*Andrej Dujella*

# Pitagorine trojke

Pravokutni trokut čije su duljine stranica prirodni brojevi zovemo **Pitagorin trokut**. Uređenu trojku prirodnih brojeva $(x, y, z)$ zovemo **Pitagorina trojka** ako su $x$ i $y$ katete, a $z$ hipotenuza nekog Pitagorinog trokuta, tj. ako vrijedi:

$$x^2 + y^2 = z^2. \tag{1}$$

Ukoliko su pritom brojevi $x$, $y$ i $z$ relativno prosti, onda kažemo da je $(x, y, z)$ **primitivna Pitagorina trojka**.

Proučavanje Pitagorinih trokuta u uskoj je vezi s diofantskom jednadžbom (1). Mi ćemo ovdje razmatrati probleme postojanja Pitagorinih trokuta koji posjeduje neka dodatna svojstva. Svaki takav problem svodi se na rješavanje neke diofantske jednadžbe ili sustava diofantskih jednadžbi. Jasno je da bi svaki od tih zadataka mogao glasiti: "riješite diofantsku jednadžbu". Međutim, nadamo se da će upravo geometrijska interpretacija ovih zadataka biti dobra motivacija učenicima za rješavanje ovakvih i sličnih zadataka.

Važan korak u proučavanju Pitagorinih trojki je određivanje formula koje daju sva rješenja diofantske jednadžbe (1). Riješimo na početku ipak nekoliko zadataka za čije rješavanje poznavanje tih formula nije nužno.

**Zadatak 1.** Dokazati da je u svakom Pitagorinom trokutu:
a) duljina barem jedne katete djeljiva s 3,
b) duljina barem jedne katete djeljiva sa 4,
c) duljina barem jedne stranice djeljiva s 5.

*Rješenja.* Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je Pitagorina trojka $(x, y, z)$ primitivna.

a) Uočimo najprije da kvadrat prirodnog broja koji nije djeljiv s 3 pri dijeljenju s 3 daje ostatak 1. Zaista, $(3k \pm 1)^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 = 3(3k^2 \pm 2k) + 1$. Dakle, ako ni $x$ ni $y$ ne bi bili djeljivi s 3, onda bi $z^2$ pri dijeljenju s 3 davao ostatak $1 + 1 = 2$, što je nemoguće jer smo pokazali da kvadrat prirodnog broja pri dijeljenju s 3 daje ostatak 0 ili 1.

b) Pokažimo najprije da kvadrat neparnog broja pri dijeljenju s 8 daje ostatak 1. Zaista, $(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1$, a broj $k(k+1)$ je paran kao produkt dva susjedna cijela broja. Odavde odmah slijedi da $x$ i $y$ ne mogu biti oba neparni jer bi u protivnom broj $z^2$ pri dijeljenju s 8 davao ostatak 2, tj. bio bi paran, a ne bi bio djeljiv sa 4. Dakle, zbog primitivnosti, možemo pretpostaviti da je $x$ neparan, a $y$ paran. Sada je $z$ neparan, pa iz $y^2 = z^2 - x^2$ zaključujemo da je $y^2$ djeljiv s 8, odnosno da je $y$ djeljiv sa 4.

c) Iz $(5k \pm 1)^2 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1$ i $(5k \pm 2)^2 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4$ slijedi da kvadrat cijelog broja pri dijeljenju s 5 može dati ostatak 0, 1 ili 4. Pretpostavimo sada da ni $x$ ni $y$ nisu djeljivi s 5. To znači da brojevi $x^2$ i $y^2$ pri dijeljenju s 5 mogu dati ostatke 1 ili 4, a to pak znači da broj $x^2 + y^2 = z^2$ pri dijeljenju s 5 može dati ostatak 2, 3 ili 0. No, $z^2$ kao kvadrat cijelog broja ne može pri dijeljenju s 5 dati ostatak 2 ili 3, pa zaključujemo da je $z^2$, a samim tim i $z$, djeljiv s 5.

**Zadatak 2.** a) Naći sve Pitagorine trojke koje se sastoje od tri susjedna prirodna broja.

b) Naći sve Pitagorine trojke čiji su članovi tri uzastopna člana nekog aritmetičkog niza.

*Rješenje.* a) Iz uvjeta: $(n-1)^2 + n^2 = (n+1)^2$, dobivamo: $n^2 = 4n$, tj. $n = 4$. Prema tome, jedina Pitagorina trojka s traženim svojstvom je $(3, 4, 5)$.

b) Neka je $(n-k, n, n+k)$ Pitagorina trojka s traženim svojstvom. Tada je $(n-k)^2 + n^2 = (n+k)^2$, odnosno $n^2 = 4nk$, tj. $n = 4k$. Dakle, tražene trojke imaju oblik $(3k, 4k, 5k)$ za prirodni broj $k$.

* * *

Predimo sada na rješavanje jednadžbe (1). Jasno je da je dovoljno promatrati slučaj kad su $x$, $y$ i $z$ relativno prosti jer ukoliko posjeduju zajednički faktor $d > 1$, onda jednadžbu (1) možemo podijeliti sa $d^2$.

Uočimo također da prema zadatku 1.b) u svakom Pitagorinom trokutu bar jedna od kateta mora biti parna. Geometrijski dokaz sljedećeg teorema dan je u [4].

**Teorem 1.** *Sve primitivne Pitagorine trojke* $(x, y, z)$ *u kojima je* $y$ *paran, dane su formulama:*

$$x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad z = m^2 + n^2, \tag{2}$$

*gdje je* $m > n$ *i* $m$, $n$ *su relativno prosti brojevi različite parnosti.*

*Dokaz.* Jednadžbu (1) možemo pisati u obliku:

$$y^2 = (z + x)(z - x). \tag{3}$$

Neka je $y = 2c$. Brojevi $z + x$ i $z - x$ su parni pa postoje prirodni brojevi $a$ i $b$ takvi da je $z + x = 2a$, $z - x = 2b$. Sada je:

$$c^2 = ab. \tag{4}$$

Budući da je $z = a + b$, $x = a - b$, zaključujemo da su brojevi $a$ i $b$ relativno prosti. Prema tome, iz (4) slijedi da postoje relativno prosti prirodni brojevi $m$ i $n$ takvi da je $a = m^2$, $b = n^2$. Odavde je:

$$x = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2, \quad y = 2mn.$$

Brojevi $m$ i $n$ ne mogu biti oba parni jer su relativno prosti i ne mogu biti oba neparni jer je $x = m^2 - n^2$ neparan. Prema tome, brojevi $m$ i $n$ su različite parnosti.

Lako se provjeri da $x$, $y$ i $z$ definirani sa (2) zadovoljavaju jednadžbu (1), tj. da vrijedi:

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2.$$

Treba još provjeriti da su relativno prosti. Pretpostavimo da brojevi $x$ i $z$ imaju zajednički faktor $d > 1$. Tada je $d$ neparan, $d \mid (m^2 + n^2) + (m^2 - n^2) = 2m^2$ i $d \mid (m^2 + n^2) - (m^2 - n^2) = 2n^2$. No, ovo je u kontradikciji s pretpostavkom da su $m$ i $n$, pa stoga i $m^2$ i $n^2$, relativno prosti. □

Iz teorema 1 zaključujemo da su sve Pitagorine trojke dane identitetom:

$$[d(m^2 - n^2)]^2 + (2dmn)^2 = [d(m^2 + n^2)]^2.$$

Navedimo sada Pitagorine trojke čiji su svi članovi $\leqslant 50$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $(3, 4, 5)$ | $(12, 16, 20)$ | $(18, 24, 30)$ | $(24, 32, 40)$ |
| $(6, 8, 10)$ | $(15, 20, 25)$ | $(16, 30, 34)$ | $(9, 40, 41)$ |
| $(5, 12, 13)$ | $(7, 24, 25)$ | $(21, 28, 35)$ | $(27, 36, 45)$ |
| $(9, 12, 15)$ | $(10, 24, 26)$ | $(12, 35, 37)$ | $(30, 40, 50)$ |
| $(8, 15, 17)$ | $(20, 21, 29)$ | $(15, 36, 39)$ | $(14, 48, 50)$ |

Vidimo da takvih trojki ima 20 ukoliko trojke $(x,y,z)$ i $(y,x,z)$ smatramo jednakima. Među njima je 7 primitivnih. Može se dokazati da je broj $P_h(n)$ primitivnih Pitagorinih trokuta s hipotenuzom $\leqslant n$ približno jednak $\frac{n}{2\pi}$. Preciznije, vrijedi: $\lim_{n\to\infty} \dfrac{P_h(n)}{n} = \dfrac{1}{2\pi}$.

**Primjer 1.** Stavimo li u (2) $m = n+1$ dobivamo:

$$x = 2n+1, \quad y = 2n(n+1), \quad z = 2n(n+1)+1.$$

Ako ovdje stavimo $n = 10^s$, dobivamo:

$$x = 2\cdot 10^s + 1, \quad y = 2\cdot 10^{2s} + 2\cdot 10^s,$$
$$z = 2\cdot 10^{2s} + 2\cdot 10^s + 1.$$

Ovo nam daje jednostavnu metodu za generiranje proizvoljnog broja Pitagorinih trojki u kojima je $z = y+1$:

$$(21, 220, 221),$$
$$(201, 20200, 20201),$$
$$(2001, 2002000, 2002001),$$
$$(20001, 200020000, 200020001), \ldots.$$

**Zadatak 3.** Naći sve primitivne Pitagorine trokute čije sve tri stranice leže između 2000 i 3000.

*Rješenje.* Neka je $(x,y,z)$ tražena Pitagorina trojka. Tada je $2000^2 + x^2 \leqslant 3000^2$, pa je $2000 \leqslant x \leqslant 2236$. Analogno je $2000 \leqslant y \leqslant 2236$. Također je $z^2 \geqslant 2000^2 + 2000^2$, pa je $2829 \leqslant z \leqslant 3000$. Prema teoremu 1, postoje prirodni brojevi $m$ i $n$ takvi da je $x = m^2 - n^2$, $y = 2mn$, $z = m^2 + n^2$. Iz dosadašnjih razmatranja imamo:

$$2829 \leqslant m^2 + n^2 \leqslant 3000, \tag{5}$$
$$2000 \leqslant m^2 - n^2 \leqslant 2236, \tag{6}$$
$$2000 \leqslant 2mn \leqslant 2236. \tag{7}$$

Zbrajanjem (5) i (6) dobivamo: $50 \leqslant m \leqslant 51$. Uvrstimo li ovo u (7), dobivamo: $20 \leqslant n \leqslant 22$. Konačno, iz (5) dobivamo da je $m^2 \leqslant 3000 - 20^2 = 2600 < 2601 = 51^2$. Dakle, $m = 50$, pa broj $n$ mora biti neparan, što znači da je $n = 21$. Prema tome, tražena Pitagorina trojka je $(2059, 2100, 2941)$.

**Zadatak 4.** Neka su $A$, $B$, $C$ i $a$, $b$, $c$ redom katete i hipotenuza dva primitivna Pitagorina trokuta. Dokazati da tada ili postoji cijeli broj $D$ takav da je:

$$(C+c)^2-(A+a)^2-(B+b)^2=D^2,$$

ili postoji cijeli broj $E$ takav da je:

$$(C+c)^2-(A+a)^2-(B+b)^2=2E^2.$$

*Rješenje.* Prema teoremu 1, postoje prirodni brojevi $m$ i $n$ takvi da je:

$$A=m^2-n^2, \quad B=2mn, \quad C=m^2+n^2.$$

Za Pitagorinu trojku $(a,b,c)$ imamo sada dvije mogućnosti: ili postoje prirodni brojevi $p$ i $q$ takvi da je:

$$a=p^2-q^2, \quad b=2pq, \quad c=p^2+q^2,$$

ili postoje prirodni brojevi $p$ i $q$ takvi da je:

$$a=2pq, \quad b=p^2-q^2, \quad c=p^2+q^2.$$

U prvom slučaju imamo:

$$\begin{aligned}(C+c)^2-(A+a)^2-(B+b)^2 &= 2Cc-2Aa-2Bb\\ &= 2(m^2p^2+m^2q^2+n^2p^2+n^2q^2\\ &\quad -m^2p^2+m^2q^2+n^2p^2-n^2q^2-4mnpq)\\ &= 4(mq-np)^2,\end{aligned}$$

dok je u drugom slučaju:

$$\begin{aligned}&(C+c)^2-(A+a)^2-(B+b)^2\\ &\quad = 2(m^2p^2+m^2q^2+n^2p^2+n^2q^2\\ &\qquad -2m^2pq+2n^2pq-2mnp^2+2mnq^2)\\ &\quad = 2(mp-mq-np-nq)^2.\end{aligned}$$

Dakle, $D=\pm 2(mq-np)$, $E=\pm(mp-mq-np-nq)$.

* * *

U Pitagorinom trokutu su po definiciji duljine stranica prirodni brojevi. Postavlja se pitanje da li i neki drugi elementi tog trokuta mogu biti prirodni brojevi. Mi ćemo razmotriti taj problem za slučaj radijusa upisane kružnice, te simetrale šiljastog kuta.

**Zadatak 5.** Dokazati da je u svakom Pitagorinom trokutu radijus upisane kružnice prirodan broj.

*Rješenje.* Iz formule $r = (s - c)\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$, slijedi da je:

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Odavde, i iz činjenice da su (zbog $c^2 = a^2 + b^2$) brojevi $c$ i $a+b$ iste parnosti, slijedi tvrdnja zadatka.

**Zadatak 6.** Naći barem jedan Pitagorin trokut kojemu je duljina simetrale jednog šiljastog kuta prirodan broj.

*Rješenje.* Neka trokut $ABC$ zadovoljava uvjete zadatka, te neka simetrala kuta $\alpha$ siječe dužinu $\overline{BC}$ u točki $D$. Uvedimo slijedeće oznake: $|BC| = x$, $|AC| = y$, $|AB| = z$, $|AD| = s$, $|CD| = u$. Budući simetrala kuta dijeli suprotnu stranicu u omjeru preostalih dviju stranica, dobivamo sustav jednadžbi:

$$x^2 + y^2 = z^2, \tag{8}$$

$$u^2 + y^2 = s^2, \tag{9}$$

$$\frac{u}{x-u} = \frac{y}{z}. \tag{10}$$

Po uvjetu zadatka, brojevi $x$, $y$, $z$, $s$ su prirodni. Iz (10) je broj $u$ racionalan, pa iz (9) zaključujemo da je i $u$ prirodan. Neka je $(p, q, r)$ primitivna Pitagorina trojka takva da je $u = p \cdot t$, $y = q \cdot t$, $s = r \cdot t$. Sada iz (10) slijedi da je $z = \frac{q(x - pt)}{p}$. Uvrstimo li ovo u (8), dobivamo:

$$x^2 + q^2t^2 = \frac{q^2x^2 - 2pq^2xt + p^2q^2t^2}{p^2},$$

odnosno:

$$p^2x = q^2x - 2pq^2t.$$

Odavde je $t = \frac{q^2 - p^2}{2pq^2}x$. Da bi ovaj broj bio cijeli, dovoljno je da bude $x = 2pq^2k$, za neki $k \in \mathbb{N}$. Tada je $t = (q^2 - p^2)k$, pa je $y = q(q^2 - p^2)k$, $z = q(q^2 + p^2)k$, $u = r(q^2 - p^2)k$. Specijalno, ako stavimo $p = 3$, $q = 4$, $r = 5$, $k = 1$ (kao što je učinio Diofant, vidi [2]), dobivamo Pitagorinu trojku $(28, 96, 100)$ s pripadnom simetralom duljine 35.

* * *

Već iz zadatka 1.b) slijedi da je površina svakog Pitagorinog trokuta cjelobrojna. Postavlja se pitanje postoji li Pitagorin trokut čija je površina kvadrat prirodnog broja. Prije nego što odgovorimo na to pitanje razmotrimo problem postojanja Pitagorinih trojki u kojima je jedna ili više stranica jednaka kvadratu prirodnog broja. Vidjet ćemo da su ova dva problema u uskoj vezi.

**Zadatak 7.** Dokazati da postoji beskonačno mnogo Pitagorinih trokuta čija je

a) hipotenuza;

b) jedna kateta

jednaka kvadratu prirodnog broja.

*Rješenje.* a) Neka je $(n, m, p)$, gdje je $n < m < p$, bilo koja primitivna Pitagorina trojka (a takvih s različitim hipotenuzama ima beskonačno mnogo). Ako su brojevi $x$, $y$ i $z$ definirani formulom (2), onda je po teoremu 1 $(x, y, z)$ primitivna Pitagorina trojka za čiju hipotenuzu vrijedi:

$$z = m^2 + n^2 = p^2.$$

Tvrdnja b) je direktna posljedica identiteta:

$$(k^4 - 4)^2 + (4k^2)^2 = (k^4 + 4)^2.$$

**Teorem 2.** *Ne postoji Pitagorin trokut čije su dvije stranice kvadrati prirodnih brojeva.*

*Dokaz.* a) Pretpostavimo najprije da postoji Pitagorin trokut čije su katete kvadrati prirodnih brojeva. Izaberimo među svim takvim trokutima onaj koji ima najmanju hipotenuzu. Tako dobivamo Pitagorinu trojku $(x, y, z)$ i prirodne brojeve $a$ i $b$ takve da je $x = a^2$ i $y = b^2$. Pokazat ćemo da su $a$ i $b$ relativno prosti. U protivnom bi postojao $d > 1$ i $a_1$, $b_1 \in \mathbb{N}$, takvi da je $a = da_1$, $b = db_1$. No, sada iz:

$$z^2 = d^4(a_1^4 + b_1^4)$$

zaključujemo da postoji $z_1 \in \mathbb{N}$ takav da je $z = d^2 z_1$, te dobivamo Pitagorinu trojku $(a_1^2, b_1^2, z_1)$ s hipotenuzom manjom od $z$, što je protivno izboru od $(x, y, z)$.

Dakle, $(a^2, b^2, z)$ je primitivna Pitagorina trojka, pa po teoremu 1 (ako odaberemo da $a$ bude neparan) postoje relativno prosti brojevi različite parnosti $m$ i $n$ tako da vrijedi:

$$a^2 = m^2 - n^2, \quad b^2 = 2mn, \quad z = m^2 + n^2. \tag{11}$$

Iz prve relacije u (11) slijedi da je $n$ paran, a $m$ neparan. Stavimo: $n = 2k$, $b = 2l$, pa dobivamo $l^2 = mk$. Odavde slijedi da postoje prirodni brojevi $r$ i $s$ takvi da je $m = r^2$, $k = s^2$. Budući je $(a, n, m)$ primitivna Pitagorina trojka, po teoremu 1, postoje relativno prosti brojevi $u$ i $v$ takvi da je:

$$n = 2uv, \quad m = u^2 + v^2. \tag{12}$$

Sada iz $n = 2s^2$ slijedi da je $s^2 = uv$, pa postoje prirodni brojevi $a_1$ i $b_1$ takvi da je $u = a_1^2$, $v = b_1^2$. Prema tome, iz (12) slijedi da je $(a_1^2, b_1^2, r)$ Pitagorina trojka za čiju hipotenuzu vrijedi: $r < r^2 = m < m^2 + n^2 = z$, što je u suprotnosti s izborom trojke $(x, y, z)$.

b) Neka je sada $(x, y, z)$ Pitagorina trojka s najmanjom hipotenuzom među svim Pitagorinim trojkama čija su jedna kateta i hipotenuza kvadrati prirodnih brojeva. Neka je $x = a^2$, $z = c^2$, $a, c \in \mathbb{N}$. Na isti način kao pod a), pokazuje se da trojka $(x, y, z)$ mora biti primitivna.

Ako je $y$ paran, onda po teoremu 1 postoje relativno prosti brojevi $m$ i $n$ takvi da je:

$$a^2 = x = m^2 - n^2, \quad y = 2mn, \quad c^2 = z = m^2 + n^2.$$

Odavde je $(ac)^2 = m^4 - n^4$, pa je u Pitagorinoj trojki $(n^2, ac, m^2)$ hipotenuza $m^2$ manja od $z$.

Prema tome, $y$ mora biti neparan, što znači da je $a$ paran. Iz $a^4 + y^2 = c^4$ imamo:

$$y^2 = c^4 - a^4 = (c^2 - a^2)(c^2 + a^2).$$

Lako se vidi da su brojevi $c^2 - a^2$ i $c^2 + a^2$ relativno prosti pa postoje neparni prirodni brojevi $r$ i $s$ takvi da je:

$$c^2 - a^2 = r^2, \quad c^2 + a^2 = s^2.$$

Odavde je $2c^2 = r^2 + s^2$, odnosno:

$$\left(\frac{r+s}{2}\right)^2 + \left(\frac{r-s}{2}\right)^2 = c^2.$$

Iz teorema 1 slijedi da postoje relativno prosti brojevi različite parnosti $m$ i $n$ takvi da je:

$$\frac{s+r}{2} = m^2 - n^2, \quad \frac{s-r}{2} = 2mn, \quad c = m^2 + n^2$$

ili

$$\frac{s+r}{2} = 2mn, \quad \frac{s-r}{2} = m^2 - n^2, \quad c = m^2 + n^2.$$

U svakom slučaju je:

$$2a^2 = s^2 - r^2 = 8mn(m-n)(m+n). \tag{13}$$

Budući su $m$ i $n$ relativno prosti i različite parnosti, zaključujemo da su brojevi $m-n$ i $m+n$ relativno prosti, a također je i svaki od njih relativno prost sa svakim od brojeva $m$ i $n$. Stoga iz (13) slijedi da postoje prirodni brojevi $k$, $l$, $p$, $q$ sa svojstvom da je:

$$m = k^2, \quad n = l^2, \quad m-n = p^2, \quad m+n = q^2.$$

Odavde je $k^4 - l^4 = (pq)^2$ pa smo dobili Pitagorinu trojku $(l^2, pq, k^2)$ s hipotenuzom $k^2$ manjom od $z$, budući je $k^4 = m^2 < m^2 + n^2 = c < c^2 = z$. Ovo je u kontradikciji s izborom trojke $(x, y, z)$, čime je teorem dokazan u potpunosti. □

**Korolar 1.** *Jednadžba $x^4 + y^4 = z^4$ nema rješenja u prirodnim brojevima.*

**Korolar 2.** *Ne postoji Pitagorin trokut čija je površina jednaka kvadratu prirodnog broja.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da takav trokut postoji, te da su mu $x$, $y$ katete, $z$ hipotenuza, a $P$ površina. To znači da je:

$$x^2 + y^2 = z^2, \qquad xy = 2P.$$

Po pretpostavci postoji prirodan broj $n$ takav da je $P = n^2$, odnosno $2xy = (2n)^2$. Sada je:

$$z^2 + (2n)^2 = (x+y)^2, \quad z^2 - (2n)^2 = (x-y)^2.$$

Odavde množenjem dobivamo: $z^4 = (2n)^4 + (x^2 - y^2)^2$. Dakle, dobili smo Pitagorin trokut čija je jedna kateta $4n^2$, a hipotenuza $z^2$, što je u suprotnosti s teoremom 2. □

## Zadaci za vježbu

**1.** Nađite sve Pitagorine trojke čiji su članovi tri uzastopna člana nekog geometrijskog niza.

**2.** Neka su $A$, $B$, $C$ i $a$, $b$, $c$ redom katete i hipotenuza dva primitivna Pitagorina trokuta. Dokažite da tada ili postoji prirodan broj $F$ takav da je:

$$Cc + Aa + Bb = F^2,$$

ili postoji prirodan broj $G$ takav da je:

$$Cc + Aa + Bb = 2G^2.$$

**3.** Dokažite da za svaki prirodan broj $n \geqslant 3$ postoji Pitagorina trojka čiji je jedan član jednak $n$.

**4.** Dokažite da postoji beskonačno mnogo Pitagorinih trokuta u kojima je radijus opisane kružnice prirodan broj.

**5.** Nađite barem jedan pravokutan trokut čije su duljine stranica racionalni brojevi, te koji ima svojstvo da mu je opseg jednak kvadratu, a zbroj opsega i površine jednak kubu nekog racionalnog broja.

## Literatura


[1] A.H. BEILER, Recreations in the Theory of Numbers, *Dover*, New York 1966.

[2] DIOFANT ALEKSANDRIJSKIJ, Arifmetika i kniga o mnogougol'nyh čislah, *Nauka*, Moskva 1974.

[3] A. DUJELLA, Suma četiri kvadrata, *Matematičko fizički list* 3/142 (1984–85) 97–100.

[4] I. GUSIĆ, Primjena geometrije u aritmetici, Bilten seminara iz matematike za nastavnike — mentore, *Pitagora*, Beli Manastir 1991.

[5] W. SIERPIŃSKI, Pythagorean Triangles, *Yeshiva University*, New York 1962.