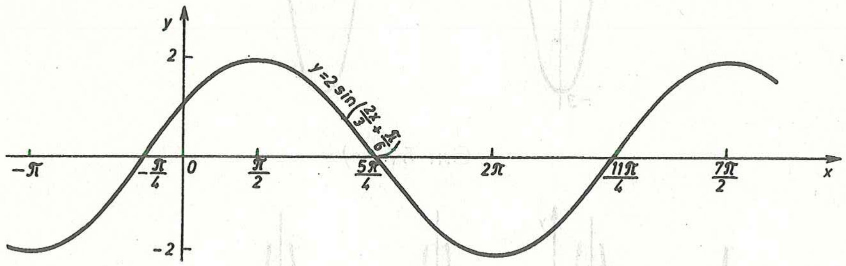
Сл. 55.

301. Период ове функције је једнак 3π. Зато је довољно да се испита само на одсечку $\left[-\frac{\pi}{4},\ -\frac{\pi}{4} + 3\pi\right]$, чија је дужина једнака периоду, а у његовом левом крају фаза функције је једнака 0.

1° Функција је ограничена одоздо са -2, а одозго са 2.

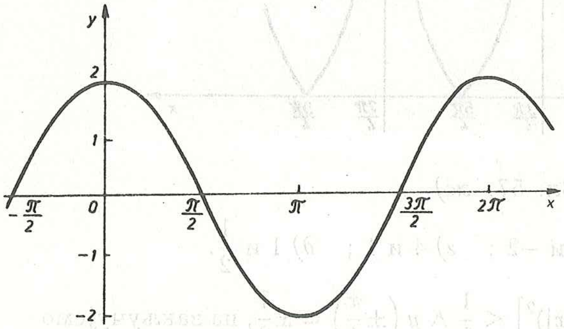
2° Нуле функције на уоченом одсечку су $-\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$ и $\frac{11\pi}{4}$. У интервалу $\left(-\frac{\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right)$ је позитивна, а у интервалу $\left(\frac{5\pi}{4},\ \frac{11\pi}{4}\right)$ негативна.

3° Функција достиже највећу вредност 2 кад је $x = \frac{\pi}{2}$, а најмању вредност -2 за $x = 2\pi$. Функција расто од 0 до 2 на интервалу $\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right]$, затим на интервалу $\left[\frac{\pi}{2},\ 2\pi\right]$ опада од 2 до -2, а на интервалу $\left[2\pi,\ \frac{11\pi}{4}\right]$ расте од -2 до 0. На основу ових података може се скицирати део графика функције над одсечком $\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{11\pi}{4}\right]$, а затим преостали део паралелним померањем дела над одсечком $\left[-\frac{\pi}{4},\ \frac{11\pi}{4}\right]$ у правцу осе Ox за $3k\pi,\ k \in \mathbf{Z},\ k \neq 0$. Скица овог графика дата је на слици 56.

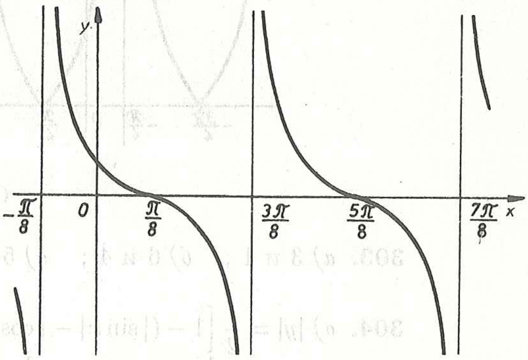


Сл. 56.

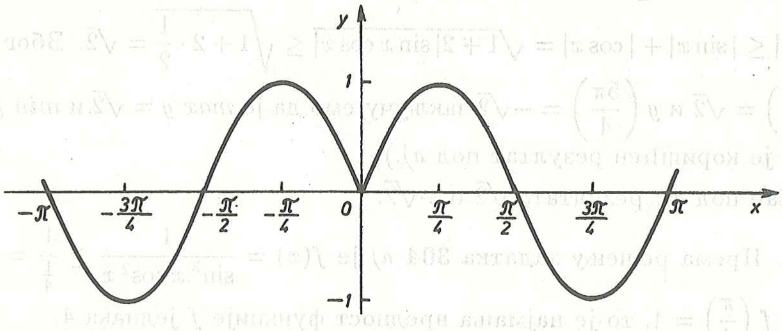
302. Неке од функција приказане су на сл. 57.



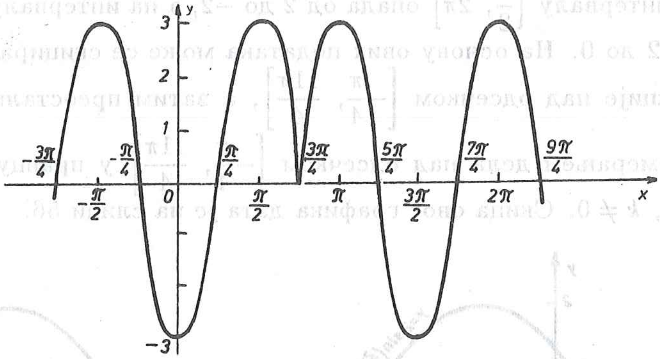
Сл. 57. *в)*



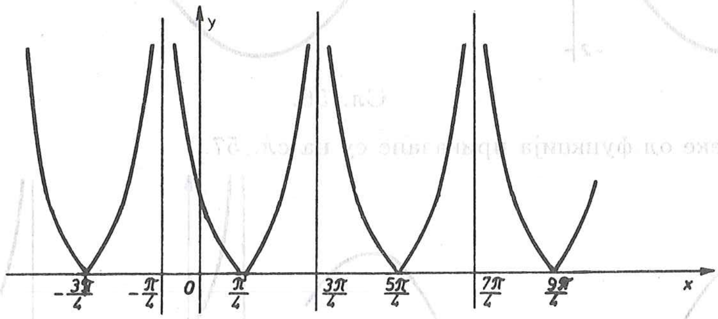
Сл. 57. *д)*



Сл. 57. *ђ)*



Сл. 57. *е)*



Сл. 57. *ж)*

303. *а)* 3 и 1 ; *б)* 6 и 4 ; *в)* 5 и -2 ; *г)* 4 и 1 ; *д)* 1 и $\frac{1}{2}$.

304. *а)* $|y| = \frac{1}{2}\left[1 - (|\sin x| - |\cos x|)^2\right] \leq \frac{1}{2} \wedge y\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) = \pm\frac{1}{2}$, па закључујемо да је $max\ y = \frac{1}{2}$ и $min\ y = -\frac{1}{2}$.

б) $|y| \leq |\sin x| + |\cos x| = \sqrt{1 + 2|\sin x \cos x|} \leq \sqrt{1 + 2 \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{2}$. Због $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$ и $y\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ закључујемо да је $max\ y = \sqrt{2}$ и $min\ y = -\sqrt{2}$ (где је коришћен резултат под *а)*.)

в) Као под *б)*; резултат: $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$.

305. Према решењу задатка **304** *а)* је $f(x) = \frac{1}{\sin^2 x \cos^2 x} \geq \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4$. Како је и $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4$, то је најмања вредност функције f једнака 4.

306. Како је $75^\circ = 30^\circ + 45^\circ$, а тригонометријске функције углова 30° и 45° су раније израчунате, то се $\cos 75^\circ$ може израчунати овако:

$$\cos 75^\circ = \cos(30^\circ + 45^\circ) = \cos 30^\circ \cos 45^\circ - \sin 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3}-1)$. На исти начин ћемо израчунати и $\sin 75^\circ$:

$$\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + \sin 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} =$$

$= \dfrac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$. Даље следи: $\operatorname{tg} 75^\circ = \dfrac{\sin 75^\circ}{\cos 75^\circ} = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{(\sqrt{3}+1)^2}{3-1} = 2+\sqrt{3}$,

$\operatorname{ctg} 75^\circ = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 75^\circ} = \dfrac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$.

307. Најпре налазимо синусе углова α и β: $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = = \sqrt{1-\dfrac{9}{25}} = \sqrt{\dfrac{16}{25}} = \dfrac{4}{5}$, $\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\dfrac{16}{25}} = \sqrt{\dfrac{9}{25}} = \dfrac{3}{5}$, при чему испред корена у оба случаја узимамо знак $+$, јер је синус у првом квадранту позитиван. У наставку примењујемо формулу за косинус збира: $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \dfrac{3}{5}\dfrac{4}{5} - \dfrac{4}{5}\dfrac{3}{5} = 0$.

308. Применимо формулу за тангенс збира: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} =$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-1} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{6}+1)}{6-1} = \frac{3\sqrt{3}+4\sqrt{2}}{5}.$$

309. Како су α, β и γ углови једног троугла, то је $\alpha+\beta+\gamma = \pi$. Одатле следи $\operatorname{tg}\gamma = \operatorname{tg}[\pi - (\alpha+\beta)] = -\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = -\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$, тј. $\operatorname{tg}\gamma = -\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. Притом $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ постоје, јер ниједан од углова α, β, γ није прав. Сем тога, из $\gamma \neq \dfrac{\pi}{2}$ излази да је и $\alpha+\beta \neq \dfrac{\pi}{2}$, па и $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ постоји, што је еквивалентно услову $1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta \neq 0$. Помножимо добијену једнакост са $1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$: $\operatorname{tg}\gamma(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) = -(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)$, тј. $tg\gamma - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma = -\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$. Из ове релације лако се добија тражена једнакост, и то тако што се обема странама дода $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$.

310. Као у задатку **306.** Резултати:

а) $\cos 105^\circ = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, $\sin 105^\circ = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$, $\operatorname{tg} 105^\circ = -2-\sqrt{3}$,
$\operatorname{ctg} 105^\circ = -2+\sqrt{3}$;

б) $\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg} 15^\circ = 2-\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg} 15^\circ = 2+\sqrt{3}$;

в) $\cos 165^\circ = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin 165^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg} 165^\circ = -2+\sqrt{3}$,
$\operatorname{ctg} 165^\circ = -2-\sqrt{3}$;

г) $\cos 195^\circ = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\sin 195^\circ = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, $\operatorname{tg} 195^\circ = 2-\sqrt{3}$,
$\operatorname{ctg} 195^\circ = 2+\sqrt{3}$;

д) $\cos 255^\circ = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$, $\sin 255^\circ = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg} 255^\circ = 2+\sqrt{3}$,
$\operatorname{ctg} 255^\circ = 2-\sqrt{3}$;

ђ) $\cos 285^\circ = \dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, $\sin 285^\circ = -\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, $\operatorname{tg} 285^\circ = -2-\sqrt{3}$,
$\operatorname{ctg} 285^\circ = -2+\sqrt{3}$;

311. *а)* $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right) = \cos\dfrac{\pi}{2}\cos\alpha - \sin\dfrac{\pi}{2}\sin\alpha = -\sin\alpha$.

б) $\sin(\pi+\alpha) = \sin\pi\cos\alpha + \cos\pi\sin\alpha = -\sin\alpha$.

в) $\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right) = \dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{2}\operatorname{ctg}\alpha - 1}{\operatorname{ctg}\dfrac{3\pi}{2}+\operatorname{ctg}\alpha} = -\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$ $(\cos\alpha \neq 0,\ \sin\alpha \neq 0)$.

г) $\operatorname{tg}(\pi-\alpha) = \dfrac{\operatorname{tg}\pi - \operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\pi\operatorname{tg}\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$ $(\cos\alpha \neq 0$.

д) $\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right) = \sin\dfrac{3\pi}{2}\cos\alpha - \cos\dfrac{3\pi}{2}\sin\alpha = -\cos\alpha$.

ђ) $\cos(\pi-\alpha) = \cos\pi\cos\alpha + \sin\pi\sin\alpha = -\cos\alpha$.

312. *а)* $\sin 20^\circ\cos 10^\circ + \cos 20^\circ\sin 10^\circ = \sin(20^\circ+10^\circ) = \sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}$.

б) $\cos 47^\circ\cos 17^\circ + \sin 47^\circ\sin 17^\circ = \cos(47^\circ-17^\circ) = \cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

в) $\cos 20^\circ\cos 40^\circ - \sin 20^\circ\sin 40^\circ = \cos(20^\circ+40^\circ) = \cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$;

г) $\sin 53^\circ\cos 7^\circ + \cos 53^\circ\sin 7^\circ = \sin(53^\circ+7^\circ) = \sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

д) $\dfrac{1+\operatorname{tg} 15^\circ}{1-\operatorname{tg} 15^\circ} = \dfrac{\operatorname{tg} 45^\circ+\operatorname{tg} 15^\circ}{1-\operatorname{tg} 45^\circ\operatorname{tg} 15^\circ} = \operatorname{tg}(45^\circ+15^\circ) = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$;

ђ) $\dfrac{\operatorname{ctg} 55^\circ\operatorname{ctg} 25^\circ+1}{\operatorname{ctg} 25^\circ-\operatorname{ctg} 55^\circ} = \operatorname{ctg}(55^\circ-25^\circ) = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$.

313. Као у задатку **312.** Резултати: *а)* 0; *б)* 0; *в)* 0; *г)* 0.

314. Као у задатку **307.** Резултати:
а) $\dfrac{21}{221}$ и $-\dfrac{171}{221}$; *б)* $\dfrac{63}{65}$, $-\dfrac{16}{65}$ и $-\dfrac{63}{16}$; *в)* $-\dfrac{119}{169}$; *г)* $\dfrac{33}{65}$; *д)* 0 и $\dfrac{24}{25}$;

ђ) $-\dfrac{13}{85}$ и $-\dfrac{77}{85}$; *е)* $-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ и $-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$; *ж)* 0.

315. *а)* $\cos\alpha = -\sqrt{1-\left(\dfrac{12}{13}\right)^2} = -\dfrac{5}{13}$ (због $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$),

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5},\ \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right) = \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha} = \frac{1-\frac{12}{5}}{1+\frac{12}{5}} = -\frac{7}{17}.$$

б) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\frac{1}{5}+\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3}} = 1.$

в) $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{2}{3}$, $\operatorname{ctg}\beta = \dfrac{2}{5}$, $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta) = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha} = \dfrac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}+1}{\frac{2}{5}-\frac{2}{3}} = -\dfrac{19}{4}.$

316. Из $\alpha>0$, $\beta>0$ и $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{3}$ следи $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$, па је $\sin\alpha>0$. Дакле,

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{11}{13}\right)^2} = \frac{4\sqrt{3}}{13},\ \text{и}\ \cos\beta = \cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = \frac{1}{2}\cdot\frac{11}{13}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{4\sqrt{3}}{13} = \frac{23}{26}.$$

317. Као у задатку **316.** Резултати: $\dfrac{12}{13}$ и $\dfrac{5}{13}$.

318. Као у задатку **316.** Резултат: $\dfrac{3}{4}$.

319. *а)* $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\sin\beta\cos\alpha}{\sin(\alpha-\beta)+\sin\beta\cos\alpha} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta+\sin\beta\cos\alpha} =$

$= \dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\cos\beta} = 1$ ($\sin\alpha\neq 0$, $\cos\beta\neq 0$).

б) $\sin\alpha\cos 2\alpha+\cos\alpha\sin 2\alpha = \sin(\alpha+2\alpha) = \sin 3\alpha.$

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}\left[\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)-\alpha\right] = 1$ ($\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\neq 0$, $\cos\alpha\neq 0$,

$1+\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\operatorname{tg}\alpha\neq 0$).

г) $\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta) =$
$= 2\cos\alpha\sin\beta.$

д) $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\alpha\right)-\cos^2\alpha = \left(\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\alpha-\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\alpha\right).$

$$\left(\cos\frac{\pi}{3}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{3}\sin\alpha\right)-\cos^2\alpha=\frac{1}{4}\cos^2\alpha-\frac{3}{4}\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=-\frac{3}{4}.$$

ђ) Као под *д)*. Резултат: $\cos^2\alpha$.

е) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}-\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{4\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$(\cos\alpha\neq 0,\ \operatorname{tg}\alpha\neq 1,\ \operatorname{tg}\alpha\neq -1)$.

ж) $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]=\cos 2\beta$.

з) Као под *г)*. Резултат: $\operatorname{tg}\alpha$ $(\cos\alpha\neq 0,\ \cos\beta\neq 0)$.

и) $\dfrac{\sin 35^\circ\cos 20^\circ-\cos 35^\circ\sin 20^\circ}{\cos 46^\circ\cos 29^\circ-\sin 46^\circ\sin 29^\circ}=\dfrac{\sin(35^\circ-20^\circ)}{\cos(46^\circ+29^\circ)}=\dfrac{\sin 15^\circ}{\cos 75^\circ}=1.$

ј) Као под *и)*. Резултат: 1.

320. *а)* $\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{15}{17}$, $\cos\beta=\dfrac{8}{17}$,

$\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{8}{17}\cdot\dfrac{8}{17}+\dfrac{15}{17}\cdot\dfrac{15}{17}=1$; $\sin(\alpha+\beta)=1\wedge 0<\alpha+\beta<\pi\Rightarrow\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$.

б) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1$; $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=1\wedge 0<\alpha+\beta<\pi\Rightarrow\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$.

в) Као под *б)*.

г) Као под *б)*. $(q\neq 0,\ p+q\neq 0)$.

321. *а)* $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)=\dfrac{1}{2}\cos\alpha+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\dfrac{1}{2}\cos\alpha-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha=$
$=\cos\alpha$.

б) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}=\dfrac{\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha-\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}{\frac{1}{2}\cos\alpha+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha}=$

$=\dfrac{\sqrt{3}\sin\alpha}{\cos\alpha}=\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$ $(\cos\alpha\neq 0)$.

в) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}=$

$=\operatorname{tg}\alpha$ $(\cos\alpha\neq 0,\ \cos\beta\neq 0)$.

г) Као под *в)*. $(\sin\alpha\neq 0,\ \sin\beta\neq 0)$.

д) $\sin 5\alpha\cos 3\alpha-\cos 5\alpha\sin 3\alpha=\sin(5\alpha-3\alpha)=\sin 2\alpha$.

ђ) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=(\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta)\cdot(\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta)=$
$=\sin^2\alpha\cos^2\beta-\cos^2\alpha\sin^2\beta=\sin^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta=$
$=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

е) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}=1$

$(\cos\alpha\neq 0,\ \cos\beta\neq 0,\ \sin(\alpha+\beta)\neq 0)$.

ж) $\sin 25^\circ \cos 35^\circ + \cos 25^\circ \sin 35^\circ = \sin(25^\circ + 35^\circ) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

з) $\cos(\alpha+\beta)\cos\beta + \sin(\alpha+\beta)\sin\beta = \cos\big[(\alpha+\beta)-\beta\big] = \cos\alpha$.

и) $$\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \cos\alpha\cos\beta$$
$(\cos\alpha \neq 0,\ \cos\beta \neq 0,\ \sin(\alpha-\beta) \neq 0)$.

ј) $\sin^2(\alpha+\beta) = \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + 2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta =$
$= \sin^2\alpha(1-\sin^2\beta) + (1-\sin^2\alpha)\sin^2\beta + 2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta = \sin^2\alpha + \sin^2\beta +$
$+ 2\sin\alpha\sin\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + 2\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)$.

к) Као под *ђ)*.

л) $(\sin\alpha + \sin\beta)^2 + (\cos\alpha + \cos\beta)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta + \cos^2\alpha +$
$+ 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta = 2 + 2(\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta) = 2 + 2\cos(\alpha-\beta)$.

љ) $$\frac{2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha-\beta) - 2\sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)$$
$(\cos(\alpha+\beta) \neq 0)$.

м) $$\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta} - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\operatorname{ctg}\beta + \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}$$
$(\cos\alpha \neq 0,\ \sin\beta \neq 0,\ \cos(\alpha+\beta) \neq 0)$.

н) Као под *м)*. $(\cos\alpha \neq 0,\ \cos\beta \neq 0,\ \cos(\alpha-\beta) \neq 0)$.

њ) $$\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \sin\alpha} = \frac{1 + \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{1 - \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}} = \frac{\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4} + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\dfrac{\pi}{4}\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) \neq 0\right).$$

о) $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) - \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}(\alpha+\beta) -$
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta) = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$ $(\cos\alpha \neq 0,\ \cos\beta \neq 0,\ \cos(\alpha+\beta) \neq 0)$.

п) $$\frac{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha^\circ) - \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha^\circ)}{\operatorname{tg}(45^\circ + \alpha^\circ) + \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha^\circ)} =$$
$$= \frac{\dfrac{\sin(45^\circ + \alpha^\circ)\cos(45^\circ - \alpha^\circ) - \cos(45^\circ + \alpha^\circ)\sin(45^\circ - \alpha^\circ)}{\cos(45^\circ + \alpha^\circ)\cos(45^\circ - \alpha^\circ)}}{\dfrac{\sin(45^\circ + \alpha^\circ)\cos(45^\circ - \alpha^\circ) + \cos(45^\circ + \alpha^\circ)\sin(45^\circ - \alpha^\circ)}{\cos(45^\circ + \alpha^\circ)\cos(45^\circ - \alpha^\circ)}} =$$
$$= \frac{\sin\big[(45^\circ + \alpha^\circ) - (45^\circ - \alpha^\circ)\big]}{\sin\big[(45^\circ + \alpha^\circ) + (45^\circ - \alpha^\circ)\big]} = \frac{\sin 2\alpha^\circ}{\sin 90^\circ} = 2\sin\alpha^\circ\cos\alpha^\circ$$
$(\cos(45^\circ + \alpha^\circ) \neq 0,\ \cos(45^\circ - \alpha^\circ) \neq 0)$.

р) Ставити $\beta = 2\alpha$ у идентитету *о)*.

322. $A = \sin^2\alpha\cos^2\beta + \cos^2\alpha\sin^2\beta + 2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta -$
$- 2\sin\alpha\cos\beta(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta) + \cos^2\beta = \cos^2\alpha\sin^2\beta - \sin^2\alpha\cos^2\beta +$
$+ \cos^2\beta = \cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta = \cos^2\alpha$.

323. Из $2\operatorname{tg}\alpha - 3\operatorname{tg}\beta = 0$, тј. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{2}\operatorname{tg}\beta$, следи

$$(2+3\operatorname{tg}^2\beta)\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=(2+3\operatorname{tg}^2\beta)\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=(2+3\operatorname{tg}^2\beta)\frac{\frac{3}{2}\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\beta}{1+\frac{3}{2}\operatorname{tg}^2\beta}=\operatorname{tg}\beta.$$

324. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \dfrac{\frac{1}{12}+\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{12}\cdot\frac{2}{5}} = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$. Како су тангенси оштрих углова α, β, γ мањи од 1, то су сви ови углови мањи од $\frac{\pi}{4}$, па је $0 < \alpha+\beta+\gamma < \frac{3\pi}{4}$.

Из $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma) = 1$ и $0 < \alpha+\beta+\gamma < \frac{3\pi}{4}$ следи $\alpha+\beta+\gamma = \frac{\pi}{4}$.

325. Као у задатку **307.** Резултат: $\dfrac{8\sqrt{2}-9\sqrt{3}}{23}$.

326. Као у задатку **307.** Резултат: 0.7 (приближно).

327. Као у задатку **308.** Резултат: $\dfrac{1}{3}$.

328. Као у задатку **307.** Резултат: $\dfrac{24\sqrt{5}+2\sqrt{6}+2\sqrt{2}-\sqrt{15}}{60}$.

329. Као у задатку **322.** $Y = \sin^2\alpha$.

330. Као у задатку **316.** Резултат: $\dfrac{2}{3}$.

331. *а)* $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta} = \dfrac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}} = \dfrac{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta} = \dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}$

$(\cos\alpha \neq 0,\ \cos\beta \neq 0,\ \sin(\alpha+\beta) \neq 0)$.

б) $\sin mx = \sin\big[(m-1)x+x\big] = \sin(m-1)x\cos x + \cos(m-1)x\sin x =$
$2\sin(m-1)x\cos x - \sin(m-1)x\cos x + \cos(m-1)x\sin x = 2\sin(m-1)x\cos x -$
$\sin\big[(m-1)x-x\big] = 2\sin(m-1)x\cos x - \sin(m-2)x$.

в) Као под *б)*.

332. *б)* $\sin\alpha = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\gamma\right) = \cos\gamma = \dfrac{4}{5}$,

$\sin\beta = \sin(\alpha+\gamma) = \sin\alpha\cos\gamma + \cos\alpha\sin\gamma = \dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{4}{5} + \left(-\dfrac{3}{5}\right)\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{7}{25}$.

333. $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos^2\alpha+\cos^2\beta+2\cos\alpha\cos\beta)+$ $+\frac{1}{2}(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta)-1=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\cos\beta)^2+\frac{1}{2}(\sin\alpha+\sin\beta)^2-1=$ $=\frac{a^2+b^2-2}{2}.$

334. Ако је $\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{\sin^2\gamma}{\sin^2\alpha}=1$, тада је $\sin^2\gamma=\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}(\alpha-\beta)$ (а, разуме се, и $\cos\alpha\neq 0$, $\sin\alpha\neq 0$, $\cos(\alpha-\beta)\neq 0$). На основу тога рачунамо: $\operatorname{tg}^2\gamma=\frac{\sin^2\gamma}{1-\sin^2\gamma}=\frac{\sin^2\alpha-\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=$

$$=\frac{\sin\alpha\left[\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\right]}{\cos\alpha\left[1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\right]}=\operatorname{tg}\alpha\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}[\alpha-(\alpha-\beta)]=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta,$$

при чему узимамо у обзир да је $\cos[\alpha-(\alpha-\beta)]\neq 0 \iff 1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(\alpha-\beta)\neq 0$ (јер је $\cos\alpha\neq 0$, $\cos(\alpha-\beta)\neq 0$).

335. Из формуле за $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$ може да се $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1$ замени са $(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$ и добије се $(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta)[\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)+\operatorname{ctg}\gamma]=0$, односно $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)+\operatorname{ctg}\gamma=0$, што је еквивалентно са $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\operatorname{ctg}(\pi-\gamma)$. Како је овде $0<\alpha+\beta<\pi$ и $\frac{\pi}{2}<\pi-\gamma<\pi$, то мора бити $\alpha+\beta=\pi-\gamma$, тј. $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

336. Из $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ следи да је $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$. Кад се ово замени у датој релацији, добије се $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=\sin^2\alpha\cos^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta+$ $+2\sin\alpha\cos\beta\cos\alpha\sin\beta$, што, после сређивања и дељења са $2\sin\alpha\sin\beta$ доводи до једнакости $\sin\alpha\sin\beta=\cos\alpha\cos\beta$, тј. $\cos(\alpha+\beta)=0$. Како је овде $0<\alpha+\beta<\pi$, то мора бити $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, односно $\gamma=\frac{\pi}{2}$.

337. $\frac{\sin 20^\circ\cos 10^\circ+\cos 160^\circ\cos 100^\circ}{\sin 21^\circ\cos 9^\circ+\cos 159^\circ\cos 99^\circ}=$

$$=\frac{\sin 20^\circ\cos 10^\circ+(-\cos 20^\circ)(-\sin 10^\circ)}{\sin 21^\circ\cos 9^\circ+(-\cos 21^\circ)(-\sin 9^\circ)}=\frac{\sin(20^\circ+10^\circ)}{\sin(21^\circ+9^\circ)}=1.$$

338. $f=p(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+\frac{\sin 3\alpha\cos\alpha-\cos 3\alpha\sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=p+\frac{\sin(3\alpha-\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=$ $=p+\frac{\sin(\alpha+\alpha)}{\sin\alpha\cos\alpha}=p+\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}=p+2.$

339. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=\frac{-\frac{b}{a}}{1-\frac{c}{a}}=\frac{b}{c-a},$

$\cos^2(\alpha+\beta)=\dfrac{1}{1+\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)}=\dfrac{(c-a)^2}{(c-a)^2+b^2}$,

$a\sin^2(\alpha+\beta)+b\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+c\cos^2(\alpha+\beta)=\cos^2(\alpha+\beta)\big[a\operatorname{tg}^2(\alpha+\beta)+$
$+b\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+c\big]=\dfrac{(c-a)^2}{(c-a)^2+b^2}\cdot\left[a\dfrac{b^2}{(c-a)^2}+b\dfrac{b}{c-a}+c\right]=c.$

340. $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}-\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha-\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha}{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha}=\dfrac{\sin\left(\alpha-\dfrac{\alpha}{2}\right)}{\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha}>1.$

341. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\cos\alpha-\cos(\alpha+\beta)\sin\alpha}{\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha}=\dfrac{\sin\big[(\alpha+\beta)-\alpha\big]}{\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha}=$
$=\dfrac{\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha}=\operatorname{tg}\alpha.$

342. $a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta=(a+b)\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\wedge\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\neq 0\Rightarrow a\left(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)=$
$=b\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\operatorname{tg}\beta\right)\wedge\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\neq 0\Rightarrow a\dfrac{\sin\left(\alpha-\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right)}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta}=b\dfrac{\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\beta\right)}{\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\beta}\wedge$
$\wedge\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\neq 0\Rightarrow a\cos\beta=b\cos a.$

343. Како је $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\big[k\alpha-(k-1)\alpha\big]=\dfrac{\operatorname{tg}k\alpha-\operatorname{tg}(k-1)\alpha}{1+\operatorname{tg}k\alpha\operatorname{tg}(k-1)\alpha}$, то је
$\operatorname{tg}(k-1)\alpha\operatorname{tg}k\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}k\alpha-\operatorname{tg}(k-1)\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}-1$ за $\operatorname{tg}\alpha\neq 0$ и $k=2,3,\ldots n$, тако да је
$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}2\alpha\operatorname{tg}3\alpha+\cdots+\operatorname{tg}(n-1)\alpha\operatorname{tg}n\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}-1+\dfrac{\operatorname{tg}3\alpha-\operatorname{tg}2\alpha}{\operatorname{tg}a}-$
$1+\cdots+\dfrac{\operatorname{tg}n\alpha-\operatorname{tg}(n-1)\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}-1=\dfrac{\operatorname{tg}n\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}-n$, $(\cos k\alpha\neq 0,\ k=1,2,\ldots,n;$
$\sin\alpha\neq 0)$.

344. Како је $\dfrac{\sin 1}{\cos(k-1)\cos k}=\dfrac{\sin k\cos(k-1)-\cos k\sin(k-1)}{\cos(k-1)\cos k}=\operatorname{tg}k-$
$\operatorname{tg}(k-1)$ за $k=1,2,\ldots,n$, то је $\dfrac{\sin 1}{\cos 0\cos 1}+\dfrac{\sin 1}{\cos 1\cos 2}+\cdots+\dfrac{\sin 1}{\cos(n-1)\cos n}=$
$\operatorname{tg}1+(\operatorname{tg}2-\operatorname{tg}1)+\cdots+\big[\operatorname{tg}n-\operatorname{tg}(n-1)\big]=\operatorname{tg}n.$

345. $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+\dfrac{\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}-1}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\gamma}{2}\right)}=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}+$ $+\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}-1\right)=\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}.$

346. Обележимо збир на левој страни неједнакости са S_n. Примењујући познату неједнакост између аритметичке и геометријске средине три позитивна броја, као и једнакост из претходног задатка, налазимо најпре да је $S_1 \geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}}=3S_1^{\frac{1}{3}}$, тј. $S_1\geqslant 3^{\frac{3}{2}}$, а затим и $S_n \geqslant 3\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^n\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}^n\dfrac{\beta}{2}\operatorname{ctg}^n\dfrac{\gamma}{2}}=3S_1^{\frac{n}{3}}\geqslant 3(3^{\frac{3}{2}})^{\frac{n}{3}}=3^{\frac{n+2}{2}}$ за $n\in\mathbf{N}$. Јасно је да се једнакост остварује ако је $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}=\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}=\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}$, тј. ако је $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

347. Ставимо $\operatorname{tg}x=ka$, $\operatorname{tg}y=kb$, $\operatorname{tg}z=kc$. Тада је, према задатку **288**, $k(a+b+c)=k^3abc$, одакле се добија $k=\sqrt{\dfrac{a+b+c}{abc}}$. Дакле, $\operatorname{tg}x=\sqrt{\dfrac{a(a+b+c)}{bc}}$, $\operatorname{tg}y=\sqrt{\dfrac{b(a+b+c)}{ac}}$, $\operatorname{tg}z=\sqrt{\dfrac{c(a+b+c)}{ab}}$.

348. Како је $\dfrac{\cos kx}{\cos^k x}=\dfrac{\cos kx\sin x}{\cos^k x\sin x}=\dfrac{(\sin kx\cos x+\cos kx\sin x)-\sin kx\cos x}{\cos^k x\sin x}=$ $=\dfrac{\sin(k+1)x}{\cos^k x\sin x}-\dfrac{\sin kx}{\cos^{k-1}x\sin x}$ за $k=1,2,\ldots,n$, то је

$$S_n=1+\left(\frac{\sin 2x}{\cos x\sin x}-\frac{\sin x}{\sin x}\right)+\left(\frac{\sin 3x}{\cos^2 x\sin x}-\frac{\sin 2x}{\cos x\sin x}\right)+\cdots+$$
$$+\left[\frac{\sin(n+1)x}{\cos^n x\sin x}-\frac{\sin nx}{\cos^{n-1}x\sin x}\right]=\frac{\sin(n+1)x}{\cos^n x\sin x},$$ под условом да је $\sin x\neq 0$. Међутим, ако је $\sin x=0$, тада је сваки сабирак једнак 1, па је $S_n=n+1$.

349. Према услову задатка имамо: $A\cos x_1+B\sin x_1=0$, $A\cos x_2+B\sin x_2=0$ и $\sin(x_1-x_2)\neq 0$. Ако се прва од ових једнакости помножи са $-\sin x_2$, а друга са $\sin x_1$, па се саберу, добије се $A(-\sin x_2\cos x_1+\sin x_1\cos x_2)=0$, тј. $A\sin(x_1-x_2)=0$. Како је $\sin(x_1-x_2)\neq 0$, то мора да буде $A=0$. На сличан начин се закључује да је $B=0$. Дакле, заиста је $f(x)=0$ за $x\in\mathbf{R}$.

350. Обележимо збир на левој страни једнакости са S_n. Како је $\dfrac{1}{\sin 2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha\sin\alpha}=\dfrac{\sin 2\alpha\cos\alpha-\cos 2\alpha\sin\alpha}{\sin 2\alpha\sin\alpha}=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha$, то је $S_n=(\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2x)+(\operatorname{ctg}2x-\operatorname{ctg}4x)+\cdots+(\operatorname{ctg}2^{n-1}x-\operatorname{ctg}2^n x)=\operatorname{ctg}x-\operatorname{ctg}2^n x$.

351. Из услова задатка следи да је $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$ и да постоје тангенси и котангенси свих ових углова. Сама једнакост може да се утврди овако: $\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\delta=$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\delta+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}\left[\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta(\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta)+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)\right]=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}\left[\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}(\gamma+\delta)(1-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta)+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta\operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)\right]=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}\operatorname{tg}(\alpha+\beta)(\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}\left[\operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}(\gamma+\delta)(1-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta)\right]=$$

$$=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}\left[(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)+(\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta)\right]=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta}.$$

352. Ако бројеви $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$ нису сви једнаки 0, тада и бројеви $1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$, $1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$, $1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\gamma$ имају исто својство, јер из, на пример, $1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=0$ следи $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma=-\operatorname{tg}\gamma(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)=0$, а из $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=0$ следи $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\gamma=0$. Нека је, на пример $1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\neq 0$. Тада је, на основу дате релације, $0=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)+\operatorname{tg}\gamma(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)=(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)\left[\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}\gamma\right]$, одакле излази да је $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}\gamma=0$, тј. $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(-\gamma)$, што значи да је $\alpha+\beta=-\gamma+k\pi$, тј. $\alpha+\beta+\gamma=k\pi$, за неки $k\in\mathbf{Z}$. Лако је видети да исто важи и у случају кад је $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\gamma=0$.

353. Према задатку **321.** *п)* имамо
$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta>0$.

354. Најпре налазимо $\cos\alpha$: $\cos\alpha=-\sqrt{1-0.8^2}=-0,6$. Испред корена узимамо знак $-$ зато што је $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, па је $\cos\alpha<0$. Даље налазимо $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=(-0.6)^2-(0.8)^2=-0.28$, $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=$ $=2\cdot 0.8\cdot(-0.6)=-0.96$, $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=3.428\cdots\approx 3.43$.

355. $\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha=2\sin\alpha\cos^2\alpha+(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\sin\alpha=3\sin\alpha\cos^2\alpha-\sin^3\alpha=3\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)-\sin^3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$. Тражена формула гласи: $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$.

356. Ове формуле можемо извести на следећи начин:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha 2\operatorname{tg}\alpha}{\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\frac{\cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{\cos^2\alpha(1+\operatorname{tg}^2\alpha)}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

357. Као у задатку **354.** Резултати: $-\dfrac{17}{32}$ и $\dfrac{7\sqrt{15}}{32}$.

358. Као у задатку **354.** Резултати:
а) $\dfrac{7}{25}, -\dfrac{24}{25}, -\dfrac{24}{7}$; *б)* $\dfrac{7}{25}, \dfrac{24}{25}, \dfrac{24}{7}$; *в)* $-\dfrac{119}{169}, -\dfrac{120}{169}, \dfrac{120}{119}$; *г)* $0.28, -0.96, -3.43$.

359. $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{2(-2)}{1-(-2)^2} = \dfrac{4}{3}$.

360. $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} = \dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{4}{3}$, $\operatorname{tg} 4\alpha = \dfrac{2\cdot\frac{4}{3}}{1-\left(\frac{4}{3}\right)^2} = -\dfrac{24}{7}$.

361. Као у задатку **354.** Резултати: $\dfrac{6ab-a^2-b^2}{(a+b)^2}, \dfrac{-4|a-b|\sqrt{ab}}{(a+b)^2}$.

362. Као у задатку **354.** Резултати: $\dfrac{6mn-m^2-n^2}{(m+n)^2}, \dfrac{4(n-m)\sqrt{mn}}{(m+n)^2}$.

363. Као у задатку **354.** Резултати: *а)* 1; *б)* $-\dfrac{253}{325}$.

364. *а)* $\dfrac{1}{2\cos 10^\circ}$; *б)* $\dfrac{\sin 5^\circ}{2\cos 5^\circ}$; *в)* $\dfrac{1}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$ $(\sin\alpha \neq 0)$; *г)* $\dfrac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}$ $(\sin 2\alpha \neq 0)$; *д)* $\dfrac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}$ $(\sin 2\alpha \neq 0)$; *ђ)* $\cos\alpha + \sin\alpha$ $(\cos\alpha \neq \sin\alpha)$; *е)* $\cos 10^\circ - \sin 10^\circ$.

365. Као у задатку **355.** *а)* $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$; *б)* $\operatorname{tg} 3\alpha = \dfrac{3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$ $\left(\cos\alpha \neq 0,\ \operatorname{tg}\alpha \neq \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \operatorname{tg}\alpha \neq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

366. *а)* $\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha} - \dfrac{\cos 6\alpha}{\cos 2\alpha} = (4\cos^2\alpha - 3) - (4\cos^2 2\alpha - 3) = (4\cos^2\alpha - 2) - (4\cos^2 2\alpha - 2) = 2\cos 2\alpha - 2\cos 4\alpha = 2(\cos 2\alpha - \cos 4\alpha)$ $(\cos\alpha \neq 0,\ \cos 2\alpha \neq 0)$ (коришћена формула из задатка **365.** *а)*).

б) $\left(\dfrac{\sin 3\alpha}{\sin\alpha}\right)^3 + \left(\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos\alpha}\right)^3 = (3-4\sin^2\alpha)^3 + (4\cos^2\alpha - 3)^3 = (1+2\cos 2\alpha)^3 + (2\cos 2\alpha - 1)^3 = 16\cos^3 2\alpha + 12\cos 2\alpha = 8\cos 2\alpha(2\cos^2 2\alpha - 1) + 20\cos 2\alpha = 8\cos 2\alpha\cos 4\alpha + 20\cos 2\alpha$ $(\sin\alpha \neq 0,\ \cos\alpha \neq 0)$ (коришћене формуле из задатака **355.** и **365.** *а)*).

367. $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\alpha + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha - \sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha} =$

$= \dfrac{3(3\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha)}{1 - 3\operatorname{tg}^2\alpha} = 3\operatorname{tg}3\alpha$ $(\cos\alpha \neq 0,\ \operatorname{tg}\alpha \neq \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \operatorname{tg}\alpha \neq -\dfrac{1}{\sqrt{3}})$ (коришћена формула из задатка **365.** *б)*).

368. $\cos\alpha < 1 \wedge \sin\alpha > 0 \Rightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha < 2\sin\alpha \Rightarrow \sin 2\alpha < 2\sin\alpha$.

369. *а)* $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} = \dfrac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} = \dfrac{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} = 1$ $(\sin\alpha \neq -\cos\alpha)$.

б) $1 - 8\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1 - 2(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin^2 2\alpha = \cos 4\alpha$.

в) 1.

г) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)} = \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)} = 2\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)$ $\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right) \neq 0\right)$.

д) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{\operatorname{tg}(\alpha + \pi)}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}\alpha} + \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \operatorname{tg}2\alpha$
$(\operatorname{tg}\alpha \neq 1,\ \operatorname{tg}\alpha \neq -1)$.

ђ) $2\cos 2\alpha$. *е)* 1;

ж) $(\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - \sin^2\alpha)^2 = (\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)^2 = \cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha\sin 2\alpha = 1 + \sin 4\alpha$.

370. Дајемо упутства и решења за неке идентичности.

е) $\dfrac{\sin\alpha + \sin 2\alpha}{1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha} = \dfrac{\sin\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha + 2\cos^2\alpha} = \dfrac{\sin\alpha(1 + 2\cos\alpha)}{\cos\alpha(1 + 2\cos\alpha)} = \operatorname{tg}\alpha$
$\left(\cos\alpha \neq 0,\ \cos\alpha \neq -\dfrac{1}{2}\right)$.

з) Као под *е)* $\left(\cos\alpha \neq 0,\ \cos\alpha \neq \dfrac{1}{2}\right)$.

и) $\dfrac{2 - \sin 4\alpha\operatorname{tg}2\alpha}{\sin 4\alpha} = \dfrac{2 - 2\sin 2\alpha\cos 2\alpha\dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}}{\sin 4\alpha} = \dfrac{2 - 2\sin^2 2\alpha}{\sin 4\alpha}\,\dfrac{2\cos^2 2\alpha}{2\sin 2\alpha\cos 2\alpha} = \operatorname{ctg}2\alpha$ $(\sin 4\alpha \neq 0)$.

ј) $\cos^4\alpha + \sin^4\alpha = (\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha = 1 - 0.5\,(2\cos\alpha\sin\alpha)^2 = 1 - 0.5\sin^2 2\alpha$.

к) $\cos 4\alpha + 4\cos 2\alpha + 3 = 2\cos^2 2\alpha - 1 + 4\cos 2\alpha + 3 = 2(\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha + 1) = 2(\cos 2\alpha + 1)^2 = 8\cos^4\alpha$.

л) $\dfrac{(1 - \sin^2 2\alpha)\left[(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)^2 + 4\operatorname{tg}^2\alpha\right]}{(1 + \sin^2 2\alpha)\left[(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)^2 - 4\operatorname{tg}^2\alpha\right]} = \dfrac{(1 - \sin^2 2\alpha)\left(\dfrac{1}{\cos^4\alpha} + \dfrac{4\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)}{(1 + \sin^2 2\alpha)\left(\dfrac{1}{\cos^4\alpha} - \dfrac{4\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}\right)} =$

$= \dfrac{(1 - \sin^2 2\alpha)(1 + 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha)}{(1 + \sin^2 2\alpha)(1 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha)} = \dfrac{(1 - \sin^2 2\alpha)(1 + \sin^2 2\alpha)}{(1 + \sin^2 2\alpha)(1 - \sin^2 2\alpha)} = 1$
$(\cos\alpha \neq 0,\ \operatorname{tg}\alpha \neq 1,\ \operatorname{tg}\alpha \neq -1)$.

љ) $\dfrac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}=\dfrac{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\dfrac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}=$
$=\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}\ (\cos 2\alpha\neq 0)$.

м) $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha+1}{\sin\alpha+\cos\alpha-1}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}+2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=$

$=\dfrac{\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\cos^2\frac{\alpha}{2}-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}=\dfrac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}\ \left(\sin\frac{\alpha}{2}\neq 0,\ \cos\alpha\neq 0\right)$.

н) $\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2\alpha-6}{\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{ctg}^2+2}=\dfrac{(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha)^2-4}{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)^2}=\dfrac{\left(\dfrac{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}\right)^2-4}{\left(\dfrac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos\alpha\sin\alpha}\right)^2}=$

$=\dfrac{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)^2-4\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2}=\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\alpha=\cos 4\alpha\ (\cos\alpha\neq 0,\ \sin\alpha\neq 0)$.

њ) $\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha=\dfrac{1}{16\sin\alpha}16\sin\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha=$
$=\dfrac{1}{16\sin\alpha}8\sin 2\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha=\dfrac{1}{16\sin\alpha}4\sin 4\alpha\cos 4\alpha\cos 8\alpha=$
$=\dfrac{1}{16\sin\alpha}2\sin 8\alpha\cos 8\alpha=\dfrac{\sin 16\alpha}{16\sin\alpha}\ (\sin\alpha\neq 0)$.

371. $\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha}+\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=$
$=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=2\left(\dfrac{1}{\sin^2\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}\right)-2=$
$=\dfrac{2}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha}-2=\dfrac{8}{\sin^2 2\alpha}-2,\ \dfrac{8}{\sin^2 2\alpha}-2=7\Rightarrow\sin^2 2\alpha=\dfrac{8}{9}$.

372. $\operatorname{tg}2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}-2\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}^3\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}2\alpha$,
$0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}\Rightarrow 0<2\alpha<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\operatorname{tg}2\alpha>0\Rightarrow\operatorname{tg}2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha>0$. Веће је $\operatorname{tg}2\alpha$.

373. Према решењу задатка **371.** имамо $f(x)=\dfrac{8}{\sin^2 2x}-1$. Како је $\sin^2 2x\leqslant 1$, то је $f(x)\geqslant 7$. Функција f достиже вредност 7 кад год је $\sin^2 2x=1$, на пример за $x=\dfrac{\pi}{4}$. Дакле, минимум функције f је једнак 7.

374. *а)* Како је $\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$ (видети решење задатка **334**), то је $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\dfrac{4\sin\alpha-4\sin^3\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\dfrac{4\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)}{2\cos^2\alpha}=2\sin\alpha\ (\cos\alpha\neq 0)$.

б) в) г) – као под *а)*.

375. *а)* $\frac{\pi}{4} \leqslant \alpha \leqslant \frac{3\pi}{4} \Rightarrow S = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha - 2\sin\alpha\cos\alpha} -$
$-\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha} = \sqrt{(\sin\alpha - \cos\alpha)^2} - \sqrt{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2} =$
$= |\sin\alpha - \cos\alpha| - |\sin\alpha + \cos\alpha| = (\sin\alpha - \cos\alpha) - (\sin\alpha + \cos\alpha) = -2\cos\alpha.$
б) в) г) – као под *а)*.

376. Видети решење претходног задатка. Резултати: *а)* $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$; *б)* $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$.

377. *а)* $\frac{\cos 2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}} = \frac{\cos 2\alpha \sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha} =$

$= \frac{\cos 2\alpha \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{1}{4}\sin^2 2\alpha \ (\sin\alpha \neq 0,\ \cos\alpha \neq 0,\ \cos 2\alpha \neq 0).$

б) $\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{ctg}^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha} + \frac{1}{2}\sin 2\alpha \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\cos^4\alpha + \sin^4\alpha}{\cos^4\alpha - \sin^4\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos 2\alpha} =$
$= \frac{\cos^4\alpha + \sin^4\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} + \frac{2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{\cos^4\alpha + \sin^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{\cos 2\alpha} =$
$= \frac{(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2}{\cos 2\alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha} \ (\sin\alpha \neq 0,\ \cos\alpha \neq 0,\ \cos 2\alpha \neq 0).$

в) $\operatorname{ctg}\alpha - 2\operatorname{ctg} 2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha \ (\sin 2\alpha \neq 0).$
г) Користимо резултат под *в)*: $\operatorname{tg} x + 2\operatorname{tg} 2x + 4\operatorname{tg} 4x + 8\operatorname{ctg} 8x =$
$= (\operatorname{ctg} x - 2\operatorname{ctg} 2x) + 2(\operatorname{ctg} 2x - 2\operatorname{ctg} 4x) + 4(\operatorname{ctg} 4x - 2\operatorname{ctg} 8x) + 8\operatorname{ctg} 8x = \operatorname{ctg} x$
$(\sin 8x \neq 0)$.

д) $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{(1+\operatorname{tg}\alpha)^2} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}{\left(1+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2} = \frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+2\cos\alpha\sin\alpha} =$

$= \frac{\sin 2\alpha}{2(1+\sin 2\alpha)} \ (\cos\alpha \neq 0,\ \operatorname{tg}\alpha \neq -1).$

ђ) $\frac{1 - 2\cos 2\alpha}{1 + 2\cos 2\alpha} = \frac{1 - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha}{1 + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha} = \frac{3\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}{3\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{3\operatorname{tg}^2\alpha - 1}{3 - \operatorname{tg}^2\alpha}$
$(\cos\alpha \neq 0,\ \operatorname{tg}^2\alpha \neq 3)$.

378. $\frac{\sin^2\beta}{\sin^2\gamma} = \frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\gamma} \iff \sin^2\beta\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \sin^2\gamma\frac{\sin\beta}{\cos\beta} \iff \sin\beta\cos\beta =$
$= \sin\gamma\cos\gamma \iff \sin 2\beta = \sin 2\gamma$ (јер је $\sin\beta \neq 0,\ \sin\gamma \neq 0,\ \cos\beta \neq 0,\ \cos\gamma \neq 0$);
$\sin 2\beta = \sin 2\gamma \wedge 0 < 2\beta < \pi \wedge 0 < 2\gamma < \pi \Rightarrow 2\beta = 2\gamma \vee 2\beta = \pi - 2\gamma.$

379. Према задатку **356.** имамо $\cos 2\alpha = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \dfrac{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}$. Ако је $\operatorname{tg}^2\alpha - a\operatorname{tg}\alpha + 1 = 0$, онда је и $1 - a\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha = 0$, тј. $\operatorname{ctg}^2\alpha - a\operatorname{ctg}\alpha + 1 = 0$. Како је $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{4}$, то је $\operatorname{ctg}\alpha > \operatorname{tg}\alpha$, па је $\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha = \sqrt{D} = \sqrt{a^2-4}$. Дакле, $\cos 2\alpha = \dfrac{\sqrt{a^2-4}}{a}$.

380. $\cos(\alpha+\beta) = 0 \Rightarrow \sin(\alpha+2\beta) = \sin[2(\alpha+\beta)-\alpha] = \sin 2(\alpha+\beta)\cos\alpha - \cos 2(\alpha+\beta)\sin\alpha = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)\cos\alpha - [2\cos^2(\alpha+\beta)-1]\sin\alpha = \sin\alpha$.

381. Како је $\cos 54^\circ = 4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ$ (с обзиром на формулу из задатка **365.***а)*) и $\cos 54^\circ = \sin 36^\circ$, то је $4\cos^3 18^\circ - 3\cos 18^\circ = 2\sin 18^\circ \cos 18^\circ$, тј. $4\cos^2 18^\circ - 3 = 2\sin 18^\circ$. Одавде се добија квадратна једначина по $\sin 18^\circ$: $4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1 = 0$, чија решења су $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$ и $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{4}$. Како је $\sin 18^\circ > 0$; то мора бити $\sin 18^\circ = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

382. $\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7} = \dfrac{1}{8\sin\frac{\pi}{7}}8\sin\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{\pi}{7}\cos\dfrac{2\pi}{7}\cos\dfrac{4\pi}{7} =$

$$= \frac{1}{8\sin\frac{\pi}{7}}4\sin\frac{2\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{1}{8\sin\frac{\pi}{7}}2\sin\frac{4\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} = \frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{8\sin\frac{\pi}{7}} = -\frac{1}{8}.$$

383. $\sin\dfrac{\pi}{24}\sin\dfrac{5\pi}{24}\sin\dfrac{7\pi}{24}\sin\dfrac{11\pi}{24} = \sin\dfrac{\pi}{24}\cos\dfrac{\pi}{24}\sin\dfrac{5\pi}{24}\cos\dfrac{5\pi}{24} =$

$$= \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{12}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{5\pi}{12} = \frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{8}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{16}.$$

384. $\dfrac{1}{\sin 10^\circ} - \dfrac{\sqrt{3}}{\cos 10^\circ} = \dfrac{\cos 10^\circ - \sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \dfrac{2\sin(30^\circ - 10^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ} = 4.$

385. *а)* Као у задатку **382.**

б) $\sin 10^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ = \cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ = \dfrac{1}{8}$, с обзиром на резултат под *а)*.

386. $\cos\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \sqrt{\dfrac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$,

$$\sin\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},$$
$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{2}-1,\ \operatorname{ctg}\frac{\pi}{8}=\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}=\sqrt{2}+1.$$

387. Као у задатку **386**. Резултати:
$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},\ \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2},$$
$$\cos\frac{\pi}{24}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2},\ \sin\frac{\pi}{24}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}.$$

388. $\sin\frac{7\pi}{12}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)=\cos\frac{\pi}{12}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}=$
$=\frac{1}{2\sqrt{2}}(\sqrt{3}+1)=\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$

$$\cos\frac{3\pi}{8}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{3\pi}{4}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}},$$
$$\cos\frac{3\pi}{16}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{3\pi}{8}\right)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)}=\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}},$$
$$\operatorname{tg}\frac{11\pi}{24}=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{24}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{24}=\sqrt{\frac{1+\cos\frac{\pi}{12}}{1-\cos\frac{\pi}{12}}}=\sqrt{\frac{4+\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4-\sqrt{6}-\sqrt{2}}}.$$

389. *а)* $\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+0.8}{2}}=0.948\cdots\approx 0.95,\ \sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-0.8}{2}}=0.316\cdots\approx$ $\approx 0.32,\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-0.8}{1+0.8}}=\frac{1}{3}\approx 0.33$; пред сваким кореном је узет знак $+$ јер из $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ следи $\cos\frac{\alpha}{2}>0,\ \sin\frac{\alpha}{2}>0,\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}>0$.

б) $\cos\alpha=-0.8,\ \cos\frac{\alpha}{2}\approx 0.32,\ \sin\frac{\alpha}{2}\approx 0.95,\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3.$

в) $\cos\alpha=-\frac{3}{5},\ \cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{5}}{5},\ \sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{2\sqrt{5}}{5},\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=2.$

г) $\cos\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2},\ \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{2}-1.$

д) $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{39}}{8},\ \sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{5}{8},\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{5\sqrt{39}}{39}.$

ђ) $\cos\alpha=-\frac{7}{25}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{3}{5}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{4}{3}$.

е) $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{\sqrt{26}}{26}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{5\sqrt{26}}{26}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-5$.

ж) $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{12}{13}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{5}{13}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\frac{5}{12}$.

з) $\cos\alpha=-\frac{527}{625}$, $\cos\frac{\alpha}{2}=-\frac{7}{25}$, $\sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{24}{25}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{24}{7}$.

390. *а)* $|\cos 2\alpha|$; *б)* 1; *в)* $\sqrt{2}|\cos 4\alpha|$; *г)* $\left|\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right|$ $(\cos\alpha\neq-1)$;
д) $\sin^2\alpha$ $(\sin\alpha\neq 1,\ \cos\alpha\neq-1)$; *ђ)* 0 $(\sin\alpha\neq-1)$.

391. *а)* $2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha^\circ}{2}\right)=1+\cos(90^\circ-\alpha^\circ)=1+\sin\alpha^\circ$.
б) Као под *а)*.
в) $\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha}{2\sin\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}$ $(\sin\alpha\neq 0)$.
г) $4\cos^4\frac{\alpha}{2}=\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)^2=(1+\cos\alpha)^2=1+\cos^2\alpha+2\cos\alpha=2(1+\cos\alpha)-$
$-\sin^2\alpha$.

д) $$\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+1}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}-1}\right)^2=\left(\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}\right)^2=\operatorname{tg}^2\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}{1+\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)}=$$
$$=\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}\ \left(\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0,\ \sin\alpha\neq 1\right).$$

ђ) $$\frac{1+\sin\alpha-\cos\alpha}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}=\frac{1-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=$$
$$=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\ \left(\cos\frac{\alpha}{2}\neq 0,\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\neq-1\right).$$

392. $$\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{5\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=2\left(\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\left[\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(1+\cos\frac{3\pi}{4}\right)^2\right]=1+\cos^2\frac{\pi}{4}=\frac{3}{2}.$$

393. $$\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}=\frac{1-\frac{a}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}}+\frac{1-\frac{b}{a+c}}{1+\frac{b}{a+c}}+\frac{1-\frac{c}{a+b}}{1+\frac{c}{a+b}}=1.$$

394. *а)* $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}+\alpha\right)-\sin^2\left(\frac{\pi}{8}-\alpha\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}+2\alpha\right)}{2}-\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}-2\alpha\right)}{2}=$

$=\frac{1}{2}\left(-\cos\frac{\pi}{4}\cos 2\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin 2\alpha+\cos\frac{\pi}{4}\cos 2\alpha+\sin\frac{\pi}{4}\sin 2\alpha\right)=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{2}}.$

б) $\cos^2\alpha+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-\alpha\right)=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)+$

$+\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{4\pi}{3}+2\alpha\right)\right]+\frac{1}{2}\left[1+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\alpha\right)\right]=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+$

$+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\cos 2\alpha-\sin\frac{4\pi}{3}\sin 2\alpha\right)+\frac{1}{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3}\cos 2\alpha+\sin\frac{4\pi}{3}\sin 2\alpha\right)=\frac{3}{2}$

в) $\frac{2\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha}{3\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha}=\frac{1+\cos 2\alpha+\frac{3}{2}(1-\cos 2\alpha)}{\frac{3}{2}(1+\cos 2\alpha)-(1-\cos 2\alpha)}=\frac{5-\cos 2\alpha}{1+5\cos 2\alpha};$

г) $\frac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos^2\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$

$=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\ \left(\cos\alpha\neq 0,\ \cos\frac{\alpha}{2}\neq 0\right).$

395. $\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{1+a^2}}=-(1+a^2)^{-\frac{1}{2}},\ \sin\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)}=$

$=\sqrt{\frac{1}{2}\left[1+(1+a^2)^{-\frac{1}{2}}\right]},\ \cos\alpha=\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)}=\sqrt{\frac{1}{2}\left[1-(1+a^2)^{-\frac{1}{2}}\right]}.$

396. $3\sin^2\alpha\geqslant 2\sin 2\alpha-1\iff\frac{3}{2}(1-\cos 2\alpha)\geqslant 2\sin 2\alpha-1\iff 3\cos 2\alpha+$

$+4\sin 2\alpha\leqslant 5\iff\frac{3}{5}\cos 2\alpha+\frac{4}{5}\sin 2\alpha\leqslant 1\iff\sin\left(\arcsin\frac{3}{5}+2\alpha\right)\leqslant 1.$

397. $\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{63}{65}\right)}=\frac{1}{\sqrt{65}}.$

$\sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{63}{65}\right)}=\frac{8}{\sqrt{65}}.$

$\sin\beta=\sqrt{1-\frac{49}{130}}=\frac{9}{\sqrt{130}}.$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{65}}\frac{7}{\sqrt{130}}-\frac{8}{\sqrt{65}}\frac{9}{\sqrt{130}}=-\frac{\sqrt{2}}{2};$

$\cos(\alpha+\beta)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\wedge 0<\alpha+\beta<\pi\Rightarrow\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}.$

398. $\cos^2\beta = 1 + \cos 2\alpha \wedge \cos\alpha \neq 0 \Rightarrow \cos^2\beta = 2\cos^2\alpha \wedge \cos\alpha \neq 0 \wedge \cos\beta \neq 0 \Rightarrow 1 + 2\operatorname{tg}^2\beta = 1 + \dfrac{2(1-\cos^2\beta)}{\cos^2\beta} = 1 + \dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha.$

399. $\sqrt{4\cos^4\alpha - 6\cos 2\alpha + 3} + \sqrt{4\sin^4\alpha + 6\cos 2\alpha + 3} =$
$= \sqrt{(1+\cos 2\alpha)^2 - 6\cos 2\alpha + 3} + \sqrt{(1-\cos 2\alpha)^2 + 6\cos 2\alpha + 3} =$
$= \sqrt{4 + \cos^2 2\alpha - 4\cos 2\alpha} + \sqrt{4 + \cos^2 2\alpha + 4\cos 2\alpha} =$
$= (2 - \cos 2\alpha) + (2 + \cos 2\alpha) = 4$ (због $2 - \cos 2\alpha > 0$ и $2 + \cos 2\alpha > 0$).

400. Кад би број $\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ био рационалан за неки $n \in \mathbf{N}$, тада би и број $\cos\dfrac{\pi}{2^n} = 2\cos^2\dfrac{\pi}{2^{n+1}} - 1$ био рационалан, као и број $\cos\dfrac{\pi}{2^{n-1}} = 2\cos^2\dfrac{\pi}{2^n} - 1$, и, на исти начин, број $\cos\dfrac{\pi}{2^{n-2}}$, итд., све до $\cos\dfrac{\pi}{4}$. Како је овај последњи ирационалан, то и број $\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$ мора да буде ирационалан.

401. Довољно је доказати да је бар један од бројева $|\sin x|$ и $|\sin(x+1)|$ већи или једнак од $\sin\dfrac{1}{2}$, с обзиром на то да је $\sin\dfrac{1}{2} > \sin\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}} = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} > \dfrac{1}{3}$. Ако је $|\sin x| < \sin\dfrac{1}{2}$, тада је $-\dfrac{1}{2} + k\pi < x < \dfrac{1}{2} + k\pi$ за неки $k \in \mathbf{Z}$, па је $\dfrac{1}{2} + k\pi < x + 1 < \dfrac{3}{2} + k\pi < \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, што имплицира $|\sin(x+1)| > \sin\dfrac{1}{2}$. На сличан начин се показује да из $|\sin(x+1)| < \sin\dfrac{1}{2}$ следи $|\sin x| > \sin\dfrac{1}{2}$.

402. *а)* $\dfrac{\sin\alpha + \sin\beta}{\cos\alpha + \cos\beta} = \dfrac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ $(\cos\alpha \neq -\cos\beta)$.

б) – ђ) као под *а)*. Резултати:
б) $-\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ $(\cos\alpha \neq \cos\beta)$; *в)* $\operatorname{ctg}\dfrac{\beta-\alpha}{2}$. $(\cos\alpha \neq \cos\beta)$; *г)* $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $(\cos\alpha \neq -\cos\beta)$; *д)* $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$ $(\sin\alpha \neq \sin\beta)$; *ђ)* $\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{\beta-\alpha}{2}$ $(\cos\alpha \neq \cos\beta)$.

403. $1 + 2\sin\alpha = 2\left(\dfrac{1}{2} + \sin\alpha\right) = 2\left(\sin\dfrac{\pi}{6} + \sin\alpha\right) = 2\cdot 2\sin\dfrac{\frac{\pi}{6}+\alpha}{2}\cos\dfrac{\frac{\pi}{6}-\alpha}{2} =$
$= 4\sin\left(\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\alpha}{2}\right).$

404. *а)* $\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = \sin 2\alpha + \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - 2\alpha\right) = 2\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right) =$
$= \sqrt{2}\cos\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{4}\right).$

б) Као под *а)*. Резултат: $2\sin 42°30' \cdot \sin 2°30'$.

в) $2\sin 6°30' \cdot \cos 34°30'$; *г)* $-2\sin\dfrac{19\pi}{120}\sin\dfrac{29\pi}{120}$.

д) Као у задатку **403**. Резултат: $4\sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

ђ) $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$; *е)* $4\sin\left(\dfrac{\pi}{12} - \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\alpha}{2}\right)$;

ж) $2\sqrt{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\alpha}{2}\right)$; *з)* $2\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{\pi}{8} - \dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{8} + \dfrac{\alpha}{2}\right)$;

и) $4\cos\left(\dfrac{\pi}{12} + 3\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{12} - 3\alpha\right)$; *ј)* $2\sqrt{2}\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{8}\right)\cos\left(\alpha + \dfrac{\pi}{8}\right)$;

к) $2\sin\left(\dfrac{\pi}{3} + \alpha\right)$; *л)* $2\sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right)$;

љ) $\sin^2 24° - \sin^2 6° = \dfrac{1-\cos 48°}{2} - \dfrac{1-\cos 12°}{2} = \dfrac{1}{2}(\cos 12° - \cos 48°) = \sin 30° \sin 18°$.

м) $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)$; *н)* $4\cos\left(\dfrac{\pi}{6}+\alpha\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{6}-\alpha\right)$; *њ)* $2\sqrt{3}\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\alpha\right)$.

о) $1 - \sin\alpha + \cos\alpha = (1 + \cos\alpha) - \sin\alpha = 2\cos^2\dfrac{\alpha}{2} - 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} =$
$= 2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2} - \sin\dfrac{\alpha}{2}\right) = 2\sqrt{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\alpha}{2}\right)$.

п) $2\sqrt{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

р) $1 + \cos\alpha + \cos\beta + \cos(\alpha + \beta) = \left[1 + \cos(\alpha + \beta)\right] + (\cos\alpha + \cos\beta) =$
$= 2\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2} + 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} + \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}\right) =$
$= 4\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\beta}{2}$.

с) $\cos^2\alpha + \cos^2 2\alpha + \cos^2 3\alpha - 1 = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha + \cos 4\alpha + \cos 6\alpha)$. Даље као под *р)*. Резултат: $2\cos 3\alpha\cos\alpha\cos 2\alpha$.

405. *а)* $\cos\alpha + \sin 2\alpha - \cos 3\alpha = 2\sin\alpha\sin 2\alpha + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha(2\sin\alpha + 1) =$
$= 2\sin 2\alpha\left(\sin\alpha + \sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 4\sin 2\alpha\sin\left(\dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\pi}{12}\right)\cos\left(\dfrac{\alpha}{2} - \dfrac{\pi}{12}\right)$.

б) $2\sin^2\alpha + \sqrt{3}\sin 2\alpha - 1 = \sqrt{3}\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6}\sin 2\alpha - \sin\dfrac{\pi}{6}\cos 2\alpha\right) =$
$= 2\sin\left(2\alpha - \dfrac{\pi}{6}\right)$.

в) $\sin\alpha-\sqrt{3}\cos\alpha=2\left(\cos\frac{\pi}{3}\sin\alpha-\sin\frac{\pi}{3}\cos\alpha\right)=2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right).$

406. *а)* $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$ $(\sin\alpha\neq 1)$. *б)* $\dfrac{\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}$ $\left(\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\neq 0\right)$;

в) $-\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}$ $(\cos\alpha\neq 0,\ \sin\alpha\neq 0,\ \sin\alpha\neq 1)$; *г)* $-\dfrac{4\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$ $(\sin\alpha\neq 0)$;

д) $\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ $(\cos\alpha\neq 0,\ \sin\alpha\neq 0,\ \operatorname{tg}\alpha\neq -1)$; *ђ)* $\dfrac{1}{\cos 2\alpha}$ $(\cos\alpha\neq 0,$ $\sin\alpha\neq 0,\ \operatorname{tg}\alpha\neq 1,\ \operatorname{tg}\alpha\neq -1)$; *е)* $-\dfrac{\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\beta}$ $(\cos\alpha\neq 0,\ \sin\alpha\neq 0,\ \cos\beta\neq 0,$ $\sin\beta\neq 0,\ \operatorname{tg}^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta\neq 1)$; *ж)* $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}{\cos^2\alpha\cos^2\beta}$ $(\cos\alpha\neq 0,\ \cos\beta\neq 0)$;

з) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin 2\alpha}$ $(\sin\alpha\neq 0,\ \cos\alpha\neq 0)$; *и)* $\dfrac{2}{\sin 2\alpha}$ $(\sin\alpha\neq 0,\ \cos\alpha\neq 0)$.

407. $\sin 8\alpha-\sin 6\alpha-\cos 8\alpha\sin 2\alpha=\sin 8\alpha-(\sin 8\alpha\cos 2\alpha-\cos 8\alpha\sin 2\alpha)-$ $-\cos 8\alpha\sin 2\alpha=\sin 8\alpha(1-\cos 2\alpha)=2\sin 8\alpha\sin^2\alpha.$

408. $\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha+\cos 7\alpha=(\cos\alpha+\cos 3\alpha)+(\cos 5\alpha+\cos 7\alpha)=$ $=2\cos 2\alpha\cos\alpha+2\cos 6\alpha\cos\alpha=2\cos\alpha(\cos 2\alpha+\cos 6\alpha)=2\cos\alpha\cdot 2\cos 4\alpha\cos 2\alpha=$ $=4\cos\alpha\cos 2\alpha\cos 4\alpha.$

409. *а)* $\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}=-\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ $\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\neq 0,\ \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\neq 0\right)$.

б) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}=\dfrac{2\sin 2\alpha\cos\alpha}{2\cos 2\alpha\cos\alpha}=\operatorname{tg}2\alpha$ $(\cos 2\alpha\neq 0,\ \cos\alpha\neq 0)$.

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}=\dfrac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-\frac{\sin\beta}{\cos\beta}}=\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$ $(\cos\alpha\neq 0,\ \cos\beta\neq 0,\ \sin(\alpha-\beta)\neq 0)$.

г) $2(1-\cos\alpha)-\sin^2\alpha=4\sin^2\frac{\alpha}{2}-4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}=4\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(1-\cos^2\frac{\alpha}{2}\right)=$ $=4\sin^4\frac{\alpha}{2}.$

д) $(\sin\alpha+\sin\beta)^2+(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}+$

$+4\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}=4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}\left(\sin^2\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=4\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2}$.

ђ) $\frac{\sin\alpha-2\sin2\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha-2\cos2\alpha+\cos3\alpha}=\frac{2\sin2\alpha\cos\alpha-2\sin2\alpha}{2\cos2\alpha\cos\alpha-2\cos2\alpha}=\frac{2\sin2\alpha(\cos\alpha-1)}{2\cos2\alpha(\cos\alpha-1)}=$
$=\operatorname{tg}2\alpha\ (\cos2\alpha\neq0,\ \cos\alpha\neq1)$.

е) $\sin\alpha+\sin2\alpha+\sin3\alpha+\cos\alpha+\cos2\alpha+\cos3\alpha=\sin2\alpha+2\sin2\alpha\cos\alpha+\cos2\alpha+$
$+2\cos2\alpha\cos\alpha=\sin2\alpha(1+2\cos\alpha)+\cos2\alpha(1+2\cos\alpha)=$
$=(1+2\cos\alpha)(\sin2\alpha+\cos2\alpha)=4\cos\frac{\frac{\pi}{3}+\alpha}{2}\cos\frac{\frac{\pi}{3}-\alpha}{2}2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=$
$=4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$.

ж) $\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\cos7\alpha=2\cos2\alpha\cos\alpha+2\cos6\alpha\cos\alpha=2\cos\alpha(\cos2\alpha+$
$+\cos6\alpha)=2\cos\alpha2\cos4\alpha\cos2\alpha=\frac{1}{2\sin\alpha}8\sin\alpha\cos\alpha\cos2\alpha\cos4\alpha=\frac{\sin8\alpha}{2\sin\alpha}$
$(\sin\alpha\neq0)$.

з) $\sin^3\alpha(1+\operatorname{ctg}\alpha)+\cos^3\alpha(1+\operatorname{tg}\alpha)=\sin^2\alpha(\sin\alpha+\cos\alpha)+\cos^2\alpha(\cos\alpha+\sin\alpha)=$
$=\sin\alpha+\cos\alpha=\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\ (\sin\alpha\neq0,\ \cos\alpha\neq0)$.

и) Као под *д)*. *ј)* Као под *ђ)* $\left(\cos3\alpha\neq0,\ \cos2\alpha\neq-\frac{1}{2}\right)$.

к) $\frac{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\sin7\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha+\cos5\alpha+\cos7\alpha}=\frac{2\sin2\alpha\cos\alpha+2\sin6\alpha\cos\alpha}{2\cos2\alpha\cos\alpha+2\cos6\alpha\cos\alpha}=$
$=\frac{\sin2\alpha+\sin6\alpha}{\cos2\alpha+\cos6\alpha}=\frac{2\sin4\alpha\cos2\alpha}{2\cos4\alpha\cos2\alpha}=\operatorname{tg}4\alpha\ (\cos\alpha\neq0,\ \cos2\alpha\neq0,\ \cos4\alpha\neq0)$.

410. *а)* $\cos3\alpha+3\cos\alpha=(\cos3\alpha+\cos\alpha)+2\cos\alpha=2\cos2\alpha\cos\alpha+2\cos\alpha=$
$=2\cos\alpha(\cos2\alpha+1)=4\cos^3\alpha$.

б) $\cos4\alpha+4\cos2\alpha+3=(\cos4\alpha+1)+4\cos2\alpha+2=2(\cos^22\alpha+2\cos2\alpha+1)=$
$=2(\cos2\alpha+1)^2=2(2\cos^2\alpha)^2=8\cos^4\alpha$.

в) $\frac{\cos x+\cos\left(y-\frac{\pi}{2}\right)}{\cos y+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}=\frac{2\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}{2\cos\left(\frac{y+x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{y-x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x+y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$,

$\frac{\sin x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)-\sin y}=\frac{2\sin\left(\frac{x-y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{2\sin\left(\frac{x-y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{x+y}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{x+y}{2}+\frac{\pi}{4}\right)}$
$(\cos y\neq\sin x,\ \cos x\neq\sin y)$.

г) $\frac{\sin x+\cos(2y-x)}{\cos x-\sin(2y-x)}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\cos(2y-x)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\sin(2y-x)}=\frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}-x+y\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x+y\right)}=$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}, \quad \frac{1+\sin 2y}{\cos 2y} = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-2y\right)} = \frac{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)} =$$

$$= \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)} \quad (\cos x \neq \sin(2y-x),\ \cos 2y \neq 0).$$

д) $\dfrac{\cos^2 2\alpha - 4\cos^2\alpha + 3}{\cos^2 2\alpha + 4\cos^2\alpha - 1} = \dfrac{\cos^2 2\alpha - 2\cos 2\alpha + 1}{\cos^2 2\alpha + 2\cos 2\alpha + 1} = \dfrac{(\cos 2\alpha - 1)^2}{(\cos 2\alpha + 1)^2} = \dfrac{(-2\sin^2\alpha)^2}{(2\cos^2\alpha)^2} =$
$= \operatorname{tg}^4\alpha \ (\cos\alpha \neq 0)$.

ђ) $\cos^3\alpha + \sin^3\alpha + \cos^4\alpha - \sin^4\alpha = (\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos^2\alpha - \cos\alpha\sin\alpha + \sin^2\alpha) +$
$+(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha) =$
$= (\cos\alpha + \sin\alpha)(1 - \cos\alpha\sin\alpha + \cos\alpha - \sin\alpha) = (\cos\alpha + \sin\alpha)(1 - \sin\alpha)(1 + \cos\alpha) =$

$$= \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) + \sin\alpha\right]\cdot\left[1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\right](1+\cos\alpha) =$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)2\cos^2\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)\sin^2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

е) Као под *г)*.

ж) $\dfrac{2(\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha - 1)}{\cos\alpha - \sin\alpha - \cos 3\alpha + \sin 3\alpha} = \dfrac{2(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{(\sin 3\alpha - \sin\alpha) + (\cos\alpha - \cos 3\alpha)} =$

$$= \frac{2(\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)}{2\sin\alpha\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha\sin\alpha} = \frac{\sin 2\alpha + \cos 2\alpha}{\sin\alpha(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)} = \frac{1}{\sin\alpha} = \operatorname{cosec}\alpha$$

$(\sin\alpha \neq 0,\ \cos 2\alpha + \sin 2\alpha \neq 0)$.

з) $\sin\alpha + \sin\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\alpha + \dfrac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{4}\right) + 2\sin\left(\alpha + \dfrac{2\pi}{3}\right)\cos\dfrac{2\pi}{3} = 0.$

и) Као у задатку 409. *ђ)*. *ј)* Као под *б)*.

к) $\dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{2\cos\frac{\pi}{4}\cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{1}{2}\sin 2\alpha} =$

$$= \frac{2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin 2\alpha} \quad (\sin\alpha \neq 0,\ \cos\alpha \neq 0).$$

л) $1 + \sin\alpha - \cos\alpha = (1 - \cos\alpha) + \sin\alpha = 2\sin^2\dfrac{\alpha}{2} + 2\sin\dfrac{\alpha}{2}\cos\dfrac{\alpha}{2} =$

$$= 2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\sin\frac{\alpha}{2} + \cos\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\right) = 2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right).$$

411. $\dfrac{\sin^2 4x}{2\cos x + \cos 3x + \cos 5x} = \dfrac{\sin^2 4x}{2\cos x + 2\cos 4x\cos x} = \dfrac{4\sin^2 2x\cos^2 2x}{2\cos x(1 + \cos 4x)} =$

$$=\frac{8\sin^2 x\cos^2 x\cos^2 2x}{2\cos x\cos^2 2x}=4\sin^2 x\cos x=2\sin x\sin 2x.\ (\cos x\neq 0,\ \cos 2x\neq 0).$$

412. $\sin x+2\sin 3x+\sin 5x=2\sin 3x\cos 2x+2\sin 3x=2\sin 3x(\cos 2x+1)=$ $=4\sin 3x\cos^2 x$.

413. Као у задатку **409.** *ђ)*. $\left(\cos 3t\neq 0,\ \cos t\neq \dfrac{1}{2}\right)$.

414. *а)* Лако се добија да је $\beta=\dfrac{\pi}{3}$. Како је $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=$ $=2\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}+\sin\beta=2\sin\beta\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}+\sin\beta=\sqrt{3}\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, то је $\sqrt{3}\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$, тј $\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Ако је $\alpha\geqslant\gamma$, онда је $0\leqslant\dfrac{\alpha-\gamma}{2}<\dfrac{\pi}{2}$, па из $\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ следи да је $\dfrac{\alpha-\gamma}{2}=\dfrac{\pi}{6}$. Резултат: $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, $\beta=\dfrac{\pi}{3}$, $\gamma=\dfrac{\pi}{6}$, или $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$, $\beta=\dfrac{\pi}{3}$, $\gamma=\dfrac{\pi}{2}$.

б) Као под *а)*. Резултат: $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$, $\beta=\dfrac{\pi}{3}$, $\gamma=\dfrac{\pi}{6}$, или $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$, $\beta=\dfrac{\pi}{3}$, $\gamma=\dfrac{\pi}{2}$.

415. *а)* Како је $\dfrac{\sin\beta+\sin\gamma}{\cos\beta+\cos\gamma}=\dfrac{2\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}{2\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}}=\dfrac{\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}}=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$ (при чему је $\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}\neq 0$ и $\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}\neq 0$ због $0<\dfrac{\beta+\gamma}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ и $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\beta-\gamma}{2}<\dfrac{\pi}{2}$), то је $\sin\alpha=\dfrac{\cos\dfrac{\alpha}{2}}{\sin\dfrac{\alpha}{2}}$, тј. $2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=1$ $\left(0<\dfrac{\alpha}{2}<\dfrac{\pi}{2}\Rightarrow\cos\dfrac{\alpha}{2}\neq 0\right)$.

Из последње релације излази да је $\cos\alpha=0$, те мора бити $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$.

б) Из $\cos\alpha+\cos\beta=\sin\gamma$ и $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ излази $2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=$ $=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, а одатле $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ (јер је $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\neq 0$), тј. $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\cos\dfrac{\gamma}{2}$. Како је овде $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\alpha-\beta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ и $0<\dfrac{\gamma}{2}<\dfrac{\pi}{2}$, то је $\dfrac{\alpha-\beta}{2}=\pm\dfrac{\gamma}{2}$, тј. $\alpha=\beta\pm\gamma$, што даје $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ или $\beta=\dfrac{\pi}{2}$ (због $\alpha+\beta+\gamma=\pi$).

в) Како је $\sin\gamma-\sin(\alpha-\beta)=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\sin\beta\cos\alpha$, то је $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\cos(\alpha-\beta)}{2\sin\beta\cos\alpha}$, тј. $2\sin\alpha\sin\beta=\cos(\alpha-\beta)$ (при чему је $\sin\beta\neq 0$ због $0<\beta<\pi$, а $\cos\alpha\neq 0$, јер се претпоставља да $\operatorname{tg}\alpha$ постоји). Из последње релације излази $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha-\beta)$, тј. $\cos\gamma=0$ и $\gamma=\dfrac{\pi}{2}$.

416. *а)* $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}+1=$
$=1+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=1+2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}2\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}=$
$=1+4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$
б) Као под *а)*.
в) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta+\cos2\gamma)$. Даље као под *а)*.

417. $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=\frac{1+\cos2\alpha}{2}+\frac{1+\cos2\beta}{2}+\cos^2\gamma=$
$=1+\frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta)+\cos^2\gamma=1+\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)+\cos^2\gamma=$
$=1-\cos\gamma\cos(\alpha-\beta)-\cos\gamma\cos(\alpha+\beta)=1-\cos\gamma\big[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big]=$
$=1-\cos\gamma\,2\cos\alpha\cos\beta.$

418. *а)* Као у задатку **417**.
б) $\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\beta\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{ctg}\beta(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\gamma)+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha=$
$=\operatorname{ctg}\beta\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma-1}{\operatorname{ctg}(\alpha+\gamma)}+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha=-(\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\gamma-1)+\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha=1\ \left(\beta\neq\frac{\pi}{2}\right);$
ако је $\beta=\frac{\pi}{2}$, онда је $\operatorname{ctg}\gamma\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1$.
в) $\frac{\sin\beta+\sin\gamma-\sin\alpha}{\sin\beta+\sin\gamma+\sin\alpha}=\frac{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\sin\alpha}{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\sin\alpha}=$
$=\frac{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\cos\frac{\beta+\gamma}{2}}=\frac{2\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{2\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}}=$
$=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$
г) Као у задатку **417**. *д)* Као под *б)*.
ђ) $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2}=$
$=2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cos\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\cos\frac{\gamma}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\right)=$
$=2\cos\frac{\gamma}{2}2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}=4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}.$
е) $\sin3\alpha+\sin3\beta+\sin3\gamma=2\sin\frac{3\alpha+3\beta}{2}\cos\frac{3\alpha-3\beta}{2}+2\sin\frac{3\gamma}{2}\cos\frac{3\gamma}{2}=$
$=-2\cos\frac{3\gamma}{2}\cos\frac{3\alpha-3\beta}{2}-2\cos\frac{3\alpha+3\beta}{2}\cos\frac{3\gamma}{2}=$
$=-2\cos\frac{3\gamma}{2}\left(\cos\frac{3\alpha-3\beta}{2}+\cos\frac{3\alpha+3\beta}{2}\right)=-2\cos\frac{3\gamma}{2}2\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\beta}{2}=$

$= -4\cos\dfrac{3\alpha}{2}\cos\dfrac{3\beta}{2}\cos\dfrac{3\gamma}{2}.$

ж) Као под *е)*.

419. Како је $\operatorname{tg}9^\circ + \operatorname{tg}81^\circ = \dfrac{\sin(9^\circ+81^\circ)}{\cos 9^\circ\cos 81^\circ} = \dfrac{1}{\cos 9^\circ \sin 9^\circ} = \dfrac{2}{\sin 18^\circ}$, $\operatorname{tg}27^\circ + \operatorname{tg}63^\circ = \dfrac{\sin(27^\circ+63^\circ)}{\cos 27^\circ\cos 63^\circ} = \dfrac{1}{\cos 27^\circ\sin 27^\circ} = \dfrac{2}{54^\circ}$, то је $\operatorname{tg}9^\circ - \operatorname{tg}27^\circ - \operatorname{tg}63^\circ + \operatorname{tg}81^\circ = \dfrac{2}{\sin 18^\circ} - \dfrac{2}{\sin 54^\circ} = \dfrac{2(\sin 54^\circ - \sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ \sin 54^\circ} = \dfrac{4\cos 36^\circ \sin 18^\circ}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ} = 4.$

420. *а)* $4(\cos^3 20^\circ + \cos^3 40^\circ) = 2[\cos 20^\circ(1+\cos 40^\circ) + \cos 40^\circ(1+\cos 80^\circ)] = 2[(\cos 20^\circ + \cos 40^\circ) + \cos 40^\circ(\cos 20^\circ + \cos 80^\circ)] = 4(\cos 30^\circ\cos 10^\circ + \cos 40^\circ\cos 50^\circ\cos 30^\circ) = 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 10^\circ + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\dfrac{1}{2}\sin 80^\circ\right) = 3\sqrt{3}\cos 10^\circ.$

б) $\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1}{4\sin\frac{\pi}{5}}4\sin\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5}\cos\dfrac{2\pi}{5} = \dfrac{1}{4\sin\frac{\pi}{5}}\sin\dfrac{4\pi}{5} = \dfrac{1}{4}.$

в) $\cos\dfrac{\pi}{5} + \cos\dfrac{3\pi}{5} = 2\cos\dfrac{2\pi}{5}\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1}{2}$, с обзиром на идентитет *б)*.

г) и *д)* своди се на *б)* и *в)*.

421. *а)* $\sin 495^\circ - \sin 795^\circ + \sin 1095^\circ = \sin 135^\circ - \sin 75^\circ + \sin 15^\circ = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - 2\sin 30^\circ\cos 45^\circ = 0.$

б) $\cos 24^\circ + \cos 48^\circ - \cos 84^\circ - \cos 12^\circ = (\cos 24^\circ - \cos 84^\circ) + (\cos 48^\circ - \cos 12^\circ) = 2\sin 54^\circ\sin 30^\circ - 2\sin 30^\circ \sin 18^\circ = \sin 54^\circ - \sin 18^\circ = 2\sin 18^\circ\cos 36^\circ = 2\cos 72^\circ\cos 36^\circ = 2\cos 72^\circ\dfrac{\sin 72^\circ}{2\sin 36^\circ} = \dfrac{\sin 144^\circ}{2\sin 36^\circ} = \dfrac{1}{2}.$

в) $\sin 47^\circ + \sin 61^\circ - \sin 11^\circ - \sin 25^\circ = (\sin 47^\circ - \sin 25^\circ) + (\sin 61^\circ - \sin 11^\circ) = 2\sin 11^\circ\cos 36^\circ + 2\sin 25^\circ\cos 36^\circ = 2\cos 36^\circ(\sin 11^\circ + \sin 25^\circ) = 2\cos 36^\circ 2\sin 18^\circ\cos 7^\circ = 2\cos 36^\circ\dfrac{\sin 36^\circ}{\cos 18^\circ}\cos 7^\circ = \dfrac{\sin 72^\circ}{\cos 18^\circ}\cos 7^\circ = \cos 7^\circ.$

г) $\dfrac{2\cos 40^\circ - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \dfrac{\cos 40^\circ - 2\sin 30^\circ\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} = \dfrac{\sin 50^\circ - \sin 10^\circ}{\sin 20^\circ} = \dfrac{2\sin 20^\circ\cos 30^\circ}{\sin 20^\circ} = \sqrt{3}.$

422. $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = \sqrt{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) \iff (\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha) + (\sin\beta - \sqrt{3}\cos\beta) + (\sin\gamma - \sqrt{3}\cos\gamma) = 0 \iff \sin\left(\alpha - \dfrac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\beta - \dfrac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\gamma - \dfrac{\pi}{3}\right) = 0 \iff 2\sin\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} + 2\sin\left(\dfrac{\gamma}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{\gamma}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = 0 \iff \sin\left(\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\gamma}{2}\right)\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} + \sin\left(\dfrac{\gamma}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(\dfrac{\gamma}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = 0 \iff$

$$\iff \sin\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\left[\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{\pi}{3}\right)\right]=0 \iff$$
$$\iff \sin\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{6}\right)2\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0 \iff \sin\left(\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0\vee$$
$$\vee\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0\vee\sin\left(\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=0 \iff \frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{6}=0\vee\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}=0\vee\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{6}=0 \iff$$
$\iff \gamma=\frac{\pi}{3}\vee\alpha=\frac{\pi}{3}\vee\beta=\frac{\pi}{3}$, с обзиром на то да је $-\frac{\pi}{6}<\frac{\gamma}{2}-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{6}<\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$ и $-\frac{\pi}{6}<\frac{\beta}{2}-\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{3}$.

423. С обзиром на релацију из задатка **418.** *е)*, једнакост $\sin 3\alpha+\sin 3\beta+\sin 3\gamma=0$ еквивалентна је једнакости $\cos\frac{3\alpha}{2}\cos\frac{3\beta}{2}\cos\frac{3\gamma}{2}=0$, а из ове следи $\frac{3\alpha}{2}=\frac{\pi}{2}\vee\frac{3\beta}{2}=\frac{\pi}{2}\vee\frac{3\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}$ $\Big($пошто је $0<\frac{3\alpha}{2}<\frac{3\pi}{2}$, $0<\frac{3\beta}{2}<\frac{3\pi}{2}$, $0<\frac{3\gamma}{2}<\frac{3\pi}{2}\Big)$, тј. $\alpha=\frac{\pi}{3}\vee\beta=\frac{\pi}{3}\vee\gamma=\frac{\pi}{3}$ што је и требало да се докаже.

424. Као у задатку **423.**, уз коришћење релације из задатка **418.** под *ж)*.

425. Према задатку **416.** *в)*, услов $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$ еквивалентан је услову $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma=0$, одакле излази да је $\cos\alpha=0$ или $\cos\beta=0$ или $\cos\gamma=0$, тј. да је бар један од углова α, β, γ једнак $\frac{\pi}{2}$.

426. Услов $\dfrac{\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma}{\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma}=2$ еквивалентан је услову $\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2$, па се овај задатак своди на претходни.

427. Као у задатку **418.** *ђ)*.

428. Нека је најпре $b\neq0$. Како је $\dfrac{\sin\alpha+\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\dfrac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}}=$ $=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$, то из $\sin\alpha+\sin\beta=a\wedge\cos\alpha+\cos\beta=b\wedge b\neq0$ следи $\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{a}{b}$, што даје: $\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{1-\frac{a^2}{b^2}}{1+\frac{a^2}{b^2}}=-\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ и $\sin(\alpha+\beta)=\dfrac{2\frac{a}{b}}{1+\frac{a^2}{b^2}}=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ (с обзиром на формуле из задатка **356.**)

Ако је $b=0$ (и $a\neq 0$) тада је $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0$, тј. $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0$ (не може бити $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0$, јер би тада било и $a=0$), $\cos(\alpha+\beta)=-1=$ $=\frac{b^2-a^2}{a^2+b^2}$, $\sin(\alpha+\beta)=0=\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

429. $bd\neq 0\wedge ad+bc\neq 0\wedge\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}=\frac{a}{b}\wedge\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}=\frac{c}{d}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{ac+bd}{ad+bc}=\frac{\frac{a}{b}\frac{c}{d}+1}{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}=\frac{\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}+1}{\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\sin(\theta-\beta)}+\frac{\cos(\theta-\alpha)}{\cos(\theta-\beta)}}=$$
$$=\frac{\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\alpha)+\sin(\theta-\beta)\cos(\theta-\beta)}{\sin(\theta-\alpha)\cos(\theta-\beta)+\cos(\theta-\alpha)\sin(\theta-\beta)}=\frac{\sin 2(\theta-\alpha)+\sin 2(\theta-\beta)}{2\sin(2\theta-\alpha-\beta)}=$$
$$=\frac{2\sin(2\theta-\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta)}{2\sin(2\theta-\alpha-\beta)}=\cos(\alpha-\beta).$$

430. $\operatorname{ctg}\alpha+\frac{\cos\beta}{\sin\alpha\cos\gamma}=\operatorname{ctg}\beta+\frac{\cos\alpha}{\sin\beta\cos\gamma}\iff\cos\alpha\cos\gamma\sin\beta+\cos\beta\sin\beta=$ $=\cos\beta\cos\gamma\sin\alpha+\cos\alpha\sin\alpha\wedge\sin\alpha\neq 0\wedge\sin\beta\neq 0\wedge\cos\gamma\neq 0\iff\cos\gamma(\cos\alpha\sin\beta-$ $-\cos\beta\sin\alpha)+\frac{1}{2}(\sin 2\beta-\sin 2\alpha)=0\wedge\sin\alpha\neq 0\wedge\sin\beta\neq 0\wedge\cos\gamma\neq 0\iff$ $\iff\cos\gamma\sin(\beta-\alpha)+\sin(\beta-\alpha)\cos(\beta+\alpha)=0\wedge\sin\alpha\neq 0\wedge\sin\beta\neq 0\wedge\cos\gamma\neq 0\iff$ $\iff 2\sin(\beta-\alpha)\cos\frac{\gamma+\beta+\alpha}{2}\cos\frac{\gamma-\beta-\alpha}{2}=0\wedge\sin\alpha\neq 0\wedge\sin\beta\neq 0\wedge$ $\wedge\cos\gamma\neq 0\iff\left((\alpha-\beta=k\pi,\ k\in\mathbf{Z})\vee\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right)\vee\right.$ $\left.\vee\left(\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}\right)\right)\wedge\sin\alpha\neq 0\wedge\sin\beta\neq 0\wedge\cos\gamma\neq 0.$

431. Применом формуле за тангенс збира лако се добија да су лева и десна страна једнакости једнаке $\frac{3\operatorname{tg}\alpha(3-\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$.

б) Применићемо више пута формулу *а)*: $\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}5^\circ+\operatorname{tg}9^\circ+\cdots+\operatorname{tg}177^\circ=$ $=(\operatorname{tg}1^\circ+\operatorname{tg}61^\circ+\operatorname{tg}121^\circ)+(\operatorname{tg}5^\circ+\operatorname{tg}65^\circ+\operatorname{tg}125^\circ)+\cdots+(\operatorname{tg}57^\circ+\operatorname{tg}117^\circ+$ $+\operatorname{tg}177^\circ)=3\operatorname{tg}3^\circ+3\operatorname{tg}15^\circ+3\operatorname{tg}27^\circ+\cdots+3\operatorname{tg}171^\circ=3(\operatorname{tg}3^\circ+\operatorname{tg}63^\circ+$ $+\operatorname{tg}123^\circ)+3(\operatorname{tg}15^\circ+\operatorname{tg}75^\circ+\operatorname{tg}135^\circ)+\cdots+3(\operatorname{tg}51^\circ+\operatorname{tg}111^\circ+\operatorname{tg}171^\circ)=9\operatorname{tg}9^\circ+$ $+9\operatorname{tg}45^\circ+9\operatorname{tg}81^\circ+9\operatorname{tg}117^\circ+9\operatorname{tg}153^\circ=9+9(\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}81^\circ)=$ $=9+9\cdot 4=45$, при чему је коришћен и резултат задатка **419**.

432. Ако је са γ обележен највећи од датих углова, тада је $\frac{\pi}{4}<\gamma\leqslant\frac{\pi}{2}$

и $0<\dfrac{\gamma}{2}\leqslant\dfrac{\pi}{4}$, па је $\sin\gamma>\cos\gamma$ и $\cos\dfrac{\gamma}{2}\geqslant\sin\dfrac{\gamma}{2}$. Зато је $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=$ $=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\sin\gamma=2\cos\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\sin\gamma>2\sin\dfrac{\gamma}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+$ $+\cos\gamma=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\cos\gamma=\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma$. (Коришћена је чињеница $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}>0$, која следи из $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\alpha-\beta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$.)

433. $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}+\cos\gamma\leqslant2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}+$ $+\cos\gamma=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}-2\cos^2\dfrac{\alpha+\beta}{2}+1=-2\left(\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}\leqslant\dfrac{3}{2}$. Овде имамо једнакост ако је $\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}=1$ и $\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{1}{2}$, тј ако је $\dfrac{\alpha-\beta}{2}=0$ и $\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\dfrac{\pi}{3}$, тј. $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

434. Познато је да за свака три позитивна броја x, y z важи неједнакост $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqslant\sqrt{3(x+y+z)}$, која се претвара у једнакост ако је $x=y=z$. Користећи ову неједнакост и једнакост из задатка **418.** *д)*, налазимо да је $\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}+5}+\sqrt{\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}+5}\leqslant$ $\leqslant\sqrt{3\left(\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}+15\right)}=\sqrt{3(1+15)}=4\sqrt{3}$.

Једнакост наступа у случају $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, што се своди на $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}=\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$, тј. на $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

435. Ставимо $\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}-\sqrt{\sin\alpha}=x$, $\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\gamma}-\sqrt{\sin\beta}=y$, $\sqrt{\sin\alpha}+\sqrt{\sin\beta}-\sqrt{\sin\gamma}=z$. Докажимо прво да су бројеви x, y, z позитивни. Како је $\left(\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}\right)^2>\sin\beta+\sin\gamma=2\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2}>$ $>2\sin\dfrac{\beta+\gamma}{2}\cos\dfrac{\beta+\gamma}{2}=2\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sin\alpha$ (због $|\beta-\gamma|<\beta+\gamma$), то је $\sqrt{\sin\beta}+\sqrt{\sin\gamma}>\sqrt{\sin\alpha}$, тј. $x>0$.

На исти начин се доказује и да је $y>0$ и $z>0$. Обележимо леву страну неједнакости коју треба да утврдимо са L. Имамо:

$$L=\frac{\frac{y+z}{2}}{x}+\frac{\frac{x+z}{2}}{y}+\frac{\frac{x+y}{2}}{z}=\frac{1}{2}\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\geqslant$$

$\geqslant1+1+1=3$. Једнакост се остварује ако је $x=y=z$, што се своди на $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma$, а ово на $\alpha=\beta=\gamma=\dfrac{\pi}{3}$.

436. Како је $f(x,\,y) \geqslant -1-1-1=-3$ и $f(\pi,\,\pi)=-3$, то је најмања вредност функције f једнака -3. Како је $f(x,\,y)=2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}-$ $-\cos(x+y) \leqslant 2\left|\cos\dfrac{x+y}{2}\right|-2\cos^2\dfrac{x+y}{2}+1=-2\left(\left|\cos\dfrac{x+y}{2}\right|-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}\leqslant\dfrac{3}{2}$ и $f\left(\dfrac{\pi}{3},\,\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3}{2}$, то је највећа вредност f једнака $\dfrac{3}{2}$.

437. $\dfrac{1}{\cos x+\cos(2k+1)x}=\dfrac{1}{2\cos kx\cos(k+1)x}=\dfrac{1}{2\sin x}\cdot\dfrac{\sin x}{\cos kx\cos(k+1)x}$ за $k=1,2,\ldots,n$. Даље као у задатку **344.**

438. Према задатку **309**, ако су α, β, γ углови неког троугла и ако ниједан од њих није прав угао, тј. ако постоје $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\beta$, $\operatorname{tg}\gamma$, тада је $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$. Ако би постојао троугао са својством да је $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma$, тада би било $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+$ $+\operatorname{tg}\gamma)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$, односно $(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)^2=$ $=\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$ тј. $\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma+$ $+\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha=0$. Ова последња једнакост може да се напише овако:
$\dfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)^2+\dfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)^2+\dfrac{1}{2}(\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha)^2=0$,
а из ове једнакости излази да је $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha=0$, тј. $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\gamma=0$, што, међутим, не важи ни за један троугао. Дакле не постоји троугао за чије углове би важила релација $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=$ $=\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma$

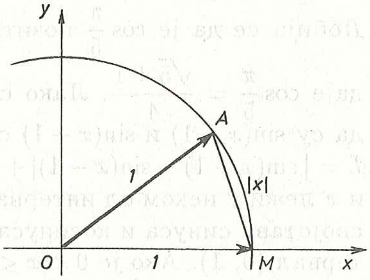
439. $\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3=0 \wedge \cos x_1+\cos x_2+\cos x_3=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow (\sin x_1+\sin x_2+\sin x_3)^2+(\cos x_1+\cos x_2+\cos x_3)^2=1 \Rightarrow 3+2(\sin x_1\sin x_2+$ $+\sin x_2\sin x_3+\sin x_3\sin x_1+\cos x_1\cos x_2+\cos x_2\cos x_3+\cos x_3\cos x_1)=1 \Rightarrow$ $\Rightarrow 2+2(\cos x_1\cos x_2+\sin x_1\sin x_2+\cos x_2\cos x_3+\sin x_2\sin x_3+\cos x_3\cos x_1+$ $+\sin x_3\sin x_1)=0 \Rightarrow 1+\cos(x_1-x_2)+\cos(x_2-x_3)+\cos(x_3-x_1)=0$. Како је $1+\cos(x_1-x_2)+\cos(x_2-x_3)+\cos(x_3-x_1)=1+2\cos\dfrac{x_1-x_3}{2}\cos\dfrac{x_1-2x_2+x_3}{2}+$ $+2\cos^2\dfrac{x_3-x_1}{2}-1=2\cos\dfrac{x_3-x_1}{2}\left(\cos\dfrac{x_1-2x_2+x_3}{2}+\cos\dfrac{x_3-x_1}{2}\right)=$ $=4\cos\dfrac{x_3-x_1}{2}\cos\dfrac{x_2-x_3}{2}\cos\dfrac{x_1-x_2}{2}$, то је $\cos\dfrac{x_3-x_1}{2}=0$ или $\cos\dfrac{x_2-x_3}{2}=0$ или $\cos\dfrac{x_1-x_2}{2}=0$. Нека је, на пример, $\cos\dfrac{x_1-x_2}{2}=0$. Тада је $1=\cos x_1+\cos x_2+\cos x_3=2\cos\dfrac{x_1+x_2}{2}\cos\dfrac{x_1-x_2}{2}+\cos x_3=\cos x_3$, тј. $\cos x_3=1$, и, као последица тога, $\sin x_3=0$.

440. Ако је $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ неко решење датог система, тада је, за

$i = 1, 2, \dots, n$, $x_i = \cos x_{i-1} = \cos\cos x_{i-2} = \cdots = \cos\cos\dots\cos x_1 =$ $= \cos\cos\dots\cos x_n = \cdots = \cos\cos\dots\cos x_i$, тј. x_i је решење једначине

(1) $\quad \cos\cos\dots\cos x = x.$

Показаћемо да ова једначина има највише једно решење. Притом ћемо користити неједнакост $|\sin x| < |x|$, $x \neq 0$, која је очигледна за $|x| > 1$, а за $0 < |x| \leqslant 1$ следи отуда што је на слици 58. површина троугла OAM мања од површине кружног исечка OAM, тј. $\frac{1}{2}\sin|x| < \frac{1}{2}|x|$, што даје $|\sin x| = \sin|x| < |x|$. Ако би x и y



Сл. 58.

била два различита решења једначине (1), тада би било $|\cos x - \cos y| =$ $= 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right|\cdot\left|\sin\frac{x+y}{2}\right| \leqslant 2\left|\sin\frac{x-y}{2}\right| < 2\left|\frac{x-y}{2}\right| = |x-y|$, и, на исти начин $|\cos\cos x - \cos\cos y| \leqslant |\cos x - \cos y| < |x-y|$, итд., све до $|x-y| =$ $= |\cos\cos\dots\cos x - \cos\cos\dots\cos y| < |x-y|$, што је немогуће. Према томе, једначина (1) заиста има највише једно решење. Према ономе што је речено на почетку, дати систем може да има највише једно решење, и то облика $(x_0, x_0, \dots, x_0)$, где је са x_0 обележено решење једначине (1). Треба још да се уверимо да једначина (1) има решења. Довољно је да то покажемо за $n = 1$, јер ће решење за $n = 1$, очигледно, бити решење и за било које n. Да једначина $\cos x = x$ има решења можемо проверити тако што ћемо утврдити да се графици функција $y = \cos x$ и $y = x$ секу (што препуштамо читаоцу). Дакле, дати систем има тачно једно решење.

441. Довољно је доказати да је $|\sin(3k-2)| + |\sin(3k-1)| + |\sin 3k| > \frac{8}{5}$ за сваки $k \in \mathbb{N}$. Доказаћемо да је $(L =)|\sin(x-1)| + |\sin x| + |\sin(x+1)| > \frac{8}{5}$ за сваки $x \in \mathbb{R}$. Нека су најпре $\sin(x-1)$ и $\sin(x+1)$ истог знака или је неки од њих једнак 0. Тада је $L = |\sin(x-1) + \sin(x+1)| + |\sin x| =$ $= 2|\sin x|\cos 1 + |\sin x| = |\sin x|(2\cos 1 + 1)$ и x лежи у неком од интервала облика $[1 + 2k\pi,\ \pi - 1 + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$ или у неком од интервала облика $[\pi + 1 + 2k\pi,\ 2\pi - 1 + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$. На основу својства синуса јасно је да је скуп вредности L на било ком од ових интервала идентичан скупу вредности на интервалу $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$. Но, ако је $1 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, тада је

$$L = (2\cos 1 + 1)\sin x \geqslant (2\cos 1 + 1)\sin 1 > 2\sin 1 \ \left(\text{због } 1 < \frac{\pi}{3}\right).$$

Сада још треба да утврдимо да је $\sin 1 > \frac{4}{5}$. како је $1 > \frac{3\pi}{10}$, то је

$\sin 1 > \sin \frac{3\pi}{10} = \cos \frac{\pi}{5}$. Вредност $\cos \frac{\pi}{5}$ може да се израчуна ако се пође од $\cos \frac{\pi}{5} + \cos \frac{3\pi}{5} = \frac{1}{2}$ и $\cos \frac{\pi}{5} \cos \frac{3\pi}{5} = -\frac{1}{4}$ (видети задатак **420.** под *б)* и *в)*). Добија се да је $\cos \frac{\pi}{5}$ позитивно решење једначине $c^2 - \frac{1}{2}c - \frac{1}{4} = 0$, што даје $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$. Лако се проверава да је $\frac{\sqrt{5}+1}{4} > \frac{4}{5}$. Узмимо сада да су $\sin(x-1)$ и $\sin(x+1)$ супротних знакова. Тада је
$L = |\sin(x+1) - \sin(x-1)| + |\sin x| = 2\sin 1 |\cos x| + |\sin x|$
и x лежи у неком од интервала облика $(-1+k\pi,\ 1+k\pi)$, $k \in \mathbf{Z}$. На основу својстава синуса и косинуса јасно је да је довољно размотрити само интервал $(0,\ 1)$. Ако је $0 < x < 1$, тада је
$L = 2\sin 1 \cos x + \sin x = 2\sin 1 \cos x - 2\cos 1 \sin x + 2\cos 1 \sin x + \sin x =$
$= 2\sin(1-x) + (2\cos 1 + 1)\sin x > 2\sin(1-x) + 2\sin x = 4\sin\frac{1}{2}\cos\left(\frac{1}{2} - x\right) >$
$> 4\sin\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2} = 2\sin 1$ $\left(\text{јер је } -\frac{1}{2} < \frac{1}{2} - x < \frac{1}{2} \text{ и зато } \cos\left(\frac{1}{2} - x\right) > \cos\frac{1}{2}\right)$.
Остаје још само да се искористи чињеница $\sin 1 > \frac{4}{5}$, коју смо већ установили.

442. $\cos 4\alpha \cos 5\alpha = \frac{1}{2}[\cos 9\alpha + \cos(-\alpha)] = \frac{1}{2}(\cos 9\alpha + \cos\alpha)$.

443. $\sin 5\alpha \cos 3\alpha \cos 6\alpha = \frac{1}{2}(\sin 8\alpha + \sin 2\alpha)\cos 6\alpha =$
$= \frac{1}{2}(\sin 8\alpha \cos 6\alpha + \sin 2\alpha \cos 6\alpha) = \frac{1}{4}[\sin 14\alpha + \sin 2\alpha + \sin 8\alpha + \sin(-4\alpha)] =$
$= \frac{1}{4}(\sin 14\alpha + \sin 2\alpha + \sin 8\alpha - \sin 4\alpha)$.

444. $\sin^3\alpha \cos^2\alpha = \frac{1}{4}\sin\alpha \sin^2 2\alpha = \frac{1}{8}\sin\alpha(1 - \cos 4\alpha) =$
$= \frac{1}{8}\sin\alpha - \frac{1}{8}\sin\alpha\cos 4\alpha = \frac{1}{8}\sin\alpha - \frac{1}{16}[\sin 5\alpha + \sin(-3\alpha)] =$
$= \frac{1}{8}\sin\alpha - \frac{1}{16}\sin 5\alpha + \frac{1}{16}\sin 3\alpha$.

445. Као у задацима **442.** и **443.** Резултати:
а) $\frac{1}{4}[\cos(\alpha-\beta+\gamma) + \cos(\alpha-\beta-\gamma) - \cos(\alpha+\beta+\gamma) - \cos(\alpha+\beta-\gamma)]$;
б) $\frac{1}{4}[\cos(\alpha+\beta+\gamma) + \cos(\alpha+\beta-\gamma) + \cos(\alpha-\beta+\gamma) + \cos(\alpha-\beta-\gamma)]$;
в) $\frac{1}{2}[\cos(2\alpha+1) + \cos 1]$; *г)* $\sin 25° + \sin 5°$; *д)* $\cos 35° + \cos 5° - \cos 45° - \cos 15°$;
ђ) $\cos 1° + \cos 3° + \cos 5° + \cos 7° + \cos 9° + \cos 13° + \cos 15°$; *е)* $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 8\alpha)$;
ж) $\frac{1}{2}(\cos 2\beta - \cos 2\alpha)$; *з)* $\frac{1}{2}[\cos(3\alpha + 2\beta) - \cos\alpha]$;

и) $\frac{1}{4}\left[\cos\left(\alpha+\frac{\beta+\gamma}{2}\right)+\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\cos\left(\alpha+\frac{\beta-\gamma}{2}\right)+\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\right]$;

ј) $\sin 3\alpha+\sin 2\alpha+\sin\alpha$; *к)* $\cos 7+\cos 1$; *л)* $\cos\left(\frac{\pi}{12}-2\alpha\right)-\cos\frac{7\pi}{12}$.

446. Као у задатку **444.** Резултати:
а) $\frac{1}{2}(\cos 0-\cos 2\alpha)$; *б)* $\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 0)$; *в)* $\frac{3}{4}\sin\alpha-\frac{1}{4}\sin 3\alpha$; *г)* $\frac{3}{4}\cos\alpha+$ $+\frac{1}{4}\cos 3\alpha$; *д)* $\frac{5}{8}\cos\alpha+\frac{5}{16}\cos 3\alpha+\frac{1}{16}\cos 5\alpha$; *ђ)* $\frac{3}{8}\cos 0-\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{8}\cos 4\alpha$; *е)* $\frac{3}{8}\cos 0+\frac{1}{2}\cos 2\alpha+\frac{1}{8}\cos 4\alpha$; *ж)* $\frac{5}{8}\sin\alpha-\frac{5}{16}\sin 3\alpha+\frac{1}{16}\sin 5\alpha$; *з)* $\frac{1}{8}\cos\alpha-$ $-\frac{1}{16}\cos 3\alpha-\frac{1}{16}\cos 5\alpha$; *и)* $\frac{1}{16}\cos 0-\frac{1}{32}\cos 2\alpha-\frac{1}{16}\cos 4\alpha+\frac{1}{32}\cos 6\alpha$;

447. *а)* $\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{1}{2}\left(\sin\pi-\sin\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{4}$.
б) – *г)* Као под *а)*. Резултати:
б) $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$; *в)* $\frac{1}{4}$; *г)* $-\frac{1}{4}$.
д) $4\sin\left(1+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(1+\frac{\pi}{3}\right)-2\cos 2=2\left[\sin\left(2+\frac{\pi}{2}\right)-\sin\frac{\pi}{6}\right]-2\cos 2=$
$=2\cos 2-1-2\cos 2=-1$.
ђ) $\cos^2 3+\cos^2 1-\cos 4\cos 2=\frac{1}{2}(1+\cos 6)+\frac{1}{2}(1+\cos 2)-\frac{1}{2}(\cos 6+\cos 2)=1$.

448. *а)* $4\sin\alpha^\circ\sin(60^\circ-\alpha^\circ)\sin(60^\circ+\alpha^\circ)=2\sin\alpha^\circ(\cos 2\alpha^\circ-\cos 120^\circ)=$
$=2\sin\alpha^\circ\cos 2\alpha^\circ+\sin\alpha^\circ=\sin 3\alpha^\circ-\sin\alpha^\circ+\sin\alpha^\circ=\sin 3\alpha^\circ$.
б) $\sin(60^\circ-\alpha^\circ)\sin(60^\circ+\alpha^\circ)=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha^\circ-\cos 120^\circ)=\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha^\circ+\frac{1}{2}\right)=$
$=\frac{1}{4}(1+2\cos 2\alpha^\circ)$.
в) $2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{3\alpha}{2}=\cos 2\alpha+\cos\alpha=2\cos^2\alpha+\cos\alpha-1$.
г) $\sin^2\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha\sin\alpha=\frac{1}{4}(\cos\alpha-\cos 3\alpha)$.
д) $\sin^3\alpha\cos\alpha=\frac{1}{4}\sin 2\alpha(1-\cos 2\alpha)=\frac{1}{8}(2\sin 2\alpha-\sin 4\alpha)$.
ђ) $\sin^2\alpha\cos^3\alpha=\frac{1}{4}\sin^2 2\alpha\cos\alpha=\frac{1}{8}(1-\cos 4\alpha)\cos\alpha=$
$=\frac{1}{8}\cos\alpha-\frac{1}{16}(\cos 5\alpha+\cos 3\alpha)=\frac{1}{16}(2\cos\alpha-\cos 3\alpha-\cos 5\alpha)$.
е) $\sin^3\alpha\cos^3\alpha=\frac{1}{8}\sin^3 2\alpha=\frac{1}{16}(1-\cos 4\alpha)\sin 2\alpha=\frac{1}{16}\sin 2\alpha-\frac{1}{16}\cos 4\alpha\sin 2\alpha=$
$=\frac{1}{16}\sin 2\alpha-\frac{1}{32}(\sin 6\alpha-\sin 2\alpha)=\frac{1}{32}(3\sin 2\alpha-\sin 6\alpha)$.
ж) $4\sin\alpha\sin 2\alpha\sin 3\alpha=2(\cos\alpha-\cos 3\alpha)\sin 3\alpha=2\cos\alpha\sin 3\alpha-2\cos 3\alpha\sin 3\alpha=$
$=\sin 4\alpha+\sin 2\alpha-\sin 6\alpha$.
з) $4\sin\alpha\sin\beta\cos(\alpha+\beta)=2\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]\cos(\alpha+\beta)=$

$= 2\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) - 2\cos^2(\alpha+\beta) = \cos 2\alpha + \cos 2\beta - \cos 2(\alpha+\beta) - 1.$

u) $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)\cos 2\alpha = \dfrac{1}{2}\left(\cos 2\alpha - \cos\dfrac{\pi}{2}\right)\cos 2\alpha = \dfrac{1}{2}\cos^2 2\alpha =$
$= \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4}\cos 4\alpha$

j) $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha} - 2\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{\sin(2\alpha+\beta) - 2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)}{\sin\alpha} =$
$= \dfrac{\sin(2\alpha+\beta) - \sin(2\alpha+\beta) + \sin\beta}{\sin\alpha} = \dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\ (\sin\alpha \neq 0).$

449. $A = \cos^2\beta + \cos^2(\alpha+\beta) - [\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]\cos(\alpha+\beta) =$
$= \cos^2\beta - \cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{2}(1+\cos 2\beta) - \dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha + \cos 2\beta) =$
$= \dfrac{1}{2}(1-\cos 2\alpha) = \sin^2\alpha.$

450. $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\cos 2x + \cos\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}\left(2\cos^2 x - 1 + \dfrac{1}{2}\right) =$
$= \cos^2 x - \dfrac{1}{4};\ \cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)\cos(x-\dfrac{\pi}{6}\Big) = m \iff \cos^2 x - \dfrac{1}{4} = m \iff \cos x =$
$= \pm\dfrac{\sqrt{4m+1}}{2}\ \left(4m+1 \geqslant 0 \text{ и } \dfrac{\sqrt{4m+1}}{2} \leqslant 1 \text{ тј. } -\dfrac{1}{4} \leqslant m \leqslant \dfrac{3}{4}\right).$

451. Нека је $\cos 2\alpha = c$. Како је $\sin 3\alpha \sin\alpha = \dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha - \cos 4\alpha) =$
$= \dfrac{1}{2}(\cos 2\alpha - 2\cos^2 2\alpha + 1) = \dfrac{1}{2}(-2c^2 + c + 1)$, то је $\dfrac{1}{2}(-2c^2 + c + 1) = k$, тј. $2c^2 - c + (2k-1) = 0$. Решења ове квадратне једначине су $c_1 = \dfrac{1+\sqrt{9-16k}}{4}$ и $c_2 = \dfrac{1-\sqrt{9-16k}}{4}$. Бројеви c_1 и c_2 су реални ако и само ако је $k \leqslant \dfrac{9}{16}$. Притом је $c_1 = \cos 2\alpha$ за неки угао α, тј. $c_1 \in [-1,\ 1]$, ако и само ако је $0 \leqslant k \leqslant \dfrac{9}{16}$, док је $c_2 = \cos 2\alpha$ за неки угао α ако и само ако је $-1 \leqslant k \leqslant \dfrac{9}{16}$.

452. $\dfrac{1}{2\sin 10^\circ} - 2\sin 70^\circ = \dfrac{1 - 4\sin 10^\circ \sin 70^\circ}{2\sin 10^\circ} = \dfrac{1 - 2(\cos 60^\circ - \cos 80^\circ)}{2\sin 10^\circ} =$
$= \dfrac{1 - 2\cos 60^\circ + 2\cos 80^\circ}{2\sin 10^\circ} = \dfrac{2\cos 80^\circ}{2\sin 10^\circ} = 1.$

453. $4\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha+\gamma}{2}\sin\dfrac{\alpha+\delta}{2} = 2\left[\cos\dfrac{\beta-\gamma}{2} - \cos\left(\alpha+\dfrac{\beta+\gamma}{2}\right)\right]\sin\dfrac{\alpha+\delta}{2} =$
$= \sin\dfrac{\alpha+\beta-\gamma+\delta}{2} + \sin\dfrac{\alpha-\beta+\gamma+\delta}{2} - \sin\dfrac{3\alpha+\beta+\gamma+\delta}{2} + \sin\dfrac{\alpha+\beta+\gamma-\delta}{2} =$
$= \sin(\pi-\gamma) + \sin(\pi-\beta) - \sin(\pi-\alpha) + \sin(\pi-\delta) = \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma + \sin\delta.$

454. Ако је $\cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$, тада је $\sin\dfrac{\theta+\alpha}{2}\sin\dfrac{\theta-\alpha}{2} =$

$= \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos\theta) = \frac{1}{2}(\cos\alpha - \cos\alpha\cos\beta) = \frac{1}{2}\cos\alpha(1-\cos\beta) = \cos\alpha\sin^2\frac{\beta}{2}$ и $\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\cos\frac{\theta-\alpha}{2} = \frac{1}{2}(\cos\theta - \cos\alpha) = \frac{1}{2}(\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha) = \frac{1}{2}\cos\alpha(\cos\beta+1) = = \cos\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}$. Према томе, из $\cos\alpha \neq 0 \wedge \cos\frac{\beta}{2} \neq 0 \wedge \cos\theta = \cos\alpha\cos\beta$ следи

$$\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\cos\frac{\theta-\alpha}{2} \neq 0 \text{ и } \operatorname{tg}\frac{\theta+\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\theta-\alpha}{2} = \frac{\cos\alpha\sin^2\frac{\beta}{2}}{\cos\alpha\cos^2\frac{\beta}{2}} = \operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}$$

455. $\frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{2} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{2\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)} \geqslant$

$\geqslant \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)+1} = \frac{2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}$, јер је $0 < \alpha < \beta < \pi$ $(\Rightarrow \sin(\alpha+\beta) > 0)$.

456. Претпоставимо, супротно ономе што треба да докажемо, да је $\sin 1^\circ$ рационалан број. Тада је и број $\cos 2^\circ = 1 - 2\sin^2 1^\circ$ рационалан, а на исти начин се добија и да је број $\cos 4^\circ$ рационалан, а затим и број $\cos 8^\circ$. Сем тога, како је, према задатку **355.**, $\sin 3^\circ = 3\sin 1^\circ - 4\sin^3 1^\circ$, то је и $\sin 3^\circ$ рационалан број, а и број $\sin 9^\circ$, на исти начин. Даље, како је $2\sin 9^\circ \sin 1^\circ = \cos 8^\circ - \cos 10^\circ$, то је и број $\cos 10^\circ$ рационалан. Према решењу задатка **355.** *а)* је $\cos 30^\circ = 4\cos^3 10^\circ - 3\cos 10^\circ$, па излази да је и $\cos 30^\circ$ рационалан број. Међутим, знамо да је $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$, што није рационалан број. Добијена противречност показује да број $\sin 1^\circ$ не може бити рационалан.

457. *а)* Обележимо збир на левој страни једнакости са C_n. Тачност једнакости може да се провери овако: $C_n 2\sin\frac{x}{2} = 2\cos x\sin\frac{x}{2} + 2\cos 2x\sin\frac{x}{2} +$

$$+\cdots+2\cos nx\sin\frac{x}{2} = \left(\sin\frac{3x}{2} - \sin\frac{x}{2}\right) + \left(\sin\frac{5x}{2} - \sin\frac{3x}{2}\right) + \cdots +$$

$$+\left[\sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{(2n-1)x}{2}\right] = \sin\frac{(2n+1)x}{2} - \sin\frac{x}{2} = 2\cos\frac{(n+1)x}{2}\sin\frac{nx}{2}.$$

б) Као под *а)*.

458. У једнакости из задатка **457.** *б)* стављамо $x + \pi$ уместо x.

459. Као у задатку **457.** *а)*.

460. За $n = 1$ једнакост је, очигледно, тачна. Ако је $n > 1$, стављамо $x = \frac{2\pi}{n}$ у једнакости из задатка **457.** *б)*.

461. Ставити $x = \dfrac{2\pi}{n}$ у једнакост из задатка **457.** *а)*.

462. Користићемо релацију из задатка **457.** *а)*:
$|\cos x - \cos 2x + \cos 3x - \cdots + (-1)^{n-1}\cos nx| =$
$= |-\cos(x+\pi) - \cos 2(x+\pi) - \cos 3(x+\pi) - \cdots - \cos n(x+\pi)| =$
$$= \frac{\left|\cos\dfrac{(n+1)(x+\pi)}{2}\sin\dfrac{n(x+\pi)}{2}\right|}{\left|\sin\dfrac{x+\pi}{2}\right|} \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\dfrac{x}{2}+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|} = \frac{1}{\left|\cos\dfrac{x}{2}\right|}.$$
Једнакост овде имамо ако је $\cos\dfrac{(n+1)(x+\pi)}{2} = \pm 1$ и $\sin\dfrac{n(x+\pi)}{2} = \pm 1$, тј. $\dfrac{(n+1)(x+\pi)}{2} = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, и $\dfrac{n(x+\pi)}{2} = \dfrac{\pi}{2} + m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, дакле, ако је $x = -\pi + \dfrac{2k\pi}{n+1}$, $k \in \mathbf{Z}$, и истовремено $x = -\pi + \dfrac{(2m+1)\pi}{n}$, $m \in \mathbf{Z}$, што може да се оствари само за непарно n. (На пример, $k = \dfrac{n+1}{2}$, $m = \dfrac{n-1}{2}$, $x = 0$).

463. Ако је L израз налевој страни неједнакости, тада је, према задатку **459.**, $L = \dfrac{\sin^2 n\alpha}{\sin^2\alpha} \geqslant 0$, уз једнакост у случају $\alpha = \dfrac{k\pi}{n}$, $k \in \mathbf{Z}$.

464. Доказаћемо прво да је $\dfrac{\cos(k+1)x\cos(k-1)x}{\cos^2 kx} < \cos^2 x$ за $k = 1, 2, \ldots, n$. Ова неједнакост је еквивалентна са $\cos(k+1)x\cos(k-1)x < (\cos kx \cos x)^2$, тј. са $4\cos(k+1)x\cos(k-1)x < \left[\cos(k+1)x + \cos(k-1)x\right]^2$, односно са $0 < \left[\cos(k+1)x - \cos(k-1)x\right]^2$, што је, очигледно, тачно. На основу тога је:
$$\frac{\cos(n+1)x}{\cos nx} = \cos x\cdot\frac{\cos 2x}{\cos^2 x}\cdot\frac{\cos 3x\cos x}{\cos^2 2x}\cdot\frac{\cos 4x\cos 2x}{\cos^2 3x}\cdot\cdots\cdot\frac{\cos(n+1)x\cos(n-1)x}{\cos^2 nx} <$$
$$< \cos x\cdot\underbrace{\cos^2 x\cdot\cos^2 x\cdot\cdots\cdot\cos^2 x}_{n} = \cos^{2n+1} x.$$

465. Десну неједнакост доказујемо примењујући неједнакост из задатка **455.**:
$$\frac{1}{44}(\operatorname{tg}1^\circ + \operatorname{tg}2^\circ + \cdots + \operatorname{tg}45^\circ) = \frac{1}{22}\left(\frac{\operatorname{tg}1^\circ + \operatorname{tg}44^\circ}{2} + \frac{\operatorname{tg}2^\circ + \operatorname{tg}43^\circ}{2} + \cdots + \frac{\operatorname{tg}22^\circ + \operatorname{tg}23^\circ}{2}\right) >$$
$> \dfrac{1}{22}22\operatorname{tg}\dfrac{45^\circ}{2} = \operatorname{tg}22^\circ 30'$. Да бисмо доказали леву неједнакост установићемо помоћну неједнакост $\operatorname{tg}\alpha^\circ\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha^\circ) < \operatorname{tg}^2 22^\circ 30'$ за $0 < \alpha < 45^\circ$: према задатку **455.** је $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha^\circ + \operatorname{tg}(45^\circ - \alpha^\circ)}{\operatorname{tg}45^\circ} > \dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{45^\circ}{2}}{\operatorname{tg}45^\circ}$, тј. $1 - \operatorname{tg}\alpha^\circ\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha^\circ) > 1 - \operatorname{tg}^2\dfrac{45^\circ}{2}$, односно $\operatorname{tg}\alpha^\circ\operatorname{tg}(45^\circ - \alpha^\circ) < \operatorname{tg}^2 22^\circ 30'$. На основу овога имамо.

$\sqrt[44]{\operatorname{tg} 1^\circ \cdot \ldots \cdot \operatorname{tg} 44^\circ} = \sqrt[44]{(\operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 44^\circ)(\operatorname{tg} 2^\circ \operatorname{tg} 43^\circ) \cdot \ldots \cdot (\operatorname{tg} 22^\circ \operatorname{tg} 23^\circ)} <$
$< \sqrt[44]{(\operatorname{tg}^2 22^\circ 30')^{22}} = \operatorname{tg} 22^\circ 30'$.

466. $4 \sin \frac{x+y+z}{2} \sin \frac{x+y-z}{2} \sin \frac{x-y+z}{2} \sin \frac{-x+y+z}{2} =$
$= [\cos z - \cos(x+y)] \cdot [\cos(x-y) - \cos z] = -\cos(x+y)\cos(x-y) - \cos^2 z +$
$+ \cos z [\cos(x+y) + \cos(x-y)] = -\frac{1}{2}(\cos 2x + \cos 2y) - \cos^2 z + 2\cos z \cos x \cos y =$
$= 1 - \cos^2 x - \cos^2 y - \cos^2 z + 2\cos x \cos y \cos z$.

467. Нека је $\pi - (\alpha + \beta) = \gamma_1$. Тада је $0 < \gamma_1 < \pi$ и треба доказати да је $\gamma_1 > \gamma$. Према задатку **417.** и претпоставци, имамо $1 = \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma - \cos^2 \gamma_1 = 1 - 2\cos\alpha \cos\beta \cos\gamma_1 + \cos^2\gamma - \cos^2\gamma_1$, одакле је $\cos^2\gamma - \cos^2\gamma_1 = 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma_1$. Ако је $\gamma_1 < \frac{\pi}{2}$, тада је $2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma_1 > 0$ и зато $\cos^2\gamma - \cos^2\gamma_1 > 0$, тј. $\cos\gamma > \cos\gamma_1$, што имплицира $\gamma_1 > \gamma$. У случају кад је $\gamma_1 \geqslant \frac{\pi}{2}$, тада из $\gamma < \frac{\pi}{2}$ одмах излази да је $\gamma_1 > \gamma$.

468. *а)* $\cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7} =$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{2\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7} + 2\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7} + \sin\frac{5\pi}{7} - \sin\frac{3\pi}{7} + \sin\frac{7\pi}{7} - \sin\frac{5\pi}{7}\right) =$$
$$= \frac{1}{2\sin\frac{\pi}{7}}\left(-\sin\frac{\pi}{7}\right) = -\frac{1}{2}.$$

б) $\cos 55^\circ \cos 65^\circ + \cos 65^\circ \cos 175^\circ + \cos 175^\circ \cos 55^\circ = \cos 55^\circ \cos 65^\circ - \cos 65^\circ \cos 5^\circ - \cos 5^\circ \cos 55^\circ = \frac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 10^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 70^\circ + \cos 60^\circ) - \frac{1}{2}(\cos 60^\circ + \cos 50^\circ) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cos 10^\circ - \frac{1}{2}(\cos 70^\circ + \cos 50^\circ) = -\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cos 10^\circ - \cos 60^\circ \cos 10^\circ = -\frac{3}{4}$.

в) $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{1}{2}(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ)\sin 80^\circ = \frac{1}{2}\cos 20^\circ \sin 80^\circ - \frac{1}{4}\sin 80^\circ =$

$= \frac{1}{4}\sin(100^\circ + 60^\circ) - \frac{1}{4}\sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}$.

г) $\sin 10^\circ \sin 20^\circ \sin 40^\circ \cos 10^\circ \cos 20^\circ \cos 40^\circ = \frac{1}{8}\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{64}$, с обзиром на *в)*.

д) $\operatorname{tg} 20^\circ \operatorname{tg} 40^\circ \operatorname{tg} 80^\circ = \dfrac{\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ}{\cos 20^\circ \cos 40^\circ \cos 80^\circ} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{8}}{\frac{1}{8}} = \sqrt{3}$, с обзиром на *в)* и на задатак **385.**

ђ) $\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ = \operatorname{ctg} 80^\circ \operatorname{ctg} 40^\circ \operatorname{ctg} 20^\circ = \dfrac{1}{\operatorname{tg} 80^\circ} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg} 40^\circ} \cdot \dfrac{1}{\operatorname{tg} 20^\circ} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}.$

е) $\operatorname{tg} 55^\circ \operatorname{tg} 65^\circ \operatorname{tg} 75^\circ = \dfrac{\sin 55^\circ \sin 65^\circ \sin 75^\circ}{\cos 55^\circ \cos 65^\circ \cos 75^\circ} = \dfrac{\frac{1}{2}(\cos 10^\circ - \cos 120^\circ)\sin 75^\circ}{\frac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 10^\circ)\cos 75^\circ} =$

$$= \frac{\sin 75^\circ \cos 10^\circ + \frac{1}{2}\sin 75^\circ}{-\frac{1}{2}\cos 75^\circ + \cos 75^\circ \cos 10^\circ} = \frac{\frac{1}{2}(\sin 85^\circ + \sin 65^\circ) + \frac{1}{2}\sin 75^\circ}{-\frac{1}{2}\cos 75^\circ + \frac{1}{2}(\cos 85^\circ + \cos 65^\circ)} =$$

$$= \frac{\sin 85^\circ + 2\sin 70^\circ \cos 5^\circ}{\cos 85^\circ + 2\sin 70^\circ \sin 5^\circ} = \frac{\sin 85^\circ(1 + 2\sin 70^\circ)}{\cos 85^\circ(1 + 2\sin 70^\circ)} = \operatorname{tg} 85^\circ.$$

ж) Према задатку **309.** имамо: $\operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ \operatorname{tg} 60^\circ$, $\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 110^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 110^\circ \operatorname{tg} 60^\circ$, $\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 120^\circ = \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 120^\circ$, односно, $\operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ + \sqrt{3} = \sqrt{3}\operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ$, $\operatorname{tg} 10^\circ - \operatorname{tg} 70^\circ + \sqrt{3} = -\sqrt{3}\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 70^\circ$, $\operatorname{tg} 10^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ - \sqrt{3} = -\sqrt{3}\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ$. Помножимо прву од ових једнакости са $\operatorname{tg} 10^\circ$, другу са $-\operatorname{tg} 50^\circ$, а трећу са $-\operatorname{tg} 70^\circ$, и саберимо их. С обзиром на једнакост утврђену под *ђ)*, на овај начин ћемо добити:

(∗) $\qquad \operatorname{tg} 10^\circ - \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ = \sqrt{3}.$

С друге стране, сабравши прве две од горње три једнакости, и трећу помножену са -1, налазимо да је:

(∗∗) $\qquad \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 70^\circ + \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ = 3$

Користећи релације (∗) и (∗∗) сада можемо да израчунамо и збир квадрата тангенса ових углова:

$\operatorname{tg}^2 10^\circ + \operatorname{tg}^2 50^\circ + \operatorname{tg}^2 70^\circ = (\operatorname{tg} 10^\circ - \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 70^\circ)^2 + 2(\operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 50^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ \operatorname{tg} 70^\circ - \operatorname{tg} 10^\circ \operatorname{tg} 70^\circ) = (\sqrt{3})^2 + 2 \cdot 3 = 9.$

469. *а)* Како је $\arcsin \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$, то су решења ове једначине бројеви $(-1)^k \dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) Како је $\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$, то су решења дате једначине бројеви $\pm\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

470. *а)* Како је $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\dfrac{\pi}{3}$, то су решења ове једначине бројеви $-\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) Како је $\operatorname{arcctg} 1 = \dfrac{\pi}{4}$, то су решења једначине $\operatorname{ctg} x = 1$ бројеви $\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

471. Ако уведемо смену $2x + \dfrac{\pi}{6} = t$, једначина се претвара у следећу:

$\cos t = -\frac{1}{2}$. Да бисмо нашли $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$, пођимо од познате чињенице $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ и ставимо $\alpha = \frac{\pi}{3}$ у формули $\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$. Добићемо $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$. Како је $0 < \frac{2\pi}{3} < \pi$, то је $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$. Сва решења једначине $\cos t = -\frac{1}{2}$ дата су са $t = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Овде стављамо $t = 2x + \frac{\pi}{6}$: $2x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \vee 2x + \frac{\pi}{6} = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, па решавањем ових линеарних једначина по x добијамо следећа два низа решења полазне једначине: $\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ и $-\frac{5\pi}{12} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

472. Као у задацима **469.** и **470.** Резултати:
а) $x=(-1)^k\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; *б)* $x=\pm\frac{5\pi}{6}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$; *в)* $x=\frac{\pi}{3}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$;
г) $x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; *д)* $x = (-1)^k\frac{\pi}{10} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

473. Као у задатаку **471.** Резултати:
а) $x=(-1)^k\frac{\pi}{54}+\frac{k\pi}{9}$, $k\in\mathbf{Z}$; *б)* $x=\pm\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$; *в)* $x=\frac{\pi}{20}+\frac{k\pi}{5}$, $k\in\mathbf{Z}$;
г) $x = \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{12}$, $k \in \mathbf{Z}$;
д) $x=\frac{\pi}{24}\pm\frac{5\pi}{36}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$ тј. $x=\frac{13\pi}{72}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$ или $x=-\frac{7\pi}{12}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.
ђ) $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$; *е)* $x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

474. *а)* $\sin^2 x = \frac{1}{4} \iff \sin x = \frac{1}{2} \vee \sin x = -\frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
б) $\sin|x| = 1 \iff (x \geqslant 0 \wedge \sin x = 1) \vee (x < 0 \wedge \sin x = -1)$;
$x = \pm\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k = 0, 1, 2, \ldots$
в) $|\sin x| = 1 \iff \sin x = 1 \vee \sin x = -1$; $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
г) Као под *а)*; $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
д) Као под *а)*; $x = \pm\frac{\pi}{3} + k\pi$. $k \in \mathbf{Z}$.
ђ) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \iff \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \vee \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$;
$x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
е) Као под *ђ)*: $x = \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = 1 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
ж) Као под *ђ)*; $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ или $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

475. *а)* $\sin x\cos x=2 \iff \sin 2x=4$; нема решења.
б) $\cos x\operatorname{tg} x=-2 \iff \sin x=-2$; нема решења.
в) $\sin x\sin 3x=1 \iff \cos 2x-\cos 4x=2 \iff 2\cos^2 2x-\cos 2x+1=0 \iff$
$\iff 2\left(\cos 2x-\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{7}{8}=0$; нема решења.
г) $|\cos x|\leqslant 1<\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow \cos(\cos x)>\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$; нема решења.

476. *а)* $x=(-1)^k\alpha+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$; *б)* $x=\pm\alpha+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$;
в) $x=\alpha+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$; $\left(\alpha\neq\dfrac{\pi}{2}+m\pi,\ m\in\mathbf{Z}\right)$; *г)* $x=\alpha+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$; $(\alpha\neq m\pi,\ m\in\mathbf{Z})$.

477. *а)* $\sin x=\cos x \iff \operatorname{tg} x=1$; $x=\dfrac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.
б) $\operatorname{tg}|x-2|=-1 \iff (x\geqslant 2\wedge \operatorname{tg}(x-2)=-1)\vee(x<2\wedge\operatorname{tg}(x-2)=1)$;
$x=2\pm\left(\dfrac{3\pi}{4}+k\pi\right),\ k=0,1,2,\ldots$.
в) $\sin^2 x+2\sin x=0 \iff \sin x(\sin x+2)=0 \iff \sin x=0$; $x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.
г) $2\sin x\cos x-\sin x=0 \iff \sin x(2\cos x-1)=0$; $x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, или $x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.
д) $\cos 3x+\cos 5x\doteq 0 \iff 2\cos 4x\cos x=0$; $x=\dfrac{\pi}{8}+\dfrac{k\pi}{4},\ k\in\mathbf{Z}$, или $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.
ђ) $\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)=-\sqrt{2} \iff -2\cos x=-\sqrt{2}$; $x=\pm\dfrac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.
е) $\cos 2x-\sqrt{2}\sin x\cos 2x=0 \iff \cos 2x(1-\sqrt{2}\sin x)=0 \iff \cos 2x=0$ (због $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow\cos 2x=0$); $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}$.
ж) $\operatorname{tg} 3x\cos x=0 \iff \operatorname{tg} 3x=0$ (јер ако је $\cos x=0$ онда је $x=\dfrac{\pi}{2}+k\pi$, тј. $3x=\dfrac{3\pi}{2}+3k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, па $\operatorname{tg} 3x$ не постоји); $x=\dfrac{k\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}$.
з) $3\operatorname{tg}^2 x+\operatorname{tg} x=0 \iff \operatorname{tg} x(3\operatorname{tg} x+1)=0$; $x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, или $x=-\operatorname{arctg}\dfrac{1}{3}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

478. $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)-\sin\alpha=0 \iff 2\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\alpha}{2}\right)\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}\right)=0 \iff$
$\iff \sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\alpha}{2}\right)=0\vee\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}\right)=0$; $x=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\alpha}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, или $x=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\alpha}{2}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

479. *а)* Дата једначина је једна квадратна једначина по $\cos x$. Решавањем те квадратне једначине добија се: $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -1$, Одатле је $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) $\cos x + \cos 2x = 0 \iff \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \iff 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$. Дакле, $\cos x = \frac{1}{2}$ или $\cos x = -1$. Решење је $x = (2k+1)\frac{\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

в) $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, итд., слично претходном задатку. Решење: $\cos x = 2$ (немогуће) или $\cos x = -1$, па је $x = (2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

г) $2\sin^2 x + 2\sin x - \sqrt{3}\sin x = \sqrt{3} \iff 2\sin x(\sin x + 1) - \sqrt{3}(\sin x + 1) = 0 \iff$
$\iff (2\sin x - \sqrt{3})(\sin x + 1) = 0 \iff \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee \sin x = -1$; $x = (-1)^k\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

480. $\sin\frac{3x}{2}\cos x = 0 \iff \sin\frac{3x}{2} = 0 \vee \cos x = 0$; $x = \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$, или, $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

481. Како је $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ и $1 + \sin 2x = \cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x\cos x = (\cos x + \sin x)^2$, то је дата једначина еквивалентна једначини $\frac{\cos x - \sin x}{\cos x}(\cos x + \sin x)^2 = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x}$. За свако x које задовољава ову једначину (као и полазну) мора бити $\cos x \neq 0$, тако да се множењем ове једначине са $\cos x$ прелази на једначину која је са њом еквивалента под условом да је $\cos x \neq 0$: $(\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x)^2 = \cos x + \sin x$.
Ова последња једначина еквивалентна је са једначином $(\cos x + \sin x)(\cos^2 x - \sin^2 x - 1) = 0$. Како из $\cos x = 0$ излази $\sin x = \pm 1$, то ниједан број x за који је $\cos x = 0$ није решење ове једначине, тако да је она у ствари еквивалентна полазној. Ако ставимо $\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$, она добија облик $(\cos x + \sin x)\sin^2 x = 0$ и разбија се на следеће две: $\cos x + \sin x = 0$ и $\sin x = 0$. Дакле, $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

482. Како је $\cos^6 x + \sin^6 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^4 x - \cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x) = \cos^4 x + 2\cos^2 x\sin^2 x + \sin^4 x - 3\cos^2 x\sin^2 x = (\cos^2 x + \sin^2 x)^2 - 3\cos^2 x\sin^2 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$, то се дата једначина може написати у облику $1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x = 4\sin^2 2x$, тако да је еквивалентна једначини $19\sin^2 2x = 4$. Ставивши $\sin^2 2x = \frac{1}{2}(1 - \cos 4x)$, можемо да сведемо ову последњу једначину на следећу: $\cos 4x = \frac{11}{19}$. Дакле, $x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{11}{19} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

483. *а)* Дељењем дате једначине са $\cos^2 x$, добијамо њој еквивалентну једначину $3\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 1 = 0$, јер из $\cos^2 x = 0$ следи $\sin^2 x = 1 \neq 0$ па ниједан број x за који је $\cos^2 x = 0$ не може бити решење дате једначине.

Решавањем добијене квадратне једначине по $\operatorname{tg} x$ показујемо да је полазна једначина еквивалентна следећој дисјункцији: $\operatorname{tg} x = 1 \vee \operatorname{tg} x = \frac{1}{3}$. Дакле, $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = \operatorname{arctg}\frac{1}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) Заменимо: $\sin 2x = 2\sin x\cos x$ и $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$, па даље као у претходном задатку. Решење је: $x_1 = k\pi + \frac{\pi}{4}$, $x_2 = (2k+1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

в) Слично претходном задатку. Решење: $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x_2 = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

г) $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

484. *а)* $\cos\frac{\pi}{6}\sin x + \sin\frac{\pi}{6}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $x = -\frac{\pi}{6} + (-1)^k\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 1 \iff \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x = \frac{1}{2} \iff \cos\frac{\pi}{3}\sin x + \sin\frac{\pi}{3}\cos x = = \frac{1}{2} \iff \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

485. *а)* Поделићемо једначину са $\sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ и добити: $\frac{4}{5}\sin x - \frac{3}{5}\cos x = \frac{2}{5}$.

Нађимо сада помоћни број φ, такав да је $\cos\varphi = \frac{4}{5}$ и $\sin\varphi = \frac{3}{5}$. За φ се може узети мерни број оштрог угла чији је косинус једнак $\frac{4}{5}$, тј. $\varphi = \arccos\frac{4}{5}$. Помоћу тако изабраног броја φ једначина се може написати у облику $\cos\varphi\sin x - \sin\varphi\cos x = \frac{2}{5}$, односно у облику $\sin(x - \varphi) = \frac{2}{5}$. Дакле, $x = \arccos\frac{4}{5} + (-1)^k\arcsin\frac{2}{5} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) Ову једначину поделићемо са $\sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$: $\frac{2}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos x = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$, и за помоћни број φ, такав да је $\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$, узети број $\arccos\frac{2}{\sqrt{5}}$. После тога једначина ће добити облик: $\cos\varphi\sin x + \sin\varphi\cos x = = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$, односно $\sin(x + \varphi) = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}$. Како је $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}} > 1$, то једначина нема решења.

486. *а)* Као у задатку 471. Резултат: $x = -\frac{\pi}{2} \pm 3\arccos\frac{2}{9} + 6k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) $\cos^2\left(3x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4} \iff \cos\left(6x - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, а даље као у задатку

471. Резултат: $x=\frac{\pi}{9}\pm\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$, тј. $x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$, или $x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

в) $\operatorname{tg}^2\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \iff \operatorname{tg}\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)=1\vee\operatorname{tg}\left(7x+\frac{\pi}{4}\right)=-1$; $x=\frac{k\pi}{14}$, $k\in\mathbf{Z}$.

г) Као под *б)*. Резултат: $x=\pm\frac{\pi}{9}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$; *д)* Нема решења, јер је $\cos^2\left(6x+\frac{\pi}{6}\right)\leqslant 1$. *ђ)* $x=\frac{7\pi}{4}+7k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

е) Као у задатку **474.** *ђ)*: $x=\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$, или $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$, $k\in\mathbf{Z}$, или $x=\frac{k\pi}{7}$, $k\in\mathbf{Z}$.

ж) $\sin 4x=-\cos 5x \iff \sin 4x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-5x\right)=0 \iff$

$\iff 2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{9x}{2}-\frac{\pi}{2}\right)=0$, а даље као у задатку **474.** под *ђ)*; $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, или $x=\frac{2k\pi}{9}$, $k\in\mathbf{Z}$.

з) $\operatorname{tg}4x=-\operatorname{tg}\frac{x}{2} \iff \operatorname{tg}4x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0 \iff \dfrac{\operatorname{tg}4x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}4x\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=0 \iff \operatorname{tg}\frac{9x}{2}=0$

(јер из $\operatorname{tg}4x+\operatorname{tg}\frac{x}{2}=0$ следи $1-\operatorname{tg}4x\operatorname{tg}\frac{x}{2}=1+\operatorname{tg}^2 4x\neq 0$); $x=\frac{2k\pi}{9}$, $k\in\mathbf{Z}$.

и) Као под *ж)*; $x=\frac{k\pi}{15}$, $k\in\mathbf{Z}$, или $x=\frac{(2k+1)\pi}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$.

j) Као под *ж)*; $x=\pm\frac{a}{6}+\frac{(2k+1)\pi}{6}$, $k\in\mathbf{Z}$.

к) $\sin\left(x+\frac{3\pi}{2}\right)=-\cos(x+6\pi) \iff -\cos x=-\cos x$; $x\in\mathbf{R}$.

л) Као под *ж)*; $x=\frac{10(2k+1)\pi}{7}$, $k\in\mathbf{Z}$, или $x=\frac{10(2k+1)\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

487. *а)* Као у задатку **479.**; $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, или $x=(-1)^k\arcsin\frac{4}{5}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

б) Као у задатку **479.**; $x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$

в) $2\cos^2 x=\sin^2 x-1 \iff 3\cos^2 x=0$; $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$

г) Као у задатку **477.** *в)*; $x=k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

д) Као у задатку **479.**; $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, или $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

ђ) Ставивши $\operatorname{ctg}x=\frac{1}{\operatorname{tg}x}$, можемо да сведемо дату једначину на квадратну једначину по $\operatorname{tg} x$: $2\operatorname{tg}^2 x - 5\operatorname{tg} x + 3 = 0$, чијим решавањем налазимо да је $\operatorname{tg} x = 1$ или $\operatorname{tg} x = \frac{3}{2}$; $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = \operatorname{arctg}\frac{3}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

е) $4\sin^3 x - 8\sin^2 x - \sin x + 2 = 0 \iff 4\sin^2 x(\sin x - 2) - \sin x + 2 = 0 \iff$ $\iff (\sin x - 2)(4\sin^2 x - 1) = 0 \iff 4\sin^2 x - 1 = 0$, а даље као у задатку **474.** *а)*; $x = \pm\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

ж) $\sin^2 2x - 3\sin 2x + 2 = 0 \iff \sin 2x = 1 \vee \sin 2x = 2 \iff \sin 2x = 1$; $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

з) $\operatorname{tg}^2 4x + 3\operatorname{tg} 4x - 4 = 0 \iff \operatorname{tg} 4x = 1 \vee \operatorname{tg} 4x = -4$; $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = -\frac{1}{4}\operatorname{arctg} 4 + \frac{k\pi}{4}$, $k \in \mathbf{Z}$.

и) Као под *ж)*; $x = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

ј) $\sin^2 2x + 2\cos^2 2x = \frac{7}{4} \iff \cos^2 2x = \frac{3}{4} \iff \cos 4x = \frac{1}{2}$; $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

488. $4\sin 2x\cos 2x + 1 = 0 \iff \sin 4x = -\frac{1}{2}$; решења која задовољавају услов $0 < x < \pi$: $\frac{7\pi}{24}, \frac{11\pi}{24}, \frac{19\pi}{24}, \frac{23\pi}{24}$.

489. Такав број не постоји, јер је $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \sqrt{2} < \frac{3}{2}$.

490. *а)* $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{1}{2}\sin x\cos x \iff (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x =$ $= \frac{7}{2}\sin x\cos x \iff 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x = \frac{7}{4}\sin 2x \iff 2\sin^2 2x + 7\sin 2x - 4 = 0 \iff$ $\iff \sin 2x = \frac{1}{2} \vee \sin 2x = -4 \iff \sin 2x = \frac{1}{2}$; $x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1 \iff \frac{1 - \cos 2x}{2} + \frac{1 - \cos 4x}{2} = 1 \iff \cos 2x + \cos 4x = 0$, а даље као у задатку **479.** *б)*; $x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

в) Као у задатку **479**; $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

г) $(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \sin 2x) = 1 \iff 1 + \operatorname{tg}^2 x + \frac{1}{\cos^2 x}2\sin x\cos x = 1 \iff$ $\iff \operatorname{tg}^2 x + 2\operatorname{tg} x = 0 \iff \operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x + 2) = 0 \iff \operatorname{tg} x = 0 \vee \operatorname{tg} x = -2$; $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = -\operatorname{arctg} 2 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

д) $\sin 3x\sin 2x = \sin 11x\sin 10x \iff \frac{1}{2}(\cos x - \cos 5x) = \frac{1}{2}(\cos x - \cos 21x) \iff$ $\iff \cos 5x - \cos 21x = 0 \iff 2\sin 13x\sin 8x = 0$; $x = \frac{k\pi}{13}$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = \frac{k\pi}{8}$, $k \in \mathbf{Z}$.

ђ) Као под *д)*; $x = \frac{k\pi}{8}$, $k \in \mathbf{Z}$.

е) $\cos x \sin 5x = \frac{1}{2}\sin 4x \iff \frac{1}{2}(\sin 6x + \sin 4x) = \frac{1}{2}\sin 4x \iff \sin 6x = 0$; $x = \frac{k\pi}{6}$, $k \in \mathbf{Z}$.

ж) Као под *е)*; $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = \frac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

з) $\sin 6x + \sin 4x = 0 \iff 2\sin 5x \cos x = 0$; $x = \frac{k\pi}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

и) $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0 \iff 2\sin 2x \cos x + \sin 2x = 0 \iff$
$\iff \sin 2x(2\cos x + 1) = 0 \iff \sin 2x = 0 \vee \cos x = -\frac{1}{2}$; $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

ј) $\cos x = \cos 3x + 2\sin 2x \iff 2\sin 2x \sin x = 2\sin 2x \iff$
$\iff \sin 2x = 0 \vee \sin x = 1 \iff \sin 2x = 0$ (због $\sin x = 1 \Rightarrow \cos x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$); $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

к) $1 + \cos 2x + \cos x + \cos 3x = 0 \iff 2\cos^2 x + 2\cos 2x \cos x = 0 \iff$
$\iff \cos x(\cos x + \cos 2x) = 0 \iff \cos x = 0 \vee \cos x + \cos 2x = 0$ (видети задатак 479.) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = \frac{(2k+1)\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

491. $\cos 2x + \cos 8x - \cos 6x = 1 \iff 2\cos 5x \cos 3x - 2\cos^2 3x = 0 \iff$
$\iff \cos 3x(\cos 5x - \cos 3x) = 0 \iff -2\cos 3x \sin 4x \sin x = 0 \iff$
$\iff \cos 3x = 0 \vee \sin 4x = 0$ (због $\sin x = 0 \Rightarrow \sin 4x = 0$); решења која задовољавају услов $0 < x < \frac{\pi}{2}$: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$.

492. *а)* $5\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 36\cos^2 x = 0 \iff 5\,\mathrm{tg}^2 x - 3\,\mathrm{tg}\, x - 36 = 0$ (због $\cos x = 0 \Rightarrow \sin^2 x = 1$), а даље као у задатку **487.** под *з)*; $x = \mathrm{arctg}\, 3 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = -\,\mathrm{arctg}\,\frac{12}{5} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) Као под *а)*; $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = \mathrm{arctg}\,\frac{3}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

в) Као под *а)*; $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = \mathrm{arctg}\, 3 + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

493. Као у задацима **484.** и **485.** Резултати:

а) $x = -\frac{\pi}{6} + (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; *б)* $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$;

в) $x = -\frac{\pi}{3} + (-1)^{k+1}\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; *г)* $x = \frac{\pi}{4} + (-1)^k\frac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$;

д) $x = \arccos\frac{5}{13} + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; *ђ)* $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k\frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$;

е) $x = \arccos\frac{2}{\sqrt{13}} + (-1)^k \arcsin\frac{1}{2\sqrt{13}} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; *ж)* $x = \frac{\pi}{16} + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = \frac{\pi}{40} + \frac{k\pi}{15}$, $k \in \mathbf{Z}$.

4

494. *а)* $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) \iff -\cos x+1=\cos x \iff$
$\iff \cos x=\frac{1}{2};\ x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

б) $\sin x\cos x=\frac{1}{2} \iff \sin 2x=1;\ x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

в) Као под *б)*; $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

г) $\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{\cos^2 x}-3\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-4=0 \iff \operatorname{tg}^3 x+\operatorname{tg}^2 x-3\operatorname{tg} x-3=0 \iff$
$\iff \operatorname{tg}^2 x(\operatorname{tg} x+1)-3(\operatorname{tg} x+1)=0 \iff (\operatorname{tg} x+1)(\operatorname{tg}^2 x-3)=0 \iff$
$\iff \operatorname{tg} x=-1 \vee \operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3};\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, или $x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

д) $(\cos x+\sin x)^2=\cos 2x \iff (\cos x+\sin x)^2=\cos^2 x-\sin^2 x \iff$
$\iff \cos x+\sin x=0 \vee \cos x+\sin x=\cos x-\sin x;\ x=-\frac{\pi}{4}+k\pi\ k\in\mathbf{Z}$, или
$x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

ђ) $\cos\frac{x}{2}-\cos x=1 \iff \cos\frac{x}{2}=2\cos^2\frac{x}{2} \iff \cos\frac{x}{2}=0 \vee 1=2\cos\frac{x}{2};$
$x=\pi+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, или $x=\pm\frac{2\pi}{3}+4k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

е) $\sin^4 x-\cos^4 x=\frac{1}{2} \iff \sin^2 x-\cos^2 x=\frac{1}{2} \iff \cos 2x=-\frac{1}{2};$
$x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

ж) $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1 \iff \operatorname{tg} x-1+\frac{1-\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg} x}=0 \iff (\operatorname{tg} x-1)\operatorname{tg} x=0;$
$x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$, или $x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

з) $1-\sin x=\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right) \iff 1-\sin x=\frac{1-\sin x}{2} \iff 1-\sin x=0;$
$x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

и) $\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin x}=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \iff \dfrac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2} \iff \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{1}{2};\ x=\pm 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}+2k\pi,$
$k\in\mathbf{Z}.$

ј) $\sin x+\cos x+2\sin x\cos x=1 \iff (\sin x+\cos x)+(\sin x+\cos x)^2-1=1 \iff$
$\iff \sin x+\cos x=1 \vee \sin x+\cos x=-2 \iff \sin x+\cos x=1$, због
$\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant-\sqrt{2}>-2;\ x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

к) $\cos x-\cos 3x=\sin 2x \iff 2\sin 2x\sin x=\sin 2x \iff \sin 2x=0 \vee 2\sin x=1;$
$x=\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbf{Z}$, или $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

л) $\cos x-2\cos 3x+\cos 5x=0 \iff 2\cos 3x\cos 2x-2\cos 3x=0 \iff$
$\iff 2\cos 3x(\cos 2x-1)=0;\ x=\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3},\ k\in\mathbf{Z}$, или $x=k\pi,\ k\in\mathbf{Z}.$

љ) $5(\sin x+\cos x)^2-12(\sin x+\cos x)+7=0 \iff \sin x+\cos x=1 \vee \sin x+\cos x=$

$= \frac{7}{5} \iff \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \vee \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{7}{5\sqrt{2}};\ x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$,

или $x = -\frac{\pi}{4} + (-1)^k \arcsin\frac{7\sqrt{2}}{10} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

м) $\sin^3 x + \cos^3 x = \cos x \iff \sin^3 x + \cos x(\cos^2 x - 1) = 0 \iff$

$\iff \sin^2 x(\sin x - \cos x) = 0;\ x = k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, или $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

н) $\sin^4 x + \cos^4 x = 1 \iff (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x\cos^2 x = 1 \iff$

$\iff -\frac{1}{2}\sin^2 2x = 0;\ x = \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$.

495. Као у задатку **488.**; једначина нема смисла.

496. Као у задатку **488.**; $\sin x + 2\cos x = \lambda \iff \frac{1}{\sqrt{5}}\sin x + \frac{2}{\sqrt{5}}\cos x =$

$= \frac{\lambda}{\sqrt{5}} \iff \sin\left(x + \arccos\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{5}}$; једначина има смисла ако и само ако је $|\lambda| \leqslant \sqrt{5}$.

497. *а)* $\sin x + \sin 3x + \sin 2x + \sin 4x = 0 \iff 2\sin 2x\cos x +$

$+ 2\sin 3x\cos x = 0 \iff 2\cos x(\sin 2x + \sin 3x) = 0 \iff 4\cos x\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{x}{2} = 0;$

$x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$, или $x = \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbf{Z}$, или $x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

б) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x + \operatorname{tg} 3x = 0 \iff \operatorname{tg} 3x(1 - \operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x) + \operatorname{tg} 3x = 0 \iff$

$\iff \operatorname{tg} 3x(2 - \operatorname{tg} x\operatorname{tg} 2x) = 0 \iff \operatorname{tg} 3x\left(2 - \frac{2\operatorname{tg}^2 x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}\right) = 0 \iff$

$\iff \operatorname{tg} 3x(2 - 4\operatorname{tg}^2 x) = 0;\ x = \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbf{Z}$, или $x = \pm\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

в) Као у задатку **476**; $x = (-1)^k\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$.

г) Као у задатку **479**; нема решења.

д) $\sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \iff -2\sin\frac{5\pi}{12}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) =$

$= \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \iff \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0;\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

ђ) Као под *д)*; $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

498. *а)* $\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x = 16\cos 2x \iff \frac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x\cos^2 x} = 16\cos 2x \iff$

$\iff \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{4\sin^2 x\cos^2 x} = 4\cos 2x \iff \cos 2x = 4\cos 2x\sin^2 2x \iff$

$\iff \cos 2x = 0 \vee 1 = 4\sin^2 2x;\ x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$, или $x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$.

б) Као у задатку **494.** под *л)*; $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbf{Z}$, или $x = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$.

в) $\sin x+\sin 3x=4\cos^3 x \iff 2\sin 2x\cos x=4\cos^3 x \iff 2\sin x\cos^2 x= = 2\cos^3 x \iff \cos^2 x=0 \vee \sin x=\cos x$; $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in\mathbf{Z}$, или $x=\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

г) $\sin x+\sin 2x=\cos x+\cos 2x \iff 2\sin\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2}=2\cos\frac{3x}{2}\cos\frac{x}{2} \iff$ $\iff \cos\frac{x}{2}=0 \vee \sin\frac{3x}{2}=\cos\frac{3x}{2}$; $x=(2k+1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, или $x=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

д) $1+\sin 2x=\sin x+\cos x \iff \sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=\sin x+\cos x \iff$ $\iff (\sin x+\cos x)^2=\sin x+\cos x \iff \sin x+\cos x=0 \vee \sin x+\cos x=1$; $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, или $x=-\frac{\pi}{4}+(-1)^k\frac{\pi}{4}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

ђ) $\cos 3x\cos 4x+\sin 2x\sin 5x=\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 4x) \iff \frac{1}{2}(\cos 7x+\cos x)+$ $+\frac{1}{2}(\cos 3x-\cos 7x)=\frac{1}{2}(\cos 2x+\cos 4x) \iff \cos 2x\cos x=\cos 3x\cos x \iff$ $\iff \cos x(\cos 2x-\cos 3x)=0 \iff \cos x 2\sin\frac{5x}{2}\sin\frac{x}{2}=0$; $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, или $x=\frac{2k\pi}{5}$, $k\in\mathbf{Z}$.

499. Како је $|\sin x|\leqslant 1$, $|\sin 2x|\leqslant 1$, $|\sin 3x|\leqslant 1$, и како из $\sin x\sin 2x\sin 3x=1$ следи $|\sin x\sin 2x\sin 3x|=1$, тј. $|\sin x||\sin 2x||\sin 3x|=1$, то дата једнакост може да важи једино ако је $|\sin x|=|\sin 2x|=|\sin 3x|=1$. Међутим, ако је $|\sin x|=1$, тада је $\sin 2x=0$, тако да дата једначина нема решења.

500. *а)* $\sin x\cos^3 x-\sin^3 x\cos x=\frac{1}{8} \iff \sin x\cos x(\cos^2 x-\sin^2 x)=$ $=\frac{1}{8} \iff \frac{1}{2}\sin 2x\cos 2x=\frac{1}{8} \iff \sin 4x=\frac{1}{2}$; $x=(-1)^k\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{4}$, $k\in\mathbf{Z}$.

б) $\sin^3 x+\cos^3 x=1-\frac{1}{2}\sin 2x \iff (\sin x+\cos x)(1-\sin x\cos x)=1-$ $-\frac{1}{2}\sin 2x \iff (\sin x+\cos x-1)(1-\frac{1}{2}\sin 2x)=0 \iff \sin x+\cos x-1=0 \iff$ $\iff \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$; $x=\frac{\pi}{2}+2m\pi$, $m\in\mathbf{Z}$, или $x=2m\pi$, $m\in\mathbf{Z}$.

501. Како је $\sin\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)=\sin\left[\pi-\left(\frac{\pi}{10}+\frac{3x}{2}\right)\right]=\sin 3\left(\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)$, то се дата једначина сменом $\frac{3\pi}{10}-\frac{x}{2}=t$ своди на једначину: $\sin 3t=2\sin t \iff$ $\iff 2\sin t\cos 2t=\sin t \iff \sin t(2\cos t-1)=0 \iff \sin t=0 \vee \cos 2t=\frac{1}{2}$; $x=\frac{3\pi}{5}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, или $x=\frac{3\pi}{5}\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

502. $\cos^2 x+\cos^2 2x-\cos^2 3x-\cos^2 4x=0 \iff \cos 2x+\cos 4x=$

$= \cos 6x - \cos 8x = 0 \iff (\cos 2x - \cos 8x) + (\cos 4x - \cos 6x) = 0 \iff$
$\iff 2\sin 5x \sin 3x + 2\sin 5x \sin x = 0 \iff \sin 5x(\sin 3x + \sin x) = 0 \iff$
$\iff \sin 5x \sin 2x \cos x = 0 \iff \sin 5x \sin 2x = 0$ (због $\cos x = 0 \Rightarrow \sin 2x = 0$);
$x = \dfrac{k\pi}{5}$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

503. $\sin x - \cos x - |\sin x + \cos x| = 1 \iff (\sin x + \cos x \geqslant 0 \vee -2\cos x = 1) \vee$ $\vee(\sin x + \cos x < 0 \vee 2\sin x = 1) \iff \left(\sin x + \cos x \geqslant 0 \wedge x = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right) \vee$ $\vee\left(\sin x + \cos x < 0 \wedge x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}\right)$; $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

504. *а)* $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} 3x - m \operatorname{tg} 2x = 0 \iff -\dfrac{\sin 2x}{\cos x \cos 3x} - m\dfrac{\sin 2x}{\cos 2x} = 0 \iff$
$\iff \cos x \neq 0 \wedge \cos 2x \neq 0 \wedge \cos 3x \neq 0 \wedge \sin 2x \left[\cos 2x + \dfrac{m}{2}(\cos 4x + \cos 2x)\right] = 0 \iff$
$\iff \cos x \neq 0 \wedge \cos 2x \neq 0 \wedge \cos 3x \neq 0 \wedge \sin 2x\left[2m\cos^2 2x + (m+2)\cos 2x - m\right] = 0.$
б) $m = -1$: $\sin 2x(-2\cos^2 2x + \cos 2x + 1) = 0 \wedge \cos x \neq 0 \wedge \cos 2x \neq 0 \wedge$ $\wedge \cos 3x \neq 0 \iff \left(\sin 2x = 0 \vee \cos 2x = 1 \vee \cos 2x = -\dfrac{1}{2}\right) \wedge \cos x \neq 0 \wedge \cos 2x \neq 0 \wedge$ $\wedge \cos 3x \neq 0 \iff \left(\sin x = 0 \vee \cos 2x = -\dfrac{1}{2}\right) \wedge \cos x \neq 0 \wedge \cos 2x \neq 0 \wedge \cos 3x \neq 0$;
$x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = \pm\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

505. $\sin 2x + \operatorname{tg} x + 2 = 0 \iff \dfrac{2\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \operatorname{tg} x + 2 = 0 \iff$
$\iff (\operatorname{tg} x + 1)(\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg} x + 2) = 0 \iff \operatorname{tg} x + 1 = 0$; $x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

506. $\cos^2 x + \cos^2 2x + \cos^3 3x = 1 \iff \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + 1 = 0 \iff$
$\iff \cos 4x + 2\cos 4x \cos 2x + 1 = 0 \iff 2\cos^2 2x + 2\cos 4x \cos 2x = 0 \iff$
$\iff 2\cos 2x(\cos 2x + \cos 4x) = 0 \iff 4\cos 2x \cos 3x \cos x = 0 \iff$
$\iff \cos 2x = 0 \vee \cos 3x = 0$ (због $\cos x = 0 \Rightarrow \cos 3x = 0$); $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = \dfrac{\pi}{6} + \dfrac{k\pi}{3}$, $k \in \mathbf{Z}$.

507. Прва од датих једначина је еквивалентна једначини $\sqrt{a^2 + b^2}\sin(x + \varphi) = -c$, при чему је φ неки број за који је $\cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ и $\sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ (видети задатке **488.** и **499.**). Ова једначина има решења тачно онда кад је $|c| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$ тј. $c^2 \leqslant a^2 + b^2$. Покажимо да у случају $c^2 > a^2 + b^2$ друга једначина има решења. Из $c^2 > a^2 + b^2$ следи $c \neq 0$, а из $a^2 + b^2 \neq 0$ следи да је $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Нека је, на пример $a \neq 0$. Тада је друга једначина еквивалентна са $a\operatorname{tg}^2 x + 2c\operatorname{tg} x + b = 0 \land \operatorname{tg} x \neq 0$. Како квадратна једначина $at^2 + 2ct + b = 0$ има позитивну дискриминанту: $D = 4(c^2 - ab) > 4(a^2 + b^2 - ab) > 2(a^2 + b^2 - 2ab) = 2(a-b)^2 \geqslant 0$, то та једначина има бар једно решење различито од 0, одакле непосредно следи потребан закључак.

508. Ставимо $\sin x + \cos x = t$. Како је $(\sin x + \cos x)^2 = 1 + 2\sin x \cos x$, то је $\sin x \cos x = \frac{1}{2}(t^2 - 1)$, па се дата једначина своди на једначину $t^2 + 2t - 3 = 0$. Решења ове последње једначине су 1 и -3. Друго решење треба одбацити, јер је $\sin x + \cos x > -2$. Решења: $x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, или $x = 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$.

509. Увек је $\cos x^2 + \cos y^2 - \cos xy \leqslant 3$. Дакле, треба само показати да једначина $\cos x^2 + \cos y^2 - \cos xy = 3$ нема решења. Она је еквивалентна конјункцији $\cos x^2 = 1 \land \cos y^2 = 1 \land \sin xy = -1$, односно конјункцији $(x^2 = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}) \land (y^2 = 2m\pi,\ m \in \mathbf{Z}) \land (xy = (2n+1)\pi,\ n \in \mathbf{Z})$, која никад није тачна, јер из $x^2 = 2k\pi$, $y^2 = 2m\pi$, $xy = (2n+1)\pi$ следи $\left(\frac{x^2y^2}{\pi} = \right)$ $4km = (2n+1)^2$, што није тачно ни за какве целе бројеве k, m и n.

510. Нека је φ такав број да је $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$. После дељења са $\sqrt{a^2+b^2}$, дату једначину можемо написати овако: $\cos\varphi\cos x + \sin\varphi\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$, или $\cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Према томе, решења једначине су бројеви x следећег облика: $x = \varphi \pm \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Ако је сада $\alpha = \varphi + \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, а $\beta = \varphi + \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, или $\alpha = \varphi - \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, $\beta = \varphi - \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, тада је $\frac{\alpha-\beta}{2} = (m-n)\pi$, и $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = 1$. Ако је, пак, $\alpha = \varphi + \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, а $\beta = \varphi - \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, или је $\alpha = \varphi - \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2m\pi$, $m \in \mathbf{Z}$, $\beta = \varphi + \arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + 2n\pi$, $n \in \mathbf{Z}$, тада имамо $\frac{\alpha-\beta}{2} = \pm\arccos\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} + (m-n)\pi$, и $\cos^2\frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{c^2}{a^2+b^2}$.

511. $\operatorname{tg}^2 x = \frac{1-\cos x}{1-|\sin x|} \iff \frac{1-\cos^2 x}{1-\sin^2 x} = \frac{1-\cos x}{1-|\sin x|} \iff$

$\iff \dfrac{1-\cos x}{1-|\sin x|}\left(\dfrac{1+\cos x}{1+|\sin x|}-1\right)=0 \iff \dfrac{1-\cos x}{1-|\sin x|}\cdot\dfrac{\cos x-|\sin x|}{1+|\sin x|}=0 \iff$
$\iff \cos x = 1 \vee \cos x = |\sin x| \iff \cos x = 1 \vee (\sin x \geqslant 0 \wedge \operatorname{tg} x = 1)\vee$
$\vee(\sin x < 0 \wedge \operatorname{tg} x = -1)$; $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = \dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = -\dfrac{\pi}{4}+2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

512. $\sin^4 x - \cos^7 x = 1 \iff \sin^4 x - 1 - \cos^7 x = 0 \iff$
$\iff (\sin^2 x-1)(\sin^2 x+1)-\cos^7 x=0 \iff \cos^2 x(\sin^2 x+1+\cos^5 x)=0 \iff$
$\iff \cos x=0 \vee \sin^2 x+(1+\cos^5 x)=0 \iff \cos x=0 \vee (\sin x=0 \wedge \cos^5 x=-1) \iff$
$\iff \cos x = 0 \vee \cos x = -1$; $x=(2k+1)\dfrac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x=(2k+1)\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

513. Ако је $m > 4$ тада је $\left(\sin\dfrac{\pi}{2m}\right)^n < \sin\dfrac{\pi}{2m} < \sin\dfrac{\pi}{m+4}$, тако да дата једнакост не важи ни за једно n. Ако је $m=1$, тада једнакост гласи: $1=\sin\dfrac{\pi}{5}$, и није тачна. Ако је $m=2$, тада имамо: $\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\right)^n=\sin\dfrac{\pi}{6}$, што је тачно за $n=2$. Ако је $m=3$, тада имамо: $\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^n=\sin\dfrac{\pi}{7}$, што није тачно ни за једно n, јер је $\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^n\leqslant\dfrac{1}{4}$ за $n\geqslant 2$, и $\sin\dfrac{\pi}{7}>\sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}>\dfrac{1}{4}$, док је за $n=1$ непосредно јасно. Најзад, ако је $m=4$, тада имамо једнакост: $\left(\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^n=\sin\dfrac{\pi}{8}$, што је тачно за $n=1$. Дакле, тражени парови су ови: $(2, 2)$ и $(4, 1)$.

514. Дата једначина је еквивалентна конјункцији $(a-1)(\sin x+\cos x+$ $+1)=2\sin x\cos x \wedge \sin x\cos x\neq 0$. Ако ставимо $\sin x+\cos x=t$, ова конјункција се своди на $t^2-(a-1)t-a=0\wedge t\neq\pm 1$ (због $2\sin x\cos x=t^2-1$). Решења ове квадратне једначине по t јесу -1 и a. Прво треба одбацити, а друго задржати, али само за $a\neq\pm 1$. Остаје још да се реши једначина $\sin x+\cos x=a$, тј. једначина $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{a}{\sqrt{2}}$ $(a\neq\pm 1)$. Решења:
$x=-\dfrac{\pi}{4}+(-1)^k\arcsin\dfrac{a}{\sqrt{2}}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$, при чему је $|a|\leqslant\sqrt{2}$ и $|a|\neq 1$.

515. Ставимо: $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=u$ и $\cos^2\left(\dfrac{\pi}{6}-x\right)=v$. Тада је $u+v=1$ и $u^5+v^5=a$. Како је $u^5+v^5=(u+v)(u^4-u^3v+u^2v^2-uv^3+v^4)=$ $=(u+v)\left[(u^2+v^2)^2-u^2v^2-uv(u^2+v^2)\right]$ и $u^2+v^2=(u+v)^2-2uv$, то је горњи систем једначина еквивалентан систему $u+v=1$, $5u^2v^2-5uv+$ $+1-a=0$. Отуд је $uv=\dfrac{1}{2}\left(1\pm\sqrt{\dfrac{4a+1}{5}}\right)$, под условом $a\geqslant-\dfrac{1}{4}$. Како је

$4uv = \sin^2 2\left(\frac{\pi}{6} - x\right)$, то мора бити $0 \leqslant 4uv \leqslant 1$, што је испуњено за $uv = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{4a+1}{5}}\right)$, и $\frac{1}{16} \leqslant a \leqslant 1$. Треба, дакле решити једначину $\sin^2 2\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 2\left(1 - \sqrt{\frac{4a+1}{5}}\right)$, или њој еквивалентну једначину $\cos 4\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 4\sqrt{\frac{4a+1}{5}} - 3$. Решења: $x = \frac{\pi}{6} \pm \frac{1}{4} \arccos\left(4\sqrt{\frac{4a+1}{5}} - 3\right) + \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$, за $\frac{1}{16} \leqslant a \leqslant 1$.

516. Ако је $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$, тада је $0 < \sin^2 x < 1$ и $0 < \cos^2 x < 1$, па је $\sin^{2m} x + \cos^{2n} x = (\sin^2 x)^m + \cos^2 x)^n < \sin^2 x + \cos^2 x = 1$, јер је бар један од бројева m и n већи од 1. Дакле, једначина нема решења за која је $\sin x \neq 0$ и $\cos x \neq 0$. Ако је $\sin x = 0$ или $\cos x = 0$, тада x, очигледно, јесте решење. Према томе, дата једначина је еквивалентна са $\sin x = 0 \vee \cos x = 0$. Решења: $x = \frac{k\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$.

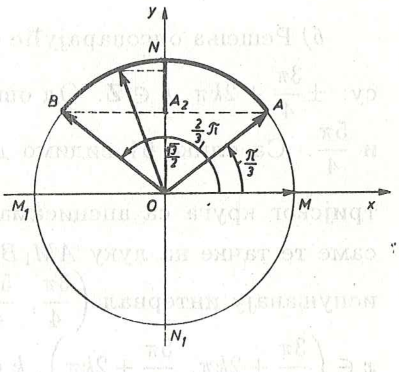
517. За $n = 1$ једначина гласи $\cos x - \sin x = 1$, и решења су јој бројеви $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, и бројеви $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. За $n = 2$ имамо $\cos^2 x - \sin^2 x = 1$, што је еквивалентно са $\sin x = 0$; $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Ако је $n > 2$ и $\cos x \neq 0$, $\sin x \neq 0$, тада је $\cos^n x - \sin^n x \leqslant |\cos^n x - \sin^n x| \leqslant$ $\leqslant |\cos x|^n + |\sin x|^n < \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, тј. $\cos^n x - \sin^n x \neq 1$. Зато је једначина за n непарно и веће од 2 еквивалентна са $\cos x = 1 \vee \sin x = -1$, што даје $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, или $x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, док је за n парно и $n > 2$ еквивалентна са $\sin x = 0$ и решења су јој $x = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

518. Дата функција може да се прикаже у облику: $f(x) = A\cos x - B\sin x$, где је $A = \cos a_1 + \frac{\cos a_2}{2} + \frac{\cos a_3}{2^2} + \cdots + \frac{\cos a_n}{2^{n-1}}$ и $B = \sin a_1 + \frac{\sin a_2}{2} + \frac{\sin a_3}{2^2} + \cdots + \frac{\sin a_n}{2^{n-1}}$. Притом је $A^2 + B^2 \neq 0$. Заиста, кад би било $A^2 + B^2 = 0$, тј. $A = B = 0$, било би и $f(x) = 0$ за сваки $x \in \mathbf{R}$, специјално за $x = -a_1$: $1 + \frac{\cos(a_2 - a_1)}{2} + \frac{\cos(a_3 - a_1)}{2^2} + \cdots + \frac{\cos(a_n - a_1)}{2^{n-1}} = 0$, а то значи да би било $\frac{\cos(a_2 - a_1)}{2} + \frac{\cos(a_3 - a_1)}{2^2} + \cdots + \frac{\cos(a_n - a_1)}{2^{n-1}} = -1$, што је немогуће, јер је $\left|\frac{\cos(a_2 - a_1)}{2} + \frac{\cos(a_3 - a_1)}{2^2} + \cdots + \frac{\cos(a_n - a_1)}{2^{n-1}}\right| \leqslant$ $\leqslant \frac{|\cos(a_2 - a_1)|}{2} + \frac{|\cos(a_3 - a_1)|}{2^2} + \cdots + \frac{|\cos(a_n - a_1)|}{2^{n-1}} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} <$ $< \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right) + \frac{1}{2^{n-1}} = 1.$

Сада можемо $f(x)$ да представимо овако: $f(x) = \sqrt{A^2+B^2}\sin(x+\varphi)$, при чему је φ неки број такав да је $\dfrac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\varphi$ и $-\dfrac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\varphi$ (видети задатак **488.** *а)* и **499.**). Из $f(x_1) = f(x_2) = 0$ следи да је: $x_1+\varphi = k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$ и $x_2+\varphi = j\pi$, $j \in \mathbf{Z}$, одакле излази: $x_1-x_2 = (k-j)\pi = m\pi$ и $m \in \mathbf{Z}$.

519. *а)* Најпре ћемо решити одговарајућу тригонометријску једначину: $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Решења ове једначине су бројеви $(-1)^k\dfrac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Ограничићемо се при решавању неједначине, привремено, на интервал $[0,\ 2\pi]$. Полазимо од оних решења одговарајуће једначине која леже на овом интервалу. То су бројеви $\dfrac{\pi}{3}$ и $\dfrac{2\pi}{3}$. Прикажимо помоћу тригонометријског круга углове чији су мерни бројеви $\dfrac{\pi}{3}$ и $\dfrac{2\pi}{3}$. То је учињено на слици 59.

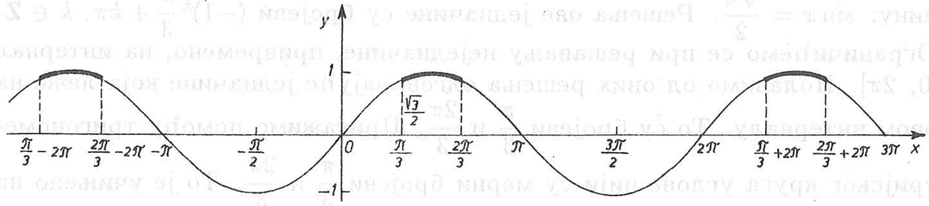
Завршни вектори ових углова су $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. Дуж A_2N је извучена дебљом линијом, као и лук ANB. Ова дуж се састоји од тачака осе Oy чије ординате су веће или једнаке $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, а мање или једнаке 1, док се лук састоји од крајњих тачака завршних вектора углова чији су синуси већи или једнаки $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, јер су пројекције тачака тог лука на осу Oy управо тачке дужи A_2N . Из овога видимо да су решења неједначине на интервалу



Сл. 59

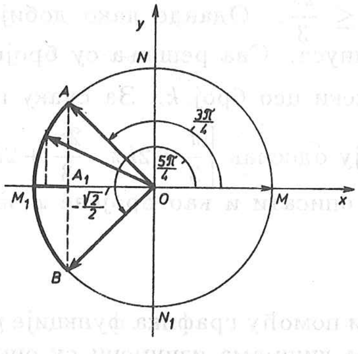
$[0,\ 2\pi]$ бројеви x за које је $\dfrac{\pi}{3} \le x \le \dfrac{2\pi}{3}$. Одавде лако добијамо сва решења на основу периодичности синуса. Сва решења су бројеви x за које је $\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \le x \le \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$ за неки цео број k. За сваку појединy вредност k овакви бројеви испуњавају одсечак $\left[\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$. Зато решења ове неједначине можемо описати и као бројеве x за које је $x \in \left[\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right]$, $k \in \mathbf{Z}$.

Иста неједначина може се решити помоћу графика функције $y = \sin x$. То је показано на слици 60. Дебљим линијама извучени су они делови графика који леже изнад праве за чије тачке је $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Дакле, ординате тачака које леже на подебљаним деловима графика су веће од $\frac{\sqrt{3}}{2}$, а за њихове крајње тачке ординате су једнаке $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Пројектовањем ових делова графика на осу Ox добијамо одсечке облика $\left[\frac{\pi}{3}+2k\pi,\ \frac{2\pi}{3}+2k\pi\right]$, $k\in\mathbf{Z}$, чија унија представља скуп свих решења дате неједначине.

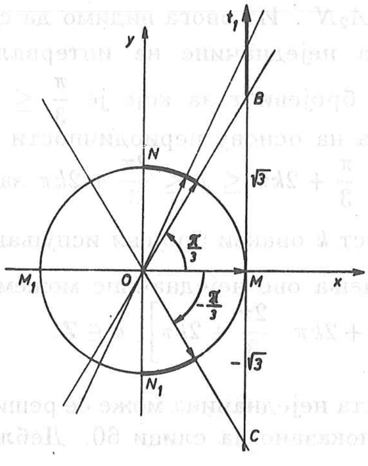


Сл. 60

б) Решења одговарајуће тригонометријске једначине $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$ јесу: $\pm\frac{3\pi}{4}+2k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$. Од ових бројева, интервалу $[0,\ 2\pi]$ припадају $\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{5\pi}{4}$. Са слике 61 видимо да пројекције на осу Ox тачака тригонометријског круга са апсцисама између -1 и $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ леже на дужи A_1M_1, а саме те тачке на луку AM_1B. Решења неједначине на интервалу $[0,\ 2\pi]$ испуњавају интервал $\left(\frac{3\pi}{4},\ \frac{5\pi}{4}\right)$, а сва решења су бројеви x, такви да је $x\in\left(\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ \frac{5\pi}{4}+2k\pi\right)$, $k\in\mathbf{Z}$.



Сл. 61



Сл. 62

Напомињемо да би при решавању неједначине $\cos x > -\frac{\sqrt{2}}{2}$ било погодно поћи од ова два решења одговарајуће једначине: $\frac{3\pi}{4}$ и $-\frac{3\pi}{4}$, па помоћу њих одредити интервал испуњен оним решењима неједначине која леже између $-\pi$ и π: $\left(-\frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right)$, а затим и скуп свих решења, додавањем $2k\pi$ на $-\frac{3\pi}{4}$ и $\frac{3\pi}{4}$: $x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

520. Дата неједначина еквивалентна је са неједначином $|\operatorname{tg} x| > \sqrt{3}$, односно са дисјункцијом $\operatorname{tg} x > \sqrt{3} \ \vee \ \operatorname{tg} x < -\sqrt{3}$. Решавањем одговарајућих једначина налазимо да је $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ за $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, а $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ за $x = -\frac{\pi}{3} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$. Најпре ћемо узети интервал $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ дужине π, тј. дужине основног периода тангенса, и наћи сва решења неједначине која леже на том интервалу. У том циљу уочимо решења горњих једначина која припадају споменутом интервалу. То су $\frac{\pi}{3}$ и $-\frac{\pi}{3}$. На сл. 62 дебљим линијама су извучени они делови тангенте t_1 који се састоје од тачака чије су ординате веће од $\sqrt{3}$ или мање од $-\sqrt{3}$. Одговарајуће тачке на тригонометријском кругу испуњавају лукове који су такође извучени дебљим линијама. Помоћу ових лукова добијамо интервале $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right)$ и $\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{3}\right)$ који садрже решења x неједначине за која је $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$. Сва решења су бројеви x за које је $x \in \left(\frac{\pi}{3} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, и бројеви за које је $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, -\frac{\pi}{3} + k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

521. Како је $\cos^2 x + \frac{3\sqrt{2}}{2}\cos x + 1 = (\cos x + \sqrt{2})\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и важи $\cos x + \sqrt{2} > 0$ за свако $x \in \mathbf{R}$, то се знак функције поклапа са знаком израза $\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}$. На основу решења задатка **519.** *б)* и напомене после њега, можемо одмах рећи да је $\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$, тј. да је $y < 0$ ако је $x \in \left(\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{5\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, и да је $\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} > 0$, тј. да је $y > 0$, ако је $x \in \left(-\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, \frac{3\pi}{4} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$.

522. *а)* Своди се на решавање неједначине $\operatorname{tg} x + 1 \geq 0$, што се може учинити као у задатку **520.** Резултат: $-\frac{\pi}{4} + k\pi \leq x < \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) Резултат: $-\frac{\pi}{2} + k\pi < x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

523. *а)-д)* Као у задацима **519.** и **520.** Резултати:
а) $-\frac{7\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$; *б)* $-\frac{2\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$;
в) $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$; *г)* $k\pi<x<\frac{\pi}{6}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$;
д) $-\frac{\pi}{3}+2k\pi<x<\frac{4\pi}{3}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.
ђ) $\sin x-\cos x>0\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$; $\frac{\pi}{4}+2k\pi<x<\frac{5\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.
е) $\sin x+4\cos x>1\Leftrightarrow\frac{1}{\sqrt{17}}\sin x+\frac{4}{\sqrt{17}}\cos x>\frac{1}{\sqrt{17}}\Leftrightarrow\sin\left(x+\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right)>$
$>\frac{1}{\sqrt{17}}$; $-\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}+\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$;
ж) Као у задатку **520.** Резултат:
$\frac{\pi}{4}+k\pi<x<\frac{\pi}{2}+k\pi$ или $-\frac{\pi}{2}+k\pi<x<-\frac{\pi}{4}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.
з) $\sin x+\sqrt{3}\cos x>1\Leftrightarrow\frac{1}{2}\sin x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x>\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)>\sin\frac{\pi}{6}$;
$-\frac{\pi}{6}+2k\pi<x<\frac{\pi}{2}+2k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

524. *а)* $(\sin x+1)(2\cos x-1)>0\Leftrightarrow\sin x\neq-1\ \wedge\ \cos x>\frac{1}{2}$; $0\le x<\frac{\pi}{3}$ или $\frac{5\pi}{3}<x\le 2\pi$.
б) $\cos x\left(\sin x+\frac{1}{2}\right)<0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left(\cos x>0\ \wedge\ \sin x<-\frac{1}{2}\right)\vee\left(\cos x<0\ \wedge\ \sin x>-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\left(\frac{3\pi}{2}<x\le 2\pi\ \wedge\ \frac{7\pi}{6}<x<\frac{11\pi}{6}\right)\vee\left(\frac{\pi}{2}<x<\frac{3\pi}{2}\ \wedge\ 0\le x<\frac{7\pi}{6}\right)$.
Коначно: $\frac{3\pi}{2}<x<\frac{11\pi}{6}$ или $\frac{\pi}{2}<x<\frac{7\pi}{6}$.

525. *а)* $y=3(\sin x-3)\left(\sin x-\frac{1}{3}\right)\Rightarrow\operatorname{sgn}y=\operatorname{sgn}\left(\frac{1}{3}-\sin x\right)$; $y>0$ за $x\in\left[0,\ \arcsin\frac{1}{3}\right)\cup\left(\pi-\arcsin\frac{1}{3},\ 2\pi\right]$, а $y<0$ за $x\in\left(\arcsin\frac{1}{3},\ \pi-\arcsin\frac{1}{3}\right)$.
б) $y=(\operatorname{tg}x+3)(2-\operatorname{tg}x)$; $y>0$ за
$x\in[0,\ \operatorname{arctg}2)\cup(\pi-\operatorname{arctg}3,\ \pi+\operatorname{arctg}2)\cup(2\pi-\operatorname{arctg}3,\ 2\pi]$, а $y<0$ за
$x\in\left(\operatorname{arctg}2,\ \frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\ \pi-\operatorname{arctg}3\right)\cup\left(\pi+\operatorname{arctg}2,\ \frac{3\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{3\pi}{2},\ 2\pi-\operatorname{arctg}3\right)$.

526. $(|\sin x|+|\cos x|)^2=\sin^2x+\cos^2x+2|\sin x||\cos x|=1+2|\sin x||\cos x|\ge 1$.

527. $\sin^2x>\sin 2x\Leftrightarrow\sin^2x-2\sin x\cos x>0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\cos x=0\ \vee\ \operatorname{tg}^2x-2tgx>0\Leftrightarrow\cos x=0\ \vee\ \operatorname{tg}x(\operatorname{tg}x-2)>0$;
$\operatorname{arctg}2+k\pi<x<\pi+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$.

528. $3+4\cos x+\cos 2x\geq 0 \Leftrightarrow 3+4\cos x+2\cos^2 x-1\geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \cos^2 x+2\cos x+1\geq 0 \Leftrightarrow (\cos x+1)^2\geq 0 \Leftrightarrow 3+4\cos x+\cos 2x=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \cos x+1=0$; $x=(2k-1)\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

529. Како је $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$, то је $-\sqrt{2}\leq\sin x+\cos x\leq\sqrt{2}$, па је $\sin(\sin x+\cos x)\leq\sin\sqrt{2}$ (због $\sqrt{2}<\frac{\pi}{2}$). Дакле, треба доказати да је $\sin\sqrt{2}<\cos\frac{\pi}{24}$, тј. да је $\sin\sqrt{2}<\sin\frac{11\pi}{24}$, тј. да је $\sqrt{2}<\frac{11\pi}{24}$. Ово последње следи отуд што је $\left(\frac{11\pi}{24}\right)^2>\left(\frac{11\cdot 3.1}{24}\right)^2>\left(\frac{17}{12}\right)^2=\frac{289}{144}>2$.

530. Испитајмо знак разлике $\cos(\sin x)-\sin(\cos x)$. Најпре извршимо трансформацију: $\cos(\sin x)-\sin(\cos x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\sin x\right)-\sin(\cos x)=$ $=2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sin x-\cos x}{2}\right)$. Како је $\sin x\pm\cos x=$ $=\sqrt{2}\sin\left(x\pm\frac{\pi}{4}\right)$, то је, за сваки $x\in\mathbf{R}$, $-\sqrt{2}\leq\sin x\pm\cos x\leq\sqrt{2}$, односно $\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\leq\frac{\pi}{4}-\frac{\sin x\pm\cos x}{2}\leq\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}$. С обзиром на то да је $\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}>0$ и $\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}<\frac{\pi}{2}$, за сваки $x\in\mathbf{R}$ је $\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)>0$ и $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sin x-\cos x}{2}\right)>0$, одакле следи да је поменута разлика увек позитивна. Дакле, $\cos(\sin x)$ је веће од $\sin(\cos x)$ за сваки $x\in\mathbf{R}$.

531. Према задатку **409.** *ј)* дата неједначина је еквивалентна са: $\operatorname{tg}3x>1$, уз услов $\cos 2x\neq\frac{1}{2}$; $x\in\left(\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{3},\ \frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{3}\right)$, $k\in\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$.

532. Како је $2\cos^2 x=1+\cos 2x$ и $2\sin^2 x=1-\cos 2x$, дата неједначина је еквивалентна са $(\sqrt{3}-1)\sin 2x-(\sqrt{3}+1)\cos 2x<1-\sqrt{3}$. Ову неједначину можемо да напишемо у облику
$\sin(2x-\varphi)<-\cos\varphi\left(=\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)\right)$, где је $\varphi=\arccos\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{8}}$.

Решења: $\frac{3\pi}{4}+k\pi<x<\frac{3\pi}{4}+\varphi+k\pi$, $k\in\{0,\ 1\}$.

533. Слично **532.** задатку, $\frac{\pi}{4}+k\pi\leq x\leq\frac{\pi}{4}+\arccos\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{8}}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

534. Како је
$|\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x}|=\sqrt{(\sqrt{1+\sin 2x}-\sqrt{1-\sin 2x})^2}=\sqrt{2(1-|\cos 2x|)}$, то је дата неједначина еквивалентна са $2\cos x\leq\sqrt{2(1-|\cos 2x|)}\leq\sqrt{2}$. Десна неједнакост је увек тачна. Што се тиче леве, за $0\leq x<\frac{\pi}{4}$ и

за $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$ она je еквивалентна са $2\cos x \leq \sqrt{2(1-\cos 2x)}$, односно са $\cos x \leq |\sin x|$, и тада je нетачна, за $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ и за $\frac{3\pi}{2} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$ еквивалентна je са $2\cos x \leq \sqrt{2(1+\cos 2x)}$, тј. са $\cos x \leq \cos x$, и тачна je, док je за $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ тачна просто зато што je $\cos x < 0$. Решења: $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$.

535. Ако je дата неједнакост тачна, тада je $\sin x \sin y \leq 0$, па je $|\sin x - \sin y| = |\sin x| + |\sin y|$. Но, како у случају кад je $\sin x \neq 0$ или $\sin y \neq 0$ имамо $|\sin x| + |\sin y| > |\sin x| \geq |\sin x \sin y| = -\sin x \sin y$ или $|\sin x| + |\sin y| > |\sin y| \geq |\sin x \sin y| = -\sin x \sin y$, то тада дата неједнакост није тачна. Према томе, она je тачна само ако je $\sin x = 0$ и $\sin y = 0$. Решења су сви уређени парови облика $(k\pi,\ m\pi)$, $k,\ m \in \mathbf{Z}$.

536. Из услова задатка следи да je $a\cos x + b\cos 3x \leq 1$, $x \in \mathbf{R}$. За $x = \pi$ одавде се добија $-a - b \leq 1$, а за $x = 2\pi$: $a + b \leq 1$, што заједно даје $|a+b| \leq 1$. Ако ставимо $x = \frac{\pi}{3}$, а затим $x = \frac{2\pi}{3}$, добићемо да je $\frac{a}{2} - b \leq 1$ и $-\frac{a}{2} + b \leq 1$, што значи да je $|a - 2b| \leq 2$. На основу тога je $3|b| = |(b+a) + (2b-a)| \leq |a+b| + |a-2b| \leq 3$, тј. $|b| \leq 1$.

537. Ако je $A = B = 0$, тада je $A^2 + B^2 < 1$. Ако je $A^2 + B^2 \neq 0$, тада постоји број Φ такав да je $\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} = \sin\Phi$ и $\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} = \cos\Phi$ (видети задатке **488.** *а)* и **499.**) и $f(x)$ се може приказати овако:
$f(x) = 1 - a\cos x - b\sin x - \sqrt{A^2+B^2}\sin(2x+\Phi)$. За $x = \frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}$ и $x = \frac{5\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}$ одавде се добија $1 \mp \left[a\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right)\right] - \sqrt{A^2+B^2} \geq 0$, што имплицира $\sqrt{A^2+B^2} \leq 1 - \left|a\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right) + b\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\Phi}{2}\right)\right| \leq 1$. На сличан начин доказујемо и да je $a^2 + b^2 \leq 2$. Ако je $a = b = 0$, то je очигледно. Ако je $a^2 + b^2 \neq 0$, тада постоји број φ такав да je $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$ и $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, па je $f(x) = 1 - \sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi) - A\cos 2x - B\sin 2x$.
Сада за $x = \frac{\pi}{4} - \varphi$ и $x = \frac{3\pi}{4} - \varphi$ добијамо да je
$1 - \sqrt{a^2+b^2}\frac{1}{\sqrt{2}} \mp (A\sin 2\varphi + B\cos 2\varphi) \geq 0$, одакле je
$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{a^2+b^2} \leq 1 - |A\sin 2\varphi + B\cos 2\varphi| \leq 1$, тј. $a^2 + b^2 \leq 2$.

538. *а)* Нека je $\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$. Тада je $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, па je

$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, тј. $\cos\left(\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

б) Слично претходном задатку. Резултат: $\frac{12}{5}$.

539. *а)* Означимо: $\alpha = \arccos\frac{3}{5}$, одакле је $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Тражи се $\sin\left(2\arcsin\frac{3}{5}\right) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\sqrt{1-\cos^2\alpha}\cdot\cos\alpha = \frac{24}{25}$.

б) Слично претходном: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$, итд. Режултат: $\frac{24}{25}$.

в) $\frac{\sqrt{5}}{20}$;

г) Из $\alpha = \arcsin\frac{5}{13}$, добијамо: $\sin\alpha = \frac{5}{13}$ и $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$, биће $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right) = \frac{1}{5}$.

д) $-\frac{7}{25}$; *ђ)* $\frac{4}{3}$.

540. *а)* Наћи $\cos(\alpha+\beta)$, где је $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $\cos\beta = \frac{12}{13}$. Резултат: $\frac{16}{65}$.

б) $\frac{77}{85}$; *в)* 0.

541. *а)* $\arcsin\left(\cos\frac{13\pi}{8}\right) = \arcsin\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\pi}{8}$;

б) $\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{8}\right) = \arccos\left(\cos\left(\pi+\frac{\pi}{8}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(-\frac{\pi}{8}\right)\right) = \pi-\frac{\pi}{8} = \frac{7\pi}{8}$.

в) $\frac{4\pi}{5}$; *г)* $-\operatorname{arctg} 7$;

д) $\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right) = -\sin\frac{\pi}{7} = \cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right) = \cos\frac{9\pi}{14}$.

Дакле: $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right) = \arccos\left(\cos\frac{9\pi}{14}\right) = \frac{9\pi}{14}$;

ђ) $\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right) = \arcsin\left(\cos\left(6\pi+\frac{3\pi}{5}\right)\right) = \arcsin\left(\cos\frac{3\pi}{5}\right) =$
$= \arcsin\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{10}\right)\right) = \arcsin\left(-\sin\frac{\pi}{10}\right) = \arcsin\left(\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)\right) = -\frac{\pi}{10}$.

542. *а)* Због $|x| \le 1$ постоје $\alpha = \arcsin x$ и $\beta = \arccos x$, $-\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{\pi}{2}$ и $0 \le \beta \le \pi$, одакле је $x = \sin\alpha = \cos\beta$. Следи закључак да је $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = \cos\beta$. Како је $0 \le \frac{\pi}{2}-\alpha \le \pi$ и $0 \le \beta \le \pi$, следи да је $\frac{\pi}{2}-\alpha = \beta$, па је $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$, тј. $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$.

б) Нека је $\arccos(-x) = \alpha$. Тада је $\cos\alpha = -x$, па је $\cos(\pi-\alpha) = x$. Због $0 \le \alpha \le \pi$ је $0 \le \pi-\alpha \le \pi$, а како је $x = \cos(\arccos x)$, то из

$\cos(\pi-\alpha)=\cos(\arccos x)$, добијамо $\pi-\alpha=\arccos x$, односно $\alpha=\pi-\arccos x$ и коначно: $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$.

в) и *г)* Слично претходном.

д) Слично задатку *б)*. Полазимо од једнакости: $\operatorname{arctg} x=\alpha$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}=\beta$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$;

ђ) Нека је $\alpha=\operatorname{arctg} x$. Тада је $\operatorname{tg}\alpha=x$, па је
$\sin\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

е) Нека је $\alpha=\arccos x$. Према услову је $0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$, па је $0\le 2x\le\pi$. Одавде је $\cos\alpha=x$, па је $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$, тј. $2\alpha=\arccos(2\cos^2\alpha-1)$. Враћајући почетну једнакост ($\alpha=\arccos x$) добијамо тражену једнакост.

543. Слично претходном задатку.

а) Из $\alpha=\arcsin x$, $\beta=\arcsin y$ и $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha=$ $=x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}$, следи тражена једнакост.

б) и *в)* слично претходном задатку.

г) Нека је $\alpha=\arcsin x$, $-\frac{\pi}{2}\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$. Тада је $\cos\alpha=+\sqrt{1-x^2}$, а

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin x\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}=\pm\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{2}}=$$
$$=\pm\sqrt{\frac{1-(1-x^2)}{2(1+\sqrt{1-x^2})}}=\pm\frac{|x|}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}}=\frac{x}{\sqrt{2(1+\sqrt{1-x^2})}},$$

јер је за $x>0$ $|x|=x$, а за $x<0$ је $|x|=-x$.

д) Слично претходном задатку.

ђ) Према услову је $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+x}{1-x}=\frac{2}{1-x}-1$, па за $0<x<1$ је $1<\frac{1+x}{1-x}$. Дакле, $\frac{\pi}{4}<\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}<\frac{\pi}{2}$, тј. $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Тада је $-\frac{\pi}{2}<\alpha-\pi<0$. Даље је: $\sin\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=\sin\beta$. Отуда следи тражени закључак.

544. *а)* Нека је $\alpha=\operatorname{arctg}2$ и $\beta=\operatorname{arctg}3$, тј. $\operatorname{tg}\alpha=2$ и $\operatorname{tg}\beta=3$. Одавде $\frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{4}<\beta<\frac{\pi}{2}$. Сада из $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}=-1$, због $\frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\pi$, добијамо: $\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}$, што се и тврдило.

б), в) - слично задатку *а)*. У задатку *г)* имамо $\alpha=\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$, па је $\operatorname{tg}\alpha=1$, итд.

г) $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{11}$ и $\beta = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{7}$, па је $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2}{11}$ и $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{7}$. Даље је $\operatorname{tg}(\alpha+2\beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}2\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}2\beta}$, а $\operatorname{tg}2\beta = \dfrac{2\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}^2\beta} = \dfrac{7}{24}$, итд.

ђ) Слично претходном задатку.

е) Полазимо од $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma+\delta) = \dfrac{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}(\gamma+\delta)}{1-\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\cdot\operatorname{tg}(\gamma+\delta)}$, итд. где је $0<\alpha+\beta+\gamma+\delta<\pi$.

545. Нека је $\alpha = \arcsin x$. Одавде закључујемо: $-\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \dfrac{\pi}{2}$ и $x = \sin\alpha$. Даље је $\cos\arcsin x = \cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = +\sqrt{1-x^2}$, $|x| \le 1$. Затим, нека је $\beta = \arccos x$. Тада је $0 \le \beta \le \pi$ и $x = \cos\beta$. Слично претходном разматрању, закључујемо да је $\sin\arccos x = +\sqrt{1-x^2}$. Нека је $\sqrt{1-x^2} = y$. Тада је $0 \le y \le 1$ и $\cos\arcsin x = y = \sin\arccos x$. Према задатку **542.** *а)* је $\arcsin y + \arccos y = \dfrac{\pi}{2}$, па је тражена веза: $\arcsin\cos\arcsin x + \arccos\sin\arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

546. На основу резултата задатака **543.** *в)* и **542.** *д)*, закључујемо да је $\operatorname{arctg}(2k+1)+\operatorname{arctg}1 = \operatorname{arcctg}\dfrac{k}{k+1} = \operatorname{arctg}\dfrac{k+1}{k}$, за $k \in \{1,\ 2,\ \dots,\ n\}$. Применимо то на леву страну једнакости коју треба доказати и добијемо: $\operatorname{arcctg}3+\operatorname{arcctg}5+\cdots+\operatorname{arcctg}(2n+1) = (\operatorname{arctg}2-\operatorname{arctg}1)+(\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}-\operatorname{arctg}1)+\cdots+(\operatorname{arctg}\dfrac{n+1}{n}-\operatorname{arctg}1) = \operatorname{arctg}2+\operatorname{arctg}\dfrac{3}{2}+\cdots+\operatorname{arctg}\dfrac{n+1}{n}-n\operatorname{arctg}1$.

547. *а)* $3x = \sin 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{3}\sin 1$; *б)* $\sqrt{x} = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}$.

в) $x^2-6x+8.5 = \sin\dfrac{\pi}{6} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x^2-6x+8=0 \Leftrightarrow x_1=2,\ x_2=4$.

г) Из задатка **542.** *а)* знамо да је $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$. Саберемо ову једначину са датом и добијемо: $2\arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$, па је $x = \sin\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

д) Нека је $\arccos x = t$. Тада из $t^2-2t-8=0$, добијамо $t_1=-2$, $t_2=4$. Решења једначине су $x_1=\cos 2$ и $x_2=\cos 4$.

548. *а)* Једначина нема решења, јер из $-\dfrac{\pi}{2} \le \arcsin 2x + \le \dfrac{\pi}{2}$ и $-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}3x < \dfrac{\pi}{2}$, следи да је $-\pi < \arcsin 2x + \operatorname{arctg}3x < \pi$.

б) Заменимо $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$, па имамо: $\arcsin x + \dfrac{\pi}{2} = 4$, што није могуће, јер је због $|\arcsin x| \le \dfrac{\pi}{2}$, лева страна једнакости $\arcsin x + \dfrac{\pi}{2} \le \pi < 4$. Једначина нема решења.

в) Слично претходном задатку, добијамо: $\frac{\pi}{2}+6\arccos x=2\pi$, одакле је $\arccos x=\frac{\pi}{4}$, па је $x=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.
г) Нека је $\alpha=\arccos x$ и $\beta=\arccos(1-x)$. Тада $\cos(\alpha+\beta)=-x$, а одавде добијамо: $2x-x^2-\sqrt{(1-x^2)(2x-x^2)}=0$, односно:
$\sqrt{2x-x^2}(\sqrt{2x-x^2}-\sqrt{1-x^2})=0$, $x\in[0,\ 1]$. Даље је $2x-x^2=0$ и $\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{1-x^2}$. Решења су $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{2}$.
д) Слично претходном задатку. Решења су: $x_1=0$, $x_{2,3}=\pm 1$.

549. Једначину трансформишемо користећи се условом $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, где је $\alpha=\arcsin x$ и $\beta=\arccos x$. Из $\alpha^3+\beta^3=k\pi^3$, добијамо:
$(\alpha+\beta)(\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2)=k\pi^3$, односно $\frac{\pi}{2}(\alpha^2-\alpha(\frac{\pi}{2}-\alpha)+(\frac{\pi}{2}-\alpha)^2)=k\pi^3$.
Сређивањем добијамо квадратну једначину: $12\alpha^2-6\pi\alpha+\pi^2(1-8k)=0$, која има дискриминанту: $D=36\pi^2-48\pi^2(1-8k)=12\pi^2(32k-1)$. Једначина нема реалних решења ако је $D<0$, тј. ако је $k<\frac{1}{32}$.

550. *а)* Решавајући квадратну неједначину по променљивој $\operatorname{arcctg} x$, добијамо $1<\operatorname{arcctg} x<2$, а одавде је $\operatorname{ctg} 2<x<\operatorname{ctg} 1$.
б) По дефиницији, неједначина прелази у $\frac{\pi}{3}<\arccos\left(x^2-\frac{x}{2}\right)<\pi$, па је $\cos\frac{\pi}{3}>x^2-\frac{x}{2}>\cos\pi$, односно $\frac{1}{2}>x^2-\frac{x}{2}>-1$ или $-2<2x^2-x<1$. Прва неједнакост: $2x^2-x+2>0$, задовољена је за свако x, а друга: $2x^2-x-1<0$ даје решење $-\frac{1}{2}<x<1$.
в) Дата неједначина је еквивалентна са
$0<\pi\operatorname{arctg} x\le 1$ или $0<\operatorname{arctg} x\le\frac{1}{\pi}$. Дакле: $0<x\le\operatorname{tg}\frac{1}{\pi}$.
г) Сменимо $\arccos x=\frac{\pi}{2}-\arcsin x$, па добијемо: $2\arcsin x<-\frac{\pi}{2}$ или $\arcsin x<-\frac{\pi}{4}$. Дакле: $-\frac{\pi}{2}\le\arcsin x<-\frac{\pi}{4}$. Коначно је $-1\le x<-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

551. *а) Први начин.* Према синусној теореми је $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$, па је $\sin\alpha=\frac{a}{b}\sin\beta=\frac{7}{13}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=0.46632$ и $\alpha=27^o47'45''\ \vee\ \alpha=152^o12'15''$. Друга од ове две могућности се одбацује, јер ако би било $\alpha=152^o12'15''$ збир $\alpha+\beta$ би био већи од 180^o, што је немогуће. Дакле, мора да буде $\alpha=27^o47'45''$. Сада се остали елементи троугла лако налазе, нпр. овако: $\gamma=180^o-\alpha-\beta=92^o12'15''$, $c=b\frac{\sin\gamma}{\sin\beta}=15$.
Други начин. На основу косинусне теореме имамо: $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta$, одакле се добија квадратна једначина по c: $c^2-7c-120=0$. Решења

те једначине су 15 и -8. Како је $c>0$, то мора бити $c=15$. Сада се угао α мора наћи као у првом начину, или применом косинусне теореме: $\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\dfrac{23}{26}$, итд.

б) - г) Као под *а)*. Резултати:

б) $\alpha=27^o47'45''$, $\beta=32^o12''15''$, $a=7$;
в) $\beta=28^o4'21''$, $\gamma=8^o47''51''$, $c=13$;
г) $\beta=61^o55'39''$, $\gamma=22^o37'12''$, $c=17$.

552. *а)* Применом косинусне теореме налаћемо $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma=169$ и $c=13$. Сада се може применити косинусна теорема ради налажења угла α: $\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-0.06445$ и $\alpha=93^o41'43''$, а угао β се потом лако налази овако: $\beta=180^o-\alpha-\gamma=74^o45'12''$.

б) - ђ) Као под *а)*. Резултати:

б) $b=37$, $\alpha=107^o56'43''$, $\gamma=18^o55'29''$;
в) $a=52$, $\beta=30^o30'37''$, $22^o37'11''$;
г) $c=19$, $\alpha=143^o7'48''$, $\beta=18^o55'29''$;
д) $c=7$, $\alpha=98^o12'49''$, $\beta=21^o47'12''$;
ђ) $c=5$, $\alpha=53^o7'48''$, $\beta=81^o52'12''$.

553. *а)* Најпре налазимо угао α: $\alpha=180^o-\beta-\gamma=81^o47'12''$, а затим страницу b применом синусне теореме: $b=a\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}=5$, и страницу c, на исти начин: $c=a\dfrac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=7$.

б) - г) Као под *а)*. Резултати:

б) $\beta=46^o49'35''$, $b=16$, $c=19$; *в)* $\beta=61^o55'39''$, $a=28$, $c=17$;
г) $\gamma=28^o4'21''$, $a=51$, $b=35$.

554. *а)* Кад су дате странице троугла, његове углове можемо наћи применом косинусне теореме. На пример, угао α се овако налази: $\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=-\dfrac{1}{7}$ и $\alpha=98^o12'48''$. На исти начин добија се $\gamma=60^o$, а затим се β може наћи као допуна до 180^o: $\beta=21^o47'12''$.

б) - е) Као под *а)*. Резултати:

б) $\alpha=21^o47'12''$, $\beta=38^o12'48''$, $\gamma=120^o$;
в) $\alpha=53^o7'48''$, $\beta=81^o52'12''$, $\gamma=45^o$;
г) $\alpha=36^o52'12''$, $\beta=8^o7'48''$, $\gamma=135^o$;
д) $\alpha=126^o52'12''$, $\beta=28^o4'21''$, $\gamma=25^o3'27''$;
ђ) $\alpha=83^o16'2''$, $\beta=53^o7'48''$, $\gamma=43^o36'10''$;
е) $\alpha=78^o11'16''$, $\beta=73^o44'23''$, $\gamma=28^o4'21''$

555. Као у задатку **551.** *а)*. Резултати:

а) $b=33$; *б)* $c_1=8$, $c_2=7$; *в)* $c_1=23$, $c_2=22$; *г)* $b=1$.

556. *а)* Најпре применом синусне теореме добијамо:

$\frac{a}{b}=\frac{\sin 2\beta}{\sin b}=2\cos\beta$, $\cos\beta=\frac{a}{2b}=0.7$ и $\beta=45^o34'23''$, а затим налазимо γ: $\gamma=180^o-3\beta=43^o16'51''$, и најзад c, применом косинусне теореме: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma=576$, $c=24$;

б) Као под *а)*. Резултат: $c=7$;

в) Како је $\beta=2\alpha$, то је $\sin\gamma=\sin 3\alpha$, па нам примена синусне теореме даје $\frac{b}{c}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha}$, тј. $\frac{28}{33}=\frac{2\cos\alpha}{4\cos^2\alpha-1}$, одакле се добија (решавањем квадратне једначине по $\cos\alpha$): $\cos\alpha=\frac{7}{8}\vee\cos\alpha=-\frac{2}{7}$. Друга могућност се одбацује, јер је $\beta>\alpha$ па α не може бити туп угао. Дакле, мора да буде $\cos\alpha=\frac{7}{8}$. Сада се применом косинусне теореме налази $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha=256$ и $a=16$.

г) Као под *в)*. Резултат: $b=4$.

д) Као под *в)*. Резултат: $a=12$.

557. *а)* На основу косинусне теореме имамо: $c^2=a^2+b^2-2ab+2ab(1-\cos\gamma)$, тј. $c^2=(a-b)^2+2ab(1-\cos\gamma)$, одакле се за $c=7$, $a-b=5$, $\gamma=60^o$ добија $ab=24$. Решавањем система једначина: $a-b=5$, $ab=24$, налазимо да је $a=8$ и $b=3$.

б) Као под *а)*. Резултат: $a=7$, $b=8$.

в) На основу косинусне теореме имамо: $c^2-b^2=a^2-2ab\cos\gamma$, тј. $(c+b)(c-b)=a^2-2ab\cos\gamma$, одакле се за $c+b=20$, $a=5\sqrt{2}$, $\gamma=135^o$ добија $2c-3b=5$. Решавањем система једначина: $b+c=20$, $2c-3b=5$, налазимо да је $b=7$, $c=13$.

г) Као под *в)*. Резултат: $a=26$, $b=2$.

д) Као под *в)*. Резултат: $a=17$, $b=7$.

558. Из синусне теореме излази $a=2R\sin\alpha$, $b=2R\sin\beta$, $c=2R\sin\gamma$, тако да је $\frac{a}{b+c}=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta+\sin\gamma}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\beta-\gamma}{2}}$, јер је $\sin\frac{\beta+\gamma}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\frac{\alpha}{2}$.

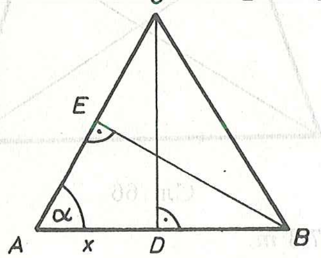
559. Према косинусној теореми је $AB^2=c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$. Уврстивши овде дате конкретне вредности, добијамо да је: $c^2=675.3^2+548.8^2-2\cdot 675.3\cdot 548.8\cdot\cos 58^o54'=374352.23$, одакле $c=611.8$.

560. Из троугла $\triangle BOP$ (сл. 17) је $y=x\operatorname{ctg}\beta$, а из троугла AOP је $x=(y+d)\operatorname{tg}\alpha$, одакле је $x=(d+x\operatorname{ctg}\beta)\operatorname{tg}\beta$, и $x=\frac{d\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\beta}=\frac{d\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$. Задатак има смисла ако је $0<\alpha<\beta<90^o$ $(d>0)$. За $\alpha=30^o$

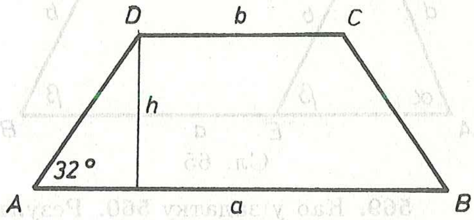
$\beta = 60^o$ и $d = 20\ m$ добија се $x = OP = \dfrac{20 \sin 30^o \sin 60^o}{\sin 30^o}\ m = 10\sqrt{3}\ m = 17.32\ m$.

561. Дато је $CD + BE = s$ и $\sphericalangle BAC = \alpha$ (сл. 63). Треба израчунати AB, BC и CA. Нека је $AD = x$. Тада је $CD = x \operatorname{tg} \alpha$, $BE = 2x \sin \alpha$. Из услова $CD + BE = s$ следи $x \operatorname{tg} \alpha + 2x \sin \alpha = s$ и $x = \dfrac{s}{\operatorname{tg} \alpha + 2 \sin \alpha}$. Сада је

$$AB = \frac{2s \cos \alpha}{\sin \alpha + \sin 2\alpha} = \frac{s \cos \alpha}{\sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}} \text{ и } BC = CA = \frac{x}{\cos \alpha} = \frac{s}{2 \sin \frac{3\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}.$$



Сл. 63



Сл. 64

562. Мања основица је $b = a - 2h \operatorname{ctg} \alpha$ (сл. 64), те је
$P = \dfrac{1}{2}(a + b)h = (a - h \operatorname{ctg} \alpha)h = (16 - 4 \operatorname{ctg} 32^o)4\ m^2 = 38.4\ m^2$.

563. Споменутом дијагоналом паралелограм је подељен на два подударна троугла са страницама једнаким 7, 8 и 13, па се применом косинусне теореме лако налази угао наспрам те дијагонале, а други угао паралелограма је суплементан овом углу. Резултат: 60^o, 120^o.

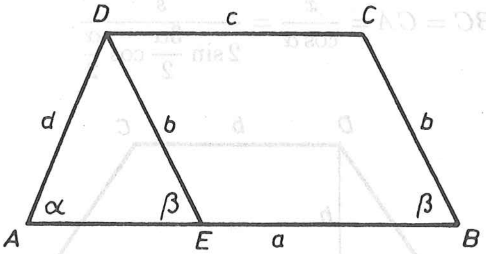
564. Ако су a и b две странице паралелограма које заклапају угао $\alpha = 60^o$, онда је, према услову задатка, $2a + 2b = 22$, тј. $a + b = 11$, и $ab \sin \alpha = 12\sqrt{3}$, тј. $ab = 24$. Сада се a и b лако налазе. Резултат: 8 и 3.

565. Страница b се налази применом формуле $P = ab \sin \alpha$, а затим се d може израчунати, применом косинусне теореме, као трећа страница троугла чије две странице су једнаке a и b а њима захваћени угао износи $180^o - \alpha$. Резултат: $b = 83.1\ dm$, $d = 94.3\ dm$.

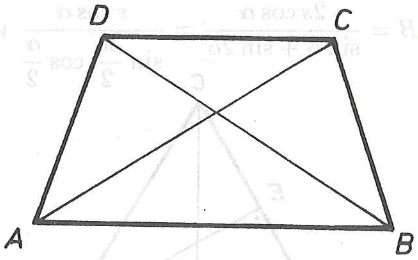
566. Као у задацима **563.** и **565.** Резултат: 120^o, 60^o, $\sqrt{19} (\cong 4.36)$, $\dfrac{15\sqrt{3}}{2} (\cong 13)$.

567. Нека је $ABCD$ трапез са страницама $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ (сл. 65). Углове $\alpha = \sphericalangle BAD$ и $\beta = \sphericalangle AED$ можемо наћи применом косинусне теореме, као углове троугла AED чије странице су једнаке: $AE = a - c$, $ED = b$, $DA = d$.
Резултат: $\alpha = 53^o 7' 48''$, $\beta = 59^o 29' 23''$.

568. Нека је $ABCD$ тај трапез (сл. 66). У троуглу BCD познате су странице BD и CD и $BCD = 180^o - 61^o56' = 118^o4'$, па се остали његови углови и страница BC могу наћи као у задатку **551.** *а)*. Затим основица AB може да се нађе, нпр. применом синусне теореме на троугао ABD. Површина трапеза је једнака $\frac{1}{2}(AB+CD)AD \sin \sphericalangle BAD$. Резултат: $BC = AD = 1.7\ m$, $AB = 4.4\ m$, $P = 5.4\ m^2$.



Сл. 65



Сл. 66

569. Као у задатку **560.** Резултат: $17.3\ m$.

570. Из правоуглих троуглова ACD и BCD налази се $AC = \dfrac{h}{\sin\alpha}$ и $BC = \dfrac{h}{\sin\beta}$, а затим се растојање AB налази применом косинусне теореме на троугао ABC. Резултат: $354\ m$.

571. Ако је α тражени угао, тада је $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{R}{R+H}$, одакле се добија $\alpha = 171^o53'7''$.

572. Израчунамо дуж BM као у задатку **553.** *а)*, а затим AB као разлику $BM - AM$. Резултат: $63\ m$.

573. Израчунамо AC као страницу троугла ACD и дуж BC као страницу троугла BCD (као у задатку **553.** *а)*), а затим AB налазимо применом косинусне теореме на троугао ABC (као у задатку **552.** *а)*. Резултат: $368.2\ m$.

574. Као у задатку **553.** *а)*. Резултат: $142\ m$, $194\ m$.

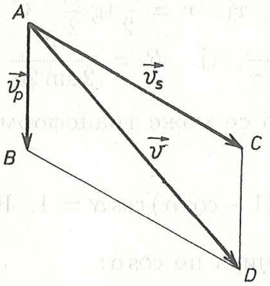
575. Израчунамо BC као страницу троугла BCD и AC као страницу троугла ACD (задатак **553.** *а)*), а затим тражено растојање као разлику $BC - AC$. Резултат: $648\ m$.

576. На слици 67. су брзина пливача $\vec{v_p}$, и брзина водене струје $\vec{v_s}$, приказане оријентисаним дужима $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, а резултујућа брзина $\vec{v}$ оријентисаном дужи $\overrightarrow{AD}$. Треба израчунати $|\ \vec{v}\ | = AD$. То се може учинити применом косинусне теореме на троугао ABD у коме су познате странице $AB = |\ \vec{v_p}\ | = 4$ и $BD = |\ \vec{v_s}\ | = 12$, и $\sphericalangle BAD = 180^o - \sphericalangle BAC$ (задатак **522.** *а)*). Резултати: *а)* $14\ km/h$; *б)* $11\ km/h$.

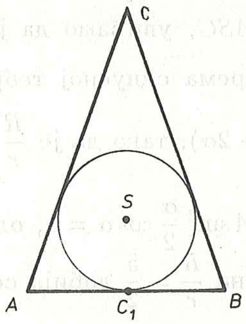
577. С једне стране имамо, на основу синусне теореме: $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{2R\sin\alpha - 2R\sin\beta}{2R\sin\alpha + 2R\sin\beta} = \dfrac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta}$, док је с друге стране

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\sin\alpha + \sin\beta} = \frac{\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}} = \operatorname{tg}\frac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2},$$ тако да је

$\dfrac{a-b}{a+b} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$. Из ове последње једнакости налази се да је $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = 1$, тј. да је $\gamma = 90^o$ (због $0 < \gamma < 180^o$). Сада се углови α и β налазе из услова $\alpha - \beta = 60^o$ и $\alpha + \beta = 180^o - \gamma$: $\alpha = 75^o$, $\beta = 15^o$, а страница c се налази, нпр., примено Питагорине теореме. Добија се $c = 2\sqrt{2}$.



Сл. 67



Сл. 68

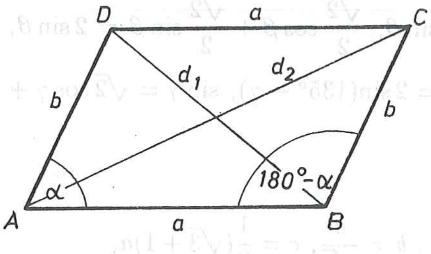
578. Како је $\alpha = 45^o$, то је $\beta + \gamma = 135^o$. С друге стране, из $c = 2b$ добијамо, применом синусне теореме, да је $\dfrac{\sin\gamma}{\sin\beta} = 2$, тј. $\sin\gamma = 2\sin\beta$. Сада даље налазимо: $\sin(135^o - \beta) = 2\sin\beta$, $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\beta + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta = 2\sin\beta$, $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{4-\sqrt{2}} = \dfrac{2\sqrt{2}+1}{7}$, односно: $\sin\gamma = 2\sin(135^o - \gamma)$, $\sin\gamma = \sqrt{2}\cos\gamma + \sqrt{2}\sin\gamma$, $\operatorname{tg}\gamma = \dfrac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}} = -2-\sqrt{2}$.

579. $\dfrac{a}{\sin 45^o} = \dfrac{b}{\sin 30^o} = \dfrac{c}{\sin(45^o + 30^o)}$, $b = \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, $c = \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}+1)a$, $12(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 2(a+b+c) = (3+\sqrt{2}+\sqrt{3})a$, $a = 12$, $b = 6\sqrt{2}$, $c = 6(\sqrt{3}+1)$, $P = \dfrac{1}{2}bc\sin\alpha = 18(\sqrt{3}+1)$.

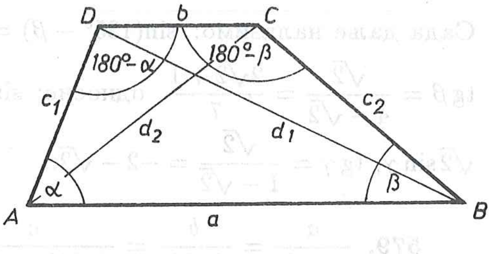
580. Полазимо од једнакости $\dfrac{a-b}{a+b} = \operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}$, која је установљена у задатку 577. Како је у овом задатку $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{3}$ и $\alpha - \beta = 90^o$, то је $\dfrac{a-b}{a+b} = \dfrac{\frac{a}{b}-1}{\frac{a}{b}+1} = \dfrac{1}{7}$ и $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2} = 1$, па из споменуте једнакости излази $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2} = \dfrac{1}{7}$. Сада је $\sin\gamma = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{7}{25}$ и $\cos\gamma = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}} = \dfrac{24}{25}$. Даље се из $P = \dfrac{1}{2}ab\sin\gamma$ добија да је $ab = 1200$, што заједно са $\dfrac{a}{b} = \dfrac{4}{3}$ даје $a = 40$ и $b = 30$. Најзад, страница c се може наћи применом косинусне теореме. Добија се $c = 14$.

581. Нека је $\triangle ABC$ једнакокраки троугао са основицом AB, нека је S центар уписаног круга тог троугла и нека је са C_1 обележена додирна тачка уписаног круга и основице AB (сл. 68). Разматрањем правоуглог троугла ASC_1 увиђамо да је $SC_1 = AC_1\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$, тј. $r = \dfrac{c}{2}\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}$. С друге стране, према синусној теореми је $R = \dfrac{c}{2\sin\gamma}$, тј. $R = \dfrac{c}{2\sin 2\alpha}$ (због $\gamma = 180^o - 2\alpha$), тако да је $\dfrac{R}{r} = \dfrac{1}{\sin 2\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$, што се може трансформисати овако: $\dfrac{R}{r}4\sin^2\dfrac{\alpha}{2}\cos\alpha = 1$, односно овако: $\dfrac{R}{r}2(1-\cos\alpha)\cos\alpha = 1$. Кад се овде замени $\dfrac{R}{r} = \dfrac{5}{2}$ добија се квадратна једначина по $\cos\alpha$:

$5\cos^2\alpha - 5\cos\alpha + 1 = 0$, чија решења су $\dfrac{5+\sqrt{5}}{10}$ и $\dfrac{5-\sqrt{5}}{10}$. Отуда се добија да је $\alpha = \arccos\dfrac{5+\sqrt{5}}{10} = 43^o38'49''$ или $\alpha = \arccos\dfrac{5-\sqrt{5}}{10} = 73^o57'18''$.



Сл. 69



Сл. 70

582. На слици 69. је приказан паралелограм $ABCD$ са страницама $AB = CD = a$, $BC = DA = b$ и дијагоналама $BD = d_1$, $AC = d_2$. Применом косинусне теореме на троуглове ABD и ABC утврђује се да је
$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$ и
$d_2^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^o - \alpha) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\alpha$.
Сабирањем ових релација добија се тражена релација $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$.

583. На слици 70. је трапез $ABCD$ са основицама $AB = a$ и $CD = b$, крацима $AD = c_1$ и $BC = c_2$ и дијагоналама $BD = d_1$ и $AC = d_2$. Најпре се утврђују следеће једнакости, применом косинусне теореме на троуглове ABD, BCD, ABC, ACD: $d_1^2 = a^2 + c_1^2 - 2ac_1 \cos\alpha$, $d_1^2 = b^2 + c_2^2 + 2bc_2 \cos\beta$, $d_2^2 = a^2 + c_2^2 - 2ac_2 \cos\beta$, $d_2^2 = b^2 + c_1^2 + 2bc_1 \cos\alpha$. Затим се прва и трећа од ових једнакости помноже са b, а друга и четврта са a, и саберу се: $(b+a)d_1^2 + (b+c)d_2^2 = ba^2 + bc_1^2 + ab^2 + ac_2^2 + ba^2 + bc_2^2 + ab^2 + ac_1^2$. Дељењем ове једнакости са $a+b$ добија се тражена релација.

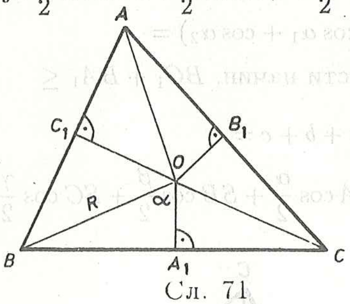
584. Примењујемо синусну теорему ($c = 2R\sin\gamma$, $a = 2R\sin\alpha$, итд.) и користимо једнакост из задатка **416.** *б)* :

$$\frac{\cos\alpha}{c\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{a\sin\gamma} + \frac{\cos\gamma}{b\sin\alpha} = \frac{\cos\alpha}{2R\sin\gamma\sin\beta} + \frac{\cos\beta}{2R\sin\alpha\sin\gamma} + \frac{\cos\gamma}{2R\sin\beta\sin\alpha} =$$

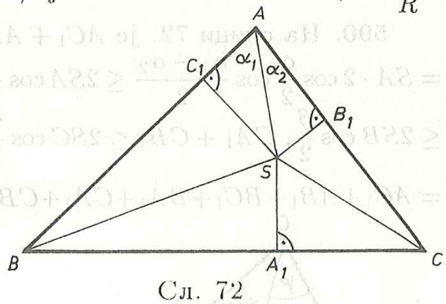
$$= \frac{\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma}{4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}{4R\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma} = \frac{1}{R}.$$

585. На слици 71. је са O обележен центар описаног круга троугла ABC. Како је: $P_{\triangle OBC} + P_{\triangle OCA} + P_{\triangle OAB} = P_{\triangle ABC}$ и

$P_{\triangle OBC} = \frac{1}{2}BC \cdot OA_1 = \frac{1}{2}aR\cos\alpha$ и $P_{\triangle OCA} = \frac{1}{2}bR\cos\beta$, $P_{\triangle OAB} = \frac{1}{2}cR\cos\gamma$, то је $\frac{1}{2}aR\cos\alpha + \frac{1}{2}bR\cos\beta + \frac{1}{2}cR\cos\gamma = sr$, тј. $a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = \frac{2sr}{R}$.



Сл. 71



Сл. 72

586. На основу косинусне теореме је $\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, $\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos\gamma = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. Увстривши ово на левој страни дате једнакости, после краћег сређивања лако утврђујемо њену тачност.

587. Како је $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{1+\cos x} = \frac{b+c-a}{b+c+a}$ и, на исти начин, $\operatorname{tg}^2\frac{y}{2} = \frac{c+a-b}{c+a+b}$, $\operatorname{tg}^2\frac{z}{2} = \frac{a+b-c}{a+b+c}$, то је $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{y}{2} + \operatorname{tg}^2\frac{z}{2} = \frac{c+a+b}{a+b+c} = 1$. Применом синусне теореме и релације из задатка **418.** *б)*, даље рачунамо:

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} = \frac{b+c-a}{b+c+a} = \frac{2R\sin\beta + 2R\sin\gamma - 2R\sin\alpha}{2R\sin\beta + 2R\sin\gamma + 2R\sin\alpha} = \frac{\sin\beta + \sin\gamma - \sin\alpha}{\sin\beta + \sin\gamma + \sin\alpha} =$$

$= \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$ и, на исти начин, $\operatorname{tg}^2\frac{y}{2} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tg}^2\frac{z}{2} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$. Према томе, $\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}=\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}^2\frac{\gamma}{2}$. Остаје још само да се ово коренује, узевши у обзир да су сви тангенси позитивни.

588. $(a^2+b^2)\sin(\alpha-\beta)=(a^2-b^2)\sin(\alpha+\beta)\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]=b^2[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a^2 2\sin\beta\cos\alpha=b^2 2\sin\alpha\cos\beta\Leftrightarrow a\cos\alpha=b\cos\beta\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sin\alpha\cos\alpha=\sin\beta\cos\beta\Leftrightarrow\sin 2\alpha=\sin 2\beta\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2\alpha=2\beta\ \vee\ 2\alpha+2\beta=\pi\Leftrightarrow\alpha=\beta\ \vee\ \alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$.

589. $a+b=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}(a\operatorname{tg}\alpha+b\operatorname{tg}\beta)\Leftrightarrow a\left(1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)+b\left(1-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\right)=0\Leftrightarrow$

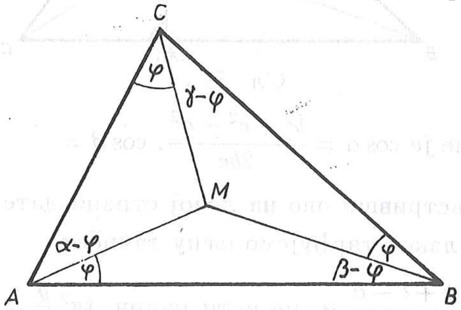
$$\Leftrightarrow \sin\alpha\frac{\cos\left(\alpha+\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\alpha\cos\frac{\gamma}{2}}+\sin\beta\frac{\cos\left(\beta+\frac{\gamma}{2}\right)}{\cos\beta\cos\frac{\gamma}{2}}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\alpha\cos\beta\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)+\sin\beta\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\beta-\alpha}{2}\right)=0\Leftrightarrow$$

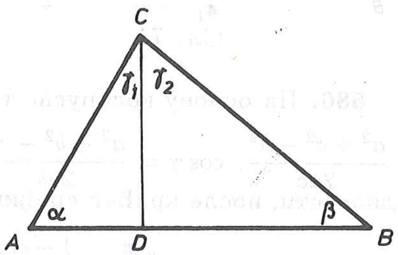
$$\Leftrightarrow \sin\frac{\alpha-\beta}{2}(\sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin(\alpha-\beta)=0\Leftrightarrow\sin(\alpha-\beta)=0\Leftrightarrow\alpha-\beta=0\Leftrightarrow\alpha=\beta.$$

590. На слици 72. је $AC_1+AB_1=SA(\cos\alpha_1+\cos\alpha_2)=$
$=SA\cdot 2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}\le 2SA\cos\frac{\alpha}{2}$ и, на исти начин, $BC_1+BA_1\le$
$\le 2SB\cos\frac{\beta}{2}$, $CA_1+CB_1\le 2SC\cos\frac{\gamma}{2}$, па је $a+b+c=$
$=AC_1+AB_1+BC_1+BA_1+CA_1+CB_1\le 2\left(SA\cos\frac{\alpha}{2}+SB\cos\frac{\beta}{2}+SC\cos\frac{\gamma}{2}\right)$.



Сл. 73



Сл. 74

591. Применом синусне теореме на троугао CAM (сл. 73), добијамо $\frac{MA}{b}=\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$, тј. $MA=b\frac{\sin\varphi}{\sin\alpha}$ и слично $MB=c\frac{\sin\varphi}{\sin\beta}$ и $MC=a\frac{\sin\varphi}{\sin\gamma}$. Обележимо са P површину троугла ABC. Тада је
$P=P_{\triangle ABM}+P_{\triangle BCM}+P_{\triangle CAM}=$
$=\frac{1}{2}MA\cdot MB\cdot\sin\beta+\frac{1}{2}MB\cdot MC\cdot\sin\gamma+\frac{1}{2}MC\cdot MA\cdot\sin\alpha=$

$$= \frac{1}{2}bc\frac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha} + \frac{1}{2}ca\frac{\sin^2\varphi}{\sin\beta} + \frac{1}{2}ab\frac{\sin^2\varphi}{\sin\gamma} =$$

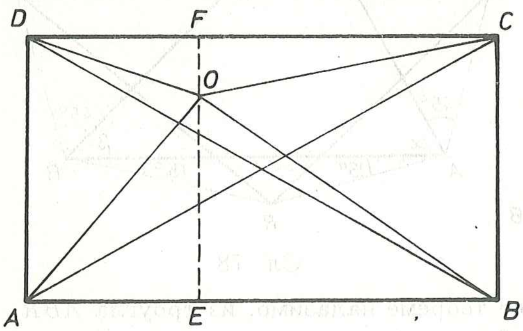
$= \dfrac{P}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\sin^2\varphi}{\sin\alpha} + \dfrac{P}{\sin\beta}\cdot\dfrac{\sin^2\varphi}{\sin\beta} + \dfrac{P}{\sin\gamma}\cdot\dfrac{\sin^2\varphi}{\sin\gamma}$. Остаје да се подели са $P\sin^2\varphi$.

592. Нека на страници AB троугла ABC постоји тачка D таква да је $CD^2 = AD\cdot BD$, тј. $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{BD}{CD}$. Тада, према сл. 74: $\dfrac{CD}{AD} = \dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1}$, $\dfrac{BD}{CD} = \dfrac{\sin\gamma_2}{\sin\beta}$ и $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\gamma_1} = \dfrac{\sin\gamma_2}{\sin\beta}$, тј. $\sin\alpha\sin\beta = \sin\gamma_1\sin\gamma_2$. Како је $\sin\gamma_1\sin\gamma_2 = \dfrac{1}{2}[\cos(\gamma_1-\gamma_2) - \cos\gamma] \le \dfrac{1}{2}(1-\cos\gamma) = \sin^2\dfrac{\gamma}{2}$, то је $\sin\alpha\sin\beta \le \sin^2\dfrac{\gamma}{2}$. Претпоставимо да је $\sin\alpha\sin\beta \le \sin^2\dfrac{\gamma}{2}$ и покажимо да постоји угао γ_1 такав да је $0<\gamma_1<\gamma$ и $\sin\alpha\sin\beta = \sin\gamma_1\sin(\gamma-\gamma_1)$. Како је $\sin\alpha\sin\beta = \sin\gamma_1\sin(\gamma-\gamma_1) \Leftrightarrow \sin\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}[\cos(2\gamma_1-\gamma) - \cos\gamma] \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \cos(2\gamma_1-\gamma) = 2\sin\alpha\sin\beta + \cos\gamma$ и $0<\gamma_1<\gamma \Leftrightarrow -\gamma < 2\gamma_1-\gamma<\gamma$, то је довољно доказати да је $\cos\gamma < 2\sin\alpha\sin\beta + \cos\gamma \le 1$. Лева неједнакост важи, јер је $\sin\alpha\sin\beta > 0$. Десна важи, јер је

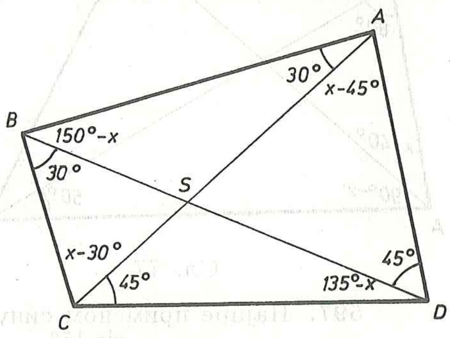
$$2\sin\alpha\sin\beta + \cos\gamma = 2\sin\alpha\sin\beta + 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2} = 2(\sin\alpha\sin\beta - \sin^2\frac{\gamma}{2}) + 1 \le 1.$$

Остаје још да се примети да угао γ_1 одређује тачку D.

593. Нека је најпре ABC оштроугли троугао. Како је $(\pi-2\alpha)+$ $+(\pi-2\beta)+(\pi-2\gamma)=\pi$, то постоји троугао чији углови су: $\alpha_1 = \pi - 2\alpha$, $\beta_1 = \pi-2\beta$, $\gamma_1 = \pi-2\gamma$, а страница a_1 једнака $a\cos\alpha$. Како је $df\beta_1 a_1 = \dfrac{\sin 2\beta}{\sin 2\alpha} = \dfrac{2\sin\beta\cos\beta}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{b\cos\beta}{a\cos\alpha}$, то је $b_1 = b\cos\beta$, слично, $c_1 = c\cos\gamma$. Сада примена косинусне теореме даје $a_1^2 = b_1^2 + c_1^2 + 2b_1c_1\cos 2\alpha$, односно $a^2\cos^2\alpha = b^2\cos^2\beta + c^2\cos^2\gamma + 2bc\cos\beta\cos\gamma\cos 2\alpha$. Ако је неки од углова α, β, γ туп, нпр. α, тада полазимо од троугла чији су углови $\alpha_1 = 2\alpha-\pi$, $\beta_1 = 2\beta$, $\gamma_1 = 2\gamma$, страница a_1 једнака $-a\cos\alpha$ и спроводимо слично расуђивање као у претходном случају. Најзад, ако је неки од углова α, β, γ прав, постављена релација се лако проверава непосредно.



Сл. 75



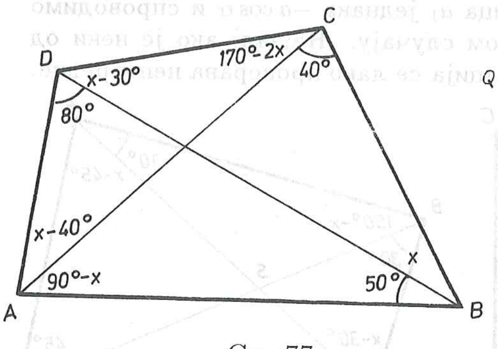
Сл. 76

594. Према слици 75 је:

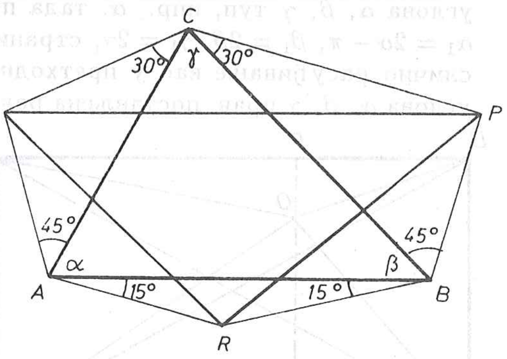
$P_{\triangle OAC} = \frac{1}{2}OA \cdot OC \cdot \sin \sphericalangle AOC = \frac{1}{4}2OA \cdot OC \cdot \cos \sphericalangle AOC \cdot \operatorname{tg} \sphericalangle AOC =$
$= \frac{1}{4}(OA^2 + OC^2 - AC^2) \operatorname{tg} \sphericalangle AOC$ (према косинусној теореми);
и слично: $P_{\triangle OBD} = \frac{1}{4}(OB^2 + OD^2 - BD^2) \operatorname{tg} \sphericalangle BOD$.
Показаћемо да је $OA^2+OC^2 = OB^2+OD^2$. Применом Питагорине теореме на троуглове OAE, OBE, OCF и ODF лако се закључује да је $OA^2 - OB^2 = AE^2 - BE^2$ и $OC^2 - OD^2 = CF^2 - DF^2$, одакле следи $OA^2 - OB^2 = OC^2 - OD^2$, тј. $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$. Како је и $AC^2 = BD^2$, то је тврђење задатка заиста тачно.

595. Применом синусне теореме налазимо да је $\frac{AC}{AD} = \frac{\sin(180^o - x)}{\sin 45^o}$, $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin(x - 30^o)}{\sin(180^o - x)}$, $\frac{AB}{AD} = \frac{\sin 45^o}{\sin(150^o - x)}$ (види слику 76.). Како је $\frac{AB}{AD} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD}$, то даље добијамо $\frac{\sin 45^o}{\sin(150^o - x)} = \frac{\sin(x - 30^o)}{\sin 45^o}$, одакле је $\sin(150^o - x)\sin(x - 30^o) = \sin^2 45^o$. Ова последња једнакост може да се напише овако: $\frac{1}{2}[\cos(180^o - 2x) - \cos 120^o] = \frac{1}{2}$, одакле је $\cos 2x = -\frac{1}{2}$. Према томе, $x = 60^o$ или $x = 120^o$.

596. Примена синусне теореме даје нам релације: $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin 40^o}{\sin(x+50^o)}$, $\frac{AC}{AD} = \frac{\sin(x+50^o)}{\sin(170^o - 2x)}$, $\frac{AB}{AD} = \frac{\sin 80^o}{\sin 50^o}$ (видети слику 77).
Како је $\frac{AB}{AD} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{AC}{AD}$, то је $\frac{\sin 80^o}{\sin 50^o} = \frac{\sin 40^o}{\sin(170^o - 2x)}$, одакле је $\sin(170^o - 2x) = \frac{1}{2}$, што имплицира $170^o - 2x = 60^o$, тј. $x = 55^o$.



Сл. 77



Сл. 78

597. Најпре применом синусне теореме налазимо, из троугла ABR (сл. 78): $AR = BR = c\frac{\sin 15^o}{\sin 30^o} = \frac{c}{2\cos 15^o}$;

из троугла BCP: $BP = a\dfrac{\sin 30^o}{\sin 75^o} = \dfrac{a}{2\cos 15^o}$, $CP = a\dfrac{\sin 45^o}{\sin 75^o} = \dfrac{a\sqrt{2}}{2\cos 15^o}$;
из троугла ACQ: $CQ = b\dfrac{\sin 45^o}{\sin 75^o} = \dfrac{b\sqrt{2}}{2\cos 15^o}$, $AQ = b\dfrac{\sin 30^o}{\sin 75^o} = \dfrac{b}{2\cos 15^o}$.
Даље, применом косинусне теореме рачунамо, уз ознаку $P_{\triangle ABC} = S$:

$$QR^2 = AQ^2 + AR^2 - 2\cdot AQ\cdot AR\cdot\cos(\alpha+60^o) =$$
$$= \frac{b^2}{4\cos^2 15^o} + \frac{c^2}{4\cos^2 15^o} - \frac{2bc}{4\cos^2 15^o}(\cos\alpha\cos 60^o - \sin\alpha\sin 60^o) =$$
$$= \frac{b^2+c^2}{4\cos^2 15^o} - \frac{b^2+c^2-a^2}{8\cos^2 15^o} + \frac{S\sqrt{3}}{2\cos^2 15^o} = \frac{a^2+b^2+c^2}{8\cos^2 15^o} + \frac{s\sqrt{3}}{2\cos^2 15^o},$$
$$RP^2 = BP^2 + BR^2 - 2\cdot BP\cdot BR\cdot\cos(\beta+60^o) =$$
$$= \frac{a^2}{4\cos^2 15^o} + \frac{c^2}{4\cos^2 15^o} - \frac{2ac}{4\cos^2 15^o}(\cos\beta\cos 60^o - \sin\beta\sin 60^o) =$$
$$= \frac{a^2+c^2}{4\cos^2 15^o} - \frac{a^2+c^2-b^2}{8\cos^2 15^o} + \frac{S\sqrt{3}}{2\cos^2 15^o} = \frac{a^2+b^2+c^2}{8\cos^2 15^o} + \frac{s\sqrt{3}}{2\cos^2 15^o},$$
$$PQ^2 = CP^2 + CQ^2 - 2\cdot CP\cdot CQ\cdot\cos(\gamma+60^o) =$$
$$= \frac{a^2}{2\cos^2 15^o} + \frac{b^2}{2\cos^2 15^o} - \frac{2ab}{2\cos^2 15^o}(\cos\gamma\cos 60^o - \sin\gamma\sin 60^o) =$$
$$= \frac{a^2+b^2}{2\cos^2 15^o} - \frac{a^2+b^2-c^2}{4\cos^2 15^o} + \frac{S\sqrt{3}}{\cos^2 15^o} = \frac{a^2+b^2+c^2}{4\cos^2 15^o} + \frac{s\sqrt{3}}{\cos^2 15^o}.$$

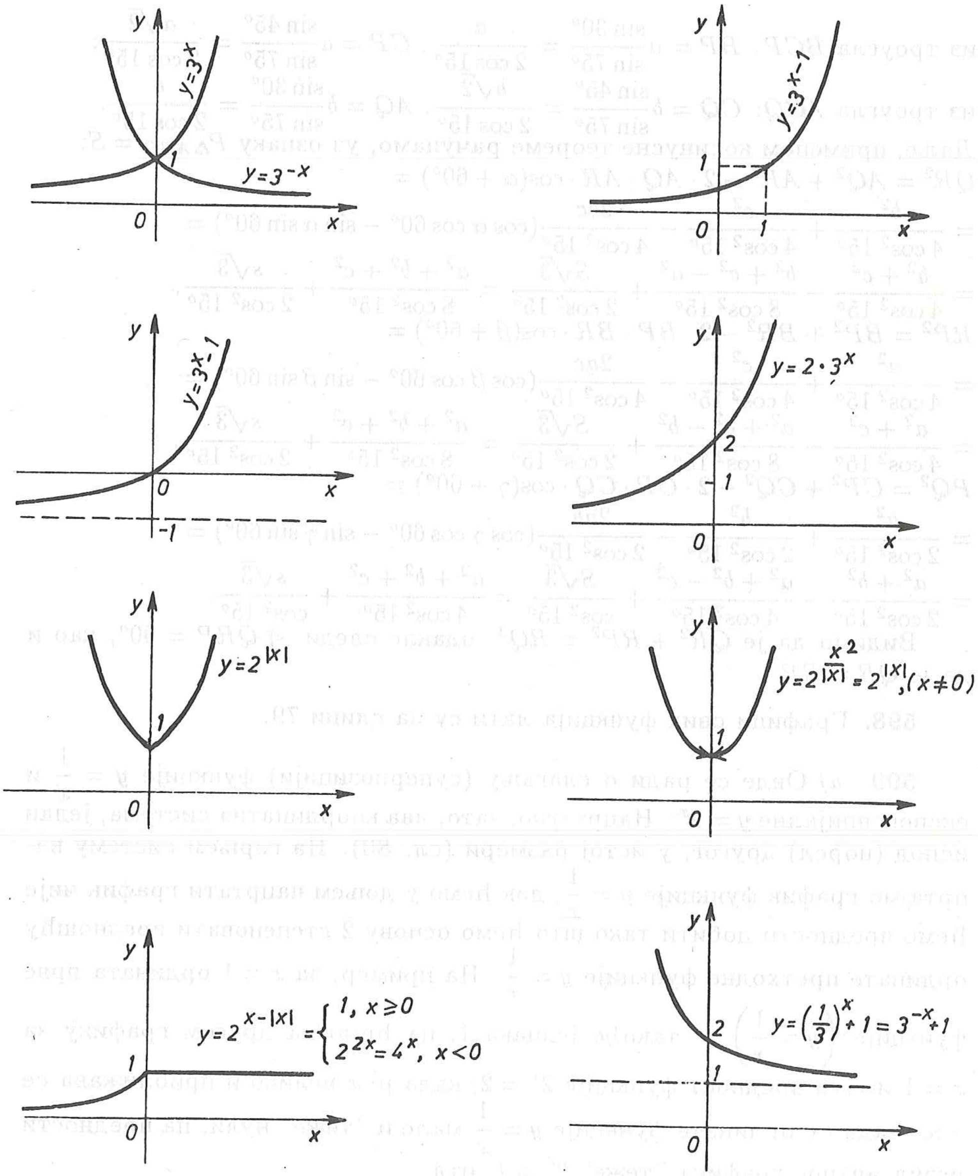
Видимо да је $QR^2 + RP^2 = RQ^2$, одакле следи $\sphericalangle QRP = 90^o$, као и да је $QR = RP$.

598. Графици свих функција дати су на слици 79.

599. *а)* Овде се ради о слагању (суперпозицији) функције $y = \dfrac{1}{x}$ и експоненцијалне $y = 2^x$. Нацртајмо, зато, два координатна система, један испод (поред) другог, у истој размери (сл. 80). На горњем систему нацртајмо график функције $y = \dfrac{1}{x}$, док ћемо у доњем нацртати график чије ћемо вредности добити тако што ћемо основу 2 степеновати вредношћу ординате претходне функције $y = \dfrac{1}{x}$. На пример, за $x = 1$ ордината прве функције $\left(y = \dfrac{1}{x}\right)$ је такође једнака 1, па ћемо на другом графику за $x = 1$ имати вредност функције $2^1 = 2$; када је x велико и приближава се $+\infty$, тада су ординате функције $y = \dfrac{1}{x}$ мале и "теже" нули, па вредности резултантног графика "теже" $2^0 = 1$, итд.

б), в), г) Слично *а)*, долазимо до графика (сл. 81).

д), ђ) Графике тражених функција можемо добити тако што ћемо прво нацртати графике функција $y = 3^x$ и $y = 3^{-x}$, а затим одговарајуће ординате (за исто x) сабрати, односно одузети (сл. 82).



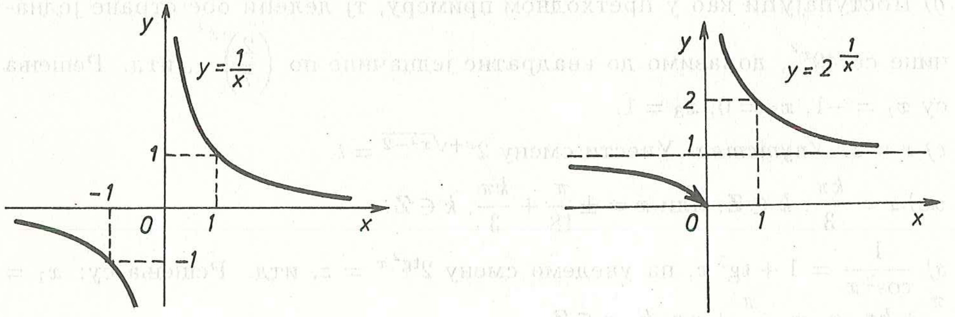
Сл. 79

600. *а)* $x = 0$; *б)* $x = -1$; *в)* $x = -\frac{1}{2}$; *г)* $x = 8$.

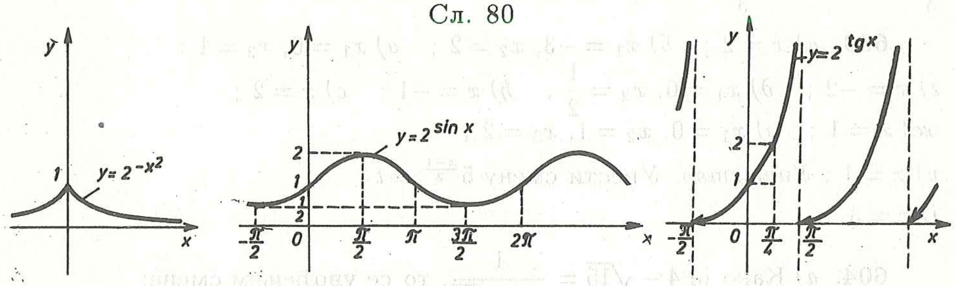
д) Ако једначину пишемо у облику $\left(\frac{8}{7}\right)^{x-2} = 1$, закључујемо да је $x-2 = 0$, тј. $x = 2$.

ђ) $x_1 = -2$, $x_2 = 1$; *е)* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

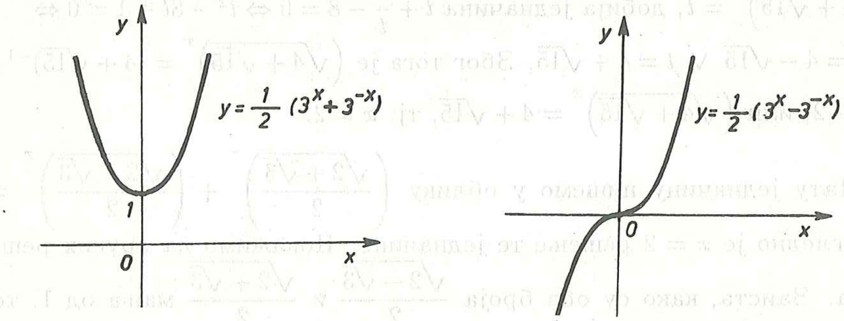
601. *а)* $x = 1$; *б)* $x = 2$; *в)* $x = 1$; *г)* $x = 1$; *д)* $x = 1$; *ђ)* $x = 2$; *е)* $x = 2$.



Сл. 80



Сл. 81



Сл. 82

602. *а)* Ако једначину пишемо у облику $(2^x)^2 + 2^x - 20 = 0$, а затим уведемо смену $2^x = t$, добићемо једначину $t^2 + t - 20 = 0 \Leftrightarrow t = -5 \vee t = 4$. Стога је $2^x = -5$ или $2^x = 4$. Прва једначина нема реалних решења, док се из друге добија $x = 2$.

б) $x = 2$; *в)* $x = 3$; *г)* $x = 3$;

д) Деобом обеју страна једначине са 9^x, добићемо једначину: $6\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - 13\left(\frac{2}{3}\right)^x + 6 = 0$. Ако ставимо $\left(\frac{2}{3}\right)^x = t$, имамо једначину:

$6t^2-13t+6=0 \Leftrightarrow t=\frac{2}{3} \vee t=\frac{3}{2}$. Сада лако добијамо $x=1$ или $x=-1$.

ђ) Поступајући као у претходном примеру, тј делећи обе стране једначине са 49^{x^2}, долазимо до квадратне једначине по $\left(\frac{2}{7}\right)^{x^2}$, итд. Решења су $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=1$.

е) $x=2$. *Упутство.* Увести смену $2^{x+\sqrt{x^2-2}}=t$.

ж) $x=\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$, или $x=\pm\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3}$, $k\in\mathbf{Z}$.

з) $\frac{1}{\cos^2 x}=1+\operatorname{tg}^2 x$, па уведемо смену $2^{\operatorname{tg}^2 x}=z$, итд. Решења су: $x_1=\frac{\pi}{3}+k\pi$, $x_2=-\frac{\pi}{3}+n\pi$, $k,\ n\in\mathbf{Z}$.

603. *а)* $x=2$; *б)* $x_1=-3$, $x_2=2$; *в)* $x_1=0$, $x_2=1$;
г) $x=-2$; *д)* $x_1=0$, $x_2=\frac{1}{2}$; *ђ)* $x=-1$; *е)* $x=2$;
ж) $x=1$; *з)* $x_1=0$, $x_2=1$, $x_3=2$;
и) $x=1$; *Упутство.* Увести смену $5^{\frac{x-1}{2}}=t$;
ј) $x=3$.

604. *а)* Како је $4-\sqrt{15}=\frac{1}{4+\sqrt{15}}$, то се увођењем смене: $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=t$, добија једначина $t+\frac{1}{t}-8=0 \Leftrightarrow t^2-8t+1=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow t=4-\sqrt{15} \vee t=4+\sqrt{15}$. Због тога је $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=(4+\sqrt{15})^{-1}$, тј. $x=-2$, или $\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=4+\sqrt{15}$, тј. $x=2$.

б) Дату једначину пишемо у облику $\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x=1$. Очигледно је $x=2$ решење те једначине. Покажимо да других решења нема. Заиста, како су оба броја $\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$ и $\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$ мања од 1, то за $x<2$ имамо да је:

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x>\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2=1,$$

док је за $x>2$:

$$\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^x+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^x<\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\right)^2=1.$$

в) $x=\pm4$; *г)* $x=\pm2$.

605. *а)* $x=\pm3$ (видети решење задатка **604.**)

б) Означимо први сабирак на левој страни једначине са u, а други са v. Тада је: $u+v=2^{\frac{x+4}{4}}=2\sqrt{2^{\frac{x}{2}}}$ и $uv=2^{\frac{x}{2}}$, па је:
$u+v=2\sqrt{uv}\Leftrightarrow(\sqrt{u}-\sqrt{v})^2=0\Leftrightarrow u=v$. Последња једнакост је могућа ако и само ако је $x=0$ (u и v су дефинисани за такво x) или:
$\sqrt{x^2-5x+6}=0\Leftrightarrow x=2\ \vee\ x=3$, па су решења: $x_1=0,\ x_2=2,\ x_3=3$.

606. *а)* $4^x+9^x+25^x=6^x+10^x+15^x\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(2^x)^2+(3^x)^2+(5^x)^2-2^x\cdot3^x-2^x\cdot5^x-3^x\cdot5^x=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left[(2^x-3^x)^2+(2^x-5^x)^2+(3^x-5^x)^2\right]=0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow(2^x=3^x\ \wedge\ 2^x=5^x\ \wedge\ 3^x=5^x)\Leftrightarrow x=0.$

б) Једначину напишимо у облику $\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x=1$. Уочимо да је $x=2$ решење и покажимо да других решења нема (видети зад. **604.** *б)*.)

в) Дата једначина је еквивалентна низу једначина:

$$(2^x)^3-\frac{1}{(2^{x-1})^3}-3\cdot2^x\cdot\frac{1}{2^{x-1}}\cdot\left(2^x-\frac{1}{2^{x-1}}\right)=1\Leftrightarrow\left(2^x-\frac{1}{2^{x-1}}\right)^3=1\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow2^x-\frac{1}{2^{x-1}}=1\Leftrightarrow(2^x)^2-2^x-2=0\Leftrightarrow2^x=-1\ \vee\ 2^x=2\Leftrightarrow x=1.$$

г) Користећи два пута однос између аритметичке и геометријске средине три броја, добијамо за $x\geq0$:

$$2^{x^5}+4^{x^4}+256^4=2^{x^5}+2^{2x^4}+2^{32}\geq3\cdot2^{\frac{x^5+2x^4+32}{3}}\geq3\cdot2^{\sqrt[3]{2^6\cdot x^9}}=$$
$$=3\cdot2^{4x^3}=3\cdot16^{x^3},$$

где је једнакост могућа ако и само ако је $x^5=2x^4=32$, тј. за $x=2$. За $x<0$ нема решења јер је лева страна већа од 256^4, а десна мања од 3.

607. *а)* $x_1=2,\ x_2=5$;

б) Нема решења, јер је једначина еквивалентна са $|x^2-2x|=-1$!

в) Како је

$$|2^x-1|=\begin{cases}2^x-1, x\geq0\\-(2^x-1), x<0\end{cases},\quad|2^x-2|=\begin{cases}2^x-2, x\geq1\\-(2^x-2), x<1\end{cases},$$

то дата једначина има следеће облике за различите x:

1^o $x<0$: $-(2^x-1)-(2^x-2)=1\Leftrightarrow2^x=1\Leftrightarrow x=0$, што због захтева $x<0$ нећемо прихватити као решење;

2^o $0\leq x<1$: $2^x-1-(2^x-2)=1\Leftrightarrow1=1$, па је решење свако x за које је $0\leq x<1$;

3^o $x\geq1$: $2^x-1+2^x-2=1\Leftrightarrow2^x=2\Leftrightarrow x=1$.

Дакле, свако $x\in[0,\ 1]$ је решење једначине.

г) Ова једначина је пример такозване степено-експоненцијалне једначине. Дата једначина је дефинисана за $x-2>0$, тј. за $x>2$. За $x-2=1\Leftrightarrow x=3$

имамо једно решење, док за $0 < x-2 \neq 1 \Leftrightarrow 2 < x \neq 3$, добијамо да је једначина еквивалентна једначини $x^2+2x = 11x-20 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2-9x+20=0 \Leftrightarrow x=4 \vee x=5$. Обе вредности су решења јер испуњавају постављене услове. Дакле, решења су $x_1=3$, $x_2=4$, $x_3=5$.

д) $x=0$ (видети пример *г)*) ;

ђ) $x_1=1$, $x_2=2$; *е)* $x_1=1$, $x_2=2$; *ж)* $x_{1,\,2}=\pm 1$, $x_3=2$;

з) $\operatorname{ctg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x}$, па имамо једначину: $(\operatorname{tg} x)^{\sin x} = (\operatorname{tg} x)^{-\cos x}$. $\operatorname{tg} x \neq 0$, јер за $\operatorname{tg} x = 0$ је и $\sin x = 0$, па лева страна нема смисла. За $\operatorname{tg} x > 0$ и $\operatorname{tg} x \neq 1$ је $\sin x = -\cos x$, па је $\operatorname{tg} x < 0$ (противречност). Дакле: $\operatorname{tg} x = 1$, па је $x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

608. *а)* $x=0$, $y=1$; *б)* $x=4$, $y=2$;
в) $x_1=1$, $y_1=1$, $x_2=9$, $y_2=3$; *г)* $x_1=y_1=1$, $x_2=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$, $y_2=\sqrt[3]{9}$.

609. Дати систем је еквивалентан систему: $\begin{cases} \sin x + \cos y = 0 \\ \sin^2 x + \cos^2 y = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

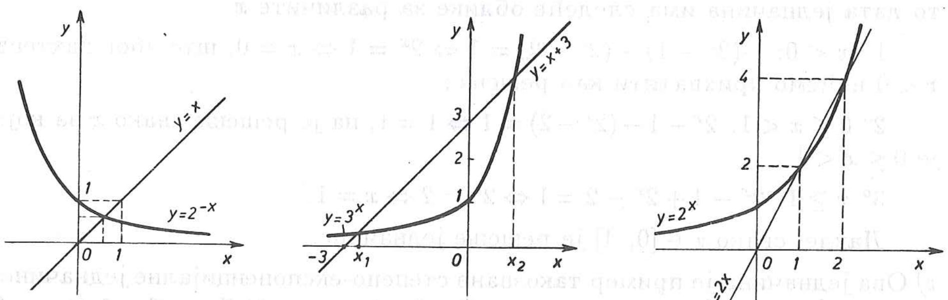
одакле се лако добија: $\sin x = \dfrac{1}{2}$, $\cos y = -\dfrac{1}{2}$ или $\sin x = -\dfrac{1}{2}$, $\cos y = \dfrac{1}{2}$.
Решења су дакле: $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $y = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi$, $k,\ l \in \mathbf{Z}$, или
$x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $y = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k,\ l \in \mathbf{Z}$.

б) Ставимо $u = 81^{\operatorname{tg} x}$ и $v = 9^{\cos y}$, па добијамо: $u \cdot v = 3$ и $v - u = 2$, итд. Решења су $x_1 = k\pi$, $x_2 = \dfrac{\pi}{3} + 2m\pi$ и $x_3 = -\dfrac{\pi}{3} + 2n\pi$, $k,\ m,\ n \in \mathbf{Z}$.

610. $3 \le a \le 1 + 2\sqrt{2}$. *Упутство.* Ставити $2^{1+\sqrt{xy}} = u$, $3^{x+y-1} = v$.

611. *а)* Једначину пишимо у облику $x = 2^{-x}$, па ће решења бити дата у пресеку графика функција $y = x$ и $y = 2^{-x}$, (сл. 83, лево). Постоји једно решење у интервалу $(0,\ 1)$.

б), в) Видети сл. 83.



Сл. 83

612. *а)* $x \in [0,\ +\infty)$; *б)* $x \in (-\infty,\ 0]$; *в)* $x \in [-1,\ 1]$;

г) Како је експоненцијална функција монотоно растућа када је основа већа од 1, то имамо да је: $2^{x^2-2x} < 8 \Leftrightarrow 2^{x^2-2x} < 2^3 \Leftrightarrow x^2-2x<3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2-2x-3<0 \Leftrightarrow (x+1)(x-3)<0 \Leftrightarrow x \in (-1,\ 3)$.

д) Дата неједначина је еквивалентна са: $(5^x)^2 - 6\cdot 5^x + 5 < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (5^x-1)(5^x-5)<0 \Leftrightarrow 1<5^x<5 \Leftrightarrow 5^0<5^x<5^1 \Leftrightarrow 0<x<1$.

ђ) Неједначина је дефинисана за $x-2>0$, тј. за $x>2$. Непосредно проверавамо да $x-2=1 \Leftrightarrow x=3$ није решење једначине. Зато је неједначина еквивалентна систему:

$$\begin{cases} 0<x-2<1 \\ x^2-6x+1<0 \end{cases}, \text{ или систему } \begin{cases} x-2>1 \\ x^2-6x+1>0 \end{cases}.$$

Први систем је еквивалентан са: $\begin{cases} 2<x<3 \\ 3-\sqrt{2}<x<3+2\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x \in (2,\ 3)$,

док је други еквивалентан систему: $\begin{cases} x>3 \\ x\in(-\infty,\ 3-\sqrt{2})\cup(3+2\sqrt{2},\ +\infty) \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in (3+2\sqrt{2},\ +\infty)$.
Дакле, решење неједначине је $x \in (2,\ 3) \cup (3+2\sqrt{2},\ +\infty)$.

е) $x \in (-\infty,\ 4-\sqrt{2}) \cup (6,\ +\infty)$. Видети претходни пример.

ж) Неједначина је еквивалентна следећој неједначини:

$\left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x > 1$. Непосредно проверавамо да је

$\left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$, тј. да $x=2$ није решење неједначине.

Ако је $x<2$, тада је

$\left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x > \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$, док за $x>2$, имамо

$\left(\frac{12}{13}\right)^x + \left(\frac{5}{13}\right)^x < \left(\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$. Дакле, решење је свако $x<2$.

з) Поступамо као у претходном примеру. Решење: $x \in (2,\ +\infty)$.

и) Поступићемо слично као у задатку **604.** *а)*. Наиме, како је $\sqrt{4-\sqrt{15}} = \dfrac{1}{\sqrt{4+\sqrt{15}}}$, и стављајући $(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x = t$, $t>0$, добићемо систем $t+\dfrac{1}{t}>8 \ \wedge\ t>0$. Решења система су $0<t<4-\sqrt{15}=\dfrac{1}{4+\sqrt{15}}=$
$=(4+\sqrt{15})^{-1}$ или $t>4+\sqrt{15}$, што је еквивалентно са $0<(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x<$
$<(4+\sqrt{15})^{-1}$ или $(\sqrt{4+\sqrt{15}})^x > 4+\sqrt{15}$, тј. $x \in (-\infty,\ -2)\cup(2,\ +\infty)$.

11(6) *ј)* Дата неједначина је дефинисана за $2^{x+2}-1 \neq 0 \Leftrightarrow x+2 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$. За $x<-2$ имамо да је десна страна негативна, а како је лева страна једначине увек позитивна, то је свако $x < -2$ решење неједначине. Нека је $x > -2$. Тада је неједначина еквивалентна са: $(2^x)^2 - 4 \cdot 2^x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow (2^x - 2)^2 \leq 0 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$. Дакле, решење је $x \in (-\infty, \ -2) \cup \{1\}$.

к) Користећи однос између средина добијамо:

$$2^{\sqrt[12]{x}} + 2^{\sqrt[4]{x}} \geq 2 \cdot \sqrt{2^{\sqrt[12]{x}} \cdot 2^{\sqrt[4]{x}}} = 2 \cdot 2^{\frac{\sqrt[12]{x} + 2\sqrt[4]{x}}{2}} \geq 2 \cdot 2^{\sqrt{\sqrt[12]{x} \cdot 2\sqrt[4]{x}}} = 2 \cdot 2^{\sqrt[6]{x}}.$$

па је решење дате неједначине $x \in [0, \ +\infty)$, јер су за $x \geq 0$ дефинисане функције које се појављују.

613. *а)* $x \in (-1, \ 0) \cup (0, \ 1) \cup (1, \ 2)$; *б)* $x \in (-\infty, \ \frac{1}{3}]$; *в)* $x \in (-1, \ 7)$; *г)* $x \in (0, \ 2)$; *д)* $x \in (-1, \ 1]$; *ђ)* $x \in (-2, \ -1) \cup \left(-\frac{1}{2}, \ 0\right)$; *е)* $x \in (0, \ 1) \cup (2, \ +\infty)$.

614. *а)* 2 ; *б)* -1 ; *в)* $\frac{3}{2}$; *г)* 4 ; *д)* $-\frac{1}{2}$; *ђ)* $\frac{2}{3}$; *е)* -1 ; *ж)* 1 ; *з)* 3.

и) Примењујући својства логаритама, имамо да је дати количник једнак:

$$\frac{\log_{5^{\frac{1}{3}}} 3^3}{\log_{5^2} 3^{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{3}{\frac{1}{3}} \log_5 3}{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \log_5 3} = 36 \ ;$$

615. *а)* $2^{\log_4 25} = 2^{\log_{2^2} 5^2} = 2^{\frac{2}{2} \log_2 5} = 2^{\log_2 5} = 5$.

б) Слично као под *а)*, добијамо резултат 9 ;

в) $\frac{1}{\sqrt{2}}$; *г)* 16 ; *д)* 25 ; *ђ)* 1 ;

е) Преласком на основу 3 код првог сабирка, добијамо:

$$3^{\log_5 7} - 7^{\log_5 3} = 3^{\frac{\log_3 7}{\log_3 5}} - 7^{\log_5 3} = \left(3^{\log_3 7}\right)^{\log_5 3} - 7^{l_5 3} = 7^{\log_5 3} - 7^{\log_5 3} = 0.$$

616. *а)* Преласком на основу 10, добијамо да је израз једнак:

$$\frac{\log 5}{\log 4} \cdot \frac{\log 6}{\log 5} \cdot \frac{\log 7}{\log 6} \cdot \frac{\log 8}{\log 4} = \log_4 8 = \frac{3}{2}.$$

б) $\log_3 49 \cdot \log_{\sqrt{7}} 5 \cdot \log_{25} 27 = \log_3 7^2 \cdot \log_{7^{\frac{1}{2}}} 5 \log_{5^2} 3^3 =$

$$= 2(l_3 7) \cdot 2(\log_7 5) \cdot \frac{3}{2} \log_5 3 = 6 \log_3 5 \cdot \log_5 3 = 6.$$

в) Имајући у виду да је $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^{-1} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$, $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 2\sqrt{6} + 5$ и $(\sqrt{6} + 1)^2 = 2\sqrt{6} + 7$, добићемо да је дати израз једнак:

$$-\log_{\sqrt{3}-\sqrt{2}}(4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) \log_{\sqrt{6}+1}(\sqrt{3} - \sqrt{2}) + \log_{\sqrt{6}+1}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) =$$

$$= -\log_{\sqrt{6}+1}(4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}) + \log_{\sqrt{6}+1}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) = \log_{\sqrt{6}+1} \frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{4\sqrt{2} + 3\sqrt{3}} =$$

$$= \log_{\sqrt{6}+1} \frac{\sqrt{6} + 1}{5} = 1 - \log_{\sqrt{6}+1} 5.$$

617. *а)* 10 ; *б)* $10\sqrt{2}$; *в)* $\log a$;

г) После мањих трансформација, добија се да је израз једнак:

$$|3-\log_a b|-\log_a b=\begin{cases}3-2\log_a b, & 0<b\le a^3\\ 3, & b\ge a^3\end{cases}\quad (a>1).$$

д) Ако дати израз обележимо са A и два пута користимо једнакост $\log_b a\cdot\log_a b=1$, добићемо (наравно, претпоставка је $0<a\ne 1$ и $0<b\ne 1$):

$$A=\left(\left(\log_b^4 a+\log_a^4 b+2\log_b^2 a\log_a^2 b\right)^{\frac12}+2\right)^{\frac12}-\log_b a-\log_a b=$$
$$=\left(\log_b^2 a+\log_a^2 b+2\log_b a\log_a b\right)^{\frac12}-\log_b a-\log_a b=$$
$$=|\log_b a+\log_a b|-\log_b a-\log_a b.$$

Испитајмо знак израза $\log_b a+\log_a b=\log_b a+\dfrac{1}{\log_b a}=\dfrac{\log_b^2 a+1}{\log_b a}$. Знак, очигледно, зависи само од $\log_b a$, тј. $\log_b a$ је позитиван број ако и само ако је $0<b<1$, $0<a<1$ или $b>1$, $a>1$, а негативан за $0<b<1$, $a>1$ или $b>1$, $0<a<1$. Због тога је:

$$A=\begin{cases}0, & \text{за } 0<a,\ b<1 \text{ или } a,\ b>1\\ -2(\log_b a+\log_a b), & \text{за } 0<b<1,\ a>1 \text{ или } b>1,\ 0<a<1\end{cases};$$

ђ) Ако поступимо слично као у задатку **616.** *а)*, добићемо да је резултат једнак $\dfrac12\log 2$.

618. *а)* Из $a=\log_{12}18$, преласком на основу 2, добијамо:
$a=\dfrac{\log_2 18}{\log_2 12}=\dfrac{\log_2(2\cdot 3^2)}{\log_2(3\cdot 2^2)}=\dfrac{1+2\log_2 3}{2+\log_2 3}$, па је одавде $\log_2 3=\dfrac{2a-1}{3-a}$. Зато је $\log_8 9=\log_{2^3}3^2=\dfrac23\log_2 3=\dfrac{2(2a-1)}{3(3-a)}$.

б) Поступајући слично као у случају *а)*, добијамо да је $\log_{49}32=\dfrac{5}{2(a-1)}$.

в) $2\left(\dfrac1a-1\right)$;

г) $\log_{30}8=3\log_{30}2=3\log_{30}\dfrac{30}{15}=3(1-\log_{30}15)=3(1-\log_{30}3-\log_{30}5)=$
$=3(1-a-b)$.

д) $b(3+a)$; *ђ)* $\left(\dfrac1\alpha+\dfrac1\beta+\dfrac1\gamma+\dfrac1\delta\right)^{-1}$.

619. *а)* $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$; *б)* 12.

620. Из прве једнакости је $\log_8 b=\dfrac{1}{1-\log_8 a}$, а из друге је $\log_8 c=\dfrac{1}{1-\log_8 b}$. Елиминацијом $\log_8 b$, добијамо $\log_8 a=\dfrac{1}{1-\log_8 c}$, што даје тражени резултат.

621. Ако са D означимо десну страну једнакости и пређемо на основу x, добићемо:

$$D = \frac{\dfrac{1}{\log_x a} - \dfrac{1}{\log_x b}}{\dfrac{1}{\log_x b} - \dfrac{1}{\log_x c}} = \frac{\log_x c}{\log_x a} \cdot \frac{\log_x b - \log_x a}{\log_x c - \log_x b} = \frac{\log_a x}{\log_c x} \cdot \frac{\log_x \dfrac{b}{a}}{\log_x \dfrac{c}{a}} = \frac{\log_a x}{\log_c x},$$

јер је $b^2 = ac \Leftrightarrow \dfrac{b}{a} = \dfrac{c}{a}$.

622. Ако у једнакости $2\log_b x = \log_a x + \log_c x$ пређемо на основу a добићемо једнакост:
$2\dfrac{\log_a x}{\log_a b} = \log_a x + \dfrac{\log_a x}{\log_a c}$, или после скраћивања са $\log_a x$ (јер је $\log_a x \neq 0$): $\dfrac{2}{\log_a b} = 1 + \dfrac{1}{\log_a c}$. Из последње једнакости, имамо, даље:
$2\log_a c = \log_a b(\log_a c + 1) \Rightarrow \log_a c^2 = \log_a b \log_a (ac) \Rightarrow$
$\Rightarrow \log_a c^2 = \log_a (ac)^{\log_a b} \Rightarrow c^2 = (ac)^{\log_a b}$.

623. Поћи од једнакости $c^2 - b^2 = a^2 \Leftrightarrow (c-b)(c+b) = a^2$, а затим логаритмовати обе стране једнакости за основу a, итд.

624. Применићемо следеће својство пропорције: ако је
$\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \dfrac{x_3}{y_3} = k$, тада је, такође $\dfrac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} = \dfrac{x_1 + x_3}{y_1 + y_3} = \dfrac{x_2 + x_3}{y_2 + y_3} = k$.
Означимо односе у задатку са k, а затим проширујући први количник са b, а други са a, добићемо према претходно наведеном својству пропорције, да је $k = \dfrac{ab(b+c-a) + ab(a+c-b)}{b\log a + a\log b} = \dfrac{2abc}{\log(a^b b^a)}$. Аналогно добијамо да је и $k = \dfrac{2abc}{\log(a^c c^a)} = \dfrac{2abc}{\log(c^b b^c)}$, па се из ових једнакости лако добија тражени резултат.

625. Према услову задатка је
$d_0 d_m = d_1 d_{m-1} = d_2 d_{m-2} = \cdots = d_{(m-1)} d_1 = d_m d_0 = n$, па је
$(d_1 d_2 \ldots d_{m-1})^2 = [(d_1 d_{m-1})(d_2 d_{m-2}) \ldots (d_{m-1} d_1)] = n^{m-1}$. Стога је

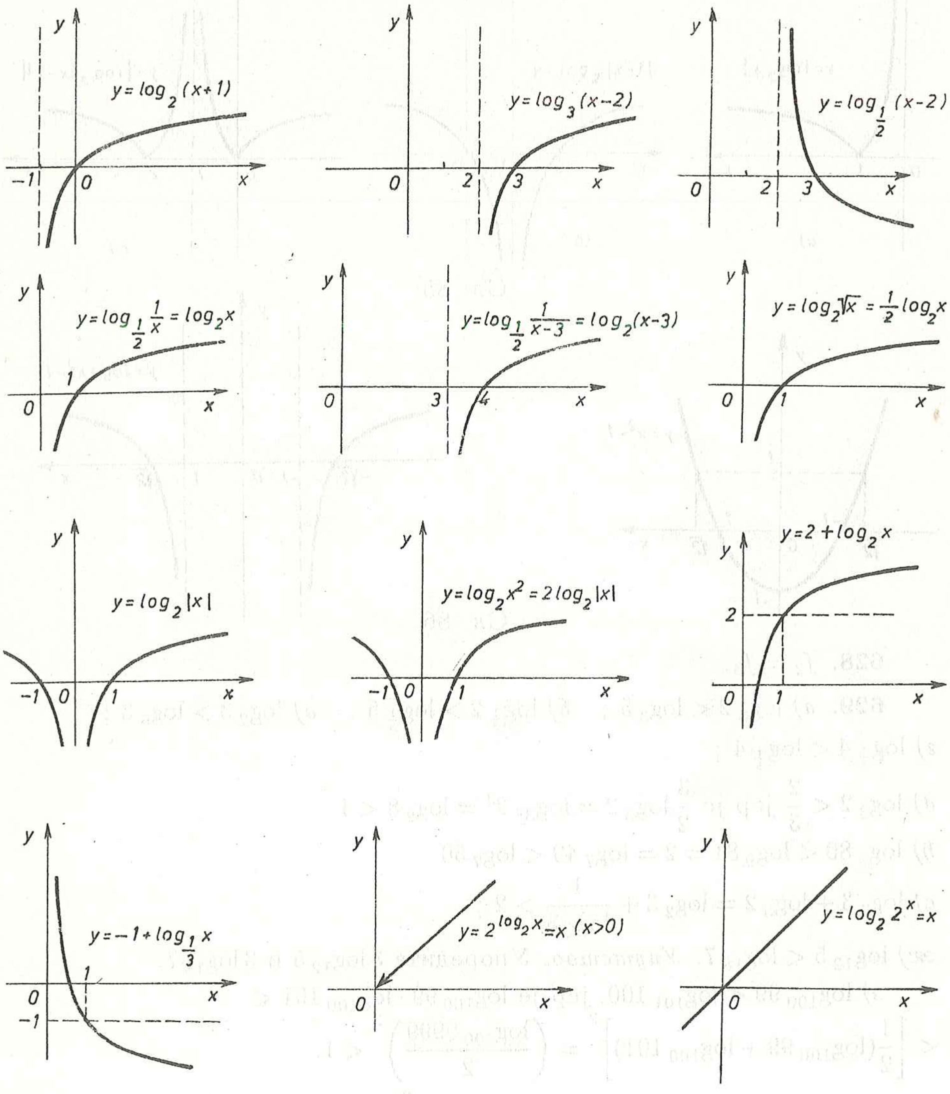
$$\frac{2}{\log n} \sum_{k=1}^{m-1} \log d_k = \frac{\log(d_1 d_2 \ldots d_{m-1})^2}{\log n} = \frac{\log n^{m-1}}{\log n} = (m-1)\frac{\log n}{\log n} = m - 1 \in \mathbf{N}.$$

626. *а)* $-k$. Графици тражених функција дати су на сл. 84.

627. *а), б), в).* Графици функција дати су на слици 85.

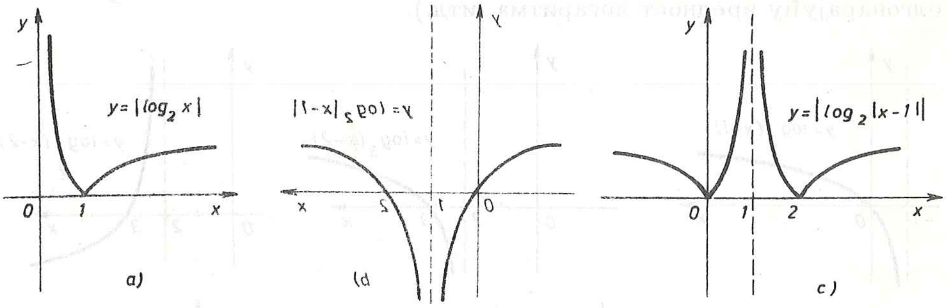
г) График ћемо нацртати на начин дат у задатку **599.** Прво ћемо конструсати график функције $y = x^2 - 1$, а уз њега кординатни систем у истој размери, у коме ћемо за вредност ординате, за одговарајуће x, узимати логаритам од ординате претходно нацртаног графика, који одговара истом x, и тако добити график функције $y = \log(x^2 - 1)$ (сл. 86).

Притом имамо на уму карактеристична понашања логаритамске функције (за негативне вредности ордината функције $y = x^2 - 1$ нећемо имати одговарајућу вредност логаритма, итд.).

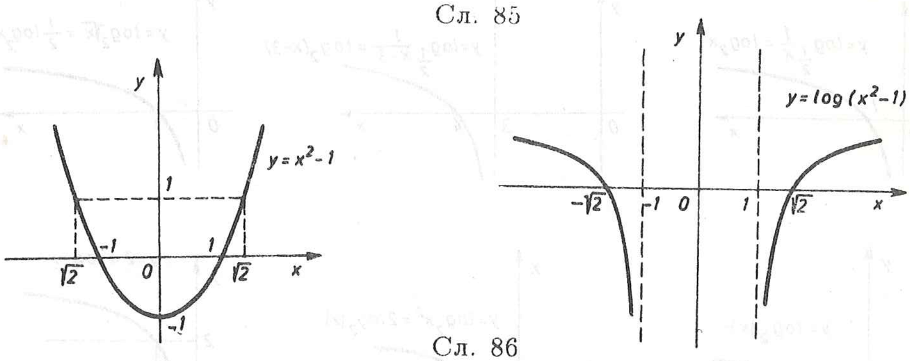


Сл. 84

д)-ј) Користећи поступак дат у претходном примеру, можемо конструисати графике тражених функција, као на слици 87.



Сл. 85



Сл. 86

628. $f_2 = f_3$.

629. *а)* $\log_3 2 < \log_3 5$; *б)* $\log_{\frac{1}{3}} 2 > \log_{\frac{1}{3}} 5$; *в)* $\log_2 3 > \log_5 3$;

г) $\log_{\frac{1}{3}} 4 < \log_{\frac{1}{5}} 4$;

д) $\log_3 2 < \dfrac{2}{3}$ јер је $\dfrac{3}{2}\log_3 2 = \log_{3^2} 2^3 = \log_9 8 < 1$.

ђ) $\log_9 80 < \log_9 81 = 2 = \log_7 49 < \log_7 50$.

е) $\log_2 3 + \log_3 2 = \log_2 3 + \dfrac{1}{\log_2 3} > 2$;

ж) $\log_{12} 5 < \log_{18} 7$. *Упутство.* Упоредите $3\log_{12} 5$ и $3\log_{18} 7$.

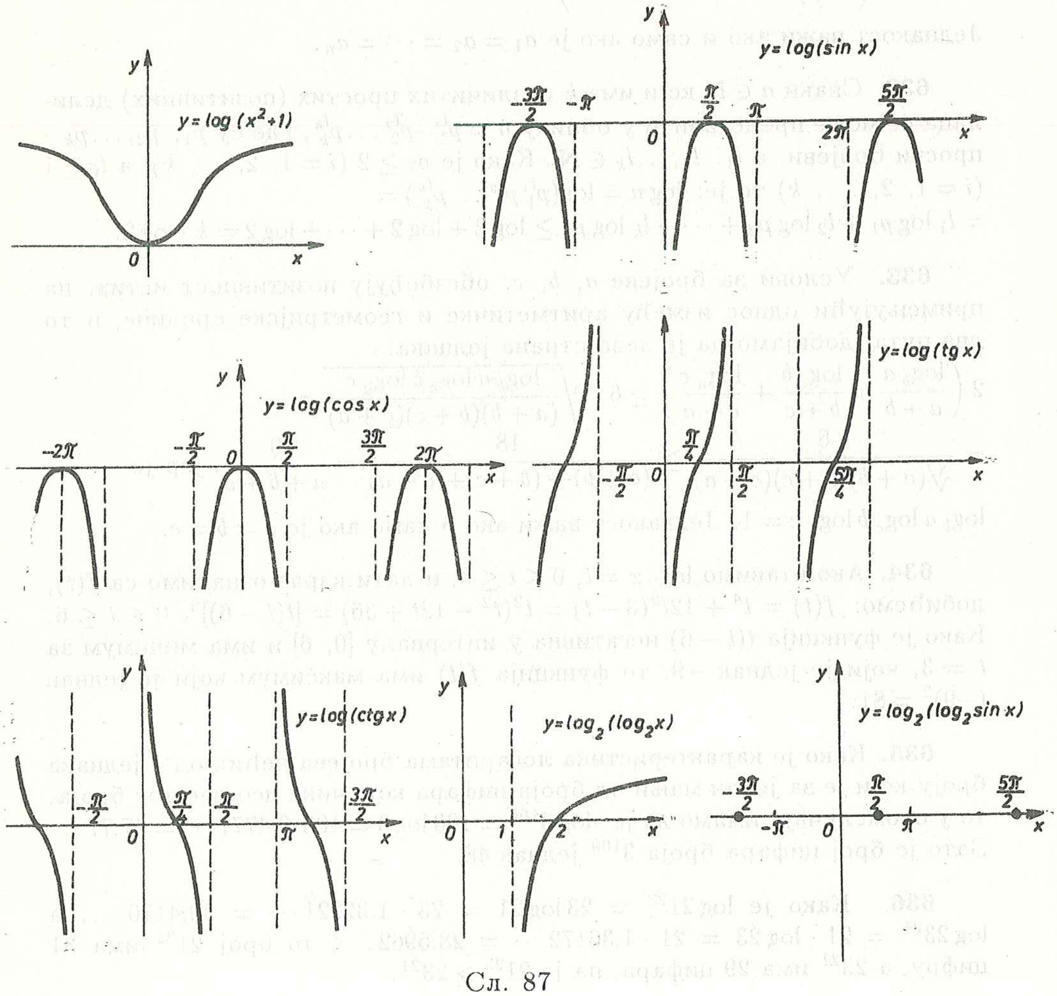
з) $\log_{100} 99 < \log_{101} 100$, јер је $\log_{100} 99 \cdot \log_{100} 101 <$

$$< \left[\frac{1}{2}(\log_{100} 99 + \log_{100} 101)\right]^2 = \left(\frac{\log_{100} 9999}{2}\right)^2 < 1.$$

и) $2^{\log_5 3} = (2^{\log_2 3})^{\log_5 2} = 3^{\log_5 2} > 3^{\log_5 \frac{3}{2}}$.

ј) $\log_4 5 < \log_3 4$. Видети претходни пример *з)*.

630. Нека је $r = \dfrac{m}{n}$, $(m,\ n) = 1$, $m,\ n \in \mathbf{N}$, и $\log_2 r = \dfrac{p}{q}$, где је $p \in \mathbf{Z}$, $q \in \mathbf{N}$ и $(p,\ q) = 1$. Тада имамо $2^{\frac{p}{q}} = \dfrac{m}{n} \Rightarrow n^q 2^p = m^q$. Нека је, рецимо, $p > 0$, а $m = 2^{p_1} m_1$, $p_1 \in \mathbf{N}$, m_1-непаран природан број. Сада је $n^q 2^p = 2^{p_1 q} m_1^q \Rightarrow p = p_1 q$ (јер смо претпоставили да је m паран, па n мора бити непаран). Како је $(p,\ q) = 1$, имамо $q = 1$, па је $r = 2^p$. Слично закључујемо за $p < 0$. За $p = 0$ имамо $r = 1$, што је решење. Дакле, бројеви који задовољавају услове задатка су облика 2^p, $p \in \mathbf{Z}$.



Сл. 87

631. Користећи неједнакост између средине реда m и аритметичке средине, особине логаритама, као и неједнакост типа $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$ $(x > 0)$, добијамо:

$$\sum_{j=1}^{n} (\log_{a_1 a_2 \ldots a_{j-1} a_{j+1} \ldots a_n} a_j)^{-m} = \sum_{j=1}^{n} (\log_{a_j} a_1 a_2 \ldots a_{j-1} a_{j+1} \ldots a_n)^m \geq$$

$$\geq n\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\log_{a_j} a_1a_2\ldots a_{j-1}a_{j+1}\ldots a_n)^m\right) = n\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\log_{a_j} a_i\right)^m =$$
$$= n\left(\frac{1}{n}\sum_{i\neq j}(\log_{a_j} a_i + \log_{a_i} a_j)\right)^m \geq \frac{1}{n^{m-1}}\left(\binom{n}{2}2\right)^m = n(n-1)^m.$$

Једнакост важи ако и само ако је $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

632. Сваки $n \in \mathbf{N}$ који има k различитих простих (позитивних) делилаца се може представити у облику $n = p_1^{l_1} \cdot p_2^{l_2} \ldots p_k^{l_k}$, где су $p_1,\ p_2, \ldots p_k$ - прости бројеви, а $l_1,\ l_2, \ldots l_k \in \mathbf{N}$. Како је $p_1 \geq 2$ $(i = 1,\ 2, \ldots,\ k)$, а $l_i \geq 1$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k)$ то је: $\log n = \log(p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_k^{l_k}) =$
$= l_1 \log p_1 + l_2 \log p_2 + \cdots + l_k \log p_k \geq \log 2 + \log 2 + \cdots + \log 2 = k \cdot \log 2.$

633. Услови за бројеве $a,\ b,\ c$, обезбеђују позитивност истих, па примењујући однос између аритметичке и геометријске средине, и то два пута, добијамо да је лева страна једнака:

$$2\left(\frac{\log_b a}{a+b} + \frac{\log_c b}{b+c} + \frac{\log_a c}{c+a}\right) \geq 6 \cdot \sqrt[3]{\frac{\log_b a \log_c b \log_a c}{(a+b)(b+c)(c+a)}} =$$
$$= \frac{6}{\sqrt[3]{(a+b)(b+c)(c+a)}} \geq \frac{18}{(a+b)+(b+c)+)c+a)} = \frac{9}{a+b+c},$$ јер је $\log_b a \log_c b \log_a c = 1$. Једнакост важи ако и само ако је $a = b = c$.

634. Ако ставимо $\log_2 x = t$, $0 \leq t \leq 6$, и дати израз означимо са $f(t)$, добићемо: $f(t) = t^4 + 12t^2(3-t) = t^2(t^2 - 12t + 36) = [t(t-6)]^2$, $0 \leq t \leq 6$. Како је функција $t(t-6)$ негативна у интервалу $[0,\ 6]$ и има минимум за $t = 3$, који је једнак -9, то функција $f(t)$ има максимум који је једнак $(-9)^2 = 81$.

635. Како је карактеристика логаритама бројева већих од 1 једнака броју који је за један мањи од броја цифара које чине цео део тог броја, то у овомслучају имамо да је: $\log 3^{100} = 100 \log 3 = 100 \cdot 0.4777\cdots = 47.77\ldots$ Зато је број цифара броја 3^{100} једнак 48.

636. Како је $\log 21^{23} = 23 \log 21 = 23 \cdot 1.32221 \cdots = 30.4110\ldots$, а $\log 23^{21} = 21 \cdot \log 23 = 21 \cdot 1.36172 \cdots = 28.5962\ldots$, то број 21^{31} има 31 цифру, а 23^{21} има 29 цифара, па је $21^{23} > 23^{21}$.

637. Користећи однос између аритметичке и геометријске средине четири ненегативна броја, имамо да је: $\log_4 5 + \log_5 6 + \log_6 7 + \log_7 8 >$
$> 4 \cdot \sqrt[4]{\log_4 5 \cdot \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8} = 4 \cdot \sqrt[4]{\log_4 8} = 4\sqrt[4]{\frac{3}{2}} > 4 \cdot 1.1 = 4.4.$

638. Због $a,\ b \in (0,\ 1)$ важи $ab \in (0,\ 1)$, па је $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} > ab \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{2ab}{a+b} < 1$, тј. $\dfrac{2ab}{a+b} \in (0,\ 1)$. Зато је неједнакост еквивалентна неједнакости: $\log_{\frac{2ab}{a+b}} a \cdot \log_{\frac{2ab}{a+b}} b \leq 1$. Користећи однос између средина, имамо:

$$\sqrt{\log_{\frac{2ab}{a+b}} a \cdot \log_{\frac{2ab}{a+b}} b} \leq \frac{\log_{\frac{2ab}{a+b}} a + \log_{\frac{2ab}{a+b}} b}{2} = \log_{\frac{2ab}{a+b}} \sqrt{ab}.$$

Како је:

$\log_{\frac{2ab}{a+b}} \sqrt{ab} \leq 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{2ab}{a+b}} \sqrt{ab} \leq \log_{\frac{2ab}{a+b}} \dfrac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow ab \geq \dfrac{4a^2b^2}{(a+b)^2} \Leftrightarrow (a+b)^2 \geq 4ab \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0,$

и како је ова неједнакост тачна, почетна неједнакост је такође тачна.

639. *а)* $x = 8$; *б)* $x = 9$; *в)* $x = 16\sqrt{2}$; *г)* $x = \dfrac{7}{2}$; *д)* $x = \dfrac{1}{7}$;
ђ) Дата једначина је еквивалентна са $x^2 = x - 1$, $x > 1$, што је еквивалентно $x = 1 + \dfrac{\sqrt{5}}{2}$;
е) $x = 1$; *ж)* $x = 2$; *з)* $x = 2$; *и)* $x = 2$; *ј)* $x = 3$; *к)* $x = -2$.

640. *а)* $x = 3\log_6 3$; *б)* $x_1 = \log_7 3$, $x_2 = 1$;
в) $x = \log_4 3 - 1$; *г)* $x_1 = 4 - \log_3 5$, $x_2 = 4$; *д)* $x_1 = \log_{\frac{2}{5}} 5$, $x_2 = 0$.

641. *а)* Ако ставимо $\log x = t$, добићемо квадратну једначину $t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 2 \ \vee\ t = 3$. Зато је $\log x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100$, или $\log x = 3 \Leftrightarrow x = 10^3 = 1000$.
б) Логаритмовањем обеју страна за основу 10, добијамо:
$\log^2 x = 4 \Leftrightarrow \log x = \pm 2 \Leftrightarrow x = 10^{\pm 2}$.
в) $x_1 = 10^{-1}$, $x_2 = 100$; *г)* $x_1 = 3 \cdot 10^{-3}$, $x_2 = 3 \cdot 10^3$.
д) Због дефинисаности логаритма и квадратног корена на левој страни једначине, неопходно је $-x \geq 1$ тј. $x \leq -1$. За такве вредности x једначина је еквивалентна са: $\sqrt{5\log_2(-x)} = \log_2(-x)$, а ова са:
$\log_2^2(-x) = 5\log_2(-x) \Leftrightarrow \log_2(-x)(\log_2(-x) - 5) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \log_2(-x) = 0 \ \vee\ \log_2(-x) = 5 \Leftrightarrow -x = 1 \ \vee\ -x = 2^5 \Leftrightarrow x = -1 \ \vee\ x = -32.$
ђ) Једначина је дефинисана за $x > 0$. Можемо је писати у облику: $(3^{\log_3 x})^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 6 \Leftrightarrow x^{\log_3 x} + x^{\log_3 x} = 6 \Leftrightarrow x^{\log_3 x} = 3$, а одавде, логаритмовањем за основу 3, добијамо
$\log_3^2 x = 1 \Leftrightarrow (\log_3 x = -1 \ \vee\ \log_3 x = 1) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3} \ \vee\ x = 3.$
е) Логаритмовати обе стране за основу 3. Резултат је $x = 3$.
ж) Зато што поткорене величине морају бити ненегативне, бројеви a и x морају истовремено бити између 0 и 1, или, пак, оба већа од 1. Под таквим условима квадрирањем добијамо еквивалентну једначину:

$\log_a x + \log_x a + 2 = \dfrac{100}{9} \Leftrightarrow \log_a x + \dfrac{1}{\log_a x} - \dfrac{82}{9} = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 9\log_a^2 x - 82\log_a x + 9 = 0 \Leftrightarrow \log_a x = \dfrac{1}{9} \ \lor\ \log_a x = 9 \Leftrightarrow x = a^{\frac{1}{9}} \ \lor\ x = a^9.$

Дакле, с обзиром на претходне напомене, решења су $x_1 = \sqrt[9]{a}$, $x_2 = a^9$ $(0 < a \neq 1)$.

з) Логаритмовањем за основу 10, долазимо до квадратне једначине по $\log x$, а затим до решења $x_1 = 10^{-5}$, $x_2 = 10^3$.

и) Једначина је дефинисана за $0 < x \neq 1$. Логаритмовањем обеју страна за основу x, имамо једначину $2\log_x 3 \log_x 2 = 2\log_x 2 - \log_x 3 + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (2\log_x 2 + 1)(\log_x 3 - 1) = 0 \Leftrightarrow (\log_x 2 = -\dfrac{1}{2} \ \lor\ \log_x 3 = 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x^{-\frac{1}{2}} = 2 \ \lor\ x^1 = 3) \Leftrightarrow (x = \dfrac{1}{4} \ \lor\ x = 3).$

ј) Ако уведемо смену $t = \log_{\frac{1}{3}} x$, $x > 0$, добићемо једначину:
$(1+t)^7 + (1-t)^7 = 128 \Leftrightarrow 7t^6 + 35t^4 + 21t^2 - 63 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 7(t^6 - 1) + 35(t^4 - 1) + 21(t^2 - 1) = 0 \Leftrightarrow (t^2 - 1)(7t^4 + 42t^2 + 63) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t^2 - 1 = 0 \ \lor\ 7t^4 + 41t^2 + 63 = 0$. Како друга једначина нема реалних решења, то остаје $t^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow t = \pm 1$, па је и $\log_{\frac{1}{3}} x = \pm 1$, тј. $x = \dfrac{1}{3}$ или $x = 3$.

к) $x = \dfrac{1}{4}$. *Упутство.* Ставити $\log_2 x = t$.

642. *а)* $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, $x_2 = 3$;

б) $x_1 = \dfrac{1}{10}$, $x_2 = 1$. *Упутство.* Десну страну једначине писати у облику $7x = 7 \cdot 10^{\log x} = 7 \cdot 2^{\log x} \cdot 5^{\log x}$, итд.

в) $x_1 = -1$, $x_2 = 0$; *г)* $x = 0$; *д)* $x_1 = 1$, $x_2 = 2$; *ђ)* $x = 48$.

643. *а)* Преласком на основу 2, лако добијамо да је $\log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

б) Једначина је дефинисана за $x > 0$ и $3x \neq 1$. Преласком на основу 3, за такве x добијамо еквивалентну једначину :

$$\frac{\log_3 \frac{3}{x}}{\log_3 3x} + \log_3^2 x = 1 \Leftrightarrow \frac{1 - \log_3 x}{1 + \log_3 x} + \log_3^2 x = 1,$$

где ако ставимо $\log_3 x = t$, добијамо после сређивања једначину:
$t^3 + t^2 - 2t = 0 \Leftrightarrow t(t-1)(t+2) = 0 \Leftrightarrow t = -2 \ \lor\ t = 0 \ \lor\ t = 1$, па је
$\log_3 x = -2 \ \lor\ \log_3 x = 0 \ \lor\ \log_3 x = 1$, тј. $x = \dfrac{1}{9} \ \lor\ x = 1 \ \lor\ x = 3$.

в) $x_1 = \dfrac{1}{9}$, $x_2 = 9$; *г)* нема решења ; *д)* $x_1 = a^{-\frac{1}{2}}$, $x_2 = a^{-2}$.

ђ) Због дефинисаности логаритма, потребно је да буду испуњени услови $0 < a \neq 1$, $0 < x \neq 1$. За такве вредности, имамо да је једначина еквивалетна једначини:

$$\log_a(a + \sqrt{a+x}) = \log_a x^2 \Leftrightarrow a + \sqrt{a+x} = x^2 \Leftrightarrow \sqrt{a+x} = x^2 - a.$$

Ако уз претходне услове додамо и услов $x^2 > 1$, то ћемо после квадрирања последње једначине добити квадратну једначину по a:

$$a^2 - (2x^2+1)a + (x^4 - x) = 0 \Leftrightarrow a = x^2 + x + 1 \ \vee \ a = x^2 - x.$$

Решења прве од последњих једначина задовољавају услове задатка, јер из $x > 0$ и $x^2 > a$ имамо да је $x^2 - a + x + 1 > 0$, док из друге имамо $x_{1,2} = \dfrac{1 \pm \sqrt{4a+1}}{2}$. Прихватамо само решење $x = \dfrac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$ $(0 < a \neq 1)$.

е) $x = 4$.

ж) Дату једначину пишемо у облику:

$\log 10^x + \log(1+2^x) = \log 5^x + \log 6 \Leftrightarrow 10^x(1+2^x) = 6 \cdot 5^x \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2^x(1+2^x) - 6 = 0 \Leftrightarrow (2^x)^2 + 2^x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2^x = -3 \ \vee \ 2^x = 2.$

Једначина $2^x = -3$ нема реалних решења, док $2^x = 2$ има решење $x = 1$.

644. *а)* $x_1 = -2$, $x_2 = 0$; *б)* $x_1 = \dfrac{3}{4}$, $x_2 = \dfrac{5}{4}$; *в)* $x_1 = -3$, $x_2 = \dfrac{3}{4}$;

г) $x_1 = -1$, $x_2 = 3$; *д)* $x_1 = \dfrac{4}{9}$, $x_2 = \dfrac{9}{4}$;

ђ) Дата једначина је еквивалентна са $2|\log_3 x - 1| - |\log_3 x - 2| = 2$. Потребно је одредити облик једначине у зависности од положаја величине $\log_3 x$ према бројевима 1 и 2, или, што је исто, разматрати одвојено случајеве $0 < x < 3$, $3 \le x \le 9$, $x \ge 9$. На пример, ако је $0 < x < 3$, тада једначина има облик

$$-2(\log_3 x - 1) - (-(\log_3 x - 2)) = 2 \Leftrightarrow \log_3 x = -2 \Leftrightarrow x = 3^{-2} = \frac{1}{9} \in (0,\ 3),$$

па је, дакле, једно од решења $x = \dfrac{1}{9}$. Разматрањем остала два случаја добили бисмо и решење $x = 9$.

645. Једначина је дефинисана за $\alpha x + \beta > 0$ и $x + 1 > 0$. За такве x једначина је еквивалентна са $\alpha x + \beta = (x+1)^2 \Leftrightarrow x^2 + (2-\alpha)x + 1 - \beta = 0$. Последња једначина има реална решења $x_{1,\,2} = \dfrac{\alpha - 2 \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\alpha + 4\beta}}{2}$ ако је $D = \alpha^2 - 4\alpha + 4\beta \ge 0$. Потребно је још да x_1 и x_2 задовољавају претходно постављене услове о дефинисаности једначине. Наиме, добијамо да је $x_1 = \dfrac{\alpha - 2 - \sqrt{D}}{2}$ решење ако је $D \ge 0$, $\alpha > \beta$, $\alpha > 0$, док је $x_2 = \dfrac{\alpha - 2 + \sqrt{D}}{2}$ решење ако је $D \ge 0$ и $\alpha > 0$ или $\beta > \alpha$.

646. *а)* За $x > 3$ једначина се може писати у облику

$4^{\log_4(25\sqrt[3]{x-3})} = 50 \Leftrightarrow 25\sqrt[3]{x-3} = 50 \Leftrightarrow x = 2^3 + 3 = 11.$

б) Логаритмовањем за основу 5, уз услов $x > 0$, и после мањих трансформација, добијамо квадратну једначину по $\log_5 x$:

$\log_5^2 x + (2\log_5 3 + 1)\log_5 x + \log_5 3(1 + \log_5 3) = 0,$

чијим решавањем добијамо

$\log_5 x = -\log_5 3 - 1 = -\log_5 15 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{15}$, или $\log_5 x = -\log_5 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}.$

в) Увођењем смене $m^{\log_3 x} = t$, добијамо
$m^{\log_3 x} = m \Leftrightarrow \log_3 x = 1 \Leftrightarrow x = 3$, или $m^{\log_3 x} = m^{-1} \Leftrightarrow \log_3 x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

Решења су, дакле, $x_1 = 3$, $x_2 = \dfrac{1}{3}$.

г) $x_1 = -\log_5 2$, $x_2 = 3$. *Упутство.* Степеновати обе стране једначине са $x \neq 0$, а затим логаритмовати обе стране дате једначине за основу 2.

д) Ако дату једначину пишемо у облику
$\log_{(3x+7)}(2x+3)^2 + \log_{(2x+3)}(2x+3)(3x+7) = 4$, видимо да је дефинисана за $0 < 3x+7 \neq 1$ и $0 < 2x+3 \neq 1$, тј. за $x \in \left(-\dfrac{3}{2},\ 1\right) \cup (1,\ +\infty)$.
Из последње једначине се, увођењем смене $\log_{(3x+7)}(2x+3) = t$, добија се квадратна једначина, чијим решавањем добијамо решења $x = -\dfrac{1}{4}$.

647. Логаритмовањем дате једначине за основу 89, добија се квадратна једначина $x \log_{89} 19 + 2 - x^2 = \log_{89} 19 + 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 - x \log_{89} 19 + \log_{89} 19 - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = \log_{89} 19 - 1$.

648. По услову задатка је $\log_a x - \log_{ax} x = \log_{ax^2} x - \log_{ax^3} x$, где x и a задовољавају услове дефинисаности свих логаритама. Једно решење је очигледно $x = 1$, па су сви логаритми једнаки нули. Ако је $0 < x \neq 1$ можемо прећи на основу x и добити да су тражени логаритми редом једнаки $-\dfrac{2}{3}$, -2, 2, $\dfrac{2}{3}$.

649. Пре свега мора бити, због дефинисаности логаритма, $0 < a \neq 1$ и $x > 0$. Даље је $f(x) = \log_a x + \log_{a^2} x = \log_{a^2} x^2 + \log_{a^2} x = \log_{a^2} x^3$, па је дата једначина еквивалентна једначини $\log_{a^2}(x + a^2 - a)^3 = 2\log_{a^2} x^3$, што је еквивалентно (уз претходне услове) систему
$((x + a^2 - a)^3 = x^6 \ \wedge \ x + a^2 - a > 0) \Leftrightarrow (x + a^2 - a = x^2 \ \wedge \ x + a^2 - a > 0) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow ((x_1 = a \ \vee \ x_2 = 1 - a) \ \wedge \ x + a^2 - a > 0))$.
На крају имамо: за $0 < a < 1$ решења су $x_1 = a$, $x_2 = 1 - a$, а ако је $a > 1$, тада је решење само $x_1 = a$, јер је $x_2 = 1 - a < 0$.

650. $k = 4$.

651. Једначина је дефинисана за $x > 0$ и $0 < x - a - a^2 \neq 1$. За такве a и x дата једначина је еквивалентна једначини
$x = (x - a - a^2)^2 \Leftrightarrow x^2 - [2(a + a^2) + 1]x + (a + a^2)^2 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x_1 = a^2 \ \vee \ x_2 = (a+1)^2$. Услов $x > 0$ задовољавају x_1 и x_2 ако је редом $a \neq 0$ и $a \neq -1$. Даље је
$0 < x_1 - a - a^2 \neq 1 \Leftrightarrow 0 < -a \neq 1 \Leftrightarrow -1 \neq a < 0$, док је
$0 < x_1 - a - a^2 \neq 1 \Leftrightarrow 0 < a + 1 \neq 1 \Leftrightarrow -1 < a \neq 0$. Дакле, за $a < -1$, решење је $x_1 = a^2$; за $-1 < a < 0$ решења су $x_1 = a^2$, $x_2 = (a+1)^2$; за $a > 0$ решење је $x_2 = (a+1)^2$; за $a = -1$ или $a = 0$ једначина нема решења.

652. $x_1 = a^{-\frac{1}{2}}$, $x_2 = a^{-\frac{4}{3}}$. *Упутство.* Прећи на основу a, а затим увести смену $\log_a x = t$.

653. $x = a^2$.

654. $x = 2$. *Упутство.* Прећи на основу 2.

655. $x_{1,\,2} = \log a \pm \sqrt{\log^2 a - b^2}$, $a \geq 10^b$.

656. *а)* $x_k = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.
б) Нема решења.
в) $x_k = \pm\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$; *г)* $x_k = (-1)^k \dfrac{\pi}{4} + k\pi$;
д) Како је једначина дефинисана за $\sin x > 0$ и $\cos x > 0$, што даје $x \in \left(2k\pi,\ \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, и $0 < \sin x \cos x = \dfrac{\sin 2x}{2} \leq \dfrac{1}{2}$, то се преласком на основу $\sin x$, добија једначина $\dfrac{1}{1 + \log_{\sin x} \cos x} \cdot \dfrac{\log_{\sin x} \cos x}{1 + \log_{\sin x} \cos x} = 1$. Сменом $\log_{\sin x} \cos x = t$ добијамо лако једначину $(t-1)^2 = 0$, $t \neq -1$, па је $t = 1 \Leftrightarrow \log_{\sin x} \cos x = 1 \Leftrightarrow (\sin x = \cos x,\ \sin x > 0,\ \cos x > 0) \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$;
ђ) Једначина је дефинисана за
$0 < \sin x < 1 \Leftrightarrow x \in \left(2k\pi, \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right) \cup \left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ \pi + 2k\pi\right)$, $k \in \mathbf{Z}$, и за $a > 0$.
За такве x, преласком на основу 2, добијамо једначину
$\dfrac{1}{\log_2 \sin x} \cdot \dfrac{\log_2 a}{2\log_2 \sin x} = 1 \Leftrightarrow \log_2^2 \sin x = \log_2 \sqrt{a} \Leftrightarrow \log_2 \sin x = \pm\sqrt{\log_2 \sqrt{a}}$, $a > 1$. Како је $0 < \sin x < 1$, то ћемо узети само случај $\log_2 \sin x = -\sqrt{\log_2 \sqrt{a}}$, $a > 1$, одакле је $\sin x = 2^{-\sqrt{\log_2 \sqrt{a}}}$, $a > 1$, и коначно $x_k = (-1)^k \arcsin 2^{-\sqrt{\log_2 \sqrt{a}}} + k\pi$, $a > 1$, $k \in \mathbf{Z}$.
е) Сменом $\log_{\cos x} \sin x = t$, добијамо: $t + \dfrac{1}{t} = 2$, итд. Решење је $x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

657. *а)* $x_1 = 6$, $y_1 = -3$; $x_2 = 36$, $y_2 = -2$;
б) $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $y_1 = 5$, $x_2 = 4$, $y_2 = \dfrac{3}{2}$;
в) $x_1 = 100$, $y_1 = 10$, $x_2 = 10^{-1}$, $y_2 = 100^{-1}$; *г)* $x = 6$, $y - 2$;
д) $x_1 = a^2$, $y_1 = a$, $x_2 = a^6$, $y_2 = a^3$;
ђ) $x = \dfrac{3}{2}$, $y = \dfrac{1}{2}$. *Упутство.* Из друге једначине изразити $x - y \left(= \dfrac{2}{x+y}\right)$ и заменити у првој, итд.

658. *а)* Из друге једначине имамо $x = 4y$, итд. Решења су $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $y_1 = \dfrac{1}{8}$ и $x_2 = 8$, $y_2 = 2$;

Малчески

б) Једначина је дефинисана за $0 < y \neq 1$, $0 < x \neq 1$, $\log_y x > 0$ и $0 < a \neq 1$. Ако за такве вредности у првој једначини пређемо на основу x, добићемо једначину

$$\frac{\log_x(\log_y x)}{\log_x y} = \log_x\left(\frac{1}{\log_y x}\right) \Leftrightarrow \log_x(\log_y x) = -\log_x(\log_y x)\log_x y \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \log_x(\log_y x)(1+\log_x y) = 0 \Leftrightarrow \log_x(\log_y x) = 0$ (јер је $\log_x y > 0$, по претпоставци). Из последње једначине је $\log_y x = 1 \Leftrightarrow y = x$. Заменом у прву једначину, добијамо да је $x = a^{\pm 2}$, па је $y = a^{\pm 2}$.

в) Из друге једначине је $x = y^{\frac{q}{p}}$, па се заменом у прву једначину, добија $y^{\frac{q}{p}y} = y^x$. Одавде је $y = 1$, или $x = \dfrac{q}{p}y$. За $y = 1$ имамо $x = 1$, што је заиста решење система. За $x = \dfrac{q}{p}y$, из друге једначине добијамо $\left(\dfrac{q}{p}\right)^p y^p = y^q$, одакле је $y = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{\frac{p}{q-p}}$, па је $x = \left(\dfrac{q}{p}\right)^{\frac{q}{q-p}}$.

г) Систем је дефинисан за $x > 0$, $0 < y \neq 1$ и $0 < a \neq 1$. Ако уведемо смену $\log_a x = u$, $\log_a y = v$, добићемо систем $mu = nv$, $u - v = \dfrac{u}{v}$. Ако је $m = 0$, тада је и $n = 0$ (због $v \neq 0$), па се систем своди на једначину $u - v = \dfrac{u}{v} \Leftrightarrow u = \dfrac{v^2}{v-1}$, $v \neq 1$. Дакле, у овом случају ($m = 0$) имамо бесконачно много решења облика $x = a^{\frac{\log_a y^2}{\log_a y - 1}}$, $0 < y \neq 1$ и $y \neq a$. За $m \neq 0$, решавањем система $mu = nv$, $u - v = \dfrac{u}{v}$, имамо за $m \neq n$ решење $u = \dfrac{n^2}{m(n-m)}$, $v = \dfrac{n}{n-m}$, док за $m = n$ решења нема. Зато је решење система за $m \neq 0$, $m \neq n$: $x = a^{\dfrac{n^2}{m(n-m)}}$, $y = a^{\dfrac{n}{n-m}}$.

д) Нека је $x = b^\alpha$, $y = a^\beta$. Тада из прве једначине система имамо $b^{\alpha y} = a^{\beta x}$, док из друге степеновањем са β, добијамо $a^{\beta x} = b^{\beta y}$. Зато је $b^{\alpha y} = b^{\beta y}$, па је $\alpha = \beta$. Дакле $x = b^\alpha$, $y = a^\alpha$. Из друге једначине система, сада имамо $x = y\log_a b$, или $a^\alpha = b^\alpha \log_a b \Leftrightarrow \left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \log_a b$. Ако је $a = b$, последња једначина је задовољена за свако $\alpha \in \mathbb{R}$, док су решења полазног система свако $x = y > 0$. За $a \neq b$, добија се $\alpha = \log_{\frac{a}{b}}(\log_a b)$, па је решење $x = b^{\log_{\frac{a}{b}}(\log_a b)}$, $y = a^{\log_{\frac{a}{b}}(\log_a b)}$, $0 < a \neq 1$, $0 < b \neq 1$, $a \neq b$.

ђ) $x = \dfrac{1}{4}$, $y = \dfrac{1}{3}$;   *е)* $x = \sqrt[5]{4^3}$, $y = \dfrac{1}{\sqrt[5]{4}}$.

ж) Уз услове $0 < a \neq 1$, $0 < b \neq 1$, $0 < c \neq 1$, дати систем је еквивалентан систему $\log_a(x\sqrt{yz}) = d$, $\log_c(y\sqrt{xz}) = d$, $\log_b(z\sqrt{xy}) = d$, одакле добијамо систем $x\sqrt{yz} = a^d$, $y\sqrt{xz} = c^d$, $z\sqrt{xy} = b^d$. Из последњег система се множењем лако добија да је $xyz = (abc)^{\frac{d}{2}}$. Зато је

$x = \dfrac{(x\sqrt{yz})^2}{xyz} = \dfrac{a^{2d}}{(abc)^{\frac{d}{2}}} = \left(\dfrac{a^3}{bc}\right)^{\frac{d}{2}}$. Слично је $y = \left(\dfrac{b^3}{ac}\right)^{\frac{d}{2}}$ и $z = \left(\dfrac{c^3}{ab}\right)^{\frac{d}{2}}$;

з) $x_1 = |c|^3,\ y_1 = \dfrac{1}{|c|}$; $x_2 = \dfrac{1}{|c|},\ y_2 = |c|^3\ (c \neq 0)$.

659. *а)* $\log_{\frac12}(x-1) < 1 \Leftrightarrow \log_2(x-1) < \log_2 2 \Leftrightarrow 0 < x-1 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 3$.

б) $\log_{\frac12}(x+2) > 1 \Leftrightarrow \log_{\frac12}(x+2) > \log_{\frac12}\dfrac12 \Leftrightarrow 0 < x+2 < \dfrac12 \Leftrightarrow -2 < x < -\dfrac32$.

в) $x \in (-\infty,\ -\sqrt2) \cup (\sqrt2,\ +\infty)$; *г)* $x \in (-\sqrt2,\ -1) \cup (1,\ \sqrt2)$;

д) $x \in (0,\ 1) \cup (1,\ +\infty)$; *ђ)* $x \in (-\infty,\ 0) \cup (2,\ +\infty)$.

660. *а)* $x > \log_{75} 90$; *б)* $x \in \left(-\infty,\ -\dfrac32\right) \cup (3,\ +\infty)$;

в) $x \in \left(-1,\ -\dfrac12\right) \cup (1,\ 2)$; *г)* $2 < |x| \leq 3$;

д) $0 < x < 3^{-\log_{\frac32} 2}$; *ђ)* $x \in \left(0,\ a^{-\sqrt2}\right) \cup \left(a^{\sqrt2},\ +\infty\right)$;

е) $x \in \left(0,\ \dfrac18\right) \cup (1,\ 2)$.

661. *а)* Разликоваћемо два случаја:

1^o $0 < x^2 - 1 < 1 \Leftrightarrow 1 < x^2 < 2 \Leftrightarrow 1 < |x| < \sqrt2$: дата неједначина је еквивалентна са $3x - 1 > x^2 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{3-\sqrt5}{2},\ \dfrac{3+\sqrt5}{2}\right)$.

Дакле, у овом случају је решење свако $x \in (1,\ \sqrt2)$;

2^o $x^2 - 1 > 1 \Leftrightarrow x^2 > 2 \Leftrightarrow |x| > 2$: неједначина је еквивалентна са: $0 < 3x - 1 < x^2 \Leftrightarrow (3x - 1 > 0\ \wedge\ x^2 - 3x + 1 > 0) \Leftrightarrow x > \dfrac{3+\sqrt5}{2}$. У овом случају решење је свако $x \in \left(\dfrac{3+\sqrt5}{2},\ +\infty\right)$.

Дакле, решење дате неједначине је свако $x \in (1,\ \sqrt2) \cup \left(\dfrac{3+\sqrt5}{2},\ +\infty\right)$.

б) $x \in (1 - \sqrt{1+a},\ 0) \cup (2, 1 + \sqrt{1+a})$ за $0 < a < 1$,
$x \in (-\infty,\ 1 - \sqrt{1+a}) \cup (1 + \sqrt{1+a},\ +\infty)$ за $a > 1$;

в) $x \in \left(1,\ \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$;

г) Неједначина је дефинисана за $x > 0$. Логаритмовањем за основу 3и такве x, добијамо
$\log_3^2 x > 1 \Leftrightarrow |\log_3 x| > 1 \Leftrightarrow (\log_3 x < -1\ \vee\ \log_3 x > 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \left(0 < x < \dfrac13\ \vee\ x > 3\right)$.

д) $x \in \left(0, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right) \cup \left(2, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right)$;

ђ) $a < x < \sqrt{a^2+1}$ за $0 < a < 1$, $x > \sqrt{a^2+1}$ за $a > 1$.

662. *а)* Стављајући $\log_3 x = t$, добијамо неједначину

$$-t - \frac{1}{t} + \frac{5}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{2t^2 - 5t + 2}{2t} < 0 \Leftrightarrow \frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)(t-2)}{t} < 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow t < 0 \ \vee \ \dfrac{1}{2} < t < 2$. Зато је $\left(\log_3 x < 0 \ \vee \ \dfrac{1}{2} < \log_3 x < 2\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (0 < x < 1 \ \vee \ \sqrt{3} < x < 9)$.

б) $x \in \left(\dfrac{1}{2\sqrt[3]{2}}, \dfrac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$; *в)* $x \in (1, 2) \cup [3, 7)$;

г) Нека је прво $0 < x^2 < 1 \Leftrightarrow 0 < |x| < 1$. Тада је дата неједначина еквивалентна неједначини

$0 < x^2 - 4x + 3 < x^2 \Leftrightarrow (x^2 - 4x + 3 > 0 \ \wedge \ -4x + 3 < 0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \ \wedge \ x \in \left(\dfrac{3}{4}, +\infty\right) \Leftrightarrow x \in \left(\dfrac{3}{4}, 1\right) \cup (3, +\infty)$.

Но, с обзиром на услов $0 < |x| < 1$, решење је $x \in \left(\dfrac{3}{4}, 1\right)$. Ако је $x^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1$, тада имамо неједначину $x^2 - 4x + 3 > x^2 \Leftrightarrow x < \dfrac{3}{4}$, па је с обзиром на захтев $|x| > 1$, решење свако $x \in (-\infty, -1)$. Дакле, решење неједначине је свако $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\dfrac{3}{4}, 1\right)$;

д) Ако неједначину пишемо у облику $\log_{(x-1)^2}(3-x) \leq \log_{(x-1)^2}(x-1)^2$, то је потребно разликовати случајеве $0 < (x-1)^2 < 1$ и $(x-1)^2 > 1$. Решења су $x \in (-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$.

ђ) $x \in (1, 4)$;

е) Увођење смене $\log x = t$, долазимо до решења $x \in (0, 10^{-1}) \cup (10^2, 10^3) \cup (10^5, +\infty)$.

663. Како је десна страна неједначине једнака $x(1 - \log 2) = x(\log 10 - \log 2) = x \log 5 = \log 5^x$, то је дата неједначина еквивалентна неједначини $5^x + x - 20 > 5^x \Leftrightarrow x > 20$.

664. $x = 2$, $\alpha = (2k+1)\pi$, k-цео број. *Упутство.* Имати на уму да је за $x > 1$ испуњено $\log_2 x + \log_x 2 = \log_2 x + \dfrac{1}{\log_2 x} \geq 2$, као и $-2 \geq 2\cos\alpha \geq 2$.