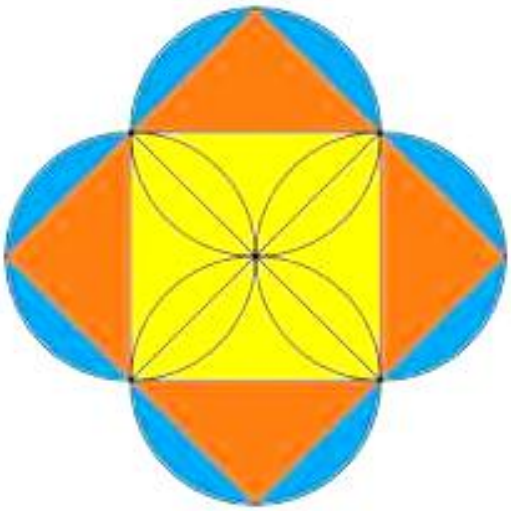
МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 37

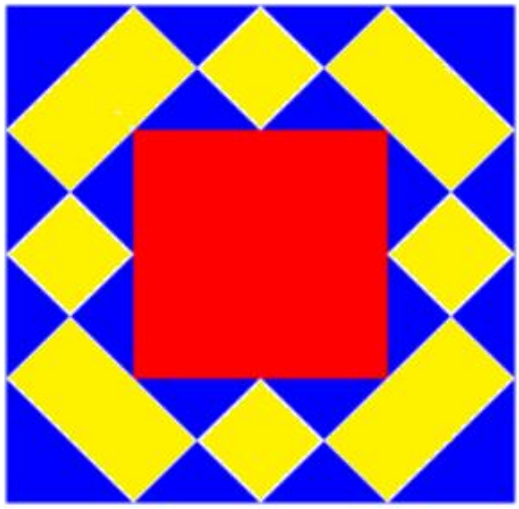
Самоил Малчески
Ристо Малчески

ПОДГОТВИТЕЛНИ ЗАДАЧИ ЗА НАТПРЕВАРИ ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД IV И V ОДДЕЛЕНИЕ



Скопје, 2023

Рецензент:
Д-р Методи Главче
Педагошки факултет, Скопје



СОДРЖИНА

ПРЕДГОВОР

Пред вас е мала збирка од 344 решени задачи, наменети за надарените ученици за математика од четврто и петто одделение во деветгодишното основно образование, односно трето и четврто одделение во осумгодишното основно образование. Збирката е поделена на два дела, при што во првиот дел се дадени формулациите на задачите, а во вториот дел се решенијата на сите задачи. Задачите се поделени во четири глави и тоа:

- Аритметика и алгебра,
- Текстуални задачи,
- Геометрија и
- Логика и комбинаторика,

а секоја глава е поделена на неколку параграфи, во кои се содржани задачи од одделните теми кои се дел од натпреварите по математика во нашата држава, но и во поблиското опкружување. Збирката содржи голем број задачи кои се задавани на натпреварите по математика во Република Македонија, Република Хрватска и Република Србија, но многу од задачите може да се најдат и во математички списанија, т.е. во нивните рубриките наменети за подготовка на учениците за натпревари, како и во рубриките Конкурсни и Наградни задачи. .

Во оваа пригода сакаме да му се заблагодариме на рецензентот д-р Методи Глаче чиј ангажман не само што придонесе да се намалат грешките кои го пратат издавањето на било кој ракопис, туку и со своите забелешки допринесе за подобрување на ракописот во целина.

Се надеваме дека оваа мала збирка задачи ќе најде свое место во подготовката на учениците за натпреварите по математика, со што ќе даде и свој придонес во развојот на учениците надарени за математика.

Издавањето на секоја книга неодминливо е пропратено со грешки и тоа како од технички, така од стручен аспект. Оттука, особено ќе бидеме благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе придонесе за подобрување на ракописот, а посебно за отстранување на евентуалните грешки.

Скопје Авторите
Јули, 2023 г.

1. АРИТМЕТИКА И АЛГЕБРА

1.1. ПРЕСМЕТУВАЊА ВРЕДНОСТИ НА БРОЈНИ ИЗРАЗИ

1. Запиши ги сите трицифрени броеви со различни цифри, кај кои цифрата на десетките е два пати поголема од цифрата на стотките, а цифрата на единиците е поголема од цифрата на стотките.

2. Пресметај ја вредноста на изразот:
$$(345 \cdot 9) : 5 + (147 \cdot 9) : 7 .$$

3. Пресметај:
$$239 \cdot 79 + 97 \cdot 239 + 761 \cdot 176 .$$

4. Ако $P = 459 : 3 + 40 \cdot 99 - 339 : 3$, а $Q = 171 - 374 : 34$, определи колку пати бројот P е поголем од бројот Q.

5. Нека $a = 100 - (7 \cdot 3 + 9 \cdot 7)$ и $b = 144 : 3 - 2 \cdot 9$. Кој број треба да се додаде на a за да се добие b?

6. Пресметај го збирот
$$A = 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + ... + 8 + 8 + 9 + 9 + 10 .$$

7. Пресметај ја вредноста на изразот
$$B = A : 2 + A : 3 + A : 4 + A : 5 + A : 6 ,$$
каде $A = 35 \cdot 7 + 37 \cdot 7 + 72 \cdot 3$.

8. Ако $a = 123 \cdot 45 + 123 \cdot 55$, пресметај
$$b = a : 2 + a : 3 + a : 4 + a : 5 + a : 6 .$$

9. Пресметај $A = (63 \cdot 56) : 9, B = (2015 : 15) \cdot 3$ и $C = (71170 : 5) : 2$. Колку пати C е поголемо од разликата $B - A$?

10. Спореди ги броевите a и b ако:
$a = (5005:5-1)\cdot 4 - 4\cdot(2994:3+1),$
$b = 3\cdot 998 - 3\cdot 997 + 2\cdot 996 - 2\cdot 995 + 4\cdot 994 - 3\cdot 994 - (1001-999)\cdot 497.$

11. Ако $a = (918:2+918:3):5$ и $b = (49\cdot 9 - 9\cdot 46)\cdot 5$, спореди ги броевите $c = (a+b):2$ и $d = b + (a-b):2$.

12. Пресметај ја разликата ако намаленикот е производот на броевите 1637 и 5, а намалителот е количникот на броевите 1566 и 9.

13. Да се пресмета збирот на 100-те броја, кои се среќаваат како производи во таблицата за множење на броевите од 1 до 10.

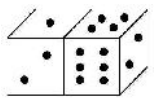
14. Ако $a \odot b = a(a+b)$, пресметај ја вредноста на изразот
$$(5 \odot 3) + (5 \odot 7).$$

15. Определи ја вредноста на изразот $(5 \otimes 7) \otimes 11$, ако $a \otimes b = a + ab + b$.

16. Стави ги потребните загради така, што ќе се добијат точни равенства:
а) $36:6+3\cdot 2 = 3$,
б) $36:6+3\cdot 2 = 8$,
в) $36:6+3\cdot 2 = 18$.

17. Меѓу некои од цифрите на бројот 2022 стави знаци на аритметичките операции, а по потреба и загради, така да вредноста на добиениот израз да биде:
а) 1, б) 2, в) 3, г) 4, д) 5.

18. Определи го збирот на точките кои се наоѓаат на невидливите ѕидови на двете коцки за играње прикажани на цртежот десно.

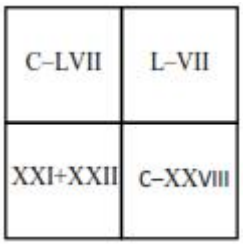


19. Во изразот $(20a+13b)c$ на местото на буквите a, b и c во некој редослед се запишани броевите 7, 8 и 9. Која е најголемата можна вредност на овој израз.

20. Запиши ги броевите помали од 100 кои се запишуваат со точно две

римски цифри.

21. Дадениот квадрат на цртежот десно е поделен на четири помали квадрати. Заштрафирани се оние помали квадрат, во кои операциите со броевите, запишани со римски цифри, даваат резултат XLIII. Како изгледа новодобиениот квадрат?



1.2. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА

22. Пресметај $A = x + y + z$, ако
$21496 - x = 8504$, $y - 2356 = 24356$ и $z + 712 = 1720 - 712$.

23. Нека $a + b = 458$. Определи ја вредноста на непознатата x:
а) $(a + x) + b = 558$,
б) $a + (b - x) = 400$,
в) $(a + x) + (b + x) = 528$.

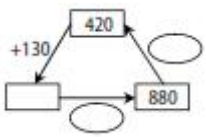
24. Реши ја равенката
$$(x : 5 - 3) : 16 = 25.$$

25. Реши ја равенката
$$35 + 5 \cdot (132 - 1331 : x) = 640.$$

26. Спореди ја вредноста на изразот
$$(812 : 4) \cdot 7 + (7865 - 1225) : 8 - 2119$$
со решението на равенката
$$4059 : 9 + 56x = 459.$$

27. Реши ја равенката
$$(4274 \cdot 8 - 3163 \cdot 8) : x = (576 : 9) : 8.$$

28. Во шемата прикажана на цртежот запиши ги соодветните броеви и операции така што пресметувањата ќе бидат точни.



29. Марија измислила нова операција за која го користи знакот $\otimes$. Операцијата е дефинирана со помош на познатите операции собирање и множење и тоа:

$$a \otimes b = ab + 3a + b\,.$$

Колку е x ако

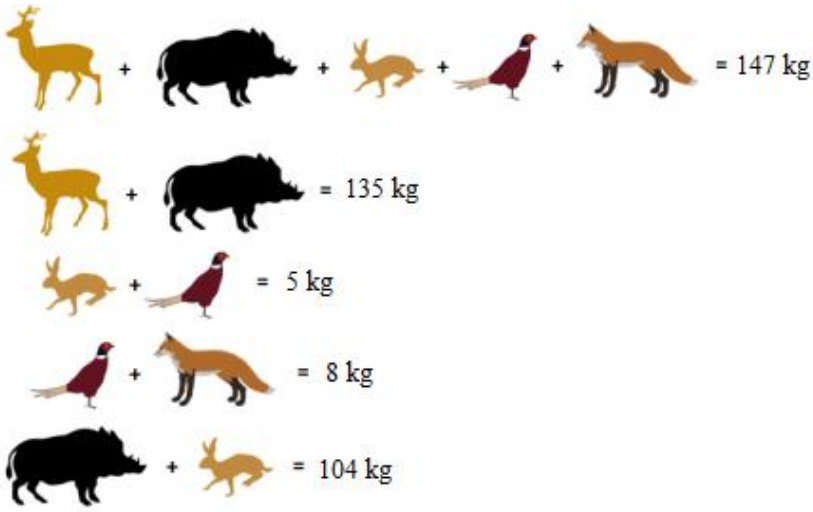
$$(x \otimes 5) \otimes 6 = 72123\,.$$

30. Разликата на два броја е 600, а ако поголемиот број го поделиме со помалиот се добива количник 3 и остаток 2. Кои се тие броеви?

31. Кога Горјан го отворил учебникот по математика, производот на броевите со кои биле нумерирани отворените страници бил 3422. Кој е бројот со кој е нумерирана десната страна?

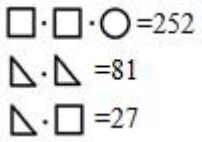
32. За еден број ќе велиме дека е „растечки“ ако секоја негова цифра (освен првата) гледано од лево на десно, е за еден поголема од претходната. Определи го „растечкиот“ број чија третина е природен број поголем од 1500 и помал од 2300.

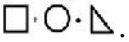
33. Ако



колкава е масата на одделните животни? Пресметај го збирот на килограми

34. Точни се равенствата



Пресметај:  .

1.3. БРОЈНИ РЕБУСИ

35. Во збирот

$$M + A + T + E + M + A + T + И + K + A$$

на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви различни цифри. Определи ги цифрите така, што збирот ќа биде најмал можен.

36. Реши го бројниот ребус

$$\overline{AB} + \overline{ABC} + \overline{ABCD} = 3000$$

во кој на исти цифри соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

37. Определи ја најмалата можна вредност на збирот на четирите двоцифрени броеви:

$$\overline{TA} + \overline{TA} + \overline{MA} + \overline{TA},$$

ако на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри. За најдените цифри определи ја вредноста на збирот $M + A + T$.

38. Определи ја најголемата можна вредност на збирот на четирите двоцифрени броеви:

$$\overline{BU} + \overline{BA} + \overline{MA} + \overline{RA},$$

ако на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

39. Во собирањето

$$\overline{KA} + \overline{LA} + \overline{MI} = \overline{TI}$$

на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви раз-

лични цифри. Определи ја најголемата можна вредност на збирот и во тој случај најди барем едно решение на бројниот ребус.

40. Во долните равенства на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$\overline{AB}+\overline{VA}=\overline{GA} \text{ и } \overline{AB}-\overline{VA}=A.$$

Која цифра соодветствува на буквата G.

41. Цифрите A,B,C,D се ненулти и такви што

$$\overline{ABCD}+\overline{BCD}+\overline{CD}+D=2014.$$

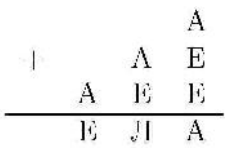
Определи го бројот $\overline{ABCD}$.

42. Определи го најмалиот трицифрен број $\overline{ABC}$ за кој важи равенството

$$\overline{ABC}=\overline{AA}+\overline{BB}+\overline{CC}.$$

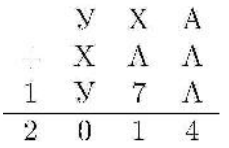
43. Од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 се составени два петцифрени броја. Која е најмалата можна разлика на овие броеви?

44. Во ребусот прикажан десно на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви различни цифри. Определи го производот $Е\cdot Л\cdot А$.

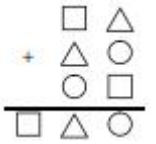


45. Разликата на два броја е 2014. Цифрата на единиците на едниот број е 7, а ако ја избришеме се добива другиот број, Кои се тие броеви?

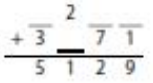
46. Реши го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.



47. Реши го бројниот ребус во кој на исти фигури соодветствуваат исти цифри, а на различни фигури соодветствуваат различни цифри.



48. На цртичките запиши ги соодветните цифри така што

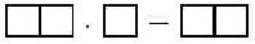


собирањето ќе биде точно.

49. Реши го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$\overline{BAR} - \overline{KEC} = \overline{MIS}\ .$$

50. Во петте квадратчиња запиши ги сите цифри 1, 2, 3, 4 и 5 така што ќе добиеш точно равенство.



51. Кога во празните полињата

ќе се запишат цифрите 2, 3, 4, 5 и 6 се добива израз во кој на производот на двоцифрен со едноцифрен број му се додава двоцифрен број. Во полињата запиши ги дадените цифри така што вредноста на изразот ќе биде

а) најголема можна,

б) најмала можна.

52. Кој е најголемиот број собироци во бројниот рбус

$$\overline{ШУМ} + \overline{ШУМ} + \ldots + \overline{ШУМ} = \overline{БУМ}\ ,$$

во кој на еднакви бунви соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви различни цифри.

1.4. ДЕЛИВОСТ

53. Која е првата цифра на најмалиот природен број чиј збир на цифри е еднаков на 2011?

54. Лента долга $20\,m$ е обоена на следниов начин: првиот сантиметар е обоен во зелено, вториот во портокалово, третиот во жолто, четвртиот во сино, петтиот во црвено, шестиот во сиво, седмиот во зелено, осмиот во портокалово итн. по ред. Во која боја е обоен крајот на лентата?

55. За два природни броја е познато дека едниот е за 120 поголем од дру-

гиот и дека кога нивниот збир се дели со нивната разлика се добива колични 5 и остаток 24. Кои се тие броеви?

56. Определи ги сите природни броеви од втората стотка, кои се 13 пати поголеми од збирот на своите цифри.

57. Определи ги сите природни броеви кои при делење со 7 даваат количник еднаков на остатокот.

58. На куќата на Матео стои непарен трицифрен број. Цифрата на десетките е два пати поголема од цифрата на единиците, Цифрата на стотките е еднаква на збирот на цифрите на десетките и единиците. Определи ги сите можности за бројот на куќата на Матео, ако се знае дека тој број е делив со 9.

59. На прашањетоколку јаболки има во кошот, дедо Марко одговорил: „Ако ги бројам по две, или по три, или по четири, или по пет, или по шест, секогаш ми преостанува една јаболко. Ако ги бројам по седум не и останува ниту една јаболко.“ Определи го најмалиот број јаболки кој може да е во кошот.

1.5. МАГИЧНИ КВАДРАТИ

60. Дополни го квадратот на цртежот десно така што тој ќе биде магичен.

	14	
8	21	

61. Дополни го квадратот на цртежот десно така што тој ќе биде магичен.

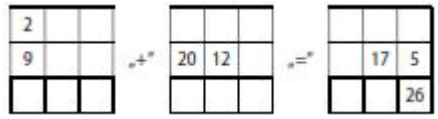
112	116	
119		

62. Во празните полиња табелата прикажана на цртежот десно запиши ги непарните броеви од 3 до 19 (освен бројот 11 кој е веќе запишан) така што збировите во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала ќе бидат еднакви.

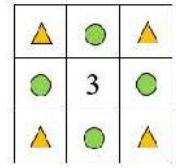
	11	

63. Пополни ги празните полиња во магичните квадрати така што збирот

на броевите во соодветните полиња на првите два квадрати е еднаков на бројот во соодветното поле на третиот квадрат. (Во секој магичен квадрат сите броеви се природни и се различни меѓу себе.)



64. Во секое поле на табелата прикажана на цртежот десни е запишан по еден од броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Збирот на трите броја во секој ред и во секоја колона е еден ист број. Во централното поле е запичан бројот 3. Со A да го означиме збирот на броевите во полињата означени со кругчињата, а со B збирот на броевите во полињата означени со триаголничињата. Пресметај го производот $A \cdot B$.



1.6. НИЗИ БРОЕВИ

65. Запиши ги последователно еден по друг природните броеви од 1 до 18 и прецртај ги цифрите 1, 3, 5, 7 и 9. Која е цифрата во средината на новата низа?

66. Воочи го правилото и продолжи ја низата за уште три члена:

1, 2, 3, 5, 8, 13, ...

67. Во низата цифри

2 0 2 3 2 0 2 3 2 0 2 3 2 0 2 3 2 0 2 3 ...

Цифрите 2, 0, 2 и 3 последователно се испишуваат.Која цифра се наоѓа на 2023-то место на така добиената низа?

68. Во една низа се запишани 11 броеви така што збирот на секои три последователни броеви е 18. Притоа збирот на првите 11 броеви е еднаков на 64. Определи го средни (шестиот) број на оваа низа.

69. Подреди ги по големина во низа сите трицифрени броеви помали од 550 чија цифра на стотките е еднаква н производот на другите две цифри. Кој број е во средината на вака добиената низа?

70. Во една низа броеви секој број, по првиот, е еднаков на производот на цифрите со кои е запишан претходниот број, а низата продолжува се додека се добие едноцифрен број. На пример: $63 \to 18 \to 8$. Во низата може да има два или повеќе броја. Определи ги сите двоцифрени броеви кои може да се почеток на низа која завршува со бројот 6.

1.7. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

71. Запиши ги сите броеви на втората стотка чија цифра на единиците е за еден поголема од цифрата на стотките.

72. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, ..., 38, 39, 40 се запишани еден по друг, без запирки, така што е добиен бројот

    12345678910111213...383940.

    Кој е најголемиот број што може да се добие ако од запишаниот број се избришат 66 цифри.

73. Збирот на три последователни броја е 36. Определи го производот на овие броеви.

74. Пресметај ги збирот и разликата на најголемиот и најмалиот пет-цифрен број од кои секој има збир на цифри 24.

75. Пабло и Андреј го погаѓаат бројот кој го замислил Филип.
    Пабло: Замисли број кој е еднаков на производот на броевите 750 и 31.
    Андреј: Замисли број кој е еднаков на производот на броевите 640 и 36.
    Ако Пабло згрешил за 250, за колку згрешил Андреј?

76. Четири дрва растат распоредени во права линија. Растојанијата меѓу соседните дрва последователно се $42\,m, 14\,m$ и $77\,m$. Определи го најмалиот број дрва, кои ќто треба да се засадат меѓу нив (по права линија) така што растојанијата меѓу секои две соседни дрва се еднакви.

77. Од цифрите 2, 3, 4, 5 и 6 состави еден трицифрен и еден двоцифрен број така што

а) нивниот збир ќе биде 479,
б) нивната разлика ќе биде 459.

78. Од најголемиот трицифрен број чиј производ на цифри е 12 одземи го најмалиот трицифрен број чиј збир на цифри е 21.

79. Собери ги сите непарни четирицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4, а потоа пресметај го производот на цифрите на добиениот збир.

80. Петар ги собрал сите двоцифрени броеви, во чиј запис цифрата на единиците е за 1 помала од цифрата на десетките. Кирил ги собрал сите двоцифрени броеви, во чиј запис цифрата на единиците е за 1 поголема од цифрата на десетките. За колку збирот на Кирил е поголем од збирот на Петар?

81. За еден број велиме дека е *убав*, ако се запишува со различни цифри и производот на неговите цифри е еднаков на 6. Определи ја разликата меѓу најмалиот убав трицифрен и најголемиот убав двоцифрен број.

82. Со помош на цифрите 0, 1, 2 и 4 се формирани два двоцифрени броја, при што секоја од цифрите е употребена само еднаш. Определи го збирот на двата броја, ако нивниот производ е најголемиот можен број.

83. Запиши ги сите трицифрени броеви кај кои збирот на цифрите е еднаков на 10 и притоа цифрата на стотките е поголема од цифрата на десетките, а цифрата на десетките е поголема од цифрата на единиците.

84. Д-р Икс има машина програирана на следниот начин:
    - во машината запишува природен број n (нулата не е природен број),
    - ако бројот n е парен, машината го дели со 2 и го испишува резултатот,
    - ако бројот е непарен, машината го множи со 3, на добиенот број му додава е и го испишува резултатот.

    Д-р Икс во машината запишал еден број, потоа испишаниот резултат

повторно го запишал во машината и оваа постапка ја повторил повеќе пати. По шест испишувања, машината го испишала бројот 4. Определи ги можните почетни вредности кои д-р Икс можел да ги запише во машината.

85. Запиши ги сите правилни дропки чиј броител е непарен едноцифрен број, а именител е парен едноцифрен број. Колку различни дропки запиша?

2. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

2.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Една енциклопедија содржи 317 страници. Колку цифри се употребени за нумерирање на енциклопедијата, ако нумерацијата почнува од третата страна.

2. Една книга има 196 страници. На првите две страници и на последната страна не се отпечатени броеви. Колку цифри се употребени за нумерирање на оваа книга. Колку пати е отпечатена цифрата 0, а колку пати цифрата 1?

3. За нумерирање на една книга се употребени 540 цифри. Колку страници има книгата, ако секоја страница е нумерирана со некој број?

4. Ако сите природни броеви ги запишеме еден по друг, која цифра ќе се најде на 2016-тото место?

5. Природните броеви се запишани еден по друг без запирки:
   12345678910111213141516171819202122232 4...
   Определи ги цифрите кои ќе се најдат на 2019-тото, 2020-тото и 2021-вото место и запиши ги во овој редослед како трицифрен број.

6. Компјутерска програма ги испишува на екранот, без запирки, цифрите од низата природни броеви
   1234567891011121314151617...
   Програмата прв пат застанала кога прв пат се испишани три последователни единици (12345678910111) и тогаш испишала вкупно 14 цифри. Пабло повторно ја пуштил програмата да испишува цифри од низата природни броеви, почнувајќи од бројот 1, и програмата застанала кога прв пат испишала пет последователни четворки. Колку цифри тогаш испишала програмата?

7. Матео на хартија напишал 0, а потоа последователно сите природни

броеви од 1 до 2020. Ако во секоја минута пишувал точно 77 цифри, колку броеви му останале да допише по еден час и 30 минути пишување?

8. Машина за печатење билети за кино секогаш печати 4 цифри за бројот на билетот. Ако бројот на билетот е едноцифрен, двоцифрен или трицифрен, пред бројот се додаваат определен број нули. На пример, билетот со број 5 се печати како 0005, а билетот со број 54 се печати како 0054. Колку нули машината ќе отпечати за билетите од редниот број 1 до редниот број 212?

9. Збирот на три различни природни броеви е 14. Ако еден од броевите се зголеми два пати, тогаш збирот на броевите ќе биде 24. Кои се тие броеви?

10. а) Збирот на броевите 278 и 319 намали го за најголемиот непарен број од втората стотка.
б) Од разликата на броевите 230 и 58 одземи го првиот парен следбеник на бројот 38.

11. За колку треба да се зголеми најголемиот број, запишан со различни непарни цифри, за да се добие најмалиот број, чиј збир на цифри е 46?

12. За колку треба да се зголеми најмалиот број чиј збир на цифри е еднаков на 30, за да се добие најмалиот број запишан со пет различни парни цифри?

13. Андреј замислил трицифрен број. Тој ги зголемил цифрата на стотките за 3, цифрата на десетките за 2 и цифрата на единиците за 1, по што добил број кој е четири пати поголем од замисленият број. Кој број го замислил Андреј?

14. Збирот на два броја е 817. Цифрата на единиците на едниот собирок е 3. Ако ја прецртаме таа цифра, се добива број, кој е еднаков на другиот собирок. Определи ги овие броеви.

15. Збирот на шест последователни природни броеви е еднаков на 75. Определи го збирот на најмалиот и најголемиот број.

16. Збирот на осум последователни природни броеби е еднаков на 92. Кои се тие броеви?

17. Замислив еден број кој го зголемив три пати. Потоа добиениот број го зголемив за 2 и добиениот збир го поделив со 4. На крајот, добиениот број го зголемив за 2 и го добив бројот 7. Кој број го замислив?

18. Од половината на бројот X го одзедов бројот 2015 и го добив најмалиот трицифрен број чиј збир на цифри е 10. Кој е бројот X.

19. Разликата на два природни броја е за 180 помала од нивниот збир, а збирот е три пати поголем од разликата. Кое се тие броеви?

20. Определи го двоцифрениот број кој се зголемува седум пати, ако меѓу неговите цифри се запише 0.

21. Ана, Билјана и Цветанка замислиле три броја. Ако се избрише првата цифра на бројот на Ана се добива бројот на Билјана. Ако се избрише првата цифра на бројот на Билјана се добива бројот на Цветанка. Збирот на трите замислени броја од Ана, Билјана и Цветанка е 912. Определи го збирот на цифрите на бројот што го замислила Ана.
Забелешка. Прва цифра на бројот е цифрата со најголема местна вредност во тој број.

22. Разликата на два природни броја е за 240 помала од нивниот збир, а збирот е четири пати поголем од разликата. Кое се тие броеви?

23. Збирот на два броја е 424. Ако првиот број се зголеми четири пати, а вториот се намали за 4, тогаш се добиваат еднакви броеви. Кои се тие броеви?

24. Збирот на намаленикот, намалителот и разликата е еднаков на 4044. Разликата е поголема од намалителот за 2020. Определи ги намаленикот, намалителот и разликата.

25. Во улицата на Матео сите куќи од левата страна се означени со сите непарни броеви од 1 до 31, а сите куќи од десната страна се означени со парните броеви од 2 до 28. Колку куќи има во улицата на Матео и

колку цифри се употребени за нивно означување?

26. Збирот на три броја е 2022. Ако првиот број го намалиш за 111, вториот број го намалиш за170, а третиот број го намалиш за 346, добиваш еднакви броеви. Кои се трите броја?

27. Кај некои броеви од четвртата стотка цифрата на десетките е еднаква на збирот на цифрите на единиците и сттките. Определи два различни такви броја, така што:
а) нивниот збир ќе биде најголем можен,
б) нивната разлика е број од шестата десетка. Определи ги сите решенија.

28. Определи два броја чиј збир е 2020, ако $\frac{1}{6}$ од поголемиот број е еднаква на $\frac{1}{4}$ од помалиот број.

2.2. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

29. Колку понеделници може има во период од 45 последователни денови?

30. Во текот на ноќта го погледнав часовникот и тој покажуваше точно $3:25$ часот наутро. Сфатив дека часовникот застанал, го навив и заспав. Кога станав часовникот покажуваше $5:30$ часот, а уличниот часовник покажуваше $7:40$ часот. Во колку часот сум се разбудил во текот на ноќта?

31. Стар будилник заостанува 6 минути на секои 24 часа.
а) На колку треба да го навиеме будилникот во 20 часот навечер, за да звони точно во 7 часот наутро следниот ден?
б) Ако будилникот точно го наместиме во 21 часот во петок, колку часот ќе покажува точно во 7 часот наутро во недела?

32. Семејството Јакопетрески со автомобил тргнало од Скопје за Љубљана во $14\,h\,30\,\min$. Кога стигнале во Љубљана ако по пат направиле две паузи од по $45\,\min$, а во вожња поминале $13\,h\,20\,\min$?

33. Еден часовник заостанува 6 секунди за пе дена. Кое време ќе го покажува на 7.3.2022 година на пладне, ако е наместен да покажува точно време на 1.1.2022 година на пладне?

34. Стоногалката Цаци има точно сто нозе, 50 леви и 50 десни. Секое утро таа обува 50 пара чевли и така што прво ги обува сите леви, а потоа сите десни. За обување на секој лев чевел и треба 1 секунда. Но, тогаш се уморува па за десните чевли и треба повеќе време. За првиот десен чевел и требаат две секунди, за вториот четири, за третиот шест и така до последниот десен чевел, секој пат две секунди повеќе отколку претходно. Но, навечер, кога ги собува чевлите, вкупно и треба десет пати помалку време отколку за обување. Колку секунди и требаат на стоногалката Цаци за собување на чевлите?

35. Вангел и Матеј учествувале на маратон. Првата половина од патот Вангел трчал со брзина два пати поголема од брзината на Матеј, а втората половина од патот Вангел трчал со брзина два пати помала од брзната на Матеј. Матеј целата патека ја претрчал со константна брзина и трката ја звршил за 4 часа. За кое време Вангел ја завршил трката?

36. Андреј живее далеку од училиштето, но понекогаш на училиште оди и се враќе пешки. Тој забележал, дека ако патува со автобус во двете насоки му требаат 40 минути, а ако користи автобус само во едната насока му треба 1 час и 30 минути. Колку време му треба на Андреј пешки да го помине растојанието од дома до училипте и обратно?

37. Збирот на годините на возраста на сите ученици во една група е 56. По две години збирот на нивните години на возраст ќе биде 70. Колку деца има во таа група ученици?

38. Збирот на годините на Ана и Бојан е 40, а Бојан е четири пати постар од Ана. По колку години Бојан ќе биде два пати постар од Ана?

39. Збирот на годините на мајката и ќерката е 26. Колку години има мајката, а колку години има ќерката, ако бројот на годините на мајката е еднаков на бројот на месеците на ќерката?

40. Пред 8 години Дамјан беше три пати постар отколку сега. Колк години има сега Дамјан?

41. Мајката на Теодор сега има 30 години, а нејзините три деца имаат 4, 3 и 1 година. По 12 години збирот на годините на родителите на Теодор ќе биде два пати поголем од збирот на годините на трите деца. Колку години има сега таткото на Теодор?

42. Дедото сега има 62 години, неговата ќерка има 36 години, внукот има 8 години и внуката има 6 години. По колку години збирот на годините на ќерката, внукот и внуката ќе биде еднаков на годините на дедото?

43. На планетата Ајмез денот се нарекува *NED* , часот се нарекува *SAC* , минутата *NIM* , а секундата *KES* . Еден *NED* трае десет *SAC* -ови, еден *SAC* трае десет *NIM* -ови, а еден *NIM* трае осум *KES* -ови. Колку земски секунди трае е ајмезски *KES* , ако 1 *NED* трае како и 1 ден?

44. Еден семафор работи на следниот начин: зелено свети 17 секунди, жолто 4 секунди, црвено 11 секунди, жолто 4 секунди, потоа повторно зелено 17 секунди, жолто 4 секунди, црвено 11 секунди, жолто 4 секунди и така цел ден. Колку минути во текот на целиот ден на семафорот ќе свети зелено?

45. За три дена две верверички собрале 100 лешници. За колку дена три верверички ќе соберат 250 лешници?

46. Во работилницата за играчки се произведуваат 198 дрвени автомобилчиња дневно. Менаџерот одлучил од денеска за 6 дена да се произведуваат толку автомобилчиња колку што досега се произведувале за 8 дена. Колку автомобилчиња сега ќе се произведат за 100 работни дена?

47. Група од 10 работници може да ископа еден канал за 12 дена. За колку

дена ќе биде ископан каналот, ако дополнително се вработат уште 5 работници?

48. Хотел има три базени A, B и C кои со вентили може да се поврзат или да се одделат. За полнење на базените се користат неколку еднакви цевки. Кога сите три базени се поврзани, нивното полнење со вода од трите цевки трае 18 минути. Ако се поврзат само базените A и B, нивното полнење со помош на две цевки трае 21 минута, а ако се поврзат само базените C и B, нивното полнење со помош на две цевки трае 14 минути. Колку секунди трае полнењето на базенот B со помош на една цевка?

49. Од две цевки стално тече вода. Од едната цевка истекуваат 148 литри вода за 1 час, а од другата истекуваат 148 литри за 15 минути. Колку вода истекува од двете цевки за 12 часа и 45 минути.

2.3. ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ И КУПУВАМЕ

50. Горјан и Андреј решиле да си купат по една иста топка. На Горјан му недостасуваат 200 денари, а на Андреј му недостасуваат 300 денари. Затоа решиле заедно да купат една топка. По купувањето на топката им останале 600 денари. Колку пари чини топката?

51. Ако Горјан купи 8 моливи, ќе му останат 4 денари, а ако сака да купи 9 моливи, ќе му недостасуваат 5 денари. Колку пари има Горјан?

52. Ако Андреј со парите што ги има купи 11 тетратки, ќе му преостанат 140 денари, а за да купи 15 тетратки му се потребни уште 100 денари. Колку пари има Андреј?

53. Во една пекара еден ден се продадени 2300 кифли по цена од 35 денари и 1750 банички по цена од 48 денари. Од кој производ е остварен поголем промет и за колку пари?

54. Молив и гума заедно чинат 36 денари. Три моливи и пет гуми заедно чинат 136 денари. Колку пари треба да ми вратат, ако купам пет моливи и три гуми и платам со банкнота од 200 денари?

55. По новогодишните празниците, Ана и Вангел добиле 2000 денари од родителите. Тие направиле план да потрошат една четвртина од парите за топка, а една третина од остатокот за кукла. Колку пари ќе им останат, откако ќе ги купат топката и куклата?

56. Доротеа за својот нов стан купила фрижидер, телевизор и машина за перење. Трите апарати заедно чинела 80000 денари. Колку чини секој апарат, ако фрижидерот е 8900 денари поскап од машината за перење, а телевизорот е 6200 денари поефтин од фрижидерот?

57. Седум исти тетратки чинат 749 денари, а шест исти моливи чинат 324 денари. Андреј купил три вакви тетратки и седум вакви моливи. Колку платил Андреј?

58. Две кифли, два переци и ѓеврек вкупно чинат 174 денари. Два переци, кифла и ѓеврек вкупно чинат 126 денари. Две кифли, перек и ѓеврек вкупно чинат 146 денари. Колку чини кифла, колку перек и колку ѓеврек?

59. Андреј веќе осум години е претплатемн на едно списание. Првата година претплатата била 1200 денари. Следните шест години претплатата се зголемувала за 40 денари годишно. Ако Андреј за осум години вкупно платил 10840 денари, за колку претплатата пораснала во осмата година.

60. Филип отишол во луна парк, каде првото возење на рингишпил чини 150 денари, а секое следно возење чини 5 денари помалку од претходното. Колку е најголемиот број возења што може Филип да ги направи ако со себе понел 1000 денари.

61. Во благајната на благајничката Ѓурѓа се наоѓаат банкноти од 100 денари и 10 денари и монети од 5 денари, 2 денари и 1 денар. Во благајната вкупно има 1844 денари. Бројот на банкнотите од 100 денари е еднаков на шестина од бројот на банкнотите од 10 денари, а бројот на монетите од 5 денари е половина од бројот на банкнотите од 10 денари. Бројот на монетите од 1 денар е еднаков на третина од вкупниот број монети од 2 денари и 5 денари заедно, а бројот на монетите од 2 денари е за шест поголем од бројот на монетите од 5

денари. Колку вкупно монети и банкноти има во касата?

62. Трговецот Марко купил таблети по цена од 185 евра за три таблети. Тој таблетите ги продава поединечно по цена од 150 евра за таблет. Колку таблети треба да продаде Марко за да заработи 10600 евра?

63. Пабло влегол во книжарница и со третина од парите си купил книги. Потоа тој ги потрошил преостанатите 78 евра во продавницата за играчки. Колку евра вкупно потрошил Пабло?

64. Ако 16 круши чинат 2 евра, а 100 цреши чинат 3 евра, колку цреши може да се купат наместо 6 круши?

65. На својот роденден Петранка ги поканила сите деца од своето одделение. Децата собрале 168 евра за подарок, при што секое дете дало по 7 евра. Колку момчиња има во одделението на Петранка, ако на роденденот девојчињата биле 7 повеќе од момчињата?

66. На една полица се наоѓаат шест математички книги чии цени се 62, 63, 66, 68, 69 и71 евра. Пабло и Матео купиле книги од таа полица и притоа Матео потрошил четири пати повеќе пари од Пабло, а на полицата останала само една книга. Кои книги ги купил секој од нив и колку денари платил? Кој книга е непродадена?

67. Ангел, Бранко, Цанко и Дејан седат околу тркалезна маса (во овој редосле). Заедно имаат 1600 златници. Прво Ангел половина од своите златници ги поделил на два еднакви дела и по еден дел им дал на своите соседи лево и десно до него, додека другата половина ја задржал за себе. Потоа истото тоа го направил Бранко, потоа Цанко и на крајот Дејан. На крајот сите четворица имаат еднаков број златници. Колку златници имал Бранко на почетокот?

68. Итар Пејо и Настрадин Оџа поделиле торба со златници. Настрадин Оџа зел 10 златници и третина од преостанатите златници, а Итар Пејо зел половина од златниците и уште 2 златника. Колку златници имало во торбата?

69. За неговиот седми роденден Пинокио од Штурецот добил сребрени

монети, од Ѓепето добил златни монети и од Вилата добил монети од платина. Бројот на едниот вид монети бил точно 77. Златните монети биле 5 пати повеќе од сребрените, а сребрените монети биле 3 пати помалку од монетите од платина. Колку вкупно монети добил Пинокио?

2.4. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

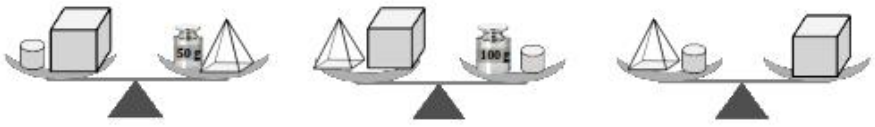
70. Јаже со должина $60\,m$ е расечено на еднакви делови со должина $3\,m$. Од така добиени јажиња шест се пресечени на делови со должина $10\,cm$, шест на делови со должина $5\,cm$, а преостанатите на делови со должина $6\,cm$. Колку вкупно сечења се направени?

71. Кошница со 1 чоколадо има маса 180 грама, а иста таква кошница со 5 исти такви чоколади има маса 500 грама. Колкава е масата на празната кошница?

72. Дедо Стојан засеал две ниви со пченица. Од првата нива која имала површина 80 декари, добил принос $500\,kg$ од декар, а од втората нива која имала површина 120 декари добил принос $450\,kg$ од декар. Колку килограми од декар добил просечно дедо Стојан од двете ниви?

73. Мечокот Мендо во текот на секое лето се здебелува $5\,kg$, а во текот на секоја зима слабее по $4\,kg$. Негавата маса не се менува во текот на пролетта и есента. Есента 2021 година неговата маса била $100\,kg$. Колкава била масата на Мендо во пролетта 2018 година?

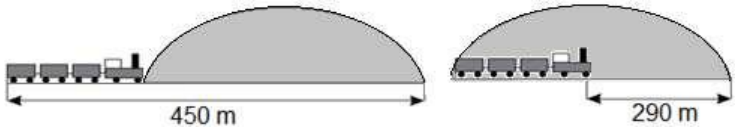
74. Горјан си играл со модели на коцка, цилиндар и конус, и со тегови ставајќи ги на вага. На теговите е запишана нивната маса. Ако вагите на долните цртежи со во рамнотежа, определи ја вкупната маса на коцката, цилиндарот и пирамидата.



75. Во првата бочва има 75 литри, во втората 34 литри, а во третата 21 литар вода, при што ниту една бочва не е полна. Ако првата бочва ја наполниме до врвот со вода од втората бочва, тогаш преостанатата вода во втората бочва зафаќа половина од волуменот на втората бочва. Но, ако втората бочва ја наполниме со вода од третата бочва, тогаш преостанатата вода во третата бочва ќе зафаќа четвртина од волуменот од третата бочва. Ако пак третата бочва ја наполниме со вода од првата бочва, тогаш преостанатата вода во првата бочва ќе зафаќа половина од волуменот на првата бочва. Определи го волуменот на секоја од трите бочви.

76. Цената на еден килограм ореви е 247 денари. Елена купила $2\,kg$ ореви и $4\,kg$ лешници, за што вкупно платила 2114 денари. Колку чини $1\,kg$ лешници.

77. Според податоците дадени на долните цртежи определи ја дожината на возот.



78. Од два града еден кон друг тргнале два велосипедисти. Првиот се движел со брзина 20 километри на час, а вториот се движел со брзина 15 километри на час. Колкаво ќе биде растојанието меѓу нив 2 часа пред средбата?

79. Добромир претрчал 5 километри за 16 минути и 40 секунди. Додека трчал, тој ја зголемувал брзината и секој следен километар го минувал за 5 секунди побрзо, отколку претходниот. За колку минути Добромир го пртрчал последниот километар?

80. Том поминува пат од 1020 метри за 5 минути, а Џери истиот тој пат го поминува за 3 минути. Ако тргнат истовремено, колку метри ќе биде Џери пред Том по 2 минути?

81. Матео оди од дома до училиштето со брзина од $3\,km$ на час, а се враќа од училиштето до дома со брзина $6\,km$ на час. Од дома до учи-

лиштето и обратно Матео оди 1 час. На колку метри од училиштето живее Матео?

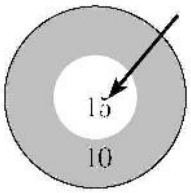
82. Велосипедист и пешак кои меѓусебно се оддалечени $1\,km$, тргнуваат истовремено еден кон друг. Велоспиедистот минува 300 метри во минута, а пешакот 90 метри во минута. На колкаво растојание еден од друг ќе бидат пешакот 1 минута и 48 секунди по тргнувањето.

83. Растојанието меѓу градовите A и B е $440\,km$. Од A за B тргнал моторцилист со брзина $60\,km/h$, кој по стигнувањето во B без застанување тргнал назад за A. Три часа по него од A за B по истиот пат тргнал автомобил со брзина $80\,km/h$. По колку часа од тргнувањето моторциклистот ќе го сретне автомобилот?

84. Точно во 9 часот Пабло истовремено запалил две свеќи, чии должини се $29\,cm$ и $34\,cm$. Познато е дека $2\,mm$ од пократката свеќа изгорува за 4 минути, а $2\,mm$ од подолгата свеќа изгорува за 3 минути. По некое време Пабло забележал дека едната свеќа е подолга од другата свеќа за $2\,cm$. Во колку часот тоа можело да се случи?

85. Патничкиот воз кој патува од Солун за Скопје секои 3 минути поминува $5\,km$. Друг патнички воз кој патува од Белград до Скопје секои 2 минути поминува по $3\,km$. Должината на патот на возот кој патува од Солун за Скопје е еднаква на $275\,km$, а дожината на патит на возот кој патува од Белград за Скопје е $405\,km$. Во колку часот треба да тргне возот од Белград, а во колку оној од Солун ако двата воза треба да бидат во 17 часот во Скопје, а притоа знаеме дека возот од Белград (заради лошите временски услови) на секои 30 минути доцни една минута?

2.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ



86. За погодок во центарот на метата се добиваат 15 поени, за погодок во обоениот дел на метата се добиваат 10 поени, а за промашување на метата не се

добиваат поени. Кој е најмалиот број истрели со кои при погаѓање на метата може да се освојат 200 поени.

87. На три дрва застанале вкупно 60 канаринци. Во еден момент одлетале 6 канаринци од првото дрво, 8 од второто и 4 од третото. Се покажало дека на секое од трите дрва останал еднаков број канаринци. Колку канаринци имало на почетокот на сеое дрво?

88. Во една прослава присуствуваат момчиња и девојчиња. Ако момчињата се за едно повеќе, тогаш ќе има три пати повеќе момчиња од девојчиња. Ако пак има три девојчиња помалку, тогаш на прославата ќе има 20 деца. Колку момчиња и колку девојчиња имало на прославата?

89. За да отиде од првиот до третиот кат, во зградата во која живее, Матеј треба да искачи 48 скалила. Колку скалила треба да искачи Матеј за да отиде од првиот до шестиот кат?

90. Пабло купил 15 тетратки со вкупно 550 листови. Некои тетратки имаат по 30 листови, а другите тетратки имаат по 10 листови повеќе. Колку тетратки имаат по 30 листови.

91. Пет деца вкупно нацртале 75 цртежи, Притоа секое дете нацртало различен број цртежи и ниту едно дете не нацртало повеќе од 18 цртежи. Кој е најмалиот број цртежи што е можно да ги нацртало едно дете?

92. Горјан се занимава со конструкторство. Тој вкупно има 107 шини, навртки, завртки и шајбни. Шините се три пати повеќе од шајбните, шајбните се два пати повеќе од навртките, а навртките се повеќе од завртките. Колку шини, навртки, завртки и шајбни има Горјан?

93. Маша и Медо заедно набрале 40 јаболки. Маша изела 5 од јаболките во својата кошница. Потоа таа ги зела половината јаболки од кошницата на Медо и изела уште едно јаболко од својата кошница, по што Маша и Медо имале еднаков број јаболки. Колку јаболки имала Маша на почетоот, а колку имал Медо?

94. Теодор и Теодора од градината на дедо Павле вкупно набрале 84 ореви. Теодор за себе зел поголем број ореви. Тогаш Теодора се вратила во градината и набрала уште ореви, па сега таа има 6 пати повеќе ореви отколку што имала преходно. Тогаш и двајцата имале еднаков број ореви. Колку ореви зел Теодор?

95. Голем запчаник со 9 запци е поврзан со мал запчаник со 6 запци. Големиот запчаник направил 12 цели завртувања. Колку пати за тоа време се завртел малиот запчаник?

96. Теодор и Михаил од градината на нивниот дедо набраа 28 јаболки. Теодор забележа дека 3 од неговите јаболки се расипани и ги фрли. Потоа му даде на Михаил половина од своите јаболки и за себе набра уште 6 јаболки. Потоа Михаил изеде 5 од своите јаболки, по што двајцата имаат еднаков број јаболки. Колку јаболки имал Михаил на почетокот?

97. Кристина отворила неколку кибрити на нејзиниот дедо и со чкорчињата почна да составува шестаголници и осумаголници. Таа со 168 чкорчиња состави 23 шестаголници и осумаголници. Колку шестаголници има меѓу составените фигури?

98. Девет истражувачи планираат дванаесет дневно патување во пустина меѓу две оази. Тие треба да најмат носачи, а местните носачи можат да носат толку храна и вода, колку што се потребни на еден човек за 15 дена. Колку носачи треба да најмат истражувчите (самите тие не носат храна и вода)?

99. Ако денес изедам два пати повеќе бонбони, отколку вчера, ќе ми останат точно 10 бонбони за утре. Но, ако денес изедам 5 бонбони повеќе, одколку вчера, за утре ќе ми останат 17 бонбони. Колку бонбони имам во моментот?

100. Вчера Илина имала полна кутија со бонбони. Ако таа денес изеде два пати повеќе бонбони, отколку вчера, ќе ѝ останат точно 15 бонбони за утре. Но, ако денес изеде 10 бонбони повеќе, одколку вчера, за утре ќе ѝ останат 12 бонбони. Колку бонбони имало во кутијата пред да ја отвори Илина?

101. Пабло има полица со десет рафтови. На најгорниот рафт има 7 книги, на рафтот под него има 17 книги итн. на секој следен рафт има по 10 книги повеќе. Колку книги има на полицата на Пабло?

102. Во училиштето на Горјан вкупно имало 777 девојчиња и момчиња. Половината од момчињата и 77 девојчиња, вкупно 200 ученици отишле на екскурзија. Колку девојчиња имало во училиштето на Горјан?

103. Во одделението на Горјан има два пати повеќе момчиња од девојчиња. Кога само Горјан е отсутен, има 8 девојчиња помалку од момчиња. Колку ученици има во одделението на Горјан?

104. Матео застанал во редот за билети за концерт. Во касата имало доволно блети за да секој што чекал во редот купи по 2 билета. Но, првите петмина купиле по 4 билети, а секој следен купувал по 3 билети, па така 30 луѓе останале без билети. Колку билети имало во касата?

105. Во училиштето на Горјан се запишале нови ученици и тоа четири пати повеќе момчиња од девојчиња. Од нив секое второ девојче и секое петто момче, вкупно 39 нови ученици учат германски јазик. Колку нови ученици се запишале во училиштето на Горјан?

106. Горјан и Андреј заедно имаат 5 чоколади. Андреј и Пабло заедно имаат 6 чоколади, а Пабло и Матео заедно имаат 5 чоколади. Колку чоколади заедно имаат Горјан и Матео?

107. Андреј и Горјан изеле неколку кифлички. Андреј изел третина од сите кифлички и уште 4 кифлички, а Горјан изел третина од сите кифлички и последните две кифлички. Колку кифлички изело секое дете?

108. На роденденот на Горјан имало 30 гости, момчиња и девојчиња. Секое момче (вклучувајќи го и Горјан) изело по 3 колачи, а секое девојче изело по 5 колачи. Вкупно биле изедени 125 колачи. Колку девојчиња имало на роденденот на Горјан?

109. Во спортска сала има 800 места за гледачи, распределени во три трибини. Во средната трибина местата се по 28 во ред. Секоја трибина има по 8 реда. Во крајните две трибини редовите имаат еднаков број

места. Определи колку места има секој ред во крајните две трибини.

110. На училипната приредба има вкупно 200 ученици. Откако си заминале 111 момчиња и три пати помалку девојчиња, на приредбата останале еднаков број момчиња и девојчиња. Колку момчиња имало на почетокот на приредбата?

111. Во еден двор има јаболки, круши и сливи и тоа помалку од 40 овошки. Јаболките се 3 пати повеќе од крушите и 4 пати повеќе од сливите. Колку дрва има во градината, ако на половината од нив има куќички за птици?

112. За подготовка на 25 мафини, според нејзиниот рецепт на тетка Марија и се потребни 1 чаша какао, 2 чаши масло, 3 чаши шеќер и 4 чаши брашно. Во оставата тетка Марија има 13 чаши какао, 14 чаши масло, 15 чаши шеќер и 16 чаши брашно. Кој е најголемиот број мафини што може да ги подготви тетка Марија?

113. Киро игра фудбал со своите пријатели. Колку пријатели на Киро играат фудбал, ако на игралиштето вкупно има 25 глави и нозе?

114. Ангел, Борис и Васил вкупно имаат 30 автомобилчиња. Ангел и Васил вкупно имаат два пати повеќе автомобилчиња отколку Борис, а Васил има два пати помалку автомобилчиња отколку Борис. Колку автмобилчиња има Ангел?

115. Во понеделникот Андреј решил од утре да почне да чита книга. Првиот ден прочитал 32 страници, а секој следен ден тој читал по три страници повеќе отколку претходниот. Колку вкупно страници од книгата прочитал Андреј по читањето во саботата?

116. На три полици во собата на Матео имало 167 книги. Матео на третата полица ги ставил новите 23 книги. Потоа од третата полица префрлил на првата полица 26 книги, а сите книги од втората полица ги поклонил на училипната библиотека. Потоа на сите три полици вкупно преостанале 135 книги. Колку книги Матео поклонил на училипната библиотека?

117. Додека Андреј изеде две цреши, Горјан изедува пет цреши, а додека Горјан изеде три цреши, Филип изедува седум цреши. Андреј и Филип заедно изеле 82 цреши. Коку цреши за тоа време изел Горјан?

118. Група од 23 ученици од четврто одделение е на еднодневна екскурзија. Некои од учениците тој ден требало да имаат по 4 часа, а некои по 5 часа. Сите ученици заедно имале 101 час. Колку ученици имале по 4, а колку по 5 часа?

119. Во црвената и сината кутија вкупно има 105 топчиња. Откако од црветата куитја во сината кутија се префрлени толку топчиња колку што имало на почетокот во сината кутија, во црвената кутија имало 13 топчиња повеќе отколку во сината. Определи ја петкратната разлика на топчињата во црвената и сината кутија.

120. Матео почнал да решава задачи од збирката по математика во вторник и заклучно со петокот истата седмица вкупно решил 128 задачи. Задачите ги решавал така што секој ден решавал по две задачи повеќе отколку претходниот ден. Колку задачи решил во четвртокот?

121. За еден ден семејството на зајакот Ушко јаде или 2 зелки или 9 моркови или 1 зелка и 4 моркови. Ако нема доволно зелки и моркови за денот, семејството се храни со трева. Во текот на 10 дена семејството изело 9 зелки и 30 моркови. Колку од овие 10 дена семејството се хранело само со трева?

122. На еден натпревар учествувале 225 ученици. Ако кон двократниот број на момчиња се додаде трикратниот број на девојчиња ќе се добие бројот 532. Колку момчиња и колку девојчиња учествувале на овој натпревар.

123. На натпревар во класични танци учествувале 22 танцувачки парови (еден пар се состои од дама и кавалер). Дамите, кои танцувале со црвени чевли, се два пати повеќе од дамите кои танцувале со жолти чевли, а тие се за 2 повеќе од дамите кои танцувале со црни чевли. Колку дами танцувале со црвени чевли?

124. Пабло имал два пати повеќе јаболки од круши. Тој изел 16 јаболки и 5

круши, по што му останале два пати повеќе круши од јаболки. Колку јаболки и колку круши имал Пабло?

125. Пабло имал два пати повеќе јаболки од круши. Тој изел 15 јаболки и 3 круши, по што му останале два пати повеќе круши од јаболки. Колку јаболки и колку круши имал Пабло?

126. Тројца математичари патувале во различни вагони на еден воз. При влегувањето во една железничка станица секој од нив почнал да ги брои светилките на перонот, покрај кои минувал неговиот вагон. Тие пребројале соодветно 17, 22 и 26 светилки. При одењето од станицата одново почнале да ги бројат светилките, при што едниот сега избројал три пати повеќе светилки од еден од другите двајца. Колку светилки избројал секој патник при излегувањето од станицата.

127. Ангел и Бранко учествувале во трка. Сите натпреварувачи ја завршиле трката, а никои двјца не ја завршиле трката во исто време. Бројот на натпреварувачите кои ја завршиле трката пред Ангел е два пати помал од бројот на натпреварувачите кои завршиле по него. Бројот на натпреварувачите кои ја завршиле трката пред Бранко е еднаков на бројот на натпреварувачите кои завршиле по него. Точно 15 натпреварувачите трката ја завршиле пред Бранко, а по Ангел. Колку луѓе учествувале во трката?

128. Во паркот има група ученици. Ако на секоја клупа седнат по 7 ученици, без место ќе останат 8 ученици. Ако учениците седнат по 9 на клупа, четири клупи ќе останат празни, а преостанатите клупи ќе бидат полни. Колку ученици биле во паркот?

129. На три дрва имало 60 птици. По некое време од првото дрво одлетале 6 птици, од второто дрво одлетале 8 птици, а од третото дрво одлетале 4 птици. Тогаш на секое дрво останале еднаков број птици. По колку птици имало на секое дрво на почетокот?

130. Една зграда има само приземје и два ката. Во таа зграда 37 луѓе живеат на катовите. Под вториот кат живеат 29 луѓе. На првиот кат живеат онолку луѓе колку што живеат на приземјето и вториот кат. Колку луѓе живеат на приземјето, колку на првиот кат и колку на

вториот кат?

131. Во една паралелка има 24 ученици. Во оваа паралелка бројот на момчињата е еднаков на $\frac{3}{5}$ од бројот на девојчињата. Колку момчиња и колку девојчиња има во паралелката?

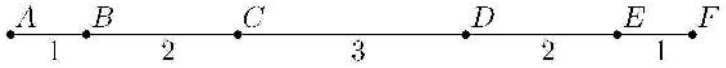
132. Во две кошници имало 180 јајца. Кога од едната кошница се земени $\frac{1}{4}$ од јајцата и се ставени во другата кошница, во двете кошници имало еднаков број јајца. Колку јајца имало на почетокот во секоја кошница?

3. ГЕОМЕТРИЈА

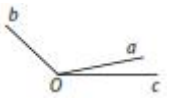
3.1. ОТСЕЧКИ И АГЛИ

1. Подреди ги по должина, од најкратката до најдолгата, отсечките чии должини се: $35\,cm$, $2\,dm$ и $400\,mm$.

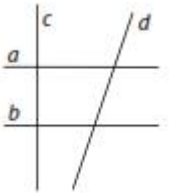
2. Определи го збирот на сите должините на сите отсечки на долниот цртеж.



3. На цртежот десно доцртај полуправа Od така што $\measuredangle cOd$ ќе биде прав, а $\measuredangle bOd$ ќе биде остар. Запиши ги сите агли. Коклу од аглите се:
а) остри, б) прави, в) тапи?



4. Погледни го цртежот десно и одговори на следниве прашања:
а) Колку прави се дадени на цртежот? Запиши ги!
б) Запиши ги сите парови паралелни прави.
в) Запиши ги сите парови нормални прави.



5. Нацртај прави a,b,c,d такви што правата a е нормална на правата b, правата a е паралелна на правата c и правата d е паралелна на правата c (сите четири прави се меѓусебно различни). Во каква положба се правите:
а) b и d , б) a и d , в) c и b .

6. На цртежот десно е чеириаголник кој има два прави агли. Неговите страни определуваат 4 прави, Колку прави, остри и тапи агли определуваат овие четири прави.

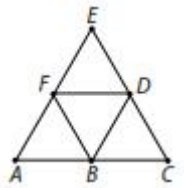
7. Определи го аголот што го формираат стрелките на часовникот во 13

часот и 20 минути.

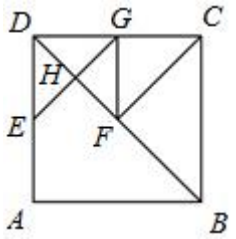
8. Определи го аголот што го формираат стрелките на часовникот во 13 часот и 30 минути.

3.2. ТРИАГОЛНИК

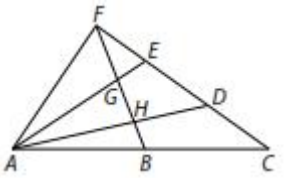
9. а) Запиши ги сите триаголници кои се нацртани на цртежот десно.
б) Запиши ги сите отсечки кои се нацртани на цртежот десно.



10. Колку триаголници се прикажани на цртежот десно. Кои се тие триаголници?



11. Запиши ги сите триаголници на цртежот десно.

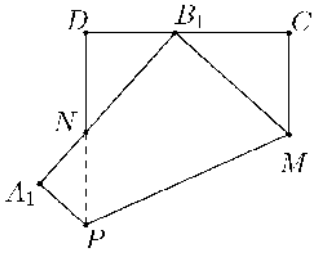


12. Со пет кибритени чкорчиња состави два рамнострани триаголницка.

13. Со седум кибритени чкорчиња направи три рамнострани триаголници.

14. Со шест кибритени чкорчиња состави четири рамнострани триаголници.

15. Квадратен лист хартија $ABCD$ е превиткан по отсечка PM така што темето B паднало во точката B_1 на страната CD, а темето A во точката A_1 (цртеж десно). Така се добиени триаголниците CMB_1,

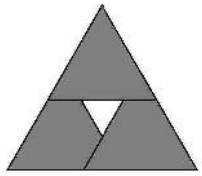


DNB_1 и NPA_1. Познато е дека плошти-ната на квадратниот лист е еднаква на $36\,cm^2$. Определи го збирот на периметрите на триаголниците CMB_1, DNB_1 и NPA_1.

16. Должините на две страни на еден триаголник се по $7\,cm$, а должината на третата страна е изразена со цел број сантиметри. Колку сантиметри најмногу може да биде периметарот на тој триаголник?

17. Збирот на периметрите на два рамностран триаголници е $120\,cm$. Страната на едниот триаголник е за $8\,cm$ подолга од страната на другиот триаголник. Определи ја должината на страната на помалиот триаголник?

18. Три плочки со форма на рамностра триаголник со должина на страна $21\,cm$ се поставени на рамностран триаголник со должина на страна $36\,cm$, како што е прикажано на цртежот десно. Определи ги страните на белиот триаголник, кој не е покриен од плочките.



19. Периметарот на еден триаголник е еднаков на 34 *cm*. Ако едната од страните се зголеми за 3 *cm*, другата се зголеми за 2 *cm*, а третата се намали за 3 *cm*, се добива нов триаголник кој е рамностран. Определи ја должината на страната на новодобиениот триаголник.

20. Во триаголник со периметар 176 должините на страните се изразени со броевите $\overline{aa}, \overline{ab}$ и $\overline{ba}$, каде a и b се последователни цифри. Определи ги должините на страните на триаголникот.

21. Една од страните на рамнокрак триаголник е еднаква на $4\,cm$, а периметарот е еднаков на $16\,cm$. Определи ги другите две страни на триаголникот.

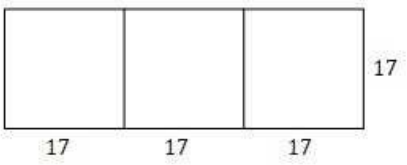
22. Рамнокрак триаголник има страни $14\,cm$ и $8\,cm$. Определи го периметарот на триаголникот ако се знае дека е еднаков на производот на два еднакви природни броја.

23. Определи ги должините на страните на рамнокрак триаголник со периметар $168\,cm$, ако должината на основата му е три пати помала од должината на кракот.

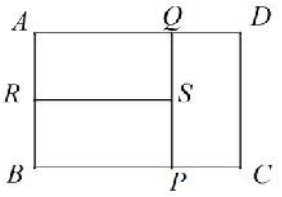
3.3. КВАДРАТ И ПРАВОАГОЛНИК

24. Правоаголник $ABCD$ со должини на страни $8\,cm$ и $5\,cm$ со отсечка MN е поделена на два четириаголника со еднакви периметри од по $20\,cm$. Определи ја должината на отсечката MN.

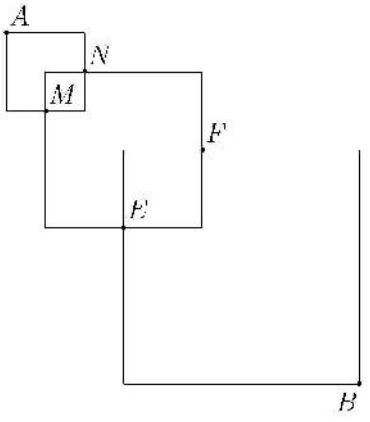
25. Определи го збирот на периметрите на сите правоаголници прикажани на цртежот десно.
Забелешка. Квадратот е правоаголник.



26. Правоаголник $ABCD$ е поделен на три еднакви правоаголника (цртеж десно). Периметарот на правоаголникот $ABCD$ е еднаков на $600\,cm$. Определи го збирот на должините на отсечките PQ и RS.

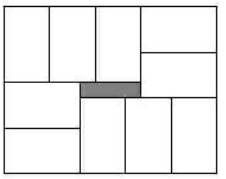


27. На цртежот десно се прикажани три различни квадрати, чии должини на страни изразени во сантиметри се парни броеви. Збирот на нивните периметри е еднаков на $56\,cm$. Квадратите се сечат така што точките M и N се средини на страните на малиот квадрат, а точките E и F се средини на страните на средниот по големина квадрат. Мравка се Атом-ант се наоѓа во точката A и треба да стигне во точката B, при што може да оди само по страните на

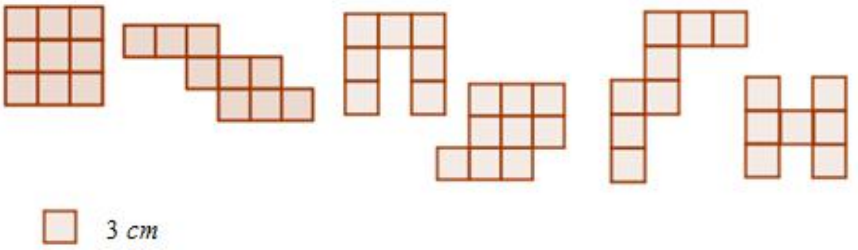


квадратите. Определи ја должината на најкраткиот пат по кој Атомант може да стигне од A до B.

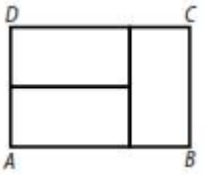
28. Определи го периметарот на сивиот правоаголник, ако должините на страните на секој од преостанатите десет бели правоаголници се $13\,cm$ и $19\,cm$.



29. На цртежот се дадени шест фигури. Определи ги нивните периметри, ако должината на страната на малите квадратќиња е $3\,cm$

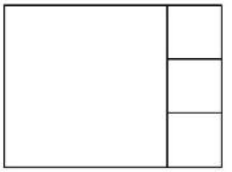


30. Правоаголникот $ABCD$ е составен од три помали правоаголници (види цртеж десно). Должината на пократката страна на секој од трите мали правоаголници е еднаква на $10\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на правоаголникот $ABCD$.



31. Ако должината на еден правоаголник се намали за неговата ширина, ќе добиеме нов правоаголник, чиј периметар е за $16\,cm$ помал од периметарот на почетниот правоаголник. Определи го периметарот на почетниот правоаголник, ако неговата должина е $12\,cm$.

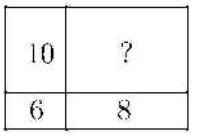
32. Правоаголникот на цртежот десно е составен од четири квадрати. Периметарот на најголемиот квадрат е еднаков на $552\,cm$. Определи го периметарот на целиот правоаголник.



33. Квадрат е поделен на пет еднакви правоаголници со четири паралелни прави. Збирот на периметрите на тие правоаголници е 96 *cm*. Определи го периметарот на квадратот.

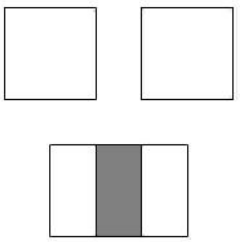
34. Квадрат $ABCD$ е поделен на три правоаголници $ABMN$, $MNPQ$ и $PCDQ$, чии периметри се $24\,cm$, $30\,cm$ и $26\,cm$, соодветно. Определи го периметарот на квадратот $ABCD$.

35. Правоаголник е поделен на четири правоаголници. Периметрите на три од нив се еднакви на $6\,cm$, $8\,cm$ и $10\,cm$ (цртеж десно). Определи го периметарот на четвртиот правоаголник.

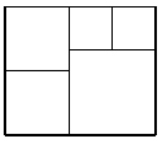


36. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на $86\,cm$. Ако две негови спротивни страни се зголемат два пати, тогаш новиот правоаголник ќе има периметар $122\,cm$. Определи ја плоштината на почетниот правоаголник.

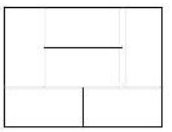
37. Два исти квадрати со должина на страна $9\,cm$ се преклопуваат, како што е прикажано на цртежот десно и формираат правоаголник со должини на страни $13\,cm$ и $9\,cm$. Определи ја плоштината на заедничкиот дел на квадратите.
\



38. Правоаголникот на цртежот десно е поделен на пет квадрати. Должината на страната на најголемиот квадрат е еднаква на $16\,cm$. Определи ги плоштината и периметарот на правоаголникот.

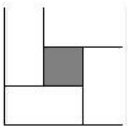


39. Правоаголник со периметар $56\,cm$ е составен од шест еднакви правоаголници, како што е прикажано на цртежот десно. Определи ја плоштината на овој правоаголник.



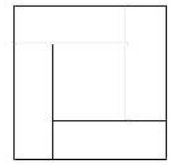
40. Квадрат е разделен на два правоаголника со периметри $24\,cm$ и $36\,cm$. Определи ја плоштината на квадратот.

41. Од четири бели правоаголни плочки со периметри $64\,cm$ и една црна квадратна плочка е составен квад-



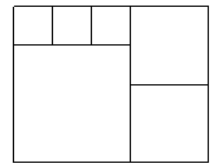
рат. Определи ги периметарот и плоштината на голе-миот квадрат.

42. Квадратот на цртежот десно е составен од четири еднакви правоаголници и еден квадрат. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на $136\,cm$, а должината на страната на малиот квадрат е два пати помала од должината на страната на гомеиот квадрат. Определи ја плоштината на еден правоаголник.

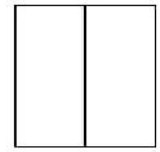


43. Периметарот на една правоаголна градина е 52 метра. Должината на градината е за 10 метри поголема од нејзината ширина. Градината е поделена на две леи, од кои едната е во форма на квадрат, а другатаво форма на правоаголник. Определи ги плоштините на добиените леи.

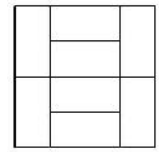
44. Правоаголникот на цртежот десно е сотавен од шест квадрати. Подолгата страна на правоаголникот е еднаква на $60\,cm$. Определи ја плоштината на овој правоаголник.



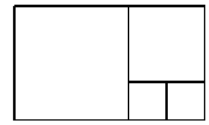
45. Квадратот на цртежот десно е составен од два еднакви правоаголника. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на $108\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на квадратот.



46. Квадратот на цртежот десно има периметар $416\,cm$ и е покриен со осум еднакви правоаголници. Определи го периметарот на еден од овие правоаголници.



47. Правоаголникот на цртежот десно е поделен на четири квадрати. Периметарот на најголемиот квадрат е $24\,cm$. Определи ги плоштината и периметарот на на правоаголникот.

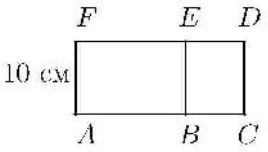


48. Правоаголен лист е расечен на два квадрати со периметри $412\,cm$ и $372\,cm$ и еден сив правоаголник (цртеж десно). Определи го периметарот на листот и периметарот на сивиот правоаголник.

49. Квадрат со периметар $604\,cm$ е поделен на два правоаголника. АКо периметарот на едниот правоаголник е $590\,cm$, определи ја плоштината на другиот правоаголник.

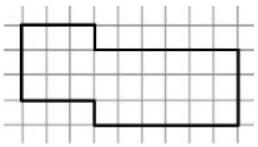
50. Околу правоаголна градина со должина $8\,m$ и ширина $6\,m$ треба да се направи цементна патека широка $50\,cm$. Колку килограми цемент се потребни ако за $3\,m^2$ се потребни $200\,kg$ цемент?

51. Должината на едната страна на секој од трите правоаголници $ABEF$, $BCDE$ и $ACDF$, прикажани на цртежот десно, е еднаква $10\,cm$. Збирот на периметрите на трите правоаголници е еднаков на $108\,cm$. Определи ја плоштината на правоаголникот $ACDF$.

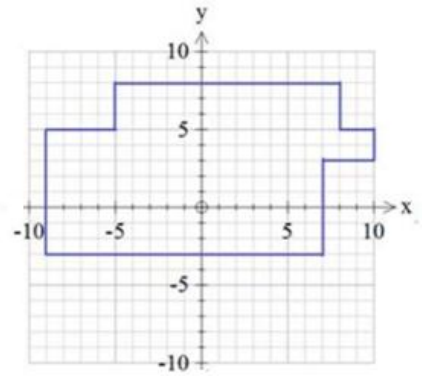


52. Над страните на квадрат надворешно се нацртани четири квадрати. Колку правоаголници има на добиениот цртеж. Ако страната на првиот квадрат е $1\,cm$, определи го збирот на периметрите на сите правоаголници.

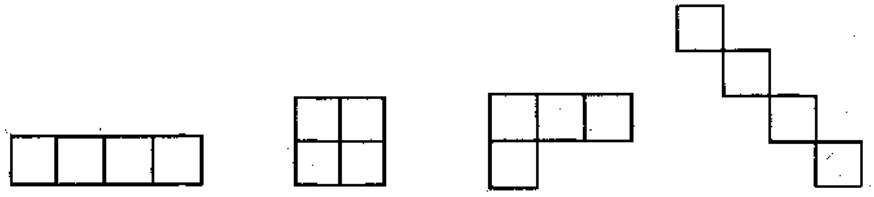
53. Секое квадратче во мрежата на цртежот десно има страна со должина $1\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на дадената фигура.



54. Пресметај ги периметарот и плоштината на фигурата прикажана на цртежот десно. Должината на страната на секое квадратче е еднаква на $1\,cm$.

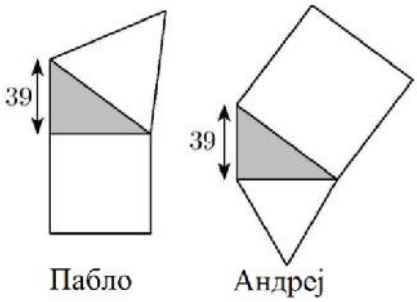


55. Должината на страната на едно квадратче е $1\,cm$. Определи ги плоштините и периметрите на дадеиите фигури. Која фигура има најголема плоштина? Која фигура има најмал периметар?



а) б) в) г)

56. Пабло и Андреј нацртале еден ист триаголник кој го обоиле во сиво. Должината на едната страна на триаголникот била $39\,cm$, а над другите две страни тие конструирале по еден квадрат и еден рамностран триаголник. Пабло добил петаголник со периметар $325\,cm$, а Андреј добил шестаголник со периметар $338\,cm$. Определи го периметарот на сивиот триаголник.



57. Една зеленчукова градина има правоаголна форма со плоштина $36\,m^2$. Должините на страните изразени во метри се природни броеви и е познато дека градината има најмал можен периметар. Колку колци се потребни за да се направи ограда на градината, ако колците се постават на растојание $2\,m$ еден од друг?

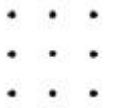
58. Павел сака да засади јагоди во леа која ќе има форма на правоаголник со периметар $36\,m$. Определи ги должините на леата ако тие изразени во метри се цели броеви и истата ќе има најголема плоштина. Колкав род ќе набере Павел од јагодите засадени во ваква леа, ако $1\,m^2$ дава род од $2\,kg$ јагоди?

59. Ако едната страница на квадратот се зголеми два пати, а другата три пати, ќе се добие правоаголник со плоштина $96\,cm^2$. За колку е пери-

метарот на новиот правоаголник е поголем од периметарот на стариот правоаголник?

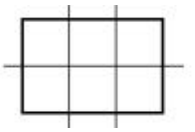
60. За колку ќе се намали должината на страната на квадратот ако неговиот периметар се намали за $100\,cm$?

61. а) Колку квадрати може да нацрташ така што темињата ќе им бидат некои четири од точките прикажани на цртежот десно?

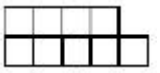


б) Определи ја плоштината на секој од овие квадрати ако растојанието меѓу секои две соседни хоризонтални и вертикални точки е $5\,mm$.

62. Три прави го делат правоаголникот на 6 еднакви квадрати (види цртеж десно). Ако периметарот на правоаголникот е за $180\,cm$ поголем од периметарот на еден квадрат, определи ги периметрите на правоаголникот и квадратот.



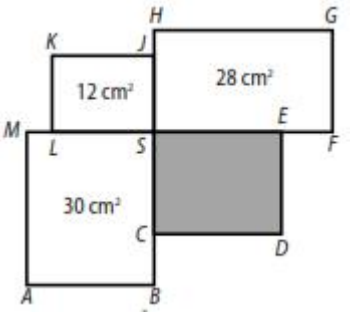
63. Од девет исти квадрати е составена фигурата прикажана на цртежот десно, чиј периметар е еднаков на 28 см. Определи го збирот на периметрите на сите квадрати прикажани на дадената фигура.



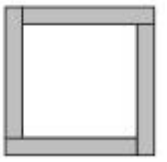
Решение. Периметарот на фигурата е формиран од 14 страни на

64. На три правоаголници на цртежот десно се запишани нивните плоштини. Определи ја плоштината на осенчениот правоаголник $CDES$ ако:

$$\overline{BC} = 2\,cm,\ \overline{EF} = 2\,cm,$$
$$\overline{FG} = 4\,cm, \overline{HJ} = 1\,cm,$$
$$\overline{ML} = 1\,cm.$$

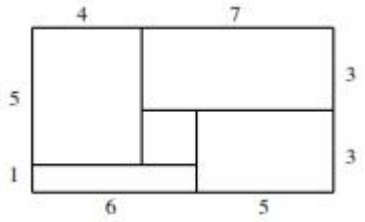


65. Околу огледало со квадратен облик е направена рамка составена од четири исти правоаголници (види цртеж). Периметарот на еден правоаголник е $220\,cm$, а



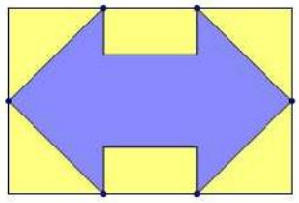
периметарот на целата рамка $800\,cm$. Определи ја плоштината на рамката. (Периметарот на целата рамка е еднаков на збирот на внтрешните и надворешините страни на рамката.)

66. Фросина има градина која е поделена на правоаголни делови како на цртежот десно, на кој се означени димензиите изразени во метри. Во секој дел таа планира да засади различен вид цвеќе. Ќе посади бегонии, лилјани, далии, ружи и ириси и тоа по едно растение на секој квадратен метар од градината. За цените се распрашала во најблиската цвеќара. Луковиците на ирисот се продаваат само во пакети од по 5 парчиња, а садниците на преостанатите цвеќиња се продаваат на парче. Три садници бегонии чинат 39 евра, четири садници лилјани чинат 73 евра, две садници далии чинат 75 евра, две садници ружи чинат 83 евра, а пакет од 5 луковици ирис чини 104 евра. Која е најмалата сума која Фросина треба да ја потроши за купување на цвеќето, а да притоа во својата градина ги засади сите купени садници и луковиви?

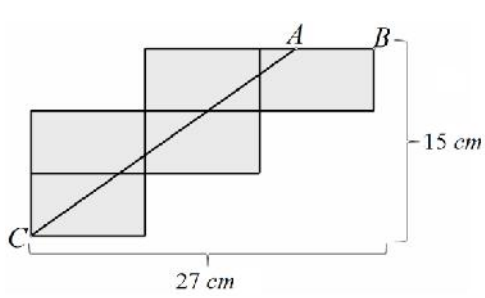


67. Ленка и Кирјана се играат со куп еднакви стапчиња. Секоја од определен број стапчиња составила правоаголник. Секоја страна на правоаголникот на Кирјана е направена со 5 стапчиња повеќе од соодветната страна на правоаголникот на Ленка. Плоштината на правоаголникот на Кирјана е два пати поголема од плоштината на правоаголникот на Ленка. Колку стапчиња за составување на својот правоаголник можела да употреби Ленка?

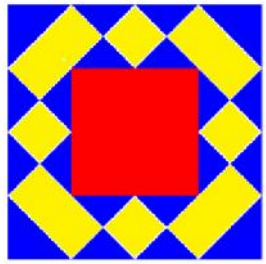
68. На цртежот десно е прикажан правоаголник со страни со должини $48\,mm$ и $32\,mm$. Подолгите страна на правоаголникот со означените точки се поделени на три еднакви отсечки, а пократките на две еднакви отсечки. Периметарот на секој жолт правоаголник е еднаков на должината на подолгата страна на правоаголникот. Определи ја плоштината на фигурата обоена со сина боја.



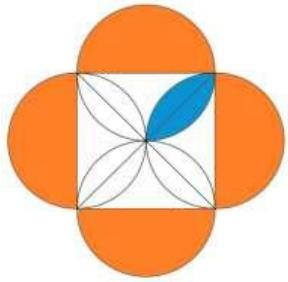
69. Пет еднакви правоаголници се распоредени така што формираат фигура со должина $27\,cm$ и ширина $15\,cm$, како што е прикажано на цртежот десно. Во внатрешноста на фигурата е нацртана отсечка AC која фигурата ја дели на два дела со еднакви плоштини. Определи ја должината на отсечката AB.



70. Филип во квадрат направил шара како на цртежот десно. Плоштината на црвениот квадрат е еднаква на $350\,dm^2$. Жолтата боја се продава во лименка спреј чија цена е 120 денари. Со секоја лименка може да се покрие плоштина од $70\,dm^2$. Колку пари платил Филип за жолтата боја?



71. Плоштината на делот од фигурата на цртежот десно кој е сино обоен е еднаква на $124\,cm^2$. За колку квадратни сантиметри е плоштината на квадратот помала од вкупната плоштина на портокалово обоените полукругови?



4. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

4.1. ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

1. Во едно одделение има 35 ученици. Од нив 20 членуваат во математичката секција, 11 во музичката секција и 10 ученици не се во ниту една од овие две секции. Колку ученици членуваат во двете секции?

2. На една меѓународна конференција присуствувале 70 делегати. Од нив 32 говорат англиски, 27 говорат француски и 22 говорат германски. Англиски и француски знаат 10 делегати, англиски и германски знаат 6 делегати, француски и германски знаат 8 делегати. Сите три јазици ги говорат 3 делегати. Колку делегати не знаат ниту еден од наведените јазици?

3. Меѓу стоте витези на кралот Артур 40 се верни, 50 се смели и 60 се силни. Истовремено смели и силни се 15, верни и силни се 20, смели и верни се 17. Секој витез е верен, смел или силен. Колку витези се едновремено смели, верни и силни?

4. Колку
   а) најмногу, б) најмалку
   денови може да има во 4 последователни месеци?

5. На една автобуска линија се движат два автобуси и на линијата автобусите минуваат во интервал од 21 минута. Во кој интервал ќе минува автобусите ако на линијата се пушти уште еден автобус?

6. Презимињата, татковите имиња и имињата на мажите во една фимилија се: Јакопетрески Рампо Тодор, Јакопетрески Тодор Рампо, Јакопетрески Симон Ристо, Јакопетрески Рампо Симон и Јакопетрески Симон Павел. Тие се членови на фамилијарна музичка група во која еден е пеач, таткото на пеачот е тапанар, братот на пеачот свири на клавијатура и децата на пеачот се гитаристи. Како се вика пеачот?

7. Четири пријателки имаат по еден брат. Заедно со браќата отишле на игранка, се поделиле во парови момче-девојка и почнале да танцуваат, при што ниту една од пријателките не играла со својот брат. Во секој пар кавалерот бил повисок од партнерката. Имињата и презимињата на девојките и момчињата се: Јане Вапцаров, Андреј Екимоски, Ленка Екимоска, Сашо Петрески, Олгица Петреска, Дамјан Костоски, Ирена Костоска и Ана Вапцарова, и во овој редослед се подредени по височина од највисоката до најниската личност. Определи ги четирите парови?

8. На пролетниот маратон првите четири места ги освоиле петтоодделенците Иван, Марија, Горан и Софија. Ако по Горан е пласиран барем еден ученик, местото на Софија е парен број, местото на Иван е непарен број и Софија е пласирана пред Иван, определи кој кое место го завзел.

9. Ана, Дорка, Бранко, Цанко и Фидан на пролетниот кроз ги освоиле првите пет места. На прашањето кој кое место го освоил, пет гледачи ги дале следниве одговори:
   1) Цанко стигна втор, а Бранко трет.
   2) Фидан стигна трет, а Дорка петта.
   3) Ана стигна четврта, а Цанко втор.
   4) Дорка стигна прва, а Фидан втор.
   5) Бранко стигна прв, а Ана четврта.

   Во секој одговор еден дел е точен, а другиот е неточен. Определи го редоследот на натпреварувачите.

10. Горјан замислил трицифрен број, а неговите пријатели пробале да го погодат. Ова се нивните обиди:
    Бојан: 218, Рампо: 571, Марко:732, Дамјан: 853.
    Горјан им рекол: „Еден од вас ги погоди сите три цифри, а преостанатите само по една, но ниту една од погодените цифри не е на прво место.“ На тоа Рампо рекол: „Врз основа на оваа информација не можеме да определиме кој број си го замислил, бидејќи постојат повеќе такви броеви.“ Определи го збирот на сите можни броеви.

11. На математичката олимпијада учествувале 100 ученици кои решавале три задачи. Првата задача ја решиле 90 ученици, втората задача ја

решиле 80 ученици и третата задача ја решиле 75 ученици. Определи го најмалиот можен број ученици кои ги решиле трите задачи.

12. Во кутија Горјан има 6 црвени, 14 сини и 8 зелени топчиња. Без да гледа тој вади топчиња од кутија.
    а) Кој е најмалиот број топчиња што треба да ги извади Горјан, за да е сигурен дека извадил две истобојни топчиња.
    б) Кој е најмалиот број топчиња што треба да ги извади Горјан, за да е сигурен дека извадил топче од секоја од трите брои?

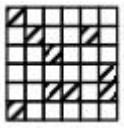
13. На еден математички натпревар учествувале 30 ученици. Од нив 25 ја решиле првата задача, 24 ја решиле втората задача, 23 ја решиле третата задача и 22 ја решиле четвртата задача. Докажи дека барем четири ученици ги решиле сите четири задачи.

14. Дванаесет едноглави, двоглави и триглави змејови вкупно имаат 25 глави. Докажи дека, триглавите змејови се повеќе од едноглавите.

15. Во продавница добиле 20 кутии со по 20 бомбони, за кои што пишувало, дека се по 10 грама. Продавачот бил предупреден, дека во една кутија бомбоните се по 9 грама. Дали може продавачот со едно мерење да открие во која кутија се бомбоните од по 9 грама.

16. Во една кутија има седум картички на кои се запишани броевите од 3 до 9 (на секоја картичка по еден број). Андреј од кутијата без да гледа зел три картички, а Пабло без да гледа зел две картички, додека две картички останале во кутијата. Андреј погледнал во своите картички и му рекол на Пабло: „Знам дека збирот на броевите на твоите картички е парен.“ Колку е производот на сите броеви на картичките на Андреј?

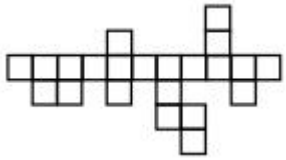
17. Некои од единечните квадратчиња на квадратот прикажан на цртежот десно се штрафирани, а другите се бели. Потоа сите штрафирани квадратчиња се обоени во бело, а сите бели се штрафирани. Ако не е дозволено вртење на квадратот, ако сега тој изгледа?



18. Неколку книги со различни дебелини се ставени една до друга на

полица. Лево од најдебелата книга има 6 книги, а десно од најтенката има 7 книги. Најстарата книга е до натенката и најдебелата. Кој е најмалиот можен број книги на полицата?

19. Фигурата прикажана на цртежот десно е поделена на цели квадратчиња така што е добие најголем можен број фигури од видот  . Колку фигури се добиени? Дади пример на поделба?



20. Лифтот во една дваесеткатница може да ги изврши само следниве наредби: да оди 8 ката нагоре и да се спушти за 13 ката. Лифтот не може да тргне нагоре ако над него нема барем 8 ката, ниту надолу ако под него нема барем 13 ката.
    а) Како лифтот може да се спушти од дваесеттиот кат на приземје?
    б) Како лифтот може да стигне од осми на тринаесети кат?

21. Во една соба има две светилки. Кога ќе се приклучи прекинувачот на првата светилка, таа засветува по 6 секунди и свети 5 секунди, потоа пак не свети 6 секунди и свети 5 секунди, и тоа се повторува. Кога ќе се приклучи прекинувачот на втората светилка , таа засветува по 4 секунди и свети 3 секунди, па не свети 4 секунди и свети 3 секунди, и тоа се повторува. Матео ги приклучил истовремено двете светилки и по 2021 секунди ги исклучил. Колку секунди за тоа време две светилки светеле истовремено.

4.2. БРОЕЊА

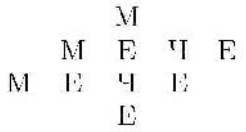
22. На таблата се запишани сите природни броеви од 1 до 243. Андреј ги избришал сите непарни броеви помали од 10. Потоа, Горјан ги избришал сите броеви помали од 100, чија цифра на единиците е 8. На крајот, Пабло ги избришал сите броеви чија цифра на единиците е 9. Колку цифри вкупно останале на таблата?

23. Колку пати е употребена цифрата 7 за запишување на сите броеви од осмата стотка?

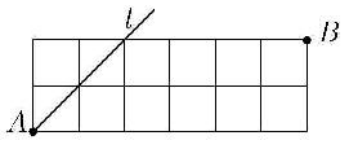
24. Матео има вага со по еден тег од 1 грам, 2 грама, 3 грама, 4 грама и 5 грама. На колку различни начини Матео може да измери маса од 10 грама?

25. На едно дрво живеат голем број камелеони, секој од кои во текот на еден час најмногу еднаш ја менува бојата. Притоа, штом еден камелеон ја промени бојата, по 5 секунди други два камелеони ја менуваат бојата. Утрово, по изгрејсонце еден камелеон ја променил бојата. Колку камелеони ја промениле бојата во следните 36 секунди?

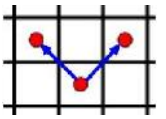
26. На колку различни начини на шемата десно може да се прочита зборот МЕЧЕ.



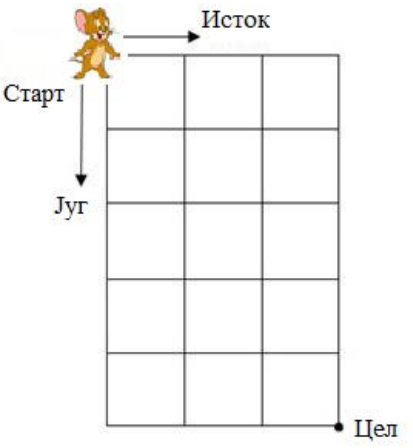
27. На мрежата дадена на цртежот десно, определи го бројот на патиштата со почеток во точката A и крај во точката B, кои минуваат по линиите на мрежата со чекори само нагоре или надесно, но по излегувањето од точката A не ја сечат правата l.



28. Фигура се наоѓа во средното поле на долниот ред на табла 9×9. Во секој потез фигура може да се поместува дијагонално горе за едно поле, односно горе-лево или горе-десно, како што е прикажано на цртежот десно. На колку различни начини фигурата може со низа од осум потези да се премести во горниот ред на таблата?



29. Глувчето Џери се наоѓа во горниот лев агол на лавиринтот прикажан на цртежот десно и мора да стигне до целта која е во спротивниот агол. Џери смее да се движи само на југ и на исток (види цртеж). На колку начини Џери може да стигне до целта?



30. На колку различни начини може да се избере цифра $a > 0$ така, што збирот на двоцифрениот број запишан со две исти цифри a и двоцифрениот број запишан со различни цифри кои се поголеми од a е еднаков на 100?

31. Андреј ги запишал сите трицифрени броеви, во кои цифрата на стотките е еднаква на збирот на цифрите на единиците и десетките. Колку броеви запишал Андреј?

32. Определи го бројот на петцифрените броеви $\overline{abcde}$, за кои цифрите b и d се еднакви на збировите на двете нивни соседни цифри, т.е. $b = a + c$ и $d = c + e$.

33. Определи го бројот на трицифрените броеви, кај кои цифрата на десетките е еднаква на збирот на другите две цифри.

34. Определи го бројот на природните броеви чиј производ на цифри е 14 и збирот на цифрите е 11? Определи го најголемиот од овие броеви.

35. Запиши ги сите трицифрени броеви чиј збир на цифри е 10, а најголемата цифра е за 6 поголема од најмалата?

36. За колку бројот на непарните трицифрени броеви е поголем од бројот на трицифрените броеви запишани со непарни цифри?

37. Определи го бројот на сите трицифрени природни броеви кои се парни и не се деливи со 10.

38. Определи го бројот на трицифрените броеви кај кои цифрата на стотките е поголема од цифрата на десетките, а оваа е поголема од цифрата на единиците.

39. Определи го бројот на четирицифрените броеви чиј производ на цифри е 4. Колку е збирот на овие броеви?

40. Запиши ги сите броеви помали од 300 кои во својот запис имаат точно две двојки. Колку броеви запиша?

41. За еден број ќе велиме дека е *интересен* ако е запишан со различни цифри и првата цифра му е еднаква на збирот на сите преостанати цифри. На пример, броевите 321 и 80413 се интересни. Определи го бројот на интересни броеви.

42. Определиго бројот на природните броеви помали од 10000 кои во својот запис имаат точно три еднакви цифри.

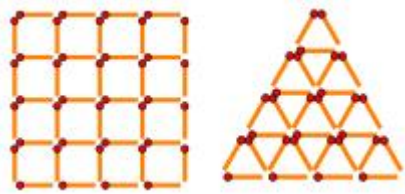
43. На колку различни начини може банкнота од 50 евра да се размени со монети пд 2 евра и банкноти од 5 и 10 евра? Испиши ги сите можности.

44. На еден шаховски турнир учествувале 12 шахисти. Секој шахист со секој друг шахист одиграл по 3 партии. Колку партии се одиграни на турнирот?

45. Во една држава има 10 фудбалски екипи. Првенството е организирано така што секоја екипа игра со секоја друга екипа по четири натпревари. Колку натпревари ќе се одиграат во текот на целото првенство?

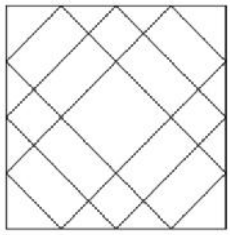
46. На турнир во новиот спорт *метломет* се натпреваруваат 19 екипи и секоја екипа со секоја друга екипа одиграла по еден натпревар. За победа екипата добива 4 бода, а поразената екипа не добива бодови. Во случај на нерешен резултат, секоја од двет екипи добива по еден бод. На турнирот сите екипи освоиле вкупно 600 бодови. Колку натпревари завршиле со победа на едната екипа?

47. Иван од кибритењни чкорчиња составил квадрат со должина 36. Марија ги зела истите тие чкорчиња и направила рамностран триаголник со должина 36. Колку чкорчиња останале неискористени. (На цртежот десно се прикажани квадратот и триаголникот со должина 4 составени од кибритени чкорчиња.)



48. Во квадратот прикажан на цртежот долу десно се нацртани три правоаголника со темиња на страните на квадратот. Колку различни триа-

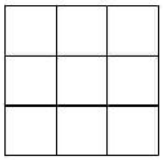
голници и колку различни правоаголници има на дадениот цртеж?



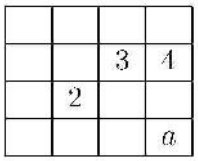
4.3. РАСПОРЕДУВАЊА

49. Подреди во редица две единици, две двојки, две тројки и две четворки, така што меѓу двете единици да има точно една цифра, меѓу двете двојки да има точно две цифри, меѓу двете тројки да има точно три цифри и меѓу двете четворки да има точно четири цифри.

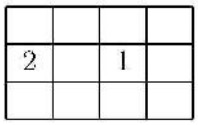
50. Во секое од деветте мали квадратчиња на големиот квадрат е запишан еден од броевите 1, 2 или 3 така, што во секој ред и во секоја колона се среќаваат сите три броја. Во горното лево квадратче е запишан бројот 1. Колку големи квадрати може да се пополнат на овој начин.



51. Броевите 1, 2, 3 и 4 се запишани во единечните квадратчиња на 4×4 квадратот така што во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала нема два еднакви броја (цртеж десно). Кој број е бројот a?

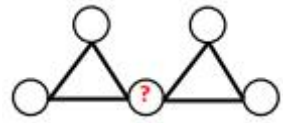


52. Некои квадратчиња во табелата десно се минирани. Секој запишан број го покажува бројот на мините во квадратчињата, соседни на неговото квадратче. (Соседни се квадратчињата кои имаат барем едно заедничко теме, во квадратче со број нема мина.) На колку начини може да се распоредат мините во табелата.

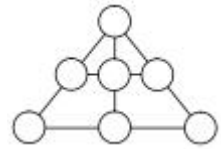


53. Марија ги пополнила полињата во табела 8×8 така, што секој број во првиот ред или првата колона е поголем или еднаков на 1, секој број во вториот ред или втората колона е поголем или еднаков на 2, секој број во третиот ред или третата колона е поголем или еднаков на 3, итн. секој број во осмиот ред или осмата колона е поголем или еднаков на 8. Кој е најмалиот можен збир на броевите кои ги запишала Марија?

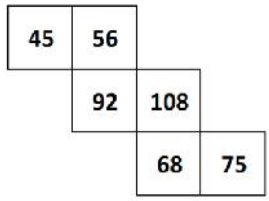
54. Запиши ги броевите 10, 20, 30, 40 и 50 во темињата на двата триаголника така, што збирот на броевите запишани во темињата на секој од триаголниците е еднаков на 100 (цртеж десно). Кој број е запишан на местото на прашалникот?

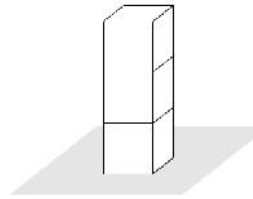


55. Во кругчињата на дијаграмот десно запиши ги сите броеви од 1 до 7 така што збирот на броевите запишани во кругчињата на секоја права ќе биде еднаков на 12.



56. Три еднакви коцки имаат мрежа како на долниот лев цртеж. Коцките се поставени на маса една над друга како на долниот десен цртеж. Колкав е најмалиот можен збир на сите видливи ѕидови на така поставените коцки на масата?





РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

1. АРИТМЕТИКА И АЛГЕБРА

1.1. ПРЕСМЕТУВАЊА ВРЕДНОСТИ НА БРОЈНИ ИЗРАЗИ

1. Запиши ги сите трицифрени броеви со различни цифри, кај кои цифрата на десетките е два пати поголема од цифрата на стотките, а цифрата на единиците е поголема од цифрата на стотките.
Решение. Цифрата на стотките може да биде 1, 2, 3 и 4, а соодветно цифрата на десетките е 2, 4, 6 и 8. Сега лесно се определува цифрата на единиците. Бараните броеви се: 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 243, 245, 246, 247, 248, 249, 364, 365, 367, 368, 369, 485, 486, 487, 489.

2. Пресметај ја вредноста на изразот:
$$(345\cdot 9):5+(147\cdot 9):7.$$
Решение. Имаме:
$$\begin{aligned}(345\cdot 9):5+(147\cdot 9):7&=(345:5)\cdot 9+(147:7)\cdot 9\\&=69\cdot 9+21\cdot 9\\&=(69+21)\cdot 9\\&=90\cdot 9=810.\end{aligned}$$

3. Пресметај:
$$239\cdot 79+97\cdot 239+761\cdot 176.$$
Решение. Имаме
$$\begin{aligned}239\cdot 79+97\cdot 239+761\cdot 176&=239\cdot(79+97)+761\cdot 176\\&=239\cdot 176+761\cdot 176=176\cdot(239+761)\\&=176\cdot 1000=176000.\end{aligned}$$

4. Ако $P=459:3+40\cdot 99-339:3$, а $Q=171-374:34$, определи колку пати бројот P е поголем од бројот Q.
Решение. Имаме
$$\begin{aligned}P&=459:3+40\cdot 99-339:3=(459-339):3+40\cdot 99\\&=120:3+40\cdot 99=40+40\cdot 99=40\cdot 100=4000,\end{aligned}$$

и

$$Q = 171 - 374 : 34 = 171 - 11 = 160 .$$

Значи, $P : Q = 4000 : 160 = 25$, што значи дека P е 25 пати поголем од Q.

5. Нека $a = 100 - (7 \cdot 3 + 9 \cdot 7)$ и $b = 144 : 3 - 2 \cdot 9$. Кој број треба да се додаде на a за да се добие b?

Решение. Имаме

$$a = 100 - (7 \cdot 3 + 9 \cdot 7) = 100 - (21 + 63) = 100 - 84 = 16 ,$$

$$b = 144 : 3 - 2 \cdot 9 = 48 - 18 = 30 .$$

Според тоа, бараниот број е $30 - 16 = 14$.

6. Пресметај го збирот

$$A = 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + ... + 8 + 8 + 9 + 9 + 10 .$$

Решение. *Прв начин*. Вредноста на изразот не се менува ако на истиот додадеме и одземеме 1 и 10. Така добива,е

$$\begin{aligned} A &= A + 1 + 10 - (1 + 10) \\ &= (1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + ... + 8 + 8 + 9 + 9 + 10 + 10) - 11 \\ &= (2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + ... + 2 \cdot 8 + 2 \cdot 9 + 2 \cdot 10) - 11 \\ &= 2(1 + 2 + 3 + 4 + ... + 8 + 9 + 10) - 11 \\ &= 2((1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + 4 + 7) + (5 + 6)) - 11 \\ &= 2(11 + 11 + 11 + 11 + 11) - 11 \\ &= 2 \cdot 55 - 11 = 99. \end{aligned}$$

Втор начин. Со групирање на собирците, слично како во првиот начин, добиваме

$$\begin{aligned} A &= 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + ... + 8 + 8 + 9 + 9 + 10 \\ &= (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) + (2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) \\ &= ((1 + 10) + (2 + 9) + (3 + 8) + 4 + 7) + (5 + 6)) + \\ &\quad + ((2 + 9) + (3 + 8) + 4 + 7) + (5 + 6)) \\ &= (11 + 11 + 11 + 11 + 11) + (11 + 11 + 11 + 11) \\ &= 5 \cdot 11 + 4 \cdot 11 = (5 + 4) \cdot 11 = 9 \cdot 11 = 99. \end{aligned}$$

7. Пресметај ја вредноста на изразот

$$B = A : 2 + A : 3 + A : 4 + A : 5 + A : 6 ,$$

каде $A = 35 \cdot 7 + 37 \cdot 7 + 72 \cdot 3$.

Решение. Имаме

$$A = 35\cdot 7 + 37\cdot 7 + 72\cdot 3 = (35+37)\cdot 7 + 72\cdot 3$$
$$= 72\cdot 7 + 72\cdot 3 = 72\cdot(7+3) = 72\cdot 10 = 720,$$

па затоа

$$B = 720:2 + 720:3 + 720:4 + 720:5 + 720:6$$
$$= 360 + 240 + 180 + 144 + 120 = 1044.$$

8. Ако $a = 123\cdot 45 + 123\cdot 55$, пресметај
$$b = a:2 + a:3 + a:4 + a:5 + a:6\,.$$

Решение. Имаме
$$a = 123\cdot 45 + 123\cdot 55 = 123\cdot(45+55) = 123\cdot 100 = 12300\,.$$

Значи,
$$b = 12300:2 + 12300:3 + 12300:4 + 12300:5 + 12300:6$$
$$= 6150 + 4100 + 3075 + 2460 + 2050$$
$$= 17385.$$

9. Пресметај $A = (63\cdot 56):9$, $B = (2015:15)\cdot 3$ и $C = (71170:5):2$. Колку пати C е поголемо од разликата $B - A$?

Решение. Имаме:
$$A = (63\cdot 56):9 = (63:9)\cdot 56 = 7\cdot 56 = 392,$$
$$B = (2015:15)\cdot 3 = ((2015:5):3)\cdot 3 = 2015:5 = 403,$$
$$C = (71170:5):2 = 71170:10 = 7117.$$

Сега, $B - A = 403 - 392 = 11$ и бројот C е $7117:11 = 647$ пати поголем од разликата $B - A$.

10. Спореди ги броевите a и b ако:
$a = (5005:5-1)\cdot 4 - 4\cdot(2994:3+1)$,
$b = 3\cdot 998 - 3\cdot 997 + 2\cdot 996 - 2\cdot 995 + 4\cdot 994 - 3\cdot 994 - (1001-999)\cdot 497.$

Решение. Имаме
$$a = (5005:5-1)\cdot 4 - 4\cdot(2994:3+1)$$
$$= (1001-1)\cdot 4 - 4\cdot(998+1)$$
$$= (1001-1-998-1)\cdot 4 = 4,$$
$$b = 3\cdot 998 - 3\cdot 997 + 2\cdot 996 - 2\cdot 995 + 4\cdot 994 - 3\cdot 994 - (1001-999)\cdot 497$$
$$= 3\cdot(998-997) + 2\cdot(995-994) + (4-3)\cdot 994 - 2\cdot 497$$
$$= 3\cdot 1 + 2\cdot 1 + 1\cdot 994 - 994 = 5.$$

Според тоа, $b > a$.

11. Ако $a = (918:2 + 918:3):5$ и $b = (49 \cdot 9 - 9 \cdot 46) \cdot 5$, спореди ги броевите $c = (a+b):2$ и $d = b + (a-b):2$.

Решение. Имаме

$$a = (918:2 + 918:3):5 = (459306):5 = 765:5 = 153 \text{ и}$$

$$b = (49 \cdot 9 - 9 \cdot 46) \cdot 5 = ((49-46) \cdot 9) \cdot 5 = 3 \cdot 9 \cdot 5 = 135 .$$

Затоа $c = (153+135):2 = 144$ и $d = 135 + (153-135):2 = 144$, т.е. $c = d$.

Забелешка. Ако a и b се било кои броеви, тогаш имаме

$$d = b + (a-b):2 = (2b):2 + (a-b):2 = (2b + a - b):2 = (a+b):2 = c .$$

12. Пресметај ја разликата ако намаленикот е производот на броевите 1637 и 5, а намалителот е количникот на броевите 1566 и 9.

Решение. Имаме: $1637 \cdot 5 = 8185$ и $1566:9 = 174$, па добиваме

$$1637 \cdot 5 - 1566:9 = 8185 - 174 = 8011 .$$

13. Да се пресмета збирот на 100-те броја, кои се среќаваат како производи во таблицата за множење на броевите од 1 до 10.

Решение. Бараниот збир е

$$\begin{aligned} &1 \cdot (1+2+...+10) + 2 \cdot (1+2+...+10) + ... + 10 \cdot (1+2+...+10) = \\ &= (1+2+...+10) \cdot (1+2+...+10) \\ &= 55 \cdot 55 = 3025. \end{aligned}$$

14. Ако $a \odot b = a(a+b)$, пресметај ја вредноста на изразот

$$(5 \odot 3) + (5 \odot 7) .$$

Решение. Имаме

$$(5 \odot 3) + (5 \odot 7) = 5 \cdot (5+3) + 5 \cdot (5+7) = 5 \cdot 8 + 5 \cdot 12 = 40 + 60 = 100 .$$

15. Определи ја вредноста на изразот $(5 \otimes 7) \otimes 11$, ако $a \otimes b = a + ab + b$.

Решение. Имаме:

$$5 \otimes 7 = 5 + 5 \cdot 7 + 7 = 47 \text{ и } 47 \otimes 11 = 47 + 47 \cdot 11 + 11 = 47 + 517 + 11 = 575 .$$

16. Стави ги потребните загради така, што ќе се добијат точни равенства:

а) $36:6 + 3 \cdot 2 = 3$,

б) $36:6 + 3 \cdot 2 = 8$,

в) $36:6 + 3 \cdot 2 = 18$.

Решение. а) Имаме: $36:(6+3\cdot 2)=36:12=3$.

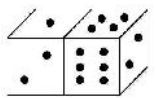
б) Имаме: $(36:(6+3))\cdot 2=(36:9)\cdot 2=4\cdot 2=8$.

в) Имаме: $(36:6+3)\cdot 2=(6+3)\cdot 2=9\cdot 2=18$.

17. Меѓу некои од цифрите на бројот 2022 стави знаци на аритметичките операции, а по потреба и загради, така да вредноста на добиениот израз да биде:
а) 1, б) 2, в) 3, г) 4, д) 5.
Решение. Задачата има повеќе решенија. Некои од можните решенија се:

$$2\cdot 0+2:2=(2+0\cdot 2):2=1,$$
$$(2+0+2):2=2+0\cdot 2\cdot 2=2,$$
$$2+0+2:2=(2+0):2+2=3,$$
$$2\cdot 0+2\cdot 2=2+0\cdot 2+2=4,$$
$$20:(2+2)=(20:2):2=5.$$

18. Определи го збирот на точките кои се наоѓаат на невидливите ѕидови на двете коцки за играње прикажани на цртежот десно.



Решение. На една коцка за играње имаме $1+2+3+4+5+6=3\cdot 7=21$ точка. Значи, на двете коцки имаме $2\cdot 21=42$ точки. На цртежот се гледаат $1+2+2+4+6=15$ точки. Значи, збирот на точките кои се на невидливите ѕидови на двете коцки е еднаков на $42-15=27$.

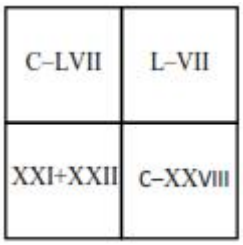
19. Во изразот $(20a+13b)c$ на местото на буквите a,b и c во некој редослед се запишани броевите 7, 8 и 9. Која е најголемата можна вредност на овој израз.
Решение. Најголемата можна вредност се добива за $a=8, b=7$ и $c=9$. Притоа имаме

$$(20\cdot 8+13\cdot 7)\cdot 9=2259.$$

20. Запиши ги броевите помали од 100 кои се запишуваат со точно две римски цифри.
Решение. Бараните броеви се:

II, IV, VI, IX, XI, XV, XX, XL, LI, LV, LX, XC.

21. Даденият квадрат на цртежот десно е поделен на четири помали квадрати. Заштрафирани се оние помали квадрат, во кои операциите со броевите, запишани со римски цифри, даваат резултат XLIII. Како изгледа новодобиениот квадрат?



Решение. Имаме

$$C - LVII = XLIII, \qquad 100 - 57 = 43,$$
$$L - VII = XLIII, \qquad 50 - 7 = 53,$$
$$XXI + XXII = XLIII, \qquad 21 + 22 = 43,$$
$$C - XXVIII = LXXII \qquad 100 - 28 = 72.$$

Новодобиениот квадрат е прикажан на цртежот десно.

1.2. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА

22. Пресметај $A = x + y + z$, ако

$$21496 - x = 8504,\ y - 2356 = 24356 \text{ и } z + 712 = 1720 - 712.$$

Решение. Имаме

$21496 - x = 8504,$ $y - 2356 = 24356,$ $z + 712 = 1720 - 712,$

$x = 21496 - 8504,$ $y = 24356 + 2356,$ $z = 1008 - 712,$

$x = 12992,$ $y = 26712,$ $z = 296.$

Според тоа,

$$A = 12992 + 26712 + 296 = 40000.$$

23. Нека $a + b = 458$. Определи ја вредноста на непознатата x:

а) $(a + x) + b = 558$,

б) $a + (b - x) = 400$,

в) $(a + x) + (b + x) = 528$.

Решение. а) Бидејќи збирот е поголем за $558 - 458 = 100$, добиваме дека првиот собирок е поголем за 100, па затоа $x = 100$.

б) Бидејќи збирот е намален за $458 - 400 = 58$, добиваме дека вториот собирок е намален за 58, па затоа $x = 58$.

в) Бидејќи збирот е зголемен за $528 - 458 = 70$, а секој од собирците е зголемен за ист број, заклучуваме дека $x = 70 : 2 = 35$.

24. Реши ја равенката

$$(x:5-3):16=25\,.$$

Решение. Последователно добиваме

$$\begin{aligned}&(x:5-3):16=25,\\&x:5-3=16\cdot 25,\\&x:5-3=400,\\&x:5=403,\\&x=403\cdot 5,\\&x-2015.\end{aligned}$$

25. Реши ја равенката

$$35+5\cdot(132-1331:x)=640\,.$$

Решение. Последователно добиваме

$$\begin{aligned}&35+5\cdot(132-1331:x)=640,\\&5\cdot(132-1331:x)=640-35,\\&5\cdot(132-1331:x)=605,\\&132-1331:x=605:5,\\&132-1331:x=121,\\&1331:x=132-121,\\&1331:x=11,\\&x=1331:11,\\&x=21.\end{aligned}$$

26. Спореди ја вредноста на изразот

$$(812:4)\cdot 7+(7865-1225):8-2119$$

со решението на равенката

$$4059:9+56x=459\,.$$

Решение. За вредноста на даденият израз имаме

$$\begin{aligned}a&=(812:4)\cdot 7+(7865-1225):8-2119\\&=203\cdot 7+5640:8-2119\\&=1421+705-2119\\&=2126-2119=7.\end{aligned}$$

Од равенката последователно добиваме

$$\begin{aligned}&4059:9+56:x=459,\\&451+56:x=459,\end{aligned}$$

$$56 : x = 8,$$
$$x = 7.$$

Според тоа, вредноста на изразот е еднаква на решението на равенката.

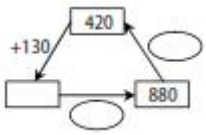
27. Реши ја равенката

$$(4274 \cdot 8 - 3163 \cdot 8) : x = (576 : 9) : 8.$$

Решение. Имаме

$$(4274 \cdot 8 - 3163 \cdot 8) : x = (576 : 9) : 8,$$
$$((4274 - 3163) \cdot 8) : x = 64 : 8,$$
$$(1111 \cdot 8) : x = 8,$$
$$x = (1111 \cdot 8) : 8,$$
$$x = 1111.$$

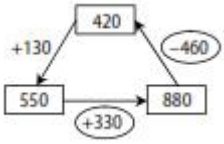
28. Во шемата прикажана на цртежот запиши ги соодветните броеви и операции така што пресметувањата ќе бидат точни.



Решение. Во празното квадратче треба да го запишеме бројот $420 + 130 = 550$. Другите два броја ги добиваме од равенствата:

$$550 + 330 = 800,$$
$$880 - 460 = 420.$$

Пополнетата шема е прикажана на цртежот десно.



29. Марија измислила нова операција за која го користи знакот $\otimes$. Операцијата е дефинирана со помош на познатите операции собирање и множење и тоа:

$$a \otimes b = ab + 3a + b.$$

Колку е x ако

$$(x \otimes 5) \otimes 6 = 72123.$$

Решение. *Прв начин*. Последователно добиваме

$$(x \otimes 5) \otimes 6 = 72123,$$
$$(5x + 3x + 5) \otimes 6 = 72123,$$
$$(8x + 5) \otimes 6 = 72123,$$
$$6(8x + 5) + 3(8x + 5) + 6 = 72123,$$
$$48x + 30 + 24x + 15 + 6 = 72123,$$

$$72x + 51 = 72123,$$
$$72x = 72072,$$
$$x = 1001.$$

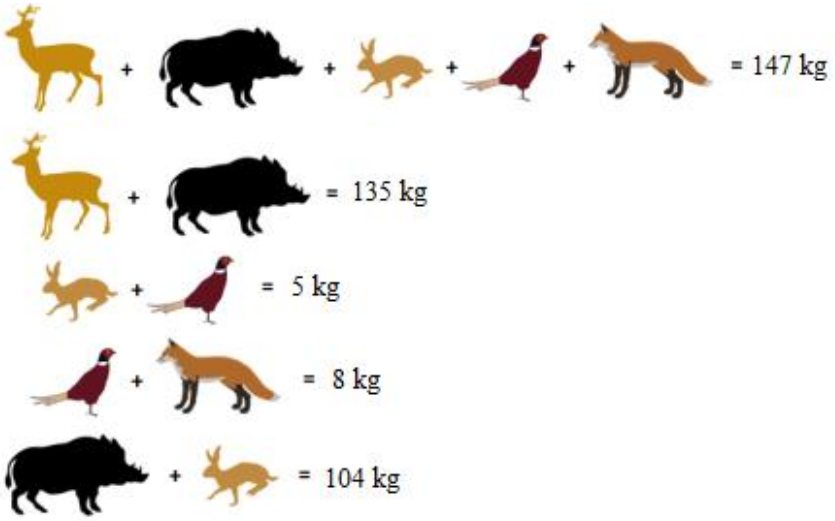
Втор начин. Да ставиме $y = x \otimes 5$. Имаме $y \otimes 6 = 72123$, од каде добиваме $6y + 3y + 6 = 72123$, односно $9y + 6 = 72123$, т.е. $y = 8013$. Сега, $x \otimes 5 = 8013$, т.е. $5x + 3x + 5 = 8013$, од каде следува $8x = 8008$, односно $x = 1001$.

30. Разликата на два броја е 600, а ако поголемиот број го поделиме со помалиот се добива количник 3 и остаток 2. Кои се тие броеви?
Решение. Ако помалиот број е a, тогаш поголемиот број е $3a + 2$. Затоа $3a + 2 - a = 600$, од каде добиваме $a = 299$. Значи, помалиот број е 299, а поголемиот број е $299 + 600 = 899$.

31. Кога Горјан го отворил учебникот по математика, производот на броевите со кои биле нумерирани отворените страници бил 3422. Кој е бројот со кој е нумерирана десната страна?
Решение. Цифрата на единиците на производот на двата броја е еднаква на цифрата на единиците која се добива со множење на цифрите на единиците, па затоа цифрите на единиците се 1 и 2, или 6 и 7, или 8 и 9. Понатаму, бидејќи $56 \cdot 57 = 3192 < 3422 < 3782 = 61 \cdot 62$ заклучуваме дека двата последователни броја со кои се нумерирани отворените страници се 58 и 59. Конечно, десната отворена страна е нумерирана со бројот 59.

32. За еден број ќе велиме дека е „растечки“ ако секоја негова цифра (освен првата) гледано од лево на десно, е за еден поголема од претходната. Определи го „растечкиот“ број чија третина е природен број поголем од 1500 и помал од 2300.
Решение. Нека бараниот број е x. Бидејќи третината од бројот е поголема од 1500 и е помала од 2300, добиваме дека $4500 < x < 6900$. Бидејќи бројот е растечки тоа може да е еден од броевите 4567, 5678 и 6789. Третина од бројот x е природен број, па затоа бројот x е делив со 3. Имаме, $4567 = 3 \cdot 1522 + 1$, $5678 = 3 \cdot 1892 + 2$ и $6789 = 3 \cdot 2263$, па затоа $x = 6789$.

33. Ако



колкава е масата на одделните животни? Пресметај го збирот на килограми

Решение. Со e да ја означиме масата на еленот, со s масата на свињата, со z масата на зајакот, со p масата на птицата (фазанот) и со l масата на лисицата. Тогаш системот равенки го добива видот:

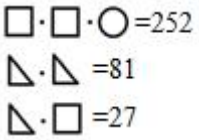
$$\begin{cases} e+s+z+p+l=147, \\ e+s=135, \\ z+p=5, \\ p+l=8, \\ s+z=104. \end{cases}$$

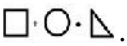
Ако од втората и третата равенка замениме во првата добиваме $135+5+l=147$, од каде наоѓаме $l=147-135-5=7\ kg$. Ако од четвртата и петтата равенка замениме во првата добиваме $e+104+8=147$, од каде наоѓаме $e=147-104-8=35\ kg$. Сега, заменуваме во првата равенка и добиваме $35+s+5+7=147$, од каде следува $s=100\ kg$. Понатаму, $100+z=104$, односно $z=4\ kg$ и $4+p=5$, односно $p=1\ kg$.

Лисицата има $7\ kg$, еленот $35\ kg$, свињата 100, зајакот $4\ kg$ и фазанот $1\ kg$. Конечно, $e+z+l=35+4+7=46\ kg$, што значи дека лиси-

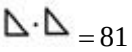
цата, зајакот и еленот заедно имаат $46\ kg$.

34. Точни се равенствата

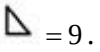


Пресметај:  .

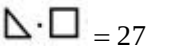
Решение. Од



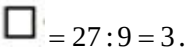
следува



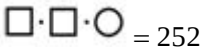
Од



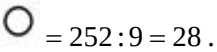
следува



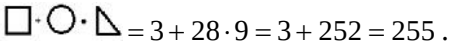
Од



следува



Според тоа,



1.3. БРОЈНИ РЕБУСИ

35. Во збирот

$$M + A + T + E + M + A + T + И + K + A$$

на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви различни цифри. Определи ги цифрите така, што збирот ќа биде најмал можен.

Решение. Во дадениот збир буквата *A* се јавува 3 пати, буквите *M* и *T* се јавуваат по 2 пати, а буквите *E*, *И*, *K* се јавуваат по еднаш. Збирот

ќе биде најмал можен ако цифрата која се јавува најмногу пати е најмала можна итн. Според тоа: $A=0$, $M=1, T=2$ (или $T=1, M=2$), $E=3, И=4, K=5$ (или било која комбинација на буквите $E, И, K$ и цифрите). Значи, најмалиот можен збир е

$$1+0+2+3+1+0+2+4+5+0=18.$$

36. Реши го бројниот ребус

$$\overline{AB}+\overline{ABC}+\overline{ABCD}=3000$$

во кој на исти цифри соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Цифрата A не може да е 1, а не може да е поголема од 2, па затоа $A=2$. Значи, $\overline{2B}+\overline{2BC}+\overline{2BCD}=3000$, од каде добиваме $B+\overline{BC}+\overline{BCD}=780$. Понатаму, цифрата B не може да 6, а не може да е и поголема од 7, па затоа $B=7$. Сега имаме $7+\overline{7C}+\overline{7CD}=780$, од каде следува $C+\overline{CD}=3$, па затоа $C=0$ и $D=3$. Значи, бараното собирање е

$$2+27+270+2703=3000.$$

37. Определи ја најмалата можна вредност на збирот на четирите двоцифрени броеви:

$$\overline{TA}+\overline{TA}+\overline{MA}+\overline{TA},$$

ако на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри. За најдените цифри определи ја вредноста на збирот $M+A+T$.

Решение. Цифрите на десетките во четирите броја треба да бидат ненулти и најмали можни. Бидејќи T се јавува три пати, а M се јавува еднаш потребно е цифрата T да е најмалата можна. Значи $T=1$ и $M=2$. Сега, A треба да е најмалата можна од неупотребените цифри, па затоа $A=0$. Конечно, бараната најмала вредност е $10+10+20+10=50$ и $M+A+T=2+0+1=3$.

38. Определи ја најголемата можна вредност на збирот на четирите двоцифрени броеви:

$$\overline{BU}+\overline{BA}+\overline{MA}+\overline{RA},$$

ако на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

Решение. Цифрите на десетките мора да се најголемите можни

цифри, па како B се јавува два пати треба да е $B=9$ и $M=8, R=7$ (или $M=7, R=8$). Понатаму, бидејќи A се јавува три пати, а U само еднаш од преостанатите цифри A треба да е најголемата можна, т.е. $A=6$, а потоа $U=5$. Значи, бараниот најголем збир е

$$\overline{BU}+\overline{BA}+\overline{MA}+\overline{RA}=95+96+86+76=353.$$

39. Во собирањето

$$\overline{KA}+\overline{LA}+\overline{MI}=\overline{TI}$$

на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви различни цифри. Определи ја најголемата можна вредност на збирот и во тој случај најди барем едно решение на бројниот ребус.

Решение. Бидејќи $\overline{TI}$ е двоцифрен број запишан со различни цифри, најголемата можна вредност на збирот е 98. Сега имаме:

$$\overline{KA}+\overline{LA}+\overline{M8}=98,$$

па некои од можните решенија се:

$$45+15+38=98,\ 45+35+18=98,\ 50+30+18=98,\ 60+20+18=98.$$

40. Во долните равенства на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$\overline{AB}+\overline{VA}=\overline{GA}\ \text{ и }\ \overline{AB}-\overline{VA}=A.$$

Која цифра соодветствува на буквата G.

Решение. Од збирот на единиците во равенството $\overline{AB}+\overline{VA}=\overline{GA}$ следува дека $B=0$. Тогаш од разликата на единиците во равенството $\overline{AB}-\overline{VA}=A$ следува дека $A=5$. Добиваме $50-\overline{V5}=5$, па затоа $V=4$. Конечно, од $5045=\overline{G5}$ следува $G=9$.

41. Цифрите A,B,C,D се ненултри и такви што

$$\overline{ABCD}+\overline{BCD}+\overline{CD}+D=2014.$$

Определи го бројот $\overline{ABCD}$.

Решение. Даденото равенство последователно е еквивалентно со равенствата

$$1000A+100B+10C+D+100B+10C+D+10C+D+D=2014,$$

$$1000A+200B+30C+4D=2014.$$

Сега, од цифрите на единиците следува $D=1$ или $D=6$.

Ако $D=1$, тогаш $100A+20B+3C=201$, од каде следува $C=7$, па за-

тоа $10A+2B=18$, т.е. $B=4$ и $A=1$. Значи, $\overline{ABCD}=1471$.

Ако $D=6$, тогаш $100A+20B+3C=199$, од каде добиваме $C=3$, па затоа $10A+2B=19$,што не е можно, бидејќи левата страна е парен број, а десната е непарен број.

Конечно, единствено решение е $\overline{ABCD}=1471$

42. Определи го најмалиот трицифрен број $\overline{ABC}$ за кој важи равенството

$$\overline{ABC}=\overline{AA}+\overline{BB}+\overline{CC}\,.$$

Решение. *Прв начин*. Имаме:

$$\overline{ABC}=11(A+B+C)\,. \qquad (1)$$

За бројот $\overline{ABC}$ да е трицифрен треба да важи $A+B+C\geq 10$. Производите

$$11\cdot 11=121,\ 11\cdot 12=132,\ 11\cdot 13=143,\ 11\cdot 14=154,$$
$$11\cdot 15=165,\ 11\cdot 16=176 \text{ и } 11\cdot 1187$$

не го задоволуваат равенството (1), но $11\cdot 18=198$ го задоволува условот (1). Значи, бараниот број е $\overline{ABC}=198$.

Втор начин. Условот на задачата е еквивалентен на равенството

$$100A+10B+C=11A+11B+11C\,,$$

т.е. на равенството $89A=B+10C$. Но, A,B и C се цифри и како бројот треба да е трицифрен следува $A\geq 1$. Според тоа,

$$89\leq 89A=B+10C\leq 99\,,$$

па затоа $A=1$. Сега $B+10C=89$ и како B и C се цифри, добиваме $C=8$ и $B=9$. Конечно, бараниот број е $\overline{ABC}=198$.

Забелешка. Од вториот начин на решавање е јасно дека условот бројт $\overline{ABC}$ да е најмал е непотребен, бидејќи тој е единствен. Но, овој услов е потребем за да се добие решението при првиот начин на решавање.

43. Од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 се составени два петцифрени броја. Која е најмалата можна разлика на овие броеви?

Решение. Најмалата разлика на два такви броја се добива ако цифрите на десетилајдите a и b се два последователни цифри, а разликата на броевите $\overline{1cdef}-\overline{ghij}$, каде c,d,e,f,g,h,i,j се преостанатите осум цифри е најмала. Според тоа, $\overline{1cdef}$ треба да е најмалиот можен број, а $\overline{ghij}$ треба да е најголемиот можен број. Значи, $\overline{1cdef}=10123$ и

$\overline{ghij} = 9876$, односно $c = 0, d = 1, e = 2, f = 3, g = 9, h = 8, i = 7, j = 6$. Сега, $a = 5$ и $b = 4$, па бараната раслика е $50123 - 49876 = 247$.

44. Во ребусот прикажан десно на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букци различни цифри. Определи го производот $\text{Е} \cdot \text{Л} \cdot \text{А}$.

			А
−		А	Е
	А	Е	Е
	Е	Л	А

Решение. Од збирот на единиците следува дека $\text{А} + 2\text{Е}$ завршува на цифрата А. Според тоа, 2Е завршува на 0. Затоа Е е или 0 или 5. Но, Е не може да е 0, бидејќи е прва цифра на бројот $\overline{\text{ЕЛА}}$. Значи, Е е 5 и има пренос 1 кон десетките.

Бидејќи Е е 5, од збирот на стотките следува дека А е 4. Тогаш збирот на десетките е $1 + 5 + 4 = 10$, па затоа Л е 0. Конечно, бараниот производ е $\text{Е} \cdot \text{Л} \cdot \text{А} = 5 \cdot 0 \cdot 4 = 0$.

45. Разликата на два броја е 2014. Цифрата на единиците на едниот број е 7, а ако ја избришеме се добива другиот број, Кои се тие броеви?

Решение. *Прв начин*. Намаленикот е четирицифрениот број $\overline{ABC7}$, а намалителот е трицифрениот број $\overline{ABC}$. Од разликата на единиците добиваме $C = 3$, потоа од разликата на десетките добиваме $B = 2$ и на крајот од разликата на стотките добиваме $A = 2$. Значи, броевите се 2237 и 223.

	A	B	C	7
−		A	B	C
	2	0	1	4

Втор начин. Намаленикот е четирицифрениот број $\overline{ABC7}$, а намалителот е трицифрениот број $\overline{ABC}$. Имаме, $\overline{ABC7} - \overline{ABC} = 2014$, од каде добиваме $10 \cdot \overline{ABC} + 7 - \overline{ABC} = 2014$, т.е. $9 \cdot \overline{ABC} = 2007$, па затоа $\overline{ABC} = 223$. Значи, бараните броеви се 2237 и 223.

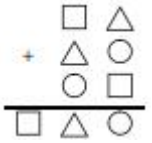
46. Реши го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

	У	Х	А
+	Х	Л	Л
1	У	7	Л
2	0	1	4

Решение. Од збирот на едниците следува дека производот 3А завршува на 4, па затоа $\text{А} = 8$. Значи, имаме пренос 2 кон десетките и збирот на десетките е $2 + \text{Х} + 8 + 7 = 17 + \text{Х}$ и завршува на 1. Според тоа, $\text{Х} = 4$ и имаме пренос 2 кон стотките. Збирот на стотките е $2 + \text{У} + \text{У} + 4 = 10$, од каде

добиваме $У = 2$. Конечно, решението на дадениот броен ребус е $248 + 488 + 1278 = 2014$.

47. Реши го бројниот ребус во кој на исти фигури соодветствуваат исти цифри, а на различни фигури соодветствуваат различни цифри.

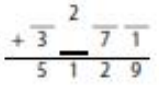


Решение. Од збирот на единиците следува $\triangle + \square = 10$, а од збирот на цифрите на десетките следува дека $\square + \bigcirc + 1 = 10$. Збирот на три двоцифрени броеви е помал од 300, па затоа под квадратчето мора да е една од цифрите 1 и 2.

Ако под квадратот е 2, тогаш $\triangle + 2 = 10$ и $2 + \bigcirc + 1 = 10$, па $\triangle = 8$ и $\bigcirc = 7$. Но тогаш $28 + 87 + 72 = 187 \neq 287$.

Ако под квадратот е 1, тогаш $\triangle + 1 = 10$ и $1 + \bigcirc + 1 = 10$, па $\triangle = 9$ и $\bigcirc = 8$, при што $19 + 98 + 81 = 198$ и тоа е решението на бројниот ребус.

48. На цртичките запиши ги соодветните цифри така што собирањето ќе биде точно.



Решение. Од збирот на цифрите на единиците добиваме во првиот собирок цифрата на единиците е $9 - 1 = 8$. Понатаму, при собирањето на десетките за да во збирот се добие цифрата 2 единствена можност е цифрата на десетките на првиот собирок да е 5. Сега, бидејќи од збирот на десетките имаме пренос 1, за да цифрата на стотките на збирот е еднаква на 1, мора да е цифрата на стотките на првиот собирок еднаква на 8. Конечно, бидејќи при собирањето на стотките имаме пренос 1, за да цифрата на илјадитите на збирот е 5, мора да е цифрата на илјадитите на првиот собирок еднаква на 1. Конечно, бараното собирање е:

$$\begin{array}{r} 1258 \\ +3871 \\ \hline 5129 \end{array}$$

49. Реши го бројниот ребус во кој на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$\overline{BAR} - \overline{KEC} = \overline{MIS}.$$

Решение. Во даденото одземање имаме девет различни букви, што значи дека се уотребени девет различни цифри. Даденото равенство го

запишуваме во видот

$$\overline{BAR} = \overline{MIS} + \overline{KEC}\,.$$

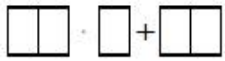
Последниот ребус има повеќе решенија. Некои од нив се:

$$873 = 654 + 219,$$
$$890 = 314 + 576,$$
$$486 = 359 + 127.$$

50. Во петте квадратчиња запиши ги сите цифри 1, 2, 3, 4 и 5 така што ќе добиеш точно равенство.

Решение. Во множителите цифрата 5 не може да е цифра на единиците, бидејќи тогаш цифрата на единиците на производот ќе биде 0 или 5, а немаме цифра 0 и немаме две цифри 5. Исто така цифрата 5 не може да е цифра на десетките на првиот множител, како и цифра на единиците на производот. Значи цифрата 5 е цифра на десетките на производот. Јасно, цифрата 1 не може да се цифра на единиците на ниту еден множител, а ниту на производот, што значи дека е цифра на десетките на двоцифрениот множител. Сега, лесно се добива дека $13 \cdot 4 = 52$.

51. Кога во празните полињата



ќе се запишат цифрите 2, 3, 4, 5 и 6 се добива израз во кој на производот на двоцифрен со едноцифрен број му се додава двоцифрен број. Во полињата запиши ги дадените цифри така што вредноста на изразот ќе биде

а) најголема можна,

б) најмала можна.

Рашение. а) Најголемата можна вредност се добива кога едноцифрениот множител е најголем, т.е. 6, цифрата на десетките на двоцифрениот множител е најголемата можна цифра, т.е. 5, а бидејќи $6 \cdot 4 < 40$, цифрата на единиците на двоцифрениот множител е 3, па изразот е: $53 \cdot 6 + 42 = 360$.

б) Најмалата можна вредност се добива кога едноцифрениот множител е најмал можен, т.е. 2, цифрата на десетките на двоцифрениот множител е најмала можна, т.е. 3. Јасно, цифрата на десетките на двоцифрениот собирок мора да е 4, па со непосредна проверка се

добива дека најмалата вредност на изразот е: $35 \cdot 2 + 46 = 116$.

52. Кој е најголемиот број собироци во бројниот рбус

$$\overline{ШУМ} + \overline{ШУМ} + ... + \overline{ШУМ} = \overline{БУМ} ,$$

во кој на еднакви бунви соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви различни цифри.

Решение. Зборот $\overline{БУМ}$ е трицифрен. Од друга страна збирот на повеќе од 9 собироци $\overline{ШУМ}$ е четирицифрен број. Значи, бројот на собироците е помал или еднаков на 9.

Ако имаме 9 собироци, тогаш $9 \cdot \overline{ШУМ}$ е трицифрен број, па затоа $\overline{ШУМ}$ е најмногу 111. Лесно се проверува дека равенството $9 \cdot \overline{ШУМ} = \overline{БУМ}$ не е можно.

Ако имаме 8 собироци, тогаш $\overline{ШУМ}$ е најмногу 124. Понатаму, од $8 \cdot \overline{ШУМ} = \overline{БУМ}$ следува дека производот $8М$ завршува на $М$, а тоа е можно само за $М = 0$. Но, тогаш $8У$ завршува на $У$, па затоа $У = 0$, што е противречност.

Ако имаме 7 собироци, тогаш $\overline{ШУМ}$ е најмногу 142. Понатаму, од $7 \cdot \overline{ШУМ} = \overline{БУМ}$ следува дека производот $7М$ завршува на $М$, па затоа $М = 0$ или $М = 5$. Ако $М = 0$, тогаш $7У$ завршува на $У$, па затоа $У = 5$ и $\overline{ШУМ} \geq 150$, што е противречност. Ако $М = 5$, тогаш $7У + 3$ треба да завршува на $У$,што не е можно (Порвери!).

Според тоа, бројот на собирците е најмногу 6. Тоа е можно во случаите кога $\overline{ШУМ}$ е една од броевите 120, 140 или 160.

1.4. ДЕЛИВОСТ

53. Која е првата цифра на најмалиот природен број чиј збир на цифри е еднаков на 2011?

Решение. Најмал природен број чиј збир на цифри е 2011 е бројот кој е запишан со најмалку цифри, при што првата цифра е најмалата можна цифра. Затоа треба максимално можно да се искористи најголемата цифра, а тоа е цифрата 9. Имаме, $2011 = 223 \cdot 9 + 4$, па затоа најмалиот број чиј збир на цифри е 2011 е запишан со 224 цифри, од кои 223 се еднакви на цифрата 9 и првата цифра е 4.

54. Лента долга $20\,m$ е обоена на следниов начин: првиот сантиметар е обоен во зелено, вториот во портокалово, третиот во жолто, четвртиот во сино, петтиот во црвено, шестиот во сиво, седмиот во зелено, осмиот во портокалово итн. по ред. Во која боја е обоен крајот на лентата?

Решение. Должината на лентата е $20\,m = 20 \cdot 100\,cm = 2000\,cm$. Имаме шест бои во кои се бои лентата, при што редоследот на боите се запазува. Бидејќи $2000 = 6 \cdot 333 + 2$, добиваме дека крајот на лентата е обоен во втората боја, односно во портокалово.

55. За два природни броја е познато дека едниот е за 120 поголем од другиот и дека кога нивниот збир се дели со нивната разлика се добива колични 5 и остаток 24. Кои се тие броеви?

Решение. Бидејќи едниот број е за 120 поголем од другиот, разликата на двата броја е 120. Значи, збирот на двата броја е $120 \cdot 5 + 24 = 624$. Тогаш поголемиот број е $(624 + 120) : 2 = 372$, а помалиот број е $372 - 120 = 252$.

56. Определи ги сите природни броеви од втората стотка, кои се 13 пати поголеми од збирот на своите цифри.

Решение. Збирот на цифрите на секој природен број е природен број. Бидејќи бројот е 13 пати поголем од збирот на своите цифри, тој е делив со 13, односно е содржател на бројот 13.

Бидејќи $100 = 7 \cdot 13 + 9$, во втората стока најмалиот содржател на бројот 13 е бројот $100 + 4 = 104$. Секој следен содржател на бројот 13 се добива кога на последниот најден содржател му се додаде бројот 13. Значи, во втората стотка содржатели на бројот 13 се 104, 117, 130, 143, 156, 169, 182 и 195.

Имаме:

$$13 \cdot (1 + 0 + 4) = 13 \cdot 5 = 65 \neq 104,$$
$$13 \cdot (1 + 1 + 7) = 13 \cdot 9 = 117,$$
$$13 \cdot (1 + 3 + 0) = 13 \cdot 4 = 52 \neq 130,$$
$$13 \cdot (1 + 4 + 3) = 13 \cdot 8 = 104 \neq 143,$$
$$13 \cdot (1 + 5 + 6) = 13 \cdot 12 = 156,$$
$$13 \cdot (1 + 6 + 9) = 13 \cdot 16 = 208 \neq 169,$$
$$13 \cdot (1 + 8 + 2) = 13 \cdot 11 = 143 \neq 183,$$
$$13 \cdot (1 + 9 + 5) = 13 \cdot 15 = 195,$$

што значи дека бараните броеви се 117, 156 и 195.

57. Определи ги сите природни броеви кои при делење со 7 даваат количник еднаков на остатокот.
Решение. Ако количникот и остатокот на делење на бројот со 7 се еднакви, тогаш количникот е $7x$ и остатокот е $x, 0 \le x \le 6$. Значи, бараните броеви се $7x + x = 8x, 0 \le x \le 6$, т.е. 0, 8, 16, 24, 32, 40 и 48, па како 0 не е природен број, тоа се броевите 8, 16, 24, 32, 40 и 48.

58. На куќата на Матео стои непарен трицифрен број. Цифрата на десетките е два пати поголема од цифрата на единиците, Цифрата на стотките е еднаква на збирот на цифрите на десетките и единиците. Определи ги сите можности за бројот на куќата на Матео, ако се знае дека тој број е делив со 9.
Решение. Бројот на куќата на Матео е непарен, па затоа цифрата на единиците е 1, 3, 5, 7 или 9. Цифрата на десетките е два пати поголема од цифрата на единиците, па затоа имаме две можности:
- цифрата на единиците е 1, што значи дека цифрата на десетките е 2, па затоа на стотките е 3, т.е. бројот е 321,
- цифрата на единиците е 3, што значи дека цифрата на десетките е 6, па затоа на стотките е 9, т.е. бројот е 963.

Ако цифрата на единиците е 5, 7 или 9, тогаш цифрата на десетките треба да е 10, 14 или 18, што не е можно.
Но, бројот на куќата на Матео е делив со 9, а како $321 = 9 \cdot 35 + 6$ и $963 = 9 \cdot 107$, заклучуваме дека бројот на куќата на Матео е 963.

59. На прашањетоколку јаболки има во кошот, дедо Марко одговорил: „Ако ги бројам по две, или по три, или по четири, или по пет, или по шест, секогаш ми преостанува една јаболко. Ако ги бројам по седум не ми останува ниту една јаболко.“ Определи го најмалиот број јаболки кој може да е во кошот.
Решение. Бројот на јаболките во кошот може да се подели без остаток со 7, а при делењето со 2, 3, 4, 5, и 6 дава остаток 1. Тоа значи дека ако од кошот земеме едно јаболко, тогаш бројот на преостанатите јаболки е делив со 2, 3, 4, 5 и 6.
Ако еден број без остаток се дели со 4, тогаш без остаток се дел и со 2.
Ако еден број без остаток се дели со 3 и 4, тој без остаток се дели со 12.
Ако еден број без остаток се дели со 12, тогаш без остаток се дели со 6.

Ако еден број без остаток е делив со 5 и 12, тој без остаток е делив со 60. Значи, бројот на јаболката намален за 1 може да е некој од броевите: 60, 120, 180, 240, 300, 360, 420, 480, ... Според тоа, бројот на јаболката е некој од броевите: 61, 121, 1801, 241, 301, 361, 421, ... и овој број е делив со 7. Имаме:

$$61 = 7 \cdot 8 + 5,$$
$$121 = 7 \cdot 17 + 2,$$
$$181 = 7 \cdot 25 + 6,$$
$$241 = 7 \cdot 34 + 3,$$
$$301 = 7 \cdot 43,$$

што значи дека најмалиот можен број јаболки во кошот е 301.

1.5. МАГИЧНИ КВАДРАТИ

60. Дополни го квадратот на цртежот десно така што тој ќе биде магичен.

	14	
8	21	

Решение. Третото поле во третиот ред е заедничко за третиот ред и едната дијагонала, па затоа во првото поле на првиот ред ќе биде бројот $8 + 21 - 14 = 15$. Понатаму, второто поле во првиот ред е заедничко за првиот ред и втората колона, па затоа во третото пое на првиот ред ќе биде бројот $21 + 14 - 15 = 20$. Сега, од втората дијагонала добиваме дека збирот на броевите во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала ќе биде $8 + 14 + 20 = 42$. Понатаму, лесно се пополнува целиот квадрат, кој е прикажан на цртежот десно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

15	**7**	**20**
19	14	**9**
8	21	**13**

61. Дополни го квадратот на цртежот десно така што тој ќе биде магичен.

112	116	
119		

Решение. Првото поле во првиот ред е заедничко за првата колона и дијагоналата, па затоа во третото поле на третиот ред е бројот $112 + 119 - 116 = 115$. Понатаму, третото поле во вториот ред е заедничко за третата колона и вториот ред, па затоа во третото поле во првиот ред е бројот $112 + 116 - 115 = 113$.

Значи, збирот на броевите во секој ред, секоја колона и на секоја

дијагонала е еднаков на $119+116+113=348$. Сега лесно се пополнуваат броевите во празните полиња. Решението е дадено на цртежот десно. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

117	**118**	**113**
112	116	**120**
119	**114**	**115**

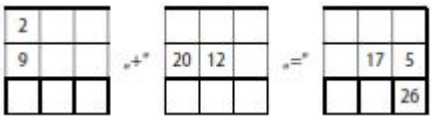
62. Во празните полиња табелата прикажана на цртежот десно запиши ги непарните броеви од 3 до 19 (освен бројот 11 кој е веќе запишан) така што збировите во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала ќе бидат еднакви.

	11	

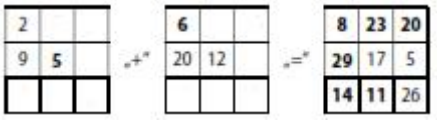
Решение. Збирот на непарните броеви од 3 до 19, без бројот 11 е $3+5+7+9+13+15+17+19=88$. Во дадената табела во редовите, колоните и на двете дијагонали во кои учествува бројот 11 има четири парови спротивни броеви. Затоа збирот на овие парови спротивни броеви мора да $88:4=22$. Според тоа, заедно со бројот 11 во овие редови, колони и на двете дијагонали треба да се запишат паровите броеви: 3 и 19, 5 и 17, 5 и 15, 9 и 13. Притоа треба да се има предвид дека збирот на броевите во првиот и третиот ред, како и збирот на броевите во првата и третата колона треба да е 33. Едно распредување на броевите е дадено во табелата десно.

9	19	5
7	11	15
17	3	13

63. Пополни ги празните полиња во магичните квадрати така што збирот на броевите во соодветните полиња на првите два квадрати е еднаков на бројот во соодветното поле на третиот квадрат. (Во секој магичен квадрат сите броеви се природни и се различни меѓу себе.)

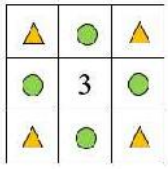


Решение. Бројот запишан во првото поле на вториот ред е $9+20=29$. Според тоа збирот на броевите во секој ред, секоја колона и на двете дијагонали на третиот квадрат е еднаков на $29+17+5=51$. Сега, прво го пополнуваме третиот квадрат, а потоа бројот во првото поле на првиот ред од вториот квадрат и второто поле од вториот ред на првиот квадрат (цртеж долу).



Го разгледуваме првиот магичен квадрат. Долното лево дијагонално поле е заедничко за првата колона и соодветната дијагонала, па затоа во третото поле на првиот ред е бројот $9+2-5=6$. Понатаму, третото поле од вториот ред е заедничко поле за вториот ред и третата колона, па затоа во третото поле од третата колона е бројот $9+5-6=8$. Значи, збирот на броевите во редовите, колоните и на дијагоналите на првиот магичен квадрат е еднаков на $2+5+8=15$. Сега, лесно го пополнуваме првиот магичен квадрат, а потоа и вториот магичен квадрат (цртеж долу). Деталите ги оставаме на чита-телот за вежба.

64. Во секое поле на табелата прикажана на цртежот десни е запишан по еден од броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Збирот на трите броја во секој ред и во секоја колона е еден ист број. Во централното поле е запичан бројот 3. Со A да го означиме збирот на броевите во полињата означени со кругчињата, а со B збирот на броевите во полињата означени со триаголничињата. Пресметај го производот $A\cdot B$.



Решение. *Прв начин*. Имаме

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45,$$

а табелата има три редици и три колони. Затоа збирот на броевите во секој ред и во секоја колона е еднаков на $45:3=15$. Збирот на броевите во вториот ред е еднаков на 15, па затоа збирот на броевите во полињата со зелени кругчиња во тој ред е еднаков на 12. На потополно ист начин заклучуваме дека збирот на броевите во полињата со зелени кругчиња во втората колна е 12. Според тоа, $A=12+12=24$. Понатаму, за збирот на броевите во полињата со триаголничиња добиваме $B=45-(A+3)=45-(24+3)=18$. Конечно, $A\cdot B=24\cdot 18=432$.

Втор начин. Имаме

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45,$$

а табелата има три редици и три колони. Затоа збирот на броевите во секој ред и во секоја колона е еднаков на $45:3=15$. Да ја пополниме табелата така што збирот на броевите во сите редови и сите колони е 1еднаков на 15. Збирот на броевите кои недостасуваат во средниот ред и средната колона е еднаков на $15-2=12$. Понатаму, бидејќи бројот

3 е веќе запишан бројот 12 со преостанатите начини како збир на два броја може да се запише само на следниве два начина:

$$12 = 5 + 7 = 8 + 4 .$$

Нека, на пример, броевите 5 и 7 се во средниот ред, а броевите 8 и 4 се во средната колона. Така јадобиваме табелата:

	8	
5	3	7
	4	

Ја дополнуваме табелата со преостанатите броеви:

1	8	6
5	3	7
9	4	2

Според тоа,

$$A = 8 + 5 + 7 + 4 = 24,$$
$$B = 1 + 6 + 9 + 2 = 18,$$
$$A \cdot B = 24 \cdot 18 = 432.$$

1.6. НИЗИ БРОЕВИ

65. Запиши ги последователно еден по друг природните броеви од 1 до 18 и прецртај ги цифрите 1, 3, 5, 7 и 9. Која е цифрата во среднината на новата низа?

Решение. На почетокот ја имаме низата

$$123456789101112131415161718 .$$

Новата низа е: 246802468. Значи, останаа девет цифри и на средината е цифрата 0.

66. Воочи го правилото и продолжи ја низата за уште три члена:

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, ...$$

Решение. Забележуваме дека $1 + 2 = 3$, $2 + 3 = 5$, $3 + 5 = 8$ и $5 + 8 = 13$, т.е. секој член на низата почнувајќи од третиот е еднаков на збирот на претходните два члена. Значи, следните три члена на низата се: $8 + 13 = 21$, $13 + 21 = 34$ и $21 + 34 = 55$, т.е. низата е

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ...$$

67. Во низата цифри

2 0 2 3 2 0 2 3 2 0 2 3 2 0 2 3 2 0 2 3 ...

Цифрите 2, 0, 2 и 3 последователно се испишуваат.Која цифра се наоѓа на 2023-то место на така добиената низа?

Решение. Забележуваме дека по секои четири запишани цифри 2 0 2 3 повотрно се запишуваа истите тие цифри. Бидејќи $2023 = 4 \cdot 505 + 3$, меѓу првите 2023 цифри групата цифри 2, 0, 2, 3 се појавува 505 пати, по што имаме уште 3 цифри. Значи на 2023-то место е третата цифра од групата, односно цифрата 2.

68. Во една низа се запишани 11 броеви така што збирот на секои три последователни броеви е 18. Притоа збирот на првите 11 броеви е еднаков на 64. Определи го средни (шестиот) број на оваа низа.

Решение. Нека броевите во низата се $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K$. Имаме

$$\begin{aligned} 18+18+18+18 &= (A+B+C)+(D+E+F)+(F+G+H)+(I+J+K) \\ &= (A+B+C+D+E+F+G+H+I+J+K)+F \\ &= 64+F \end{aligned}$$

па затоа $72 = 64 + F$, односно $F = 72 - 64 = 8$.

69. Подреди ги по големина во низа сите трицифрени броеви помали од 550 чија цифра на стотките е еднаква н производот на другите две цифри. Кој број е во средината на вака добиената низа?

Решение. Ако цифрата на стотките е 1, тогаш бидејќи $1 = 1 \cdot 1$, другите две цифри се 1 и 1, па единствен таков број е 111. Нека цифрата на стотките е 2. Бидејќи $2 = 1 \cdot 2 = 2 \cdot 1$, другите две цифри се 1 и 2, па такви броеви се 212 и 221. Нека цифрата на стотките се 3. Бидејќи $3 = 3 \cdot 1 = 1 \cdot 3$, другите две цифри се 1 и 3, па такви броеви се 313 и 331. Нека цифрата на стотките е 4. Бидејќи $4 = 1 \cdot 4 = 2 \cdot 2 = 4 \cdot 1$, преостанатите цифри може да бидат 1 и 4, или 2 и 2, па такви броеви се 414, 441 и 422. Нека цифрата на стотките е 5. Бидејќи $5 = 1 \cdot 5 = 5 \cdot 1$, преостанатите цифри се 1 и 5, па како бројот треба да е помал од 550 единствен таков број е 515.

Броевите подредени во низа се:

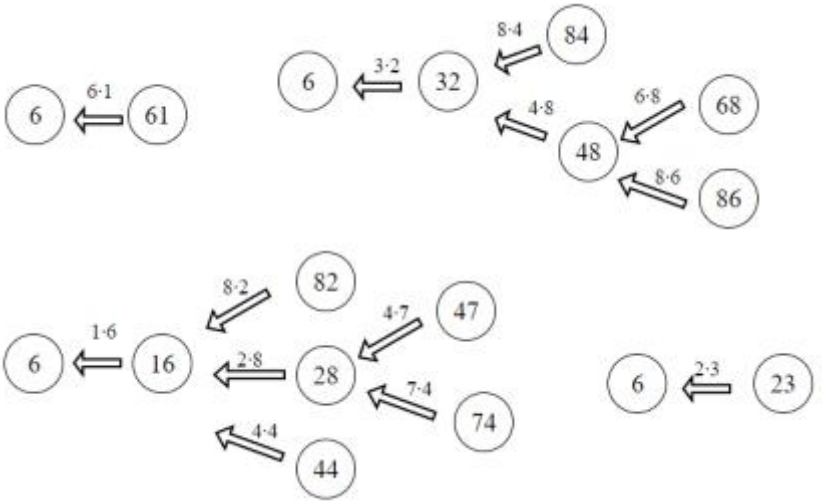
111, 212, 221, 313, 331, 414, 422, 441, 515,

што значи дека средниот број е 331.

70. Во една низа броеви секој број, по првиот, е еднаков на производот на

цифрите со кои е запишан претходниот број, а низата продолжува се додека се добие едноцифрен број. На пример: $63 \to 18 \to 8$. Во низата може да има два или повеќе броја. Определи ги сите двоцифрени броеви кои може да се почеток на низа која завршува со бројот 6.

Решение. Редоследно го запишуваме бројот 6 во вид на производ на два едноцифрени броја, а потоа тоа го правиме со секој двоцифрен број, се додека тоа е можно. Имаме:



Не постојат други можности бидејќи броевите наведени на почетокот на низата не може да се претстават како производ на два едноцифрени природни броја, што следува од таблицата за множење. Значи, на почетокот на низата може да е еден од следниве 13 броеви: 16, 23, 28, 32, 44, 47, 48, 61, 68, 74, 82, 84, 86.

1.7. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

71. Запиши ги сите броеви на втората стотка чија цифра на единиците е за еден поголема од цифрата на стотките.

Решение. Цифрата на стотките во втората стотка е 1, па затоа цифрата на единиците на бараните броеви ќе биде 2. Понатаму, цифрата на десетките може да биде било која од цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9, па затоа се броевите: 102, 112, 122, 132, 142, 152, 162, 172, 182, 192.

72. Броевите 1, 2, 3, 4, 5, ..., 38, 39, 40 се запишани еден по друг, без запирки, така што е добиен бројот

12345678910111213...383940.

Кој е најголемиот број што може да се добие ако од запишаниот број се избришат 66 цифри.

Решение. Во дадениот број се запишани 9 едноцифрени и 31 двоцифрен број, па затоа тој вкупно има $9+31\cdot 2=71$ цифра. Со бришење на 66 цифри се добива петцифрен број. За да овој број е најголем на почетокот мора да имаме најголем можен број деветки. Бидејќи во бројот има четири деветки (9, 19, 29 и 39), со прецртување на цифрите за да останат овие четири деветки на почетокот се добива бројот 99994.

73. Збирот на три последователни броја е 36. Определи го производот на овие броеви.

Решение. Вториот број е за 1 помал од првиот и е за 1 поголем од третиот број, па затоа тој е еднаков на третина од збирот. Значи, средниот број е $36:3=12$ и броевите се 11,12 и 13. Нивниот производ е $11\cdot 12\cdot 13=1716$.

74. Пресметај ги збирот и разликата на најголемиот и најмалиот петцифрен број од кои секој има збир на цифри 24.

Решение. Најголемиот петцифрен број чиј збир на цифри е 24 е бројот 99600, а најмалиот петцифрен број чиј збир на цифри е 24 е 10599. Според тоа, бараниот збир е $99600+10599=110199$, а бараната разлика е $99600-10599=89001$.

75. Пабло и Андреј го погаѓаат бројот кој го замислил Филип.

Пабло: Замисли број кој е еднаков на производот на броевите 750 и 31.

Андреј: Замисли број кој е еднаков на производот на броевите 640 и 36.

Ако Пабло згрешил за 250, за колку згрешил Андреј?

Решение. Пабло кажал го кажал бројот $750\cdot 31=23250$, па како тој згрешил за 250, Филип го замислил бројот $23250+250=23500$ или бројот $23250-250=23000$. Андреј го кажал бројот $640\cdot 36=23040$, па затоа тој згрешил за $23040-23000=40$ или $23500-23040=460$.

76. Четири дрва растат распоредени во права линија. Растојанијата меѓу соседните дрва последователно се $42\,m, 14\,m$ и $77\,m$. Определи го најмалиот број дрва, кои што треба да се засадат меѓу нив (по права линија) така што растојанијата меѓу секои две соседни дрва се

еднакви.

Решение. Бидејќи $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$, $14 = 2 \cdot 7$ и $77 = 11 \cdot 7$, растојанијата меѓу дрвата треба да бидат $7\,m$. Меѓу првите две дрва треба да се засадат $42 : 7 = 6$ дрва, меѓу вторите две дрва треба да се засадат $14 : 7 = 2$ дрва и меѓу третите две дрва треба да се засадат $77 : 7 = 11$ дрва. Значи, вкупно треба да се засадат $6 + 2 + 11 = 19$ дрва.

77. Од цифрите 2, 3, 4, 5 и 6 состави еден трицифрен и еден двоцифрен број така што

а) нивниот збир ќе биде 479,

б) нивната разлика ќе биде 459.

Решение. а) Збирот на било кои два двоцифрени броја запишани со дадените цифри е помал од 179, па затоа цифрата на стотките на трицифрениот мора да е 4. Сега, за да збирот на единиците на двата броја биде 9, мора да се цифрите на единиците 3 и 6. Според тоа, цифрите на десетките на двата броја се 2 и 5. Така ги добивам следниве четири решенија на задачата:

$$456 + 23 = 479, \quad 453 + 26 = 479, \quad 423 + 56 = 479, \quad 426 + 53 = 479\,.$$

б) Разликата на најголемиот и најмалиот двоцифрен број запишани со цифрите 2, 3, 5 и 6 е $65 - 23 = 42$, па затоа цифрата на стотките на трицифениот број не може да е 4, а како таа не може да е и 6 (Зошто?), заклучуваме дека трицифрениот број има цифра на стотките 5. Сега, за да цифрата на единиците на разликата е 9, единствена можност е цифрата на единиците на трицифрениот број да е 3, а на двоцифрениот број да е 4. Конечно, бараната разлика е $523 - 64 = 459$.

78. Од најголемиот трицифрен број чиј производ на цифри е 12 одземи го најмалиот трицифрен број чиј збир на цифри е 21.

Решение. Бидејќи $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3 = 1 \cdot 3 \cdot 4 = 1 \cdot 2 \cdot 6$, најголемиот трицифрен број чиј производ на цифри е 12 е бројот 621. Понатаму, бидејќи

$$21 = 3 + 9 + 9 = 4 + 8 + 9 = 5 + 7 + 9 = 5 + 8 + 8$$
$$= 6 + 6 + 9 = 6 + 7 + 8 = 7 + 7 + 7,$$

најмалиот трицифрен број чиј збир на цифри е 21 е бројот 399. Бараната разлика е $621 - 399 = 222$.

Забелешка. Најмалиот трицифрен број чија збир на цифри може да се најде и на следниот начин. Цифрата на стотките е најмалата можна цифра, па како најголемите можни цифри за единиците и десетките се

9 и 9, добиваме дека цифрата на стотките е $21-9-9=3$. Значи, тоа е бројот 399.

79. Собери ги сите непарни четирицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4, а потоа пресметај го производот на цифрите на добиениот збир.

Решение. Бројот 4 запишан како збир на четири броја е:

$$4+0+0+0=3+1+0+0=2+2+0+0=2+1+1+0=1+1+1+1.$$

Со цифрите 4, 0, 0, 0 и 2, 2, 0, 0 не може да се запише непарен број. Непарните четирицифрени броеви чиј збир на цифри е 4 се:

3001, 1003, 2101, 2011, 1201, 1021 и 1111.

Нивниот збир е:

$$3001+1003+2101+2011+1201+1021+1111=11449,$$

а производот на цифрите на добиениот збир е

$$1\cdot 1\cdot 4\cdot 4\cdot 9=144.$$

80. Петар ги собрал сите двоцифрени броеви, во чиј запис цифрата на единиците е за 1 помала од цифрата на десетките. Кирил ги собрал сите двоцифрени броеви, во чиј запис цифрата на единиците е за 1 поголема од цифрата на десетките. За колку збирот на Кирил е поголем од збирот на Петар?

Решение. Петар ги собрал броевите 12, 23, 34, 45, 56, 67, 78, 89. Осумте броја на Кирил се добиваат од соодветните броеви на Петар, кога цифрите ќе ги заменат местата: 21, 32, 43, 54, 65, 76, 87, 98 и Кирил го собрал и бројот 10. Секој од осумте броја на Кирил е за 9 поголем од соодветниот број на Петар. Значи, збирот на Кирил е за $9\cdot 8+10=82$ поголем од збирот на Петар.

81. За еден број велиме дека е *убав*, ако се запишува со различни цифри и производот на неговите цифри е еднаков на 6. Определи ја разликата меѓу најмалиот убав трицифрен и најголемиот убав двоцифрен број.

Решение. Убави трицифрени броеви се 123, 132, 213, 231, 312 и 321, а убави двоцифрени броеви се 23, 32, 16 и 61. Најмалиот убав трицифрен број е 123, а најголемиот убав двоцифрен број е 61. Бараната разлика е $123-61=62$.

82. Со помош на цифрите 0, 1, 2 и 4 се формирани два двоцифрени броја, при што секоја од цифрите е употребена само еднаш. Определи го

збирот на двата броја, ако нивниот производ е најголемиот можен број.

Решение. За да производот е најголемиот можен број потребно е во двата броја цифрите на десетките да се најголемите можни броеви. Понатаму, од двата добиени парови броеви производот е поголем во парот каде од преостанатите две цифри поголемата е цифра на единиците во двоцифрениот број кој има помала цифра на десетките (Зошто?). Значи, бараните броеви се 40 и 21. Нивниот производ е $40 \cdot 21 = 840$ и бараниот збир е $40 + 21 = 61$.

83. Запиши ги сите трицифрени броеви кај кои збирот на цифрите е еднаков на 10 и притоа цифрата на стотките е поголема од цифрата на десетките, а цифрата на десетките е поголема од цифрата на единиците.

Решение. Ако цифрата на единиците е поголема или еднаква на 3, тогаш цифрата на десетките е поголема или еднаква на 4 и цифрата на стотките е поголема или еднаква на 5, па збирот на цифрите на бројот ќе биде поголем или еднаков на $3 + 4 + 5 = 12$, што противречи на условот на задачата.

Ако цифрата на единиците е 2, тогаш единствен број кој ги заодоволу условоите на задачата е: 532.

Ако цифрата на единиците е 1, тогаш тоа се броевите: 541, 631 и 721.

Ако цифрата на единиците е 0, тогаш тоа се броевите: 640, 730, 820 и 910.

84. Д-р Икс има машина програирана на следниот начин:
- во машината запишува природен број n (нулата не е природен број),
- ако бројот n е парен, машината го дели со 2 и го испишува резултатот,
- ако бројот е непарен, машината го множи со 3, на добиенот број му додава е и го испишува резултатот.

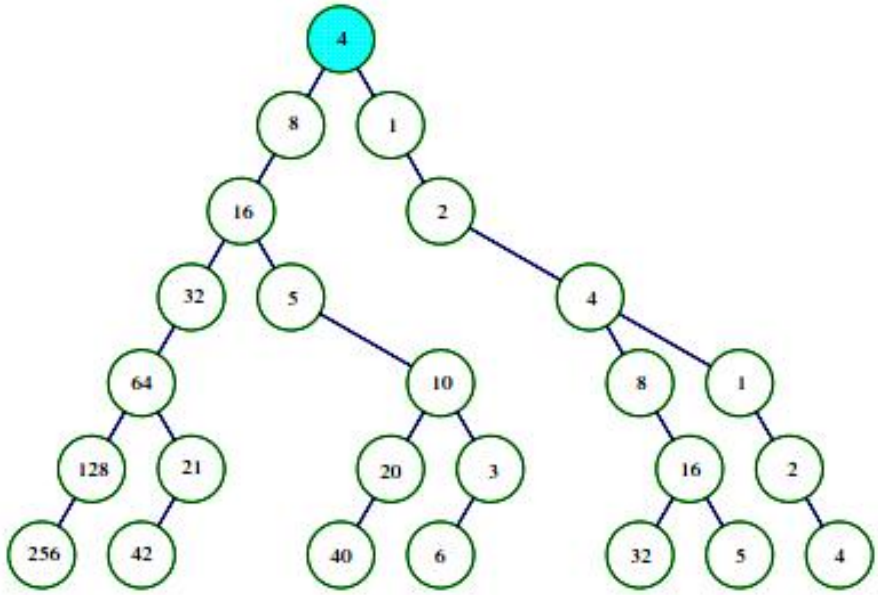
Д-р Икс во машината запишал еден број, потоа испишаниот резултат повторно го запишал во машината и оваа постапка ја повторил повеќе пати. По шест испишувања, машината го испишала бројот 4. Определи ги можните почетни вредности кои д-р Икс можел да ги запише во машината.

Решение. Начинот на работа на машината е:

Влез	n парен број	n непарен број
Излез	$n:2$	$3n+1$

Ако е добиен резултат m, тогаш влезот може да биде $2m$ или $(m-1):3$ во зависност дали впишаниот број е парен или непарен.

Резултат 4 може да се појави ако на влезот бил запишан бројот $8=2\cdot 4$ или $1=(4-1):3$. Резултатот 8 може да се добие само од бројот 16, бидејќи $8-1=7$ не е делив со 3. Бројот 1 може да се добие само од бројот 2, бидејќи на влезот не може да е 0. Бројот 16 може да се добие на два начина, ако на влезот се броевите 32 или 5. Со слични размислувања го добиваме стеблото на можни меѓурезултати се до почетните броеви. Почетните броеви кои д-р Икс можел да ги запише се: 4, 5, 6, 32, 40, 42 и 256.



85. Запиши ги сите правилни дропки чиј броител е непарен едноцифрен број, а именител е парен едноцифрен број. Колку различни дропки запиша?

Решение. Броителот на бараните дропки може да биде 1, 3, 5 и 7. Тој не може да е 9, бидејќи дропките треба да се правилни, т.е. именителот треба да е поголем од броителот. Сега, бидејќи именителите се парни броеви поголеми од броителите, ги добиваме дропките:

$$\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{1}{8},\frac{3}{4},\frac{3}{6},\frac{3}{8},\frac{5}{6},\frac{5}{8},\frac{7}{8}.$$

Значи, имаме 10 дропки, но $\frac{1}{2}=\frac{3}{6}$, што значи дека имаме 9 различни дропки кои го задоволуваат условот на задачата.

2. ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

2.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Една енциклопедија содржи 317 страници. Колку цифри се употребени за нумерирање на енциклопедијата, ако нумерацијата почнува од третата страна.
   Решение. За нумерација на страниците од 3 до 9 се употребени 7 цифри. За нумерирање на страниците од 10 до 99 се употребени $(99-9)\cdot 2 = 90\cdot 2 = 180$ цифри. За нумерирање на страниците од 100 до 317 се употребени $(317-99)\cdot 3 = 218\cdot 3 = 654$ цифри. Значи, за нумерирање на целата енциклопедија се употребени $7+180+654 = 841$ цифра.

2. Една книга има 196 страници. На првите две страници и на последната страна не се отпечатени броеви. Колку цифри се употребени за нумерирање на оваа книга. Колку пати е отпечатена цифрата 0, а колку пати цифрата 1?
   Решение. За едноцифрените броеви се употребени 7 цифри. За двоцифрените се употребени $90\cdot 2 = 180$ цифри, и за трицифрените броеви се употребени $(196-9-90-1)\cdot 3 = 96\cdot 3 = 288$ цифри. Значи,за нумерирање на книгата се употребени $7+180+288 = 475$ цифри.
   Од 3 до 99 цифрата 0 е употребена 9 пати, од 100 до 195 е употребена 20 пати. Според тоа, цифрат 0 е употребена 29 пати.
   Од 3 до 99 цифрата 1 е употребена 19 пати, од 100 до 195 цифрата 1 е употребена 116 пати. Значи, цифрата 1 е употребена 135 пати.

3. За нумерирање на една книга се употребени 540 цифри. Колку страници има книгата, ако секоја страница е нумерирана со некој број?
   Решение. За првите 9 страници се употребени 9 цифри. Потоа следните $99-9 = 90$ страници се нумерирани со двоцифрени броеви, што значи дека се употребени $2\cdot 90 = 180$ цифри. Според тоа, за страниците нумерирани со трицифрени броеви остануваат $540-189 = 351$ цифра. Значи, имаме $351:3 = 117$ трицифрени броеви. Конечно, книгата има $9+90+117 = 216$ страници.

4. Ако сите природни броеви ги запишеме еден по друг, која цифра ќе се најде на 2016-тото место?

   Решение. Од едноцифрените броеви имаме 9 цифри, а од двоцифрените броеви имаме $2 \cdot 90 = 180$ цифри. Значи, 2016-тата цифра ќе биде цифрата која е на местото $2016 - (9 + 180) = 1827$ во запишувањето на трицифрените броеви. Бидејќи $1827 = 3 \cdot 609$, тоа е последната цифра на 609-тиот трицифрен број, односно на бројот $609 + 99 = 708$. Значи, бараната цифра е 8.

5. Природните броеви се запишани еден по друг без запирки:

   $$12345678910111213141516171819202122232 4...$$

   Определи ги цифрите кои ќе се најдат на 2019-тото, 2020-тото и 2021-вото место и запиши ги во овој редослед како трицифрен број.

   Решение. Од едноцифрените броеви имаме 9 цифри, а од двоцифрените броеви имаме $2 \cdot 90 = 180$ цифри. Значи, 2019-тата цифра ќе биде цифрата која е на местото $2020 - (9 + 180) = 1831$ во запишувањето на трицифрените броеви. Бидејќи $1831 = 3 \cdot 610 + 1$, тоа е првата цифра во 611-тиот трицифрен број. Тој број е $9 + 90 + 611 = 710$, па затоа 2020-тата цифра е 7. Според тоа, 2021-вата цифра е 1, а 2019-тата цифра е третата цифра на бројот 709, а тоа е 9. Цифрите по ред се 9, 7 и 1, па бројот е 971.

6. Компјутерска програма ги испишува на екранот, без запирки, цифрите од низата природни броеви

   $$123456789101112131415161 7...$$

   Програмата прв пат застанала кога прв пат се испишани три последователни единици (12345678910111) и тогаш испишала вкупно 14 цифри. Пабло повторно ја пуштил програмата да испишува цифри од низата природни броеви, почнувајќи од бројот 1, и програмата застанала кога прв пат испишала пет последователни четворки. Колку цифри тогаш испишала програмата?

   Решение. Програмата застанала по испишување на бројот 444, а потоа на првите две цифри од бројот 445. Таа испишала 9 едноцифрени броеви, 90 двоцифрени броеви, $444 - 99 = 345$ трицифрени броеви и уште две цифри. Според тоа, вкупно испишала

   $$9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 345 + 2 = 1226 \text{ цифри.}$$

7. Матео на хартија напишал 0, а потоа последователно сите природни броеви од 1 до 2020. Ако во секоја минута пишувал точно 77 цифри, колку броеви му останале да допише по еден час и 30 минути пишување?

   Решение. Имаме 10 едноцифрени, 90 двоцифрени, 900 трицифрени и $2020-999=1021$ четирицифрени броеви. Според тоа, Матео напишал $10+2\cdot 90+3\cdot 900+4\cdot 1021=6974$ цифри. Во 1 час и 30 минути има 90 минути и како секоја минута Матео пишувал по 77 цифри, тој запиал $90\cdot 77=6930$ цифри. Според тоа, му преостанало да запише уште $6974-6930=44$ цифри. Преостанатите броеви се четирицифрени, што значи дека му преостанале $44:4=11$ броеви.

8. Машина за печатење билети за кино секогаш печати 4 цифри за бројот на билетот. Ако бројот на билетот е едноцифрен, двоцифрен или трицифрен, пред бројот се додаваат определен број нули. На пример, билетот со број 5 се печати како 0005, а билетот со број 54 се печати како 0054. Колку нули машината ќе отпечати за билетите од редниот број 1 до редниот број 212?

   Решение. Кога се печатат броевите од 1 до 212 првата цифра е секогаш 0, па се отпечатени 212 нули. Понатаму, кога се печатат броевите од 1 до 99 и втората цифра е 0, па имаме уште 99 нули. Третата цифра е 0 кај едноцифрените броеви, т.е. 9 нули и потоа уште 20 нули (по 10 од 100 до 109 и од 200 до 209). Според тоа, 29 пати третата цифра е 0. Четвртата цифра е 0 кај сите десетки до 212, што значи 21 пат. Значи, во печатените карти 0 е отпечатена $212+99+29+21=361$ пат.

9. Збирот на три различни природни броеви е 14. Ако еден од броевите се зголеми два пати, тогаш збирот на броевите ќе биде 24. Кои се тие броеви?

   Решение. Кога едниот собирок ќа се зголеми два пати збирот се зголемува за $24-14=10$. Затоа тој собирок е 10. Збирот на другите два броја е $14-10=4$. Но, тие се различни природни броеви, па затоа тоа се броевите 1 и 3. Конено, бараните броеви се 1, 3 и 10.

10. а) Збирот на броевите 278 и 319 намали го за најголемиот непарен број од втората стотка.

    б) Од разликата на броевите 230 и 58 одземи го првиот парен след-

беник на бројот 38.

Решение. а) Најголемиот непарен двоцифрен број е 199. Имаме:

$$278 + 319 - 199 = 398 .$$

б) Првиот парен следбеник на бројот 38 е 40. Имаме:

$$230 - 58 - 40 = 132 .$$

11. За колку треба да се зголеми најголемиот број, запишан со различни непарни цифри, за да се добие најмалиот број, чиј збир на цифри е 46?
Решение. Најголемиот број запишан со различни непарни цифри е 97531. Најмалиот број чиј збир на цифри е 46 е 199999. Бараниот број е еднаков на разликата на двата броја $199999 - 97531 = 102468$.

12. За колку треба да се зголеми најмалиот број чиј збир на цифри е еднаков на 30, за да се добие најмалиот број запишан со пет различни парни цифри?
Решение. Најмалиот број чиј збир на цифри се добива ако се искористи најголем можен број пати цифрата 9, а остатокот се стави како прва цифра од лево. Од $30 = 3 \cdot 9 + 3$ следува дека тоа е бројот 3999. Бидејќи првата цифра не смее да е 0, најмалиот број запишан со пет парни цифри се добива ако првата цифра е 2, а потоа преостанатите цифри се запишат по големина во растечки редослед и тоа е бројот 20468. Конечно, бараниот број е $20468 - 3999 = 16469$.

13. Андреј замислил трицифрен број. Тој ги зголемил цифрата на стотките за 3, цифрата на десетките за 2 и цифрата на единиците за 1, по што добил број кој е четири пати поголем од замисленият број. Кој број го замислил Андреј?
Решение. *Прв начин*. Производот на 4 и цифрата на единиците треба да завршува со цифра, која е за 1 поголема од цифрата на единиците. Од табелата

Единици	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Единици по 4	0	4	8	12	16	20	26	28	32	36

следува дека единствена можност е цифрата на единиците да е 7. Тогаш имаме пренос 2 кон десетките и добиваме, дека цифрата на десетките е 0, а цифрата на единиците е 1. Значи, бараниот број е 107.
Втор начин. Нека бројот што го замислил Андреј е x. Со промената на цифрите Андреј бројот x го зголемил за $3 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 1 = 321$. Затоа важи $x + 321 = 4x$, од каде добиваме $3x = 321$, т.е. $x = 107$.

14. Збирот на два броја е 817. Цифрата на единиците на едниот собирок е 3. Ако ја прецртаме таа цифра, се добива број, кој е еднаков на другиот собирок. Определи ги овие броеви.

Решение. *Прв начин*. Бараните броеви да ги означиме со $\overline{ab3}$ и $\overline{ab}$. Од $b+3=7$ добиваме $b=4$. Според тоа, броевите се $\overline{a43}$ и $\overline{a4}$. Сега, цифрата на единиците на збирот $a+4$ е 1, па затоа $a=7$. Конечно, бараните броеви се 743 и 74.

Втор начин. Нека помалиот број е x. Бидејќи по прецртување на цифрата на единиците 3 на поголемиот број се добива помалиот број, заклучуваме дека поголемиот број е $10x+3$. Збирот на двата броја е еднаков на 817, па затоа $10x+3+x=817$, од каде следува $11x+3=817$, т.е. $x=74$. Значи, помалиот број е 74, а поголемиот број е 743.

15. Збирот на шест последователни природни броеви е еднаков на 75. Определи го збирот на најмалиот и најголемиот број.

Решение. Ако вториот број го намалиме за 1, третиот за 2, четвртиот за 3, петтиот за 4 и честиот за 5, тогаш шесте броја ќе бидат еднакви на првиот број. Но, тогаш збирот на шесте добиени броја ќе биде еднаков на 75 намален за збирот $1+2+3+4+5=15$. Значи, најмалиот број земен шест пати дава збир еднаков на $75-15=60$. Според тоа, најмалиот број е $60:6=10$. Тогаш најголемиот број е $10+5=15$. Конечно, збирот на најмалиот и најголемиот број е $10+15=25$.

16. Збирот на осум последователни природни броеби е еднаков на 92. Кои се тие броеви?

Решение. *Прв начин*. Нека најмалиот од бараните броеви го означиме со x. Тогаш бараните броеви се $x, x+1, x+2, x+3, x+4, x+5, x+6$ и $x+7$. Од условот на задачата следува

$$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+(x+4)+(x+5)+(x+6)+(x+7)=92,$$

т.е. $8x+28=92$, од каде добиваме $x=(92-28):8=64:8=8$. Според тоа, бараните броеви се 8, 9 , 10, 11, 12, 13, 14 и 15.

Втор начин. Збирот на првите осум природни броеви е

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36.$$

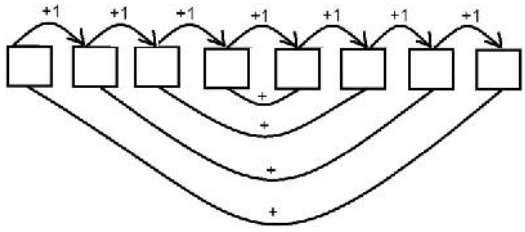
Ако првиот собирок го заменуваме со следниот природен број, тогаш збирот на новите осум последователни броеви се зголемува за 8 и ова важи за секои на опишаниот начин новодобиени осум последователни природни броеви. Бидејќи $(92-36):8=56:8=7$, заклучуваме дека

постапката треба да ја повториме седум пати, што значи дека треба седум пати првиот собирот да го замениме со следниот природен број. Така ги добиваме низите броеви

$$2,3,4,5,6,7,8,9;$$
$$3,4,5,6,7,8,9,10;$$
$$4,5,6,7,8,9,10,11;$$
$$5,6,7,8,9,10,11,12;$$
$$6,7,8,9,10,11,12,13;$$
$$7,8,9,10,11,12,13,14;$$
$$8,9,10,11,12,13,14,15$$

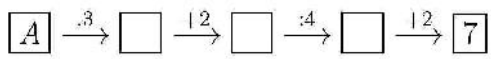
што значи дека бараните броеви се 8, 9 , 10, 11, 12, 13, 14 и 15.

Трет начин. Вториот број е за 1 поголем од првиот, а седмиот е за 1 помал од осмиот. Затоа збирот на првиот и осмиот од бараните броеви е еднаков на збирот на вториот и седмиот број. Аналогно заклучуваме дека овој збир е еднаков на збирот на третиот и шестиот број, како и на збирот на четрвтиот и петтиот број. Според тоа, имаме 4 парови броеви со еднакви збирови, па затоа збирот на броевите во секој пар е еднаков на $92:4=23$. Но, четвртиот и петтиот број се два последователни броја, па како $11+12=23$, заклучуваме дека тоа се броевите 11 и 12. Сега, лесно се добива дека бараните броеви се 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 и 15.



17. Замислив еден број кој го зголемив три пати. Потоа добиениот број го зголемив за 2 и добиениот збир го поделив со 4. На крајот, добиениот број го зголемив за 2 и го добив бројот 7. Кој број го замислив?

Решение. Ако замисленият број е A,тогаш пресметувањата можеме да ги запишеме со шемата



Сега, пресметувајќи по обратниот редослед, добиваме

$$A=((7-2)\cdot 4-2):3=(5\cdot 4-2):3=(20-2):3=18:3=6.$$

18. Од половината на бројот X го одзедов бројот 2015 и го добив најмалиот трицифрен број чиј збир на цифри е 10. Кој е бројот X.

Решение. Најмалиот трицифрен број чиј збир на цифри е 10 е бројот 109. Според тоа, половината од бројот X е $2015+109=2124$, па затоа $X=2\cdot 2124=4248$.

19. Разликата на два природни броја е за 180 помала од нивниот збир, а збирот е три пати поголем од разликата. Кое се тие броеви?

Решение. *Прв начин*. Бидејќи збирот е три пати поголем од разликата, заклучуваме дека двократната вредност на разликата е еднаква на 180, т.е. разликата е $180:2=90$. Оттука добиваме дека збирот на броевите е $180+90=270$. Збирот на броевите и нивната разлика имаат збир еднаков на $270+90=360$, а од друга страна, тој збир е еднаков на двократната вредност на поголемиот број. Значи, поголемиот број е $360:2=180$, а помалиот број е $270-180=90$.

Конечно, бараните броеви се 180 и 90.

Втор начин. Нека бараните броеви се a и b, каде $a>b$. Тогаш нивната разлика е $a-b$, а нивниот збир е $a+b$. Од условот на задачата добиваме $a+b=a-b+180$, од каде добиваме $b=90$. Но, збирот е три пати поголем од разликата, па затоа $a+b=3(a-b)$, т.е. $a+90=3a-3\cdot 90$, од каде добиваме $2a=90+270$, т.е. $a=180$.

20. Определи го двоцифрениот број кој се зголемува седум пати, ако меѓу неговите цифри се запише 0.

Решение. Нека бараниот двоцфрен број е $\overline{ab}$. Од условот на задачата следува $7\cdot\overline{ab}=\overline{a0b}$. Според тоа,

$$\begin{aligned}
7\cdot(10a+b)&=100a+b,\\
70a+7b&=100a+b,\\
7b-b&=100a-70a,\\
6b&=30a,\\
b&=5a.
\end{aligned}$$

Бидејќи a и b се цифри, единствено решение на последната равенка е $a=1, b=5$ и бараниот број е $\overline{ab}=15$.

21. Ана, Билјана и Цветанка замислиле три броја. Ако се избрише првата цифра на бројот на Ана се добива бројот на Билјана. Ако се избрише првата цифра на бројот на Билјана се добива бројот на Цветанка. Збирот на трите замислени броја од Ана, Билјана и Цветанка е 912. Определи го збирот на цифрите на бројот што го замислила Ана.

Забелешка. Прва цифра на бројот е цифрата со најголема местна вредност во тој број.

Решение. За да збирот на трите броја е трицифрен Ана морала да замисли трицифрен број. Нека бројот кој го замислила Ана е $\overline{abc}$. Од условот на задачата следува дека Билјана го замислила бројот $\overline{bc}$ и Цветанка го замслила бројот c. Според тоа, $\overline{abc}+\overline{bc}+c=912$, т.е. $100a+20b+3c=912$. Бидејќи $3c$ завршува на цифрата 2, единствена можност е $c=4$. Значи, $100a+20b=900$, односно $5a+b=45$. Од последното равенство следува $b=0$ и $a=9$, или $b=5$ и $a=8$. Но, $\overline{bc}$ е двоцифрен број, па затоа $b\neq 0$, што значи $b=5$ и $a=8$. Конечно, збирот на цифрите на бројот кој го замислила Ана е

$$a+b+c=8+5+4=17.$$

22. Разликата на два природни броја е за 240 помала од нивниот збир, а збирот е четири пати поголем од разликата. Кое се тие броеви?

Решение. *Прв начин*. Бидејќи збирот е четири пати поголем од разликата, заклучуваме дека трикратната вредност на разликата е еднаква на 240, т.е. разликата е $240:3=80$. Оттука добиваме дека збирот на броевите е $240+80=320$. Збирот на броевите и нивната разлика имаат збир еднаков на $320+80=400$, а од друга страна, тој збир е еднаков на двократната вредност на поголемиот број. Значи, поголемиот број е $400:2=200$, а помалиот број е $320-200=120$.

Конечно, бараните броеви се 200 и 120.

Втор начин. Нека бараните броеви се a и b, каде $a>b$. Тогаш нивната разлика е $a-b$, а нивниот збир е $a+b$. Од условот на задачата добиваме $a+b=a-b+240$, од каде добиваме $b=120$. Но, збирот е четири пати поголем од разликата, па затоа $a+b=4(a-b)$, т.е. $a+120=4a-4\cdot 120$, од каде добиваме $3a=120+480$, т.е. $a=200$.

23. Збирот на два броја е 424. Ако првиот број се зголеми четири пати, а вториот се намали за 4, тогаш се добиваат еднакви броеви. Кои се тие броеви?

Решение. Нека првиот број е x. Тогаш вториот број е $424-x$. Кога првиот број се зголемува 4 пати се добива бројот $4x$, а кога вториот број се намалува за 4 се добива бројот $424-x-4=420-x$. Значи, $4x=420-x$, од каде добиваме $x=84$. Според тоа, првиот број е 84, а вториот број е $424-84=340$.

24. Збирот на намаленикот, намалителот и разликата е еднаков на 4044. Разликата е поголема од намалителот за 2020. Определи ги намаленикот, намалителот и разликата.

Решение. Со a,b,c редоследно да ги означиме намаленикот, намалителот и разликата. Притоа важи $a-b=c$, односно $a=b+c$. Понатаму, $a+b+c=4044$, со замена $a=b+c$, добиваме $a+a=4044$, односно $a=2022$. Сега, разликата е поголема од намалителот за 2020, па затоа $c=b+2020$ и како $b+c=2022$, добиваме $b+b+2020=2022$, од каде следува $2b=2$, т.е. $b=1$. Конечно, $c=1+2020=2021$.

25. Во улицата на Матео сите куќи од левата страна се означени со сите непарни броеви од 1 до 31, а сите куќи од десната страна се означени со парните броеви од 2 до 28. Колку куќи има во улицата на Матео и колку цифри се употребени за нивно означување?

Решение. Од левата страна има 16 куќи, а од десната страна има 14 куќи. Значи, во улицата вкупно има $16+14=30$ куќи. За нумерација на сите куќи се употребени 9 едноцифрени и $30-9=21$ двоцифрен број. Според тоа, се употребени $9\cdot 1+21\cdot 2=9+42=51$ цифра.

26. Збирот на три броја е 2022. Ако првиот број го намалиш за 111, вториот број го намалиш за170, а третиот број го намалиш за 346, добиваш еднакви броеви. Кои се трите броја?

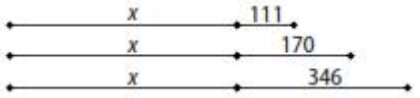
Решение. *Прв начин*. Кога од првиот, вториот и третиот број соодветно ќе одземеме 111, 170 и 346, збирот се намалува за

$$111+170+346=627.$$

Значи, збирот на трите еднакви броја кои се добиваат е еднаков на $2022-627=1395$. Според тоа, трите новодобиени броеви се еднакви на $1395:3=465$, а почетните броеви се

$$465+111=576,\ 465+170=635 \text{ и } 465+346=811.$$

Втор начин. Со x да ги означиме броевите по намалувањето. Тогаш броевите можеме да ги претставиме како на долниот цртеж.



Ги собираме трите броја и последователно добиваме:

$$x+111+x+170+x+346=2022,$$
$$3x+627=2022,$$

$$3x = 1395,$$
$$x = 465.$$

Значи, броевите се:

$$465 + 111 = 576\,,\ 465 + 170 = 635 \text{ и } 465 + 346 = 811.$$

27. Кај некои броеви од четвртата стотка цифрата на десетките е еднаква на збирот на цифрите на единиците и сттките. Определи два различни такви броја, така што:
а) нивниот збир ќе биде најголем можен,
б) нивната разлика е број од шестата десетка. Определи ги сите решенија.
Решение. Сите броеви од четвртата десетка кај кои цифрата на десетките е еднаква на збирот на цифрите на единиците и стотките се: 330, 341, 352, 363, 374, 385 и 396.
а) Најголем збир се добива кога ќе ги собереме двата најголеми броја, т.е. броевите 385 и 396.
б) Имаме две решенија и тоа: 396 и 341; 385 и 330.

28. Определи два броја чиј збир е 2020, ако $\frac{1}{6}$ од поголемиот број е еднаква на $\frac{1}{4}$ од помалиот број.

Решение. Ако шестината од поголемиот број ја означиме со x, тоа значи дека поголемиот број е $6x$. Но, $\frac{1}{6}$ од поголемиот број, т.е. x е еднаква на $\frac{1}{4}$ од помалиот број, што значи дека помалиот број е $4x$. Според тоа, $6x + 4x = 2020$, па затоа $10x = 2020$, од каде добиваме $x = 2020 : 10$, односно $x = 202$. Значи, поголемиот број е $6 \cdot 202 = 1212$, а помалиот број е $4 \cdot 202 = 808$.

2.2. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

29. Колку понеделници може има во период од 45 последователни денови?
Решение. Една седмица има 7 дена, па како $45 = 6 \cdot 7 + 3$ заклучуваме дека дека во период од 45 последователни денови има 6 или 7 понеделници. Значи, во период од 45 последователни денови може да

има најмногу 7 понеделници. Тоа се добива, на пример, ако првиот ден е во сабота, недела или понеделник.

30. Во текот на ноќта го погледнав часовникот и тој покажуваше точно $3:25$ часот наутро. Сфатив дека часовникот застанал, го навив и заспав. Кога станав часовникот покажуваше $5:30$ часот, а уличниот часовник покажуваше $7:40$ часот. Во колку часот сум се разбудил во текот на ноќта?

Решение. Од $3:25$ часот до $5:30$ часот изминале $2\,h\,5\,\text{min}$. Исто толку време е поминато од навивањето на часовникот до $7:40$. Сега, ако од $7\,h\,40\,\text{min}$ одземеме $2\,h\,5\,\text{min}$ ќе добиеме $5\,h\,35\,\text{min}$. Значи, во текот на ноќта сум се разбудил во $5:35$.

31. Стар будилник заостанува 6 минути на секои 24 часа.

а) На колку треба да го навиеме будилникот во 20 часот навечер, за да звони точно во 7 часот наутро следниот ден?

б) Ако будилникот точно го наместиме во 21 часот во петок, колку часот ќе покажува точно во 7 часот наутро во недела?

Решение. За $24:6=4$ часа будилникот заостанува $6:6=1$ минута, односно 60 секунди. Според тоа, за $4:4=1$ час будилникот заостанува $60:4=15$ секунди.

а) Од 20 часот вечерта до 7 часот следното утро има 11 часа. За тоа време будилникот ќе заостане $11\cdot 15=165$ секунди, односно 2 минути и 45 секунди. Според тоа, за утредента будилникот да звони точно во 7 часот, треба да го навиеме будилникот да звони порано 2 минути и 45 секунди, односно во 6 часот 57 минути и 15 секунди.

б) Од 21 часот во петокот до 11 часот во неделата ќе поминат $3+24+11=38$ часа. За тоа време будилникот ќе заостане $38\cdot 15=570$ секунди, односно 9 минути и 30 секунди. Значи, во 11 часот наутро во недела будилникот ќе покажува 10 часот 50 минути и 30 секунди.

32. Семејството Јакопетрески со автомобил тргнало од Скопје за Љубљана во $14\,h\,30\,\text{min}$. Кога стигнале во Љубљана ако по пат направиле две паузи од по $45\,\text{min}$, а во вожња поминале $13\,h\,20\,\text{min}$?

Решение. Семејството вкупно патувало

$$2 \cdot 45 \text{ min} + 13\,h\ 20 \text{ min} = 90 \text{ min} + 13\,h\ 20 \text{ min}$$
$$= 1\,h\ 30 \text{ min} + 13\,h\ 20 \text{ min}$$
$$= 14\,h\ 50 \text{ min}.$$

Тие тргнале во $14\,h\ 30 \text{ min}$ и до полноќ патувале $9\,h\ 30 \text{ min}$. Според тоа, во Љубљана стигнале утредента во

$$14\,h\ 50 \text{ min} - 9\,h\ 30 \text{ min} = 5\,h\ 20 \text{ min}.$$

33. Еден часовник заостанува 6 секунди за пет дена. Кое време ќе го покажува на 7.3.2022 година на пладне, ако е наместен да покажува точно време на 1.1.2022 година на пладне?

Решение. Од 1.1 на пладне до 7.1 на пладне се поминати точно $31 + 28 + 6 = 65$ дена. Бидејќи $65 : 5 = 13$, часовникот на 7.1 на пладне ќе заостане $13 \cdot 6 = 78\,s = 1 \text{ min } 12\,s$, што значи дека ќе покажува $11\,h\ 58 \text{ min } 42\,s$.

34. Стоногалката Цаци има точно сто нозе, 50 леви и 50 десни. Секое утро таа обува 50 пара чевли и така што прво ги обува сите леви, а потоа сите десни. За обување на секој лев чевел и треба 1 секунда. Но, тогаш се уморува па за десните чевли и треба повеќе време. За првиот десен чевел и требаат две секунди, за вториот четири, за третиот шест и така до последниот десен чевел, секој пат две секунди повеќе отколку претходно. Но, навечер, кога ги собува чевлите, вкупно и треба десет пати помалку време отколку за обување. Колку секунди и требаат на стоногалката Цаци за собување на чевлите?

Решение. Бидејќи има 50 леви чевли, на Цаци и требаат 50 секунди за обување на левите чевли.

За 1-та десна и требаат 2 секунди.

За 2-та десна и требаат 4 секунди.

За 3-та десна и требаат 6 секунди.

За 4-та десна и требаат 8 секунди.

.....

За 50-та десна и требаат $2 \cdot 50 = 100$ секунди.

За да ги обуе сите десни чевли на

$$2 + 4 + 6 + 8 + ... + 100 = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + ... + 50) = 2 \cdot 25 \cdot 51 = 2550 \text{ сек.}$$

Значи, за да ги обуе сите чевли на Цаци и требаат $2550 + 50 = 2600$ сек. Конечно, за собување и треба десет пати пократко време, односно

$2600:10=260$ сек.

35. Вангел и Матеј учествувале на маратон. Првата половина од патот Вангел трчал со брзина два пати поголема од брзината на Матеј, а втората половина од патот Вангел трчал со брзина два пати помала од брзната на Матеј. Матеј целата патека ја претрчал со константна брзина и трката ја завршил за 4 часа. За кое време Вангел ја завршил трката?
Решение. Матеј целиот пат го поминал за 4 часа. Значи, половина од патот тој поминал за 2 часа. Првата половина од патот Вангел трчал два пати побрзо од Матеј, што значи дека тој првата половина од патот ја минал за $2:2=1$ час. Втората половина од патот Вангел трчал два пати поспоро од Матеј, што значи дека тој втората половина од патот ја минал за $2\cdot 2=4$ часа. Значи, Вангел трката ја завршил за $1+4=5$ часа.

36. Андреј живее далеку од училиштето, но понекогаш на училиште оди и се враќе пешки. Тој забележал, дека ако патува со автобус во двете насоки му требаат 40 минути, а ако користи автобус само во едната насока му треба 1 час и 30 минути. Колку време му треба на Андреј пешки да го помине растојанието од дома до училиште и обратно?
Решение. Бидејќи Андреј во двете насоки патува 40 минути, тој во едната насока ќе патува $40:2=20$ минути. Бидејќи кога оди со автобус и пешки му требаат 1 лас и 30 минути, едната насока пешки ја поминува за 1 час и 10 минути. Конечно, Андреј патува пешки во двете насоки 2 часа и 20 минути.

37. Збирот на годините на возраста на сите ученици во една група е 56. По две години збирот на нивните години на возраст ќе биде 70. Колку деца има во таа група ученици?
Решение. По две години збирот на годините на учениците се зголемил за $70-56=14$. Бидејќи на секој ученик бројот на годините му се зголемил за 2, добиваме дека во групата има $14:2=7$ деца.

38. Збирот на годините на Ана и Бојан е 40, а Бојан е четири пати постар од Ана. По колку години Бојан ќе биде два пати постар од Ана?
Решение. Бидејќи Бојан е четири пати постар од Ана, збирот на нивните години е пет пати поголем од бројот на годините на Ана. Значи,

Ана има $40:5=8$ години, а Бојан има $40-8=32$ години.
По x години Бојан ќе има $32+x$, а Ана ќе има $8+x$ години. Ако Бојан е двапати постар од Ана, тогаш ќе важи $2(8+x)=32+x$, т.е. $16+2x=32+x$, од каде добиваме $x=16$.

39. Збирот на годините на мајката и ќерката е 26. Колку години има мајката, а колку години има ќерката, ако бројот на годините на мајката е еднаков на бројот на месеците на ќерката?
Решение. Бидејќи годината има 12 месеци, мајката е 12 пати постара од ќерката. Ако ќерката има x години, тогаш мајката има $12x$ години. Значи, $x+12x=26$, т.е. $13x=26$, од каде добиваме $x=2$. Значи, ќерката има 2 години, а мајката има $26-2=24$ години.

40. Пред 8 години Дамјан беше три пати постар отколку сега. Колк години има сега Дамјан?
Решение. Ако пред 8 години Дамјан имал x години, тој сега има $x+8$ години. Но, според условот на задачата, Дамјан сега е три пати постар отколку пред 8 години, што значи дека има $3x$ години. Затоа $x+8=3x$, од каде добиваме $x=4$. Според тоа, Дамјан сега има $4+8=12$ години.

41. Мајката на Теодор сега има 30 години, а нејзините три деца имаат 4, 3 и 1 година. По 12 години збирот на годините на родителите на Теодор ќе биде два пати поголем од збирот на годините на трите деца. Колку години има сега таткото на Теодор?
Решение. По 12 години мајката на Теодор ќе има $30+12=42$ години, а децата ќе имаат $4+12=16, 3+12=15$ и $1+12=13$ години. Збирот на годините на децата ќе биде $16+15+13=44$ годин, а збирот на годините на нивните родители ќе биде $2\cdot 44=88$ години. Значи, по 12 години таткото на Теодор ќе има $88-42=46$ години. Конечно, денес таткото на Теодор има $46-12=34$ години.

42. Дедото сега има 62 години, неговата ќерка има 36 години, внукот има 8 години и внуката има 6 години. По колку години збирот на годините на ќерката, внукот и внуката ќе биде еднаков на годините на дедото?
Решение. Сега збирот на годините на ќерката, внукот и внуката е $36+8+6=50$, што значи дека тие заедно имаат $62-50=12$ години

помалку од дедото. Секоја година збирот на годините на ќерката, внукот и внуката се зголемува за 3, а годините на дедото за 1. Според тоа, разликата во годините на дедото и збирот на годините на ќерката, внукот и внуката годишно се намалува за $3-1=2$. Значи, по $12:2=6$ години збирот на годините на ќерката, внукот и внуката ќе биде еднаков на годините на дедото.

43. На планетата Ајмез денот се нарекува *NED*, часот се нарекува *SAC*, минутата *NIM*, а секундата *KES*. Еден *NED* трае десет *SAC*-ови, еден *SAC* трае десет *NIM*-ови, а еден *NIM* трае осум *KES*-ови. Колку земски секунди трае 1 ајмезски *KES*, ако 1 *NED* трае како и 1 ден?

Решение. Имаме

$1\ NED=10\ SAC=10\cdot 10\ NIM=100\ NIM=100\cdot 8\ KES=800\ KES$ и

$1\ den=24\ h=24\cdot 60\ \min=1440\ \min=1440\cdot 60\ s=86400\ s$.

Бидејќи $1\ NED$ трае колу и $1\ den$ имаме $800\ KES=86400\ s$, од каде добиваме $1\ KES=86400:800=108\ s$.

44. Еден семафор работи на следниот начин: зелено свети 17 секунди, жолто 4 секунди, црвено 11 секунди, жолто 4 секунди, потоа повторно зелено 17 секунди, жолто 4 секунди, црвено 11 секунди, жолто 4 секунди и така цел ден. Колку минути во текот на целиот ден на семафорот ќе свети зелено?

Решение. Еден циклус зелено-жолто-црвено-жолти трае

$$17+4+11+4=36 \text{ секунди.}$$

Бидејќи $1\ h=60\ \min=60\cdot 60\ s=3600\ s$, во текот на $1\ h$ ќе имаме повторување од $3600:36=100$ циклуси. Бидејќи еден ден има $24\ h$,во текот на еден ден ќе имаме $24\cdot 100=2400$ циклуси. Но, во еден циклус зелено свети $17\ s$, па затоа во текот на еден ден зелено ќе свети

$$2400\cdot 17\ s=40800\ s=40800:60\ \min=680\ \min.$$

45. За три дена две верверички собрале 100 лешници. За колку дена три верверички ќе соберат 250 лешници?

Решение. Бидејќи 2 верверички за 3 дена собираат 100 лешници, заклучуваме дека 1 верверичка за 3 дена ќе собере $100:2=50$ лешници. Тоа значи дека 3 верверички за 1 ден ќе соберат 50 лшници. Значи, за 3 верверички да соберат 250 лешници ќе им бидат потребни

$250:50=5$ дена.

46. Во работилницата за играчки се произведуваат 198 дрвени автомобилчиња дневно. Менаџерот одлучил од денеска за 6 дена да се произведуваат толку автомобилчиња колку што досега се произведувале за 8 дена. Колку автомобилчиња сега ќе се произведат за 100 работни дена?

Решение. Досега за 8 работни дена се произведувале $8\cdot198=1584$ автомобилчиња. Сега за еден ден ќе се произведуваат $1584:6=264$ автомобилчиња. Значи, сега за 100 работни дна ќе се произведат $100\cdot264=26400$ автомобилчиња.

47. Група од 10 работници може да ископа еден канал за 12 дена. За колку дена ќе биде ископан каналот, ако дополнително се вработат уште 5 работници?

Решение. Јасно, два пати помалку работници каналот ќе го ископаат за два пати подолго време. Бидејќи $5=10:2$, заклучуваме дека 5 работници каналот ќе го ископаат за два пати подолго време од 10 работници, односно за $12\cdot2=24$ дена.

Понатаму, три пати повеќе работници каналот ќе го ископаат за три пати пократко време. Со вработувањето на уште 5 работници, имаме $10+5=15$ работници. Бидејќи $15=3\cdot5$ овие 15 работници каналот ќе го ископаааат за три пати пократко време од 5 работници, што значи дека каналот ќе го ископаат за $24:3=8$ дена.

48. Хотел има три базени A,B и C кои со вентили може да се поврзат или да се одделат. За полнење на базените се користат неколку еднакви цевки. Кога сите три базени се поврзани, нивното полнење со вода од трите цевки трае 18 минути. Ако се поврзат само базените A и B, нивното полнење со помош на две цевки трае 21 минута, а ако се поврзат само базените C и B, нивното полнење со помош на две цевки трае 14 минути. Колку секунди трае полнењето на базенот B со помош на една цевка?

Решение. Една цевка ги полни базените A,B и C за $3\cdot18=54$ минути. Една цевка ги полни базените A и B за $2\cdot21=42$ минути, а базените C и B за $2\cdot14=28$ минути.

Значи, една цевка го полни само базенот C за $54-42=12$ минути, а само базенот A за $54-28=26$ минути. Конечно, една цевка го полни

само базенот B за $54-(12+26)=16$ минути, односно за $16\cdot 60=960$ секунди.

49. Од две цевки стално тече вода. Од едната цевка истекуваат 148 литри вода за 1 час, а од другата истекуваат 148 литри за 15 минути. Колку вода истекува од двете цевки за 12 часа и 45 минути.
Решение. Бидејќи за 1 час од првата цевка истекуваат 148 литри, добиваме дека за 15 минути од првата цевка истекуваат $148:4=37$ литри вода. Значи, од двете цевки за 15 минути истекуваат $148+37=185$ литри вода. Понатаму, во 12 часа и 45 минути има $4\cdot 12+3=51$ пати по 15 минути, па затоа за 12 часа и 45 минути од двете цевки истекуваат $51\cdot 185=9435$ литри вода.

2.3. ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ И КУПУВАМЕ

50. Горјан и Андреј решиле да си купат по една иста топка. На Горјан му недостасуваат 200 денари, а на Андреј му недостасуваат 300 денари. Затоа решиле заедно да купат една топка. По купувањето на топката им останале 600 денари. Колку пари чини топката?
Решение. Андреј му дал 200 денари на Горјан за да ја плати топката, по што му преостанале 600 денари. Значи, Андреј имал $200+600=800$ денари. Бидејќи на Андреј му недостасувале 300 денари за да ја купи топката, заклучуваме дека топката чини $800+300=1100$ денари.

51. Ако Горјан купи 8 моливи, ќе му останат 4 денари, а ако сака да купи 9 моливи, ќе му недостасуваат 5 денари. Колку пари има Горјан?
Решение. За да го купи деветтиот молив Горјан треба да даде 4 денари кои му преостануваат по купувањето на 8 моливи и уште 5 денари кои му недостасуваат за да купи 9 моливи. Значи, еден молив чини $4+5=9$ денари. Според тоа, Горјан има $8\cdot 9+4=76$ денари.

52. Ако Андреј со парите што ги има купи 11 тетратки, ќе му преостанат 140 денари, а за да купи 15 тетратки му се потребни уште 100 денари. Колку пари има Андреј?
Решение. За да купи $15-11=4$ тетратки, на Андреј му се потребни $140+100=240$ денари. Значи, една тетратка чини $240:4=60$ денари.

Конечно, Андреј има $11 \cdot 60 + 140 = 660 + 140 = 800$ денари.

53. Во една пекара еден ден се продадени 2300 кифли по цена од 35 денари и 1750 банички по цена од 48 денари. Од кој производ е остварен поголем промет и за колку пари?
Решение. Од продажбата на кифлите се остварени $2300 \cdot 35 = 80500$ денари, а од баничките се остварени $1750 \cdot 48 = 84000$ денари. Значи, поголем промет е остварен од баничките и тоа за $84000 - 80500 = 3500$ денари.

54. Молив и гума заедно чинат 36 денари. Три моливи и пет гуми заедно чинат 136 денари. Колку пари треба да ми вратат, ако купам пет моливи и три гуми и платам со банкнота од 200 денари?
Решение. Осум моливи и осум гуми заедно чинат $8 \cdot 36 = 288$ денари. Бидејќи три моливи и пет гуми заедно чинат 136 денари, а осум моливи и осум гуми заедно чинат 288 денари, добиваме дека пет моливи и три гуми заедно чинат $288 - 136 = 152$ денари. Според тоа, ако платам со банкнота од 200 денари, треба да ми вратат $200 - 152 = 48$ денари.

55. По новогодишните празниците, Ана и Вангел добиле 2000 денари од родителите. Тие направиле план да потрошат една четвртина од парите за топка, а една третина од остатокот за кукла. Колку пари ќе им останат, откако ќе ги купат топката и куклата?
Решение. За купување на топката планирале да потрошат $2000 : 4 = 500$ денари. По купувањето на топката ќе им останат $2000 - 500 = 1500$ денари. За купување на куклата се наменети $1500 : 3 = 500$ денари. Значи, на крајот ќе им останат $1500 - 500 = 1000$ денари.

56. Доротеа за својот нов стан купила фрижидер, телевизор и машина за перење. Трите апарати заедно чинела 80000 денари. Колку чини секој апарат, ако фрижидерот е 8900 денари поскап од машината за перење, а телевизорот е 6200 денари поефтин од фрижидерот?
Решение. Ако цената на машината за перење ја означиме со x, тогаш цената на фрижидерот е $x + 8900$, а цената на телевизорот е $x + 2700$ денари. Според тоа, $x + x + 8900 + x + 2700 = 80000$, од каде наоѓаме $x = 22800$. Значи, машината за перење чини 22800 денари, телевизорот чини 25500 денари и фрижидерот чини 31700 денари.

57. Седум исти тетратки чинат 749 денари, а шест исти моливи чинат 324 денари. Андреј купил три вакви тетратки и седум вакви моливи. Колку платил Андреј?

Решение. Една тетратка чини $749:7=107$ денари. Еден молив чини $324:6=54$ денари. Вкупната цена на три вакви тетратки и седум вакви моливи е $3\cdot 107+7\cdot 54=321+378=699$ денари.

Значи, Андреј платил 699 денари.

58. Две кифли, два переци и ќеврек вкупно чинат 174 денари. Два переци, кифла и ќеврек вкупно чинат 126 денари. Две кифли, перек и ќеврек вкупно чинат 146 денари. Колку чини кифла, колку перек и колку ќеврек?

Решение. Вкупната цена на две кифли, два переци и ќеврек и вкупната цена на два переци, кифла и ќеврек се разликуваат во цената на една кифла. Затоа една кифла чини $174-126=48$ денари.

Вкупната цена на две кифли, два переци и ќеврек и вкупната цена на две кифли, перек и ќеврек се разликуваат за цената на еден перек. Значи, еден перек чини $174-146=28$ денари.

Конечно, цената на еден ќеврек е $146-2\cdot 48-28=22$ денари.

59. Андреј веќе осум години е претплатен на едно списание. Првата година претплатата била 1200 денари. Следните шест години претплатата се зголемувала за 40 денари годишно. Ако Андреј за осум години вкупно платил 10840 денари, за колку претплатата пораснала во осмата година.

Решение. Првата година преплатата била 1200 днари, втората година била $1200+40=1240$ денари, третата била $1240+40=1280$ денари, четвртата била $1280+40=1320$ денари, петтата $1320+40=1360$ денари, шестата $1360+40=1400$ денари и седмата $1400+40=1440$ денари. Значи, за првите седум години Андреј платил

$$1200+1240+1280+1320+1360+1400+1440=9240 \text{ денари.}$$

Значи, претплатата во осмата година била $10840-9240=1600$ денари и таа во однос на седмата година пораснала за $1600-1440=160$ денари.

60. Филип отишол во луна парк, каде првото возење на рингишпил чини 150 денари, а секое следно возење чини 5 денари помалку од претходното. Колку е најголемиот број возења што може Филип да ги

направи ако со себе понел 1000 денари.

Решение. *Прв начин*. Возењата на Филип последователно чинеле: 150 денари, 145 денари, 140 денари, 135 денари,125 денари, 120 денари, 115 денари, 110 денари итн. Вкупните цени на возењата се дадени во долната табела:

Број на возења	1	2	3	4	5	6	7	8
Цена	150	295	435	570	700	825	940	>1000

Значи, со 1000 денари Филип може да се вози најмногу 7 пати.

Втор начин. Бидејќи $1000=150\cdot 6+100$ без попуст Филип може да се вози најмногу 6 пати. Но, во овие шест возења тој има пет попусти соодветно од 5, 10, 15, 20 и 25 денари, т.е. вкупно има попуст од 75 денари. Значи, по шестото возење Филп има $100+75=175$ денари. Седмото возење чини $150-6\cdot 5=120$ денари, па за осмото возење кое чини $120-5=115$ денари Филип нема да има пари. Значи, вкупниот број возења е 7.

61. Во благајната на благајничката Ѓурѓа се наоѓаат банкноти од 100 денари и 10 денари и монети од 5 денари, 2 денари и 1 денар. Во благајната вкупно има 1844 денари. Бројот на банкнотите од 100 денари е еднаков на шестина од бројот на банкнотите од 10 денари, а бројот на монетите од 5 денари е половина од бројот на банкнотите од 10 денари. Бројот на монетите од 1 денар е еднаков на третина од вкупниот број монети од 2 денари и 5 денари заедно, а бројот на монетите од 2 денари е за шест поголем од бројот на монетите од 5 денари. Колку вкупно монети и банкноти има во касата?

Решение. Со x да го означиме бројот на банкнотите од 100 денари. Тогаш бројот на банкнотите од 10 денари е $6x$, бројот на монетите од 5 денари е $3x$, бројот на монетите од 2 денари е $3x+6$, а бројот на монетите од 1 денар е една третина од $3x+3x+6=6x+6$, односно е еднаков на $2x+2$. Оттука следува дека во благајната имаме

$$100x+10\cdot 6x+5\cdot 3x+2\cdot(3x+6)+1\cdot(2x+2)=183x+14$$

денари. Затоа, $183x+14=1844$, од каде добиваме $x=10$.

Конечно, во благајната има 10 банкноти од 100 денари, 60 банкноти од 10 денари, 30 монети од 5 денари, 36 монети од 2 денари и 22 монети од 1 денар. Значи, вкупно има $10+60+30+36+22=158$ монети и банкноти.

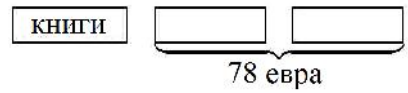
62. Трговецот Марко купил таблети по цена од 185 евра за три таблети.

Тој таблетите ги продава поединечно по цена од 150 евра за таблет. Колку таблети треба да продаде Марко за да заработи 10600 евра?

Решение. Ако Марко продаде три таблети, тогаш неговата заработка е $3 \cdot 150 - 185 = 265$ евра. За да заработи 10600 евра, Марко треба да продаде $10600 : 265 = 40$ пати по 3 таблети, т.е. тој треба да продаде $4 \cdot 3 = 120$ таблети.

63. Пабло влегол во книжарница и со третина од парите си купил книги. Потоа тој ги потрошил преостанатите 78 евра во продавницата за играчки. Колку евра вкупно потрошил Пабло?

Решение. Пабло ги поделил парите на три дела и тоа еден дел за книги и два дела за играчки (цртеж десно). Значи, Пабло за книги потрошил $78 : 2 = 39$ евра. Конечно, Пабло вкупно потрошил $78 + 39 = 117$ евра.



64. Ако 16 круши чинат 2 евра, а 100 цреши чинат 3 евра, колку цреши може да се купат наместо 6 круши?

Решение. Според условот 16 круши чинат 2 евра, па ако купиме два пати помалку круши ќе купиме $16 : 2 = 8$ круши и ќе платиме 1 евро. Сега, за 3 евра можеме да купиме $3 \cdot 8 = 24$ круши. Бидејќи 100 цреши чинат 3 евра, заклучуваме дека 100 цреши чинат колку 24 круши. Но, во 24 круши има $24 : 6 = 4$ групи од по 6 круши, па затоа ако наместо 6 круши се купат цреши, ние можеме да купиме $100 : 4 = 25$ цреши.

65. На својот роденден Петранка ги поканила сите деца од своето одделение. Децата собрале 168 евра за подарок, при што секое дете дало по 7 евра. Колку момчиња има во одделението на Петранка, ако на роденденот девојчињата биле 7 повеќе од момчињата?

Решение. На роденденот имало $168 : 7 = 24$ гости, што значи 25 деца. Девојчињата биле 7 повеќе од момчињата, што значи дека меѓу $25 - 7 = 18$ деца има еднаков број момчиња и девојчиња. Значи,во одделението на Петранка има $18 : 2 = 9$ момчиња.

66. На една полица се наоѓаат шест математички книги чии цени се 62, 63, 66, 68, 69 и71 евра. Пабло и Матео купиле книги од таа полица и притоа Матео потрошил четири пати повеќе пари од Пабло, а на полицата останала само една книга. Кои книги ги купил секој од нив и

колку денари платил? Кој книга е непродадена?

Решение. Сите книги заедно чинат 399 евра. Матео потроши четири пати повеќе пари од Пабло, што значи дека заедно платиле пет пати повеќе пари отколку што платил Пабло. Според тоа, вкупната вредност на купените книги е содржател на бројот 5, што е можно само ако непродадена останала книгата која чинела 69 евра.

Пабло и Матео заедно потрошиле $399 - 69 = 330$ евра. Пабло потрошил $330 : 5 = 66$ евра, а Матео 264 евра. Значи, Пабло ја купил книгата од 66 евра, а Матео ги купил книгите од 62, 63, 68 и71 евро.

67. Ангел, Бранко, Цанко и Дејан седат околу тркалезна маса (во овој редосле). Заедно имаат 1600 златници. Прво Ангел половина од своите златници ги поделил на два еднакви дела и по еден дел им дал на своите соседи лево и десно до него, додека другата половина ја задржал за себе. Потоа истото тоа го направил Бранко, потоа Цанко и на крајот Дејан. На крајот сите четворица имаат еднаков број златници. Колку златници имал Бранко на почетокот?

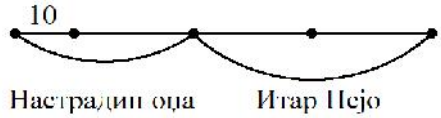
Решение. Решението на задачата е дадено во следнава табела, при што решавањето е одназад-нанапред. Имаме:

	Ангел	Бранко	Цанко	Дејан
Број на златници на крајот	400	400	400	400
Број на златници по 3. чекор	200	400	200	800
Број на златници по 2. чекор	200	300	400	700
Број на златници по 1. чекор	50	600	250	700
Број на златници на почетокот	100	575	250	675

Значи, Бранко на почетокот имал 575 златници.

68. Итар Пејо и Настрадин Оџа поделиле торба со златници. Настрадин Оџа зел 10 златници и третина од преостанатите златници, а Итар Пејо зел половина од златниците и уште 2 златника. Колку златници имало во торбата?

Решение. Настрадин Оџа зел 10 златници и третина од преостанатите златници. Со една отсечка да означиме 10 златници и другите златници да ги поделиме на три еднакви отсечки (види цртеж).



Откако Настрадин Оџа зел 10 и една отсечка златници, Итар Пејо ги

зел другите златници, означени со две отсечки. Од друга страна, Итар Пејо добил половина од златниците и уште два златника. Значи, Настрадин Оџа добил половина од златниците без два златника. Ова значи дека Итар Пејо добил 4 златника повеќе од Настрадин Оџа. Според тоа, една отсечка означува $10+4=14$ златника, а вкупниот број златници во торбата е $10+3\cdot 14=52$.

69. За неговиот седми роденден Пинокио од Штурецот добил сребрени монети, од Ѓепето добил златни монети и од Вилата добил монети од платина. Бројот на едниот вид монети бил точно 77. Златните монети биле 5 пати повеќе од сребрените, а сребрените монети биле 3 пати помалку од монетите од платина. Колку вкупно монети добил Пинокио?

Решение. Ако Пинокио добил 77 златни монети, тогаш сребрените монети треба да се 5 пати помалку од 77, што не е можно бидејќи 77 не се дели без остаток со 5. Ако Пинокио добил 77 монети од платина, тогаш сребрените монети треба да се 3 пати помалку од 77, што не е можно бидејќи 77 не се дели без остаток со 3. Значи, Пинокио добил 77 сребрени монети и вкупно добил $5\cdot 77+77+3\cdot 77=693$ монети.

2.4. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

70. Јаже со должина $60\,m$ е расечено на еднакви делови со должина $3\,m$. Од така добиени јажиња шест се пресечени на делови со должина $10\,cm$, шест на делови со должина $5\,cm$, а преостанатите на делови со должина $6\,cm$. Колку вкупно сечења се направени?

Решение. Ако деловите се со должина $3\,m$, тогаш имаме $60:3=20$ делови. За добивање на овие 20 делови се потребни 19 сечења.

Шест делови со должина $3\,m$ се исечени на делови со должина $10\,cm$, што значи дека од секој дел со должина $3\,m=300\,cm$ се добиени $300:10=30$ делови. За добивање на овие 30 делови се потребни 29 сечења. Значи, за сечење на шесте јажиња се потребни $6\cdot 29=174$ сечења.

Шест делови со должина $3\,m$ се исечени на делови со должина $5\,cm$, што значи дека од секој дел со должина $3\,m=300\,cm$ се добиени

$300:5=60$ делови. За добивање на овие 60 делови се потребни 59 сечења. Значи, за сечење на шесте јажиња се потребни $6\cdot 59=354$ сечења.

Остатокот од $20-6-6=8$ делови со должина $3\,m$ се исечени на делови со должина $6\,cm$, што значи дека од секој дел со должина $3\,m=300\,cm$ се добиени $300:6=50$ делови. За добивање на овие 50 делови се потребни 49 сечења. Значи, за сечење на осумте јажиња се потребни $8\cdot 49=392$ сечења.

Конечно, вкупниот број сечења е $19+174+354+392=939$.

71. Кошница со 1 чоколадо има маса 180 грама, а иста таква кошница со 5 исти такви чоколади има маса 500 грама. Колкава е масата на празната кошница?

Решение. Разликата во масите на кошницата со 1 чоколадо и кошницата со 5 чоколади се должи на четирите чоколади повеќе во втората кошница. Според тоа, масата на $5-1=4$ чоколади е еднаква $500-180=320\,g$. Значи, 1 чоколада има маса $320:4=80\,g$, па затоа масата на празната кошница е еднаква на $180-80=100\,g$.

72. Дедо Стојан засеал две ниви со пченица. Од првата нива која имала површина 80 декари, добил принос $500\,kg$ од декар, а од втората нива која имала површина 120 декари добил принос $450\,kg$ од декар. Колку килограми од декар добил просечно дедо Стојан од двете ниви?

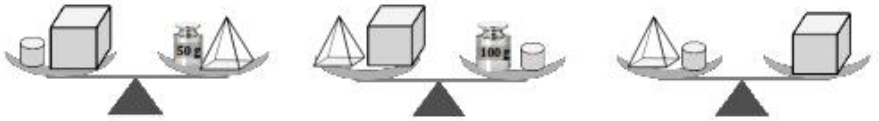
Решение. Дедо Стојан вкупно засеал $120+80=200$ декари, а ожнеал вкупно $80\cdot 500+120\cdot 450=40000+54000=94000\,kg$ пченица. Значи, тој од двете ниви добил просечен принос од $94000:200=470\,kg$ од декар.

73. Мечокот Мендо во текот на секое лето се здебелува $5\,kg$, а во текот на секоја зима слабее по $4\,kg$. Негавата маса не се менува во текот на пролетта и есента. Есента 2021 година неговата маса била $100\,kg$. Колкава била масата на Мендо во пролетта 2018 година?

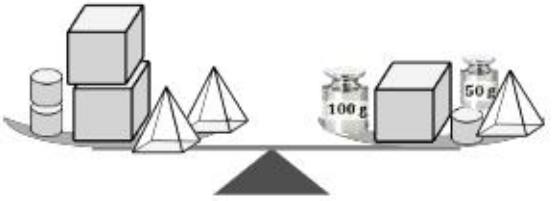
Решение. Мечокот Мендо во текот на една година ја зголемува масата за $5-4=1\,kg$. Бидејќи есента 2021 година неговата маса била $100\,kg$, тој пролетта 2021 година имал маса $100-5=95\,kg$. Од пролетта 2021 до пролетта 2018 година има 3 години, па затоа пролетта 2018 година

Мендо имал маса $95-3=92\ kg$.

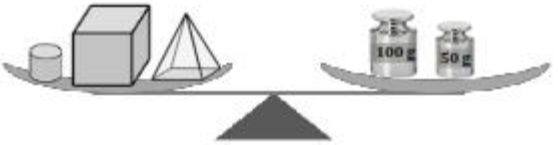
74. Горјан си играл со модели на коцка, цилиндар и конус, и со тегови ставајќи ги на вага. На теговите е запишана нивната маса. Ако вагите на долните цртежи со во рамнотежа, определи ја вкупната маса на коцката, цилиндарот и пирамидата.



Решение. *Прв начин*. Нека на левиот тас ги ставиме сите предмети од левите тасови на трите ваги, а на десниот тас ги ставиме сите предмети од десните тасови на трите ваги. Тогаш добиваме:

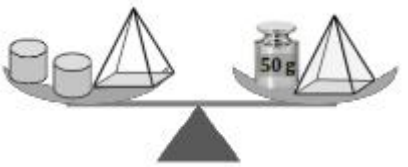


Ако од секој од двата таса отстраниме по една коцка, цилиндар и пирамида, добиваме



Според тоа, вкупната маса на коцката, цилиндарот и пирамидата е еднаква на $100+50=150\ g$.

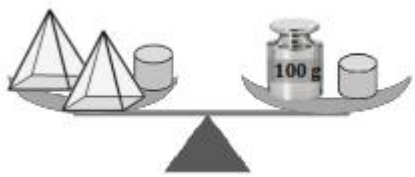
Втор начин. Од третиот цртеж гледаме дека масата на коцката е еднаква на масата на цилиндарот и пирамидата. Ако на првата вага наместо коцката ставиме цилиндар и пирамида ја добиваме состојбата прикажана на цртежот лево. Ако сега од секој тас на вагата извадиме по една пирамида, добиваме дека два цилиндари имаат маса $50\ g$, па затоа еден цилиндар има маса $25\ g$.



Ако на втората вага ја замениме коцката со цилиндар и пирамида, ја добиваме состојбата прикажана на цртежот десно. Сега, аналогно како

погоре добиваме дека една пирамида има маса $50\ g$.

Коцката има маса колку цилиндарот и пирамидата заедно, односно $25+50=75\ g$. Конечно коцката, цилиндарот и пирамидата заедно имаат маса $25+50+75=150\ g$.



75. Во првата бочва има 75 литри, во втората 34 литри, а во третата 21 литар вода, при што ниту една бочва не е полна. Ако првата бочва ја наполниме до врвот со вода од втората бочва, тогаш преостанатата вода во втората бочва зафаќа половина од волуменот на втората бочва. Но, ако втората бочва ја наполниме со вода од третата бочва, тогаш преостанатата вода во третата бочва ќе зафаќа четвртина од волуменот од третата бочва. Ако пак третата бочва ја наполниме со вода од првата бочва, тогаш преостанатата вода во првата бочва ќе зафаќа половина од волуменот на првата бочва. Определи го волуменот на секоја од трите бочви.

Решение. Нека во првата, втората и третата бочва соодветно се потребни x, y и z литри вода за да истите се дополнат. Според тоа, волумените на првата, втората и третата вода соодветно се $75+x$, $34+y$ и $21+z$ литри вода.

Кога од втората бочва ќе ја дополниме првата бочва, во втората бочва ќе преостанат $34-x$ литри вода, па како ова е половина од волуменот на втората бочва добиваме $2(34-x)=34+y$, т.е. $34=2x+y$. Кога од третата бочва ќе ја дополниме втората бочва, во третата бочва ќе преостанат $21-y$ литри вода, па како ова е четвртина од волуменот на третата бочва добиваме $4(21-y)=21+z$, т.е. $63=4y+z$. Понатаму, кога третата бочва ќе ја надополниме со вода од првата бочва, во првата бочва ќе преостанат $75-z$ литри вода и како ова е половина од волуменот на првата бчва добиваме $2(75-z)=75+x$, односно $75=2z+x$. Така го добивме системот равенки

$$\begin{cases} 2x+y=34, \\ 4y+z=63, \\ x+2z=75. \end{cases}$$

Од првата равенка имаме $y=34-2x$, па ако замениме во втората добиваме $4(34-2x)+z=63$, односно $z=8x-73$. Сега, ако замениме

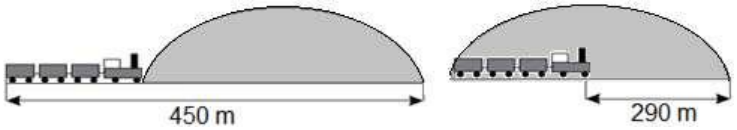
во третата равенка, наоѓаме $x+2(8x-73)=75$, т.е. $17x=221$. Значи, $x=13$ и сега лесно добиваме дека $y=8$ и $z=31$.

Конечно, волумените на бочвите се 88 литри на првата, 42 литри на втората и 52 литри на третата.

76. Цената на еден килограм ореви е 247 денари. Елена купила $2\,kg$ ореви и $4\,kg$ лешници, за што вкупно платила 2114 денари. Колку чини $1\,kg$ лешници.

Решение. За $2\,kg$ ореви Елена платила $2\cdot 247=494$ денари. Според тоа, $4\,kg$ лешници чинат $2114-494=1620$ денари. Значи, еден килограм лешници чини $1620:4=405$ денари.

77. Според податоците дадени на долните цртежи определи ја дожината на возот.



Решение. *Прв начин*. Нека должината на возот ја означиме со x. Од десниот цртеж заклучуваме дека должината на мостот е еднаква на $x+290$. Понатаму, од левиот цртеж следува дека збирот на должините на возот и мостот е $450\,m$, па така ја добиваме равенката

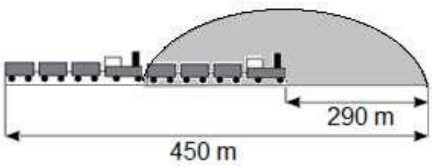
$$x+x+290=450,$$

од каде последователно добиваме

$$2x+290=450,$$
$$2x=450-290,$$
$$x=80\,m.$$

Значи, должината на возот е еднаква на $80\,m$.

Втор начин. Од дадените цртежи следува дека кога на две должини на возот ќе им се додадат $290\,m$ се добиваат $450\,m$ (види цртеж десно). Според тоа, две должини на возот се еднакви на $450-290=160\,m$, па затоа должината на возот е еднаква на $160:2=80\,m$.



78. Од два града еден кон друг тргнале два велосипедисти. Првиот се движел со брзина 20 километри на час, а вториот се движел со брзина 15 километри на час. Колкаво ќе биде растојанието меѓу нив 2 часа пред средбата?
Решение. Бидејќи велосипедистите се движат еден кон друг, тие за еден час се приближуваат $15+20$ километри. Според тоа, 2 часа пред средбата растојанието меѓу нив ќе биде $2\cdot(15+20)=70$ километри.

79. Добромир претрчал 5 километри за 16 минути и 40 секунди. Додека трчал, тој ја зголемувал брзината и секој следен километар го минувал за 5 секунди побрзо, отколку претходниот. За колку минути Добромир го пртрчал последниот километар?
Решение. Ако сите 5 километри Добромир ги трча со иста брзина како последниот километар, тогаш времето за кое претрчал 5 километри ќе биде пократко за $5+10+15+20=50$ секунди, односно ќе биде еднакво на $16\cdot 60+40-50=950$ секунди. Според тоа,последниот километар Добромир го претрчал за $950:5=190$ секунди.

80. Том поминува пат од 1020 метри за 5 минути, а Џери истиот тој пат го поминува за 3 минути. Ако тргнат истовремено, колку метри ќе биде Џери пред Том по 2 минути?
Решение. За 1 минута Том минува $1020:5=204$ метри, а Џери минува $1020:3=340$ метри за 1 минута. По една минута Џери ќе биде понапред $340-204=126$ метри, а по 2 минути тој ќе биде пред Том $2\cdot 126=252$ метри.

81. Матео оди од дома до училиштето со брзина од $3\,km$ на час, а се враќа од училиштето до дома со брзина $6\,km$ на час. Од дома до училиштето и обратно Матео оди 1 час. На колку метри од училиштето живее Матео?
Решение. Матео се враќа од училиштето со два пати поголема брзина отколку што оди кон училиштето. Според тоа, Матео од училиштето до дома оди за два пати пократко време од времето за кое оди од дома до училиштето. Ако времето на враќање го означиме со x, тогаш времето на одење кон училиштето е еднакво на $2x$. Според тоа, $x+2x=1\,h$, односно $3x=60\,\min$, од каде добиваме дека $x=20\,\min$. Значи, Матео од училиштето се враќа за $20\,\min$ и притоа се движи со

брзина од $6\,km$ на час. Бидејќи Матео за 1 час изминува $6\,km$, тој за $20\,\min$ ќе помине три пати пократко растојане, што значи дека Матео од училиштето живее на $6:3=2\,km=2000\,m$.

82. Велосипедист и пешак кои меѓусебно се оддалечени $1\,km$, тргнуваат истовремено еден кон друг. Велосипедистот минува 300 метри во минута, а пешакот 90 метри во минута. На колкаво растојание еден од друг ќе бидат пешакот 1 минута и 48 секунди по тргнувањето.
Решение. Велоспедистот минува 300 метри за 60 секунди, што значи дека за 1 секунда минува $300:60=5$ метри. Според тоа, тој за 1 минута и 48 секунди, односно за 108 секунди ќе помине $5\cdot 108=540$ метри. Пешакот минува 90 метри за 60 секунди, што значи дека тој ќе помине 3 метри за 2 секунди. Бидејќи $108:2=54$, за 108 секунди пешакот ќе помине $3\cdot 54=162$ метри. Значи, пешакот и велосипедистот еден кон друг ќе се приближат за $540+162=702$ метри, па тие ќе бидат на растојание $1000-702=298$ метри.

83. Растојанието меѓу градовите A и B е $440\,km$. Од A за B тргнал моторцилист со брзина $60\,km/h$, кој по стигнувањето во B без застанување тргнал назад за A. Три часа по него од A за B по истиот пат тргнал автомобил со брзина $80\,km/h$. По колку часа од тргнувањето моторциклистот ќе го сретне автомобилот?
Решение. Моторциклистот за 3 часа поминал $180\,km$, па до градот B му преостануваат да помине $440-180=260\,km$. Бидејќи тој ќе ги помине овие $260\,km$ и се враќа назад, од моментот на тргнувањето на автомобилот до средбата тие заедно ќе поминат $440+260=700\,km$. Ако времето до средбата е t часа, тогаш моторциклистот ќе помине $60t\,km$, а автомобилот ќе помине $80t\,km$, па затоа $60t+80t=700$, од каде добиваме $t=5\,h$. Значи, моторциклисот ќе го сретне автомобилот $5+3=8\,h$ по тргнувањето на моторциклистот.

84. Точно во 9 часот Пабло истовремено запалил две свеќи, чии должини се $29\,cm$ и $34\,cm$. Познато е дека $2\,mm$ од пократката свеќа изгорува за 4 минути, а $2\,mm$ од подолгата свеќа изгорува за 3 минути. По некое време Пабло забележал дека едната свеќа е подолга од другата

свеќа за $2\,cm$. Во колку часот тоа можело да се случи?

Решение. Пократката свеќа за 4 минути се намалува за $2\,mm$, што значи дека за 1 час се намалува $15\cdot 2=30\,mm=3\,cm$. Подолгата свеќа за 3 минути се намалува $2\,mm$, што значи дека за 1 час се намалува $20\cdot 2=40\,mm=4\,cm$. Почетната разлика во должините на свеќите е $34-29=5\,cm$, па затоа од палењето на свеќите ќе поминат 3 часа за да разликата биде $2\,cm$, што значи дека тоа ќе биде во 12 часот.

Меѓутоа, подолгата свеќа гори побрзо и да ја разгледаме ситуацијата кога од неа ќе остане пократок дел. Бидејќи почетната разлика во должините на свеќите е $5\,cm$, тие по 5 часа ќе имаат еднаква должина, која изнесува $34-5\cdot 4=29-5\cdot 3=14\,cm$. Сега, по 2 часа подолгата свеќа ќе изгори $2\,cm$ повеќе, што значи дека до тогаш ќе поминат вкупно $5+2=7$ часа, т.е. ќе биде 16 часот.

85. Патничкиот воз кој патува од Солун за Скопје секои 3 минути поминува $5\,km$. Друг патнички воз кој патува од Белград до Скопје секои 2 минути поминува по $3\,km$. Должината на патот на возот кој патува од Солун за Скопје е еднаква на $275\,km$, а дожината на патит на возот кој патува од Белград за Скопје е $405\,km$. Во колку часот треба да тргне возот од Белград, а во колку оној од Солун ако двата воза треба да бидат во 17 часот во Скопје, а притоа знаеме дека возот од Белград (заради лошите временски услови) на секои 30 минути доцни една минута?

Решение. На патничкиот воз од Солун до Скопје, кој на секои 3 минути поминува $5\,km$, за целиот пат му требаат $275:5\cdot 3=165\,\min$. Бидејќи $1\,h=60\,\min$, патот од Солун до Скопје трае $2\,h\,45\,\min$.

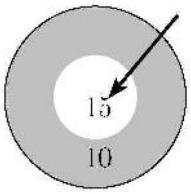
На патничкиот воз од Белград до Скопје, кој на секои 2 минути поминува $3\,km$, за целиот пат му требаат $405:3\cdot 2=270\,\min$. Бидејќи $1\,h=60\,\min$, патот од Белград до Скопје трае $4\,h\,30\,\min$. Бидејќи возот од Белград на секои $30\,\min$ доцни $1\,\min$, тој вкупно ќе доцни $4\cdot 2+1=9\,\min$. Значи, патувањето од Белград до Скопје ќе трае $4\,h\,39\,\min$.

За да возовите стигнат во Скопје во $17\,h$, возот од Солун треба да тргне во $17\,h-2\,h\,45\,\min=14\,h\,15\,\min$, а возот од Белград треба да

тргне во $17\ h - 4\ h\ 39\ \text{min} = 12\ h\ 21\ \text{min}$.

2.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

86. За погодок во центарот на метата се добиваат 15 поени, за погодок во обоениот дел на метата се добиваат 10 поени, а за промашување на метата не се добиваат поени. Кој е најмалиот број истрели со кои при погаѓање на метата може да се освојат 200 поени.



Решение. За да имаме најмал број истрели мора метата да е погодена со секој истрел и притоа да имаме најголем можен број погодоци во центарот на метата. Бидејќи $15 \cdot 14 = 210 > 200$, бројот на погодоците во центарот мора да е помал од 14.

Ако имаме 13 погодоци во центарот, тогаш бидејќи $15 \cdot 13 = 195$, треба да се освојат уште $200 - 195 = 5$ поени, што не е можно бидејќи најмалиот број поени што може да се освојат е 10.

Ако имаме 12 погодоци во центарот, тогаш ќе се освојат $15 \cdot 12 = 180$ поени, па преостанатите $200 - 180 = 20$ поени се освојуваат со следните 2 погодоци во обоениот дел од метата.

Конечно, најмалиот број истрели со кои може да се освојат 200 поени е $12 + 2 = 14$.

87. На три дрва застанале вкупно 60 канаринци. Во еден момент одлетале 6 канаринци од првото дрво, 8 од второто и 4 од третото. Се покажало дека на секое од трите дрва останал еднаков број канаринци. Колку канаринци имало на почетокот на секое дрво?

Решение. Од $6 + 8 + 4 = 18$ следува дека вкупно одлетале 18 канаринци, па на дрвата останале вкупно $60 - 18 = 42$ канаринци. Значи, на секое дрво останале $42 : 3 = 14$ канаринци. Според тоа, на почетокот на првото дрво имало $14 + 6 = 20$ канаринци, на второто дрво имало $14 + 8 = 22$ канаринци и на третото дрво имало $14 + 4 = 18$ канаринци.

88. Во една прослава присуствуваат момчиња и девојчиња. Ако момчињата се за едно повеќе, тогаш ќе има три пати повеќе момчиња од девојчиња. Ако пак има три девојчиња помалку, тогаш на прославата

ќе има 20 деца. Колку момчиња и колку девојчиња имало на прославата?

Решение. На прославата вкупно имало $20+3=23$ деца. Ако го додадеме момчето кое недостасува, добиваме 24 деца и девојчињата се три пати помалку од момчињата. Значи, девојчињата се четири пати помалку од вкупниот број деца, т.е. има $24:4=6$ девојчиња. Конечно, на прославата има $23-6=17$ момчиња.

89. За да отиде од првиот до третиот кат, во зградата во која живее, Матеј треба да искачи 48 скалила. Колку скалила треба да искачи Матеј за да отиде од првиот до шестиот кат?

Решение. Од првиот до третиот кат Матеј ги искачува скалите меѓу првиот и вториот кат, и скалите меѓу вториот и третиот кат. Значи, тој 2 пати искачува скали меѓу два соседни ката. Според тоа, скалите меѓу два соседни ката имаат по $48:2=24$ скалила. Понатаму, од првиот до шестиот кат Матеј треба 5 пати да искачи скали меѓу два соседни ката, т.е. тој треба да искачи $5\cdot 24=120$ скалила.

90. Пабло купил 15 тетратки со вкупно 550 листови. Некои тетратки имаат по 30 листови, а другите тетратки имаат по 10 листови повеќе. Колку тетратки имаат по 30 листови.

Решение. Ако сите тетратки се со по 30 листови, тогаш ќе имаме вкупно $30\cdot 15=450$ листови. Разликата од $550-450=100$ листови е кај тетратките кои содржат по 10 листови повеќе. Значи, Пабло купил $100:10=10$ тетратки со по $30+10=40$ листови и $15-10=5$ тетратки со по 30 листови.

91. Пет деца вкупно нацртале 75 цртежи, Притоа секое дете нацртало различен број цртежи и ниту едно дете не нацртало повеќе од 18 цртежи. Кој е најмалиот број цртежи што е можно да ги нацртало едно дете?

Решение. Петтото дете нацртало најмал можен број цртежи, ако другите деца нацртале најголем можен број цртежи. Бидејќи нема дете кое нацртало повеќе од 18 цртежи и секое дете нацртало различен број цртежи од другите деца, добиваме дека четирите деца нацртале најмногу 18, 17, 16 и 15 цртежи во некој редослед. Значи, првите четири деца може да нацртале најмногу $18+17+16+15=66$ цртежи, па така најмалиот број цртежи кои ги нацртало петтото дете е

$75-66=9$.

92. Горјан се занимава со конструкторство. Тој вкупно има 107 шини, наврткu, завртки и шајбни. Шините се три пати повеќе од шајбните, шајбните се два пати повеќе од навртките, а навртките се повеќе од завртките. Колку шини, наврткu, завртки и шајбни има Горјан?
Решение. За секоја наврткa Горјан има 2 шајбни, а за секои 2 шајбни тој има $3\cdot 2=6$ шини. Според тоа, Горјан има групи од по $1+2+6=9$ елементи. Бидејќи $107=11\cdot 9+8$, заклучуваме дека Горјан има најмногу 11 наврткu и во тој случај бројот на завртките е еднаков на 8. Ако бројот на навртките е 10 или помалку, тогаш Горјан ќе има најмалку $107-9\cdot 10=17$ завртки. Последното не е можно, бидејќи бројот на завртките е помал од бројот на навртките. Конечно, Горјан има 11 наврткu, $2\cdot 11=22$ шајбни, $3\cdot 22=66$ шини и 8 завртки.

93. Маша и Медо заедно набрале 40 јаболки. Маша изела 5 од јаболките во својата кошница. Потоа таа ги зела половината јаболки од кошницата на Медо и изела уште едно јаболко од својата кошница, по што Маша и Медо имале еднаков број јаболки. Колку јаболки имала Маша на почетоот, а колку имал Медо?
Решение. Маша вкупно изела $5+1=6$ јаболки и зела половина од јаболките на Медо. Сега, Медо останал со половина од своите јаболки и имал јаболки колку Маша. Значи, откако Маша изела 6 јаболки, останале само јаболките на Медо, па затоа на почетокот Медо имал $40-6=34$ јаболки, а Маша имала 6 јаболки.

94. Теодор и Теодора од градината на дедо Павле вкупно набрале 84 ореви. Теодор за себе зел поголем број ореви. Тогаш Теодора се вратила во градината и набрала уште ореви, па сега таа има 6 пати повеќе ореви отколку што имала преходно. Тогаш и двајцата имале еднаков број ореви. Колку ореви зел Теодор?
Решение. Бидејќи кога Теодора 6 пати го зголемила бројот на своите ореви, двајцата имале еднаков број ореви, заклучуваме дека на почетокот Теодор зел 6 пати повеќе ореви од Теодора. Според тоа, бројот на оревите кои заедно ги набрале на почетокот е 7 пати поголем од оревите кои ги добила Теодора. Значи, Теодора добила $84:7=12$ ореви, а Теодор зел $84-12=72$ ореви.

95. Голем запчаник со 9 запци е поврзан со мал запчаник со 6 запци. Големиот запчаник направил 12 цели завртувања. Колку пати за тоа време се завртел малиот запчаник?

Решение. Бидејќи големиот запчаник има 9 запци и се завртел 12 пати имаме $9 \cdot 12 = 108$ преклопувања на запците на двата запчаника. Но, малиот запчаник има 6 запци, па за да имаме 108 преклопувања на неговите запци со запците на големиот запчаник, тој треба да се заврти $108 : 6 = 18$ пати.

96. Теодор и Михаил од градината на нивниот дедо набраа 28 јаболки. Теодор забележа дека 3 од неговите јаболки се расипани и ги фрли. Потоа му даде на Михаил половина од своите јаболки и за себе набра уште 6 јаболки. Потоа Михаил изеде 5 од своите јаболки, по што двајцата имаат еднаков број јаболки. Колку јаболки имал Михаил на почетокот?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-нанапред. Решението е дадено во долната табела.

Услови	Михаил	Теодор	Пресметување
На крај	13	13	$(28-3+6-5):2=13$
Пред Михаил да изеде 5 јаболки	18	13	$13+5=18$
Пред Теодор да набере 6 јаболки	18	7	$13-6=7$
Пред Теодор да даде половината н Михаил	11	14	$2 \cdot 7 = 14$
Пред Теодор да фрли 3 јаболки	11	17	$14+3=17$
На почетокот	11	17	

97. Кристина отворила неколку кибрити на нејзиниот дедо и со чкорчињата почна да составува шестаголници и осумаголници. Таа со 168 чкорчиња состави 23 шестаголници и осумаголници. Колку шестаголници има меѓу составените фигури?

Решение. Ако сите фигури се шестаголници, тогаш Кристина ќе искористела $6 \cdot 23 = 138$ чкорчиња, односно $168 - 138 = 30$ чкорчиња помалку. Овие 30 чкорчиња се употребени за составување на осумаголници. Но кога од шестаголник се прави осумаголник, тогаш се додаваат $8 - 6 = 2$ чкорчиња, па затоа Кристина направила $30 : 2 = 15$ осум-

аголници. Конечно, бројот на шестаголниците е $23-15=8$.

98. Девет истражувачи планираат дванаесет дневно патување во пустина меѓу две оази. Тие треба да најмат носачи, а местните носачи можат да носат толку храна и вода, колку што се потребни на еден човек за 15 дена. Колку носачи треба да најмат истражувчите (самите тие не носат храна и вода)?
Решение. Секој носач носи храна и вода за себе и дополнително за еден истражувач за $15-12=3$ дена. На еден истражувач му се потребни храна и вода за $12\cdot 9=108$ дена. Значи, истражувачите треба да најмат $106:3=36$ носачи.

99. Ако денес изедам два пати повеќе бонбони, отколку вчера, ќе ми останат точно 10 бонбони за утре. Но, ако денес изедам 5 бонбони повеќе, одколку вчера, за утре ќе ми останат 17 бонбони. Колку бонбони имам во моментот?
Решение. Во двата случаја разликата во бројот на бонбоните кои ми остануваат за утре е 7. Значи, разликата меѓу удвоениот број на бонбоните кои вчера ги изедов и истиот број бонбони зголемен за 5 е 7. Значи, вчера сум изел $5+7=12$ бонбони. Во моментов имам $2\cdot 12+10=34$ бонбони.

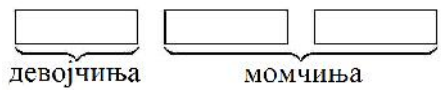
100. Вчера Илина имала полна кутија со бонбони. Ако таа денес изеде два пати повеќе бонбони, отколку вчера, ќе ѝ останат точно 15 бонбони за утре. Но, ако денес изеде 10 бонбони повеќе, одколку вчера, за утре ќе ѝ останат 12 бонбони. Колку бонбони имало во кутијата пред да ја отвори Илина?
Решение. Во двата случаја разликата во бројот на бонбоните кои ѝ остануваат за утре е 3. Значи, разликата меѓу удвоениот број на бонбоните кои вчера ги изела Илина и истиот број бонбони зголемен за 10 е 3. Значи, вчера Илина изела $10-3=7$ бонбони. Во кутијата имало $2\cdot 7+10+12=36$ бонбони.

101. Пабло има полица со десет рафтови. На најгорниот рафт има 7 книги, на рафтот под него има 17 книги итн. на секој следен рафт има по 10 книги повеќе. Колку книги има на полицата на Пабло?
Решение. На полицата на Пабло има

$$7+17+27+37+47+57+67+77+87+97=$$
$$=(7+97)+(17+87)+(27+77)+(37+67)+(47+57)$$
$$=5\cdot 104=530 \text{ книги.}$$

102. Во училиштето на Горјан вкупно имало 777 девојчиња и момчиња. Половината од момчињата и 77 девојчиња, вкупно 200 ученици отишле на екскурзија. Колку девојчиња имало во училиштето на Горјан?
Решение. На екскурзија отишле $200-77=123$ момчиња. Бидејќи половината од момчињата отишле на екскурзија, во училиштето имало $2\cdot 123=246$ момчиња. Значи, бројот на девојчињата во училиштето на Горјан е $777-246=531$.

103. Во одделението на Горјан има два пати повеќе момчиња од девојчиња. Кога само Горјан е отсутен, има 8 девојчиња помалку од момчиња. Колку ученици има во одделението на Горјан?
Решение. Кога само Горјан е отсутен има 8 девојчиња помалку од момчиња, што значи дека кога сите деца се на училипте има 9 девојчиња помалку од момчиња. Момчињата се два пати повеќе од девојчињата, т.е. ако ги наредам девојчињата во еден ред, тогаш момчињата може да се наредат во два такви реда (цртеж десно).



Значи, разликата меѓу бројот на момчињата и девојчињата е еден ред, т.е. во еден ред има 9 деца. Конечно, во целото одделение има $3\cdot 9=27$ деца.

104. Матео застанал во редот за билети за концерт. Во касата имало доволно блети за да секој што чекал во редот купи по 2 билета. Но, првите петмина купиле по 4 билети, а секој следен купувал по 3 билети, па така 30 луѓе останале без билети. Колку билети имало во касата?
Решение. За последните 30 луѓе во редот недостасувале $30\cdot 2=60$ билети. Овие 60 билети ги купиле по 2 првите 5 во редот и по 1 оние што купиле по 3 билети. Значи, по 3 билети купиле $60-5\cdot 2=50$ луѓе. Конечно, во касата имало $5\cdot 4+3\cdot 50=170$ билети.

105. Во училиштето на Горјан се запишале нови ученици и тоа четири пати повеќе момчиња од девојчиња. Од нив секое второ девојче и секое петто момче, вкупно 39 нови ученици учат германски јазик. Колку

нови ученици се запишале во училиштето на Горјан?

Решение. Меѓу новите ученици на секои 10 девојчиња има $4 \cdot 10 = 40$ момчиња. Во секоја група од $10 + 40 = 50$ нови ученици германски јазик учат вкупно $10 : 2 + 40 : 5 = 13$ ученици. Бидејќи германски јазик учат 39 ученици имаме $39 : 13 = 3$ групи по 13 ученици, што значи дека имаме 3 групи од по 50 новозапишани ученици. Значи, вкупно се $3 \cdot 50 = 150$ новозапишани ученици.

106. Горјан и Андреј заедно имаат 5 чоколади. Андреј и Пабло заедно имаат 6 чоколади, а Пабло и Матео заедно имаат 5 чоколади. Колку чоколади заедно имаат Горјан и Матео?

Решение. Горјан и Андреј заедно имаат 5 чоколади, а Пабло и Матео заедно имаат 5 чоколади. Значи, сите четворица заедно имаат 10 чоколади. Од тие 10 чоколади Андреј и Пабло заедно имаат 6, што значи дека Горјан и Матео заедно имаат 4 чоколади.

107. Андреј и Горјан изеле неколку кифлички. Андреј изел третина од сите кифлички и уште 4 кифлички, а Горјан изел третина од сите кифлички и последните две кифлички. Колку кифлички изело секое дете?

Решение. Андреј и Горјан вкупно изеле две третини од кифличките и уште $4 + 2 = 6$ кифлички, по што веќе немало кифлички. Значи,една третина од сите кифлички се 6 кифлички. Според тоа, Андреј изел $6 + 4 = 10$ кифлички, а Горјан изел $6 + 2 = 8$ кифлички.

108. На роденденот на Горјан имало 30 гости, момчиња и девојчиња. Секое момче (вклучувајќи го и Горјан) изело по 3 колачи, а секое девојче изело по 5 колачи. Вкупно биле изедени 125 колачи. Колку девојчиња имало на роденденот на Горјан?

Решение. Ако секој од 31 присутни изел по 3 колачи, тогаш на роденденот ќе биле изедени $3 \cdot 31 = 93$ колачи. Разликата од $125 - 93 = 32$ колачи ја изеле девојчињата. Бидејќи секое девојче изело по $5 - 3 = 2$ колачи од секое момче, добиваме дека на роденденот имало $32 : 2 = 16$ девојчиња.

109. Во спортска сала има 800 места за гледачи, распределени во три трибини. Во средната трибина местата се по 28 во ред. Секоја трибина има по 8 реда. Во крајните две трибини редовите имаат еднаков број места. Определи колку места има секој ред во крајните две трибини.

Решение. *Прв начин*. Во двете крајни трибини вкупно има $800-8\cdot 28=576$ места. Според тоа, секоја крајна трибина содржи по $576:2=288$ места. Но, во овие трибини има по 8 реда со еднаков број места, па затоа во секој ред има $288:8=36$ места.

Втор начин. Секоја трибина има по 8 реда, па затоа во трите трибини во секој ред вкупно има по $800:8=100$ места. Во средната трибина во секој ред има по 28 места, што значи дека во крајните трибини во секој ред вкупно има $100-28=72$ места. Значи, во секој ред на секоја крајна трибина има по $72:2=36$ места.

110. На училипната приредба има вкупно 200 ученици. Откако си заминале 111 момчиња и три пати помалку девојчиња, на приредбата останале еднаков број момчиња и девојчиња. Колку момчиња имало на почетокот на приредбата?

Решение. Од приредбата си заминале 111 момчиња и $111:3=37$ девојчиња, што значи вкупно $111+37=148$ деца. Значи, останале $200-148=52$ деца, од кои половината, односно $52:2=26$ биле момчиња. Конечно, на приредбата присуствувале вкупно $111+26=137$ момчиња.

111. Во еден двор има јаболки, круши и сливи и тоа помалку од 40 овошки. Јаболките се 3 пати повеќе од крушите и 4 пати повеќе од сливите. Колку дрва има во градината, ако на половината од нив има куќички за птици?

Решение. Бидејќи јаболките се три пати повеќе од крушите, бројот на јаболките е делив со 3, а бидејќи се 4 пати повеќе од сливите, тој е делив со 4. Значи, бројот на јаболките е делив со 12. Ако има 12 јаболки, тогаш крушите се $12:3=4$, а сливите се $12:4=3$. Значи, бројот на дрвата е $12+4+3=19$, што не е можно бидејќи тој треба да е делив со 2.

Ако има 24 јаболки (следниот број кој е делив со 12), тогаш има $24:3=8$ круши и $24:4=6$ сливи и во градината има $24+8+6=38$ дрва и овој број е делив со 2 и е помал од 40.

Ако има 36 јаболки или поголем број делив со 12, тогаш ќе има $36+36:3+36:4=57$ или поголем број дрва, што не е можно бидејќи во градината има помалку од 40 дрва.

112. За подготовка на 25 мафини, според нејзиниот рецепт на тетка Марија

и се потребни 1 чаша какао, 2 чаши масло, 3 чаши шеќер и 4 чаши брашно. Во оставата тетка Марија има 13 чаши какао, 14 чаши масло, 15 чаши шеќер и 16 чаши брашно. Кој е најголемиот број мафини што може да ги подготви тетка Марија?

Решение. Од $13:1=13$ добиваме дека тетка Марија има какао за 13 пати да направи мафини според рецептот. Понатаму, од $14:2=7$ следува дека масло има за 7 пати, од $15:3=5$ следува дека шеќер има за 5 пати и од $16:4=4$ следува дека брашно има за 4 пати да направи мафини според рецептот. Јасно, таа најмногу пати може да го направи рецептот според тоа која состојка ја има најмалку, а тоа е брашното и тоа 4 пати. Конечно, тетка Марија може да направи $4\cdot 25=100$ мафини.

113. Киро игра фудбал со своите пријатели. Колку пријатели на Киро играат фудбал, ако на игралиштето вкупно има 25 глави и нозе?

Решение. Секое дете има 1 глава и 2 нозе, па затоа бројот на децата на игралиштето е еднаков на $24:(1+2)=24:3=8$. Едно од децата е Киро, што значи дека на игралиштето има 7 пријатели на Киро.

114. Ангел, Борис и Васил вкупно имаат 30 автомобилчиња. Ангел и Васил вкупно имаат два пати повеќе автомобилчиња отколку Борис, а Васил има два пати помалку автомобилчиња отколку Борис. Колку автмобилчиња има Ангел?

Решение. Бидејќи Ангел и Васил имаат заедно два пати повеќе автомобилчиња од Борис, заклучуваме дека бројот на автомобилчиња на Борис помножен со 3 е еднаков на 30. Значи, Борис има $30:3=10$ автомобилчиња. Но, Васил има два пати помалку автомобилчиња од Борис, што значи дека Васил има $10:2=5$ автомобилчиња. Конечно, Ангел има $30-(10+5)=15$ автомобилчиња.

115. Во понеделникот Андреј решил од утре да почне да чита книга. Првиот ден прочитал 32 страници, а секој следен ден тој читал по три страници повеќе отколку претходниот. Колку вкупно страници од книгата прочитал Андреј по читањето во саботата?

Решение. Андреј во вторникот прочитал 32 страници, во средата 35 страници, во четвртокот 38 страници, во петокот 41 страница и во саботата 44 страници. Тој вкупно прочитал $32+35+38+41+44=190$ страници.

116. На три полици во собата на Матео имало 167 книги. Матео на третата полица ги ставил новите 23 книги. Потоа од третата полица префрлил на првата полица 26 книги, а сите книги од втората полица ги поклонил на училипната библиотека. Потоа на сите три полици вкупно преостанале 135 книги. Колку книги Матео поклонил на училипната библиотека?

Решение. Кога Матео на третата полица ги ставил новите 23 книги, на сите три полици вкупно имало $167+23=190$ книги. Откако ги поклонил книгите на училишната библиотека, на Матео му преостанале 135 книги. Значи, Матео на училишната библиотека и поклонил $190-135=55$ книги.

117. Додека Андреј изеде две цреши, Горјан изедува пет цреши, а додека Горјан изеде три цреши, Филип изедува седум цреши. Андреј и Филип заедно изеле 82 цреши. Коку цреши за тоа време изел Горјан?

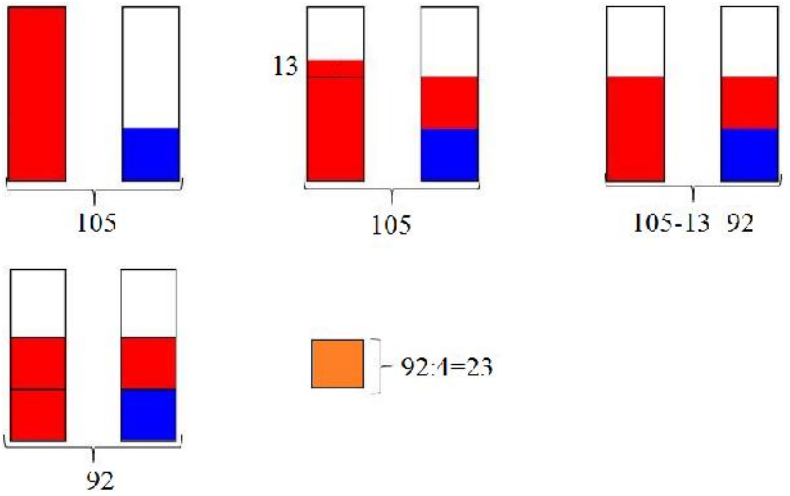
Решение. Додека Горјан изеде $3\cdot 5=15$ цреши, Андреј изедува $3\cdot 2=6$, а Филип изедува $7\cdot 5=35$. Значи, додека Горјан изеде 15 цреши, Андреј и Филип заедно изедуваат $6+35=41$ цреша. Сега, бидејќи $82:41=2$, додека Андреј и Филип заедно изедуваат 82 цреши, Горјан ќе изеде $2\cdot 15=30$ цреши.

118. Група од 23 ученици од четврто одделение е на еднодневна екскурзија. Некои од учениците тој ден требало да имаат по 4 часа, а некои по 5 часа. Сите ученици заедно имале 101 час. Колку ученици имале по 4, а колку по 5 часа?

Решение. Ако сите ученици имаат по 4 часа, тогаш вкупниот број часови ќе биде $23\cdot 4=92$. Разликата од $101-92=9$ часа се часовите на учениците кои имаат по 5 часа. Бидејќи секој од нив има $5-4=1$ час повеќе заклучуваме дека 5 часа имаат 9 ученици. Конечно, 4 часа имаат $23-9=14$ ученици. Навистина, $9\cdot 5+14\cdot 4=101$.

119. Во црвената и сината кутија вкупно има 105 топчиња. Откако од црветата куитја во сината кутија се префрлени толку топчиња колку што имало на почетокот во сината кутија, во црвената кутија имало 13 топчиња повеќе отколку во сината. Определи ја петкратната разлика на топчињата во црвената и сината кутија.

Решение. Да ги прикажеме дадените услови графички.



Во сината кутија има 23 топчиња, а во црвената има $105-23=82$ топчиња. Петкратната разлика е $5\cdot(82-23)=5\cdot 59=295$.

120. Матео почнал да решава задачи од збирката по математика во вторник и заклучно со петокот истата седмица вкупно решил 128 задачи. Задачите ги решавал така што секој ден решавал по две задачи повеќе отколку претходниот ден. Колку задачи решил во четвртокот?

Решение. Ако во Матео во вторникот решил x задачи, тогаш во средата тој решил $x+2$, вочетвртокот $x+4$ и во петокот $x+6$ задачи. Затоа $x+x+2+x+4+x+6=128$, од каде добиваме $4x+12=128$, т.е. $4x=116$. Значи, $x=116:4=29$. Конечно, Матео во четвртокот решил $x+4=33$ задачи.

121. За еден ден семејството на зајакот Ушко јаде или 2 зелки или 9 моркови или 1 зелка и 4 моркови. Ако нема доволно зелки и моркови за денот, семејството се храни со трева. Во текот на 10 дена семејството изело 9 зелки и 30 моркови. Колку од овие 10 дена семејството се хранело само со трева?

Решение. Нека во x дена семејството јадело само моркови, а во y дена јадело моркови и зелки. Од условот на задачата следува $9x+4y=30$. Ако $x=1$, тогаш $4y=21$. Последното равенство не е можно, бидејќи ниту еден број помножен со 4 не дава 21. Ако $x=2$, тогаш $4y=12$, од каде добивае $y=3$. Понатаму, за $x\geq 3$ добиваме $4y\leq 30-27=3$, што не е можно. Значи, $x=2$ и $y=3$. Во деновите

кога семејството јадело по 4 моркови тоа јадело по 1 зелка, т.е. семејството изело 3 зелки. Значи, останале $9-3=6$ зелки и истите се изедени за $6:2=3$ дена. Според тоа, семејството на зајакот Ушко се хранело со зелка и моркови во $2+3+3=8$ дена, што значи дека со трева се хранело $10-8=2$ дена.

122. На еден натпревар учествувале 225 ученици. Ако кон двократниот број на момчиња се додаде трикратниот број на девојчиња ќе се добие бројот 532. Колку момчиња и колку девојчиња учествувале на овој натпревар.

Решение. *Прв начин*. Двократниот број на учесници на натпреварот е еднаков на $2\cdot 225=450$. Ако на овој број се додаде бројот на девојчиња кои учествувале на натпреварот ќе се добие збирот на двократниот број момчиња и трикратниот број девојчиња кои учествувале на натпреварот, т.е. ќе се добие бројот 532. Значи, на натпреварот учествувале $532-450=82$ девојчиња. Според тоа, бројот на момчињата кои учествувале на натпреварот е еднаков на $225-82=143$.

Втор начин. Нека на натпреварот учествувале x девојчиња. Тогаш бројот на момчињата кои учествувале на натпреварот е еднаков на $225-x$. Од условот на задачата следува $3x+2(225-x)=532$, од каде добиваме $x=82$. Значи, на натпреварот учествувале 82 девојчиња и $225-82=143$ момчиња.

123. На натпревар во класични танци учествувале 22 танцувачки парови (еден пар се состои од дама и кавалер). Дамите, кои танцувале со црвени чевли, се два пати повеќе од дамите кои танцувале со жолти чевли, а тие се за 2 повеќе од дамите кои танцувале со црни чевли. Колку дами танцувале со црвени чевли?

Решение. Ако дамите со жолти чевли биле a, тогаш со црни чевли танцувале $a-2$, а со црвени чевли танцувале $2a$ дами. Според тоа, $a+a-2+2a=22$, од каде добиваме $a=6$. Значи, дами со црвени чевли биле $2a=12$.

124. Пабло имал два пати повеќе јаболки од круши. Тој изел 16 јаболки и 5 круши, по што му останале два пати повеќе круши од јаболки. Колку јаболки и колку круши имал Пабло?

Решение. *Прв начин*. Нека Пабло имал x круши. Тогаш бројот на јаболките е $2x$. Откако изел 16 јаболки и 5 круши, на Пабло му пре-

останале $2x-16$ јаболки и $x-5$ круши. Но, сега бројот на крушите е два пати поголем, па затоа важи $x-5=2(2x-16)$, од каде добиваме $x-5=4x-32$, односно $x=9$. Значи, на почетокот Пабло имал 9 круши и $2\cdot 9=18$ јаболки.

Втор начин. Нека на крајот Пабло имал a јаболки. Тогаш тој имал $2a$ круши. Според тоа, Пабло на почетокот имал $a+16$ јаболки и $2a+5$ круши. Но, бројот на јаболките на почетокот бил два пати поголем од бројот на крушите, па затоа важи $a+16=2(2a+5)$, од каде добиваме $a+16=4a+10$, т.е. $a=2$. Значи, на почетокот Пабло имал $2+16=18$ јаболки и $2\cdot 2+5=9$ круши.

125. Пабло имал два пати повеќе јаболки од круши. Тој изел 15 јаболки и 3 круши, по што му останале два пати повеќе круши од јаболки. Колку јаболки и колку круши имал Пабло?

Решение. *Прв начин*. Нека Пабло имал x круши. Тогаш бројот на јаболките е $2x$. Откако изел 15 јаболки и 3 круши, на Пабло му преостанале $2x-15$ јаболки и $x-3$ круши. Но, сега бројот на крушите е два пати поголем, па затоа важи $x-3=2(2x-15)$, од каде добиваме $x-3=4x-30$, односно $x=9$. Значи, на почетокот Пабло имал 9 круши и $2\cdot 9=18$ јаболки.

Втор начин. Нека на крајот Пабло имал a јаболки. Тогаш тој имал $2a$ круши. Според тоа, Пабло на почетокот имал $a+15$ јаболки и $2a+3$ круши. Но, бројот на јаболките на почетокот бил два пати поголем од бројот на крушите, па затоа важи $a+15=2(2a+3)$, од каде добиваме $a+15=4a+6$, т.е. $a=3$. Значи, на почетокот Пабло имал $3+15=18$ јаболки и $2\cdot 3+3=9$ круши.

126. Тројца математичари патувале во различни вагони на еден воз. При влегувањето во една железничка станица секој од нив почнал да ги брои светилките на перонот, покрај кои минувал неговиот вагон. Тие пребројале соодветно 17, 22 и 26 светилки. При одењето од станицата одново почнале да ги бројат светилките, при што едниот сега избројал три пати повеќе светилки од еден од другите двајца. Колку светилки избројал секој патник при излегувањето од станицата.

Решение. Математичарот чиј вагон е најблиску до локомотивата при влегувањето во станицата избројал најмногу светилки, т.е. 26. Ако при одењето од станицата тој избројал x светилки, тогаш на перонот има

$x+26$ светилки. Сега, вториот математичар при одењето од станицата избројал $x+26-22=x+4$, а третиот избројал $x+26-17=x+9$ светилки.

Меѓу броевите $x, x+4, x+9$ има еден кој е три пати поголем од другиот, па затоа нивната разлика е парен број. Единствен пар броеви чија разлика е парен број се броевите $x+4$ и x, па затоа $x+4=3x$, од каде добиваме $x=2$. Конечно, при одењето од станицата првиот математичар избројал 2, вториот избројал $2+4=6$ и третиот избројал $2+9=11$ светилки.

127. Ангел и Бранко учествувале во трка. Сите натпреварувачи ја завршиле трката, а никои двјца не ја завршиле трката во исто време. Бројот на натпреварувачите кои ја завршиле трката пред Ангел е два пати помал од бројот на натпреварувачите кои завршиле по него. Бројот на натпреварувачите кои ја завршиле трката пред Бранко е еднаков на бројот на натпреварувачите кои завршиле по него. Точно 15 натпреварувачите трката ја завршиле пред Бранко, а по Ангел. Колку луѓе учествувале во трката?

Решение. Нека x е бројот на натпреварувачите кои се пласирале пред Ангел, а y е бројот на натпреварувачите кои се пласирале по Бранко. Бранко трката ја завршил точно на средина, а Ангел има повеќе тркачи по него, отколку пред себе, па затоа Ангел трката ја завршил пред Бранко. Сега го имаме распоредот

$$x-\text{Ангел}-15-\text{Бранко}-y.$$

Сега, бидејќи Бранко трката ја завршил на средина, имаме $x+16=y$, а како бројот на натпреварувачите кои трката ја завршиле пред Ангел е два пати помал од тие што трката ја завршиле по него добиваме $2x=16+y$. Сега, ако во последното равенство замениме $y=x+16$, добиваме $2x=16+16+x$, па затоа $x=32$. Значи, $y=32+16=48$. Конечно, во трката учествувале $x+y+17=97$ натпреварувачи.

128. Во паркот има група ученици. Ако на секоја клупа седнат по 7 ученици, без место ќе останат 8 ученици. Ако учениците седнат по 9 на клупа, четири клупи ќе останат празни, а преостанатите клупи ќе бидат полни. Колку ученици биле во паркот?

Решение. *Прв начин*. Ако 8 ученици се распоредат по 2 ученика на клупи на кои веќе има по 7 ученици, тогаш ќе имаме 4 клупи со по 9

наместо 7 ученици. Да испразниме 4 клупи со по 7 ученици. Тоа се 28 ученици и истите можеме да ги распоредиме по двајца на клупите на кои веќе има по 7 ученици, а тоа се $28:2=14$ клупи, Според тоа, имаме $14+4=18$ клупи со по 9 ученици, што значи дека во паркот има $18\cdot 9=162$ ученици.

Втор начин. Нека во паркот има x клупи. Кога учениците ги распоредуваме по 7 на клупа добиваме $7x+8$ ученици, а кога ги распоредуваме по 9 на клупа добиваме $9(x-4)$ ученици. Значи, $7x+8=9(x-4)$, од каде следува $2x=44$, т.е. $x=22$. Значи, во паркот има 22 клупи и $9(22-4)=162$ ученици.

129. На три дрва имало 60 птици. По некое време од првото дрво одлетале 6 птици, од второто дрво одлетале 8 птици, а од третото дрво одлетале 4 птици. Тогаш на секое дрво останале еднаков број птици. По колку птици имало на секое дрво на почетокот?

Решение. *Прв начин*. Од сите три дрва вкупно одлетале $6+8+4=18$ птици, што значи дека на дрвата останале $60-18=42$ птици. Но, сега на секое дрво има еднаков број птици, што значи дека на секое дрво има $42:3=14$ птици. Конечно, на почетокот на првото дрво имало $14+6=20$ птици, на второто дрво $14+8=22$ птици и на третото дрво $14+4=18$ птици.

Втор начин. Нека на крајот на секое дрво имало по x птици. Тогаш, на почетокот на првото дрво имало $x+6$, на второто имало $x+8$ и на третото имало $x+4$ птици. Значи, $x+6+x+8+x+4=60$, т.е. $3x+18=60$, од каде добиваме $x=14$. Конечно, на почетокот на првото дрво имало $14+6=20$ птици, на второто дрво $14+8=22$ птици и на третото дрво $14+4=18$ птици.

130. Една зграда има само приземје и два ката. Во таа зграда 37 луѓе живеат на катовите. Под вториот кат живеат 29 луѓе. На првиот кат живеат онолку луѓе колку што живеат на приземјето и вториот кат. Колку луѓе живеат на приземјето, колку на првиот кат и колку на вториот кат?

Решение. Нека на приземјето живеат a, на првиот кат b и на вториот кат c луѓе. Од условот на задачата следува $b+c=37$, $a+b=29$ и $b=a+c$. Од првата и втората равенка следува дека

$$a+c+2b=(a+b)+(b+c)=29+37=66,\ \text{т.е. } a+c+2b=66.$$

Но, $b = a + c$ и затоа $b + 2b = 66$, т.е. $3b = 66$, па затоа $b = 66 : 3 = 22$. Сега, со замена во $b + c = 37$ и $a + b = 29$, добиваме $22 + c = 37$ и $a + 22 = 29$, па затоа $c = 15$ и $a = 7$. Значи, на приземје живеат 7 луѓе, на првиот кат живеат 22 и на вториот кат живеат 15 луѓе.

131. Во една паралелка има 24 ученици. Во оваа паралелка бројот на момчињата е еднаков на $\frac{3}{5}$ од бројот на девојчињата. Колку момчиња и колку девојчиња има во паралелката?

Решение. *Прв начин.* Бидејќи бројот на момчињата е $\frac{3}{5}$ од бројот на девојчињата, заклучуваме дека во одделението на секои 3 момчиња има по 5 девојчиња. Според тоа, учениците во ова одделение можеме да ги поделиме на групи од по $3 + 5 = 8$ деца. Значи, имаме $24 : 8 = 3$ вакви групи. Во секоја група има по 3 момчиња и по 5 девојчиња, што значи дека во одделението има $3 \cdot 3 = 9$ момчиња и $3 \cdot 5 = 15$ девојчиња.

Втор начин. Ако со x го означиме бројот на девојчињата во паралелката, тогаш бројот на момчињата е $\frac{3}{5}x$. Според тоа, во паралелката вкупно има $x + \frac{3}{5}x$ ученици, па како тој број е еднаков на 24, ја добиваме равенката $x + \frac{3}{5}x = 24$. Понатаму, имаме $\frac{8}{5}x = 24$, па затоа $8x = 24 \cdot 5$, односно $x = (24 \cdot 5) : 8 = 15$. Значи, во паралелката има 15 девојчиња и $24 - 15 = 9$ момчиња.

132. Во две кошници имало 180 јајца. Кога од едната кошница се земени $\frac{1}{4}$ од јајцата и се ставени во другата кошница, во двете кошници имало еднаков број јајца. Колку јајца имало на почетокот во секоја кошница?

Решение. На крајот во секоја кошница имало $180 : 2 = 90$ јајца. Бидејќи по земањето на $\frac{1}{4}$ од јајцата од првата кошница, во неа останале $\frac{3}{4}$ од јајцата кои биле на почетокот, заклучуваме дека $\frac{1}{4}$ од јајцата кои биле на почетокот во првата кошница се $90 : 3 = 30$ јајца. Според тоа, на почетокот во првата кошница имало $4 \cdot 30 = 120$ јајца, а во втората кошница имало $180 - 120 = 60$ јајца.

3. ГЕОМЕТРИЈА

3.1. ОТСЕЧКИ И АГЛИ

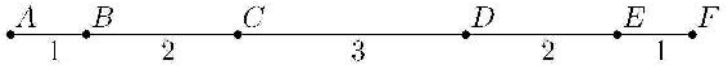
1. Подреди ги по должина, од најкратката до најдолгата, отсечките чии должини се: $35\,cm$, $2\,dm$ и $400\,mm$.

   Решение. Имаме:

   $35\,cm = 35\cdot 10 = 350\,mm$, $2\,dm = 2\cdot 10 = 20\,cm = 20\cdot 10 = 200\,mm$,

   и како $200 < 350 < 400$, добиваме дека $2\,dm < 35\,cm < 400mm$.

2. Определи го збирот на сите должините на сите отсечки на долниот цртеж.

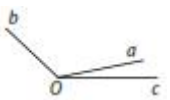


   Решение. На цртежот се прикажани 15 отсечки. Отсечки со должина 1 се две и тоа AB и EF, со должина 2 се исто две и тоа: BC и DE, со должина 3 се три и тоа: AC, CD и DF, со должина 5 се две и тоа: BD и CE, со должина 6 се две и тоа: AD и CD, со должина 7 е една и тоа BE, со должина 8 се две и тоа: AE и BF, и на крајот отсечката AF е со должина 9. Збирот на должините на сите отсечки е:

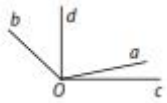
$$2\cdot 1 + 2\cdot 2 + 3\cdot 3 + 2\cdot 5 + 2\cdot 6 + 1\cdot 7 + 2\cdot 8 + 1\cdot 9 = 69.$$

3. На цртежот десно доцртај полуправа Od така што $\measuredangle cOd$ ќе биде прав, а $\measuredangle bOd$ ќе биде остар. Запиши ги сите агли. Коклу од аглите се:

   а) остри, б) прави, в) тапи?

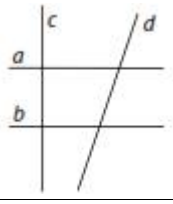


   Решение. Полуправата Od треба да е во положба како на цртежот десно (Зошто?). Притоа се добиени аглите: $\measuredangle cOa$, $\measuredangle aOd$, $\measuredangle dOb$, $\measuredangle cOd$, $\measuredangle cOb$, $\measuredangle aOb$. Имаме: 3 остри агли, 1 прав агол и 2 тапи агли.



4. Погледни го цртежот десно и одговори на следниве прашања:

   а) Колку прави се дадени на цртежот? Запиши ги!



б) Запиши ги сите парови паралелни прави.

в) Запиши ги сите парови нормални прави.

Решение. а) На цртежот се дадени четири прави, и тоа: a, b, c, d .

б) Има само еден пар паралелни прави и тоа: $a \parallel b$.

в) Има два пара нормални прави и тоа: $a \perp c$ и $b \perp c$.

5. Нацртај прави a, b, c, d такви што правата a е нормална на правата b, правата a е паралелна на правата c и правата d е паралелна на правата c (сите четири прави се меѓусебно различни). Во каква положба се правите:

а) b и d , б) a и d , в) c и b .

Решение. Цртеж кој ги задоволува условоите на задачата е прикажан десно. Притоа:

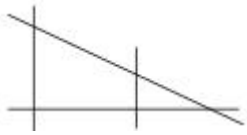
а) правите b и d се нормални,

б) правите a и d се паралелни,

в) правите c и b се нормални.

6. На цртежот десно е чеириаголник кој има два прави агли. Неговите страни определуваат 4 прави, Колку прави, остри и тапи агли определуваат овие четири прави.

Решение. Правите кои ги определуваат страните на четириголникот се прикажани на цртежот десно. Тие определуваат 8 прави агли, 6 тапи агли и 6 остри агли.



7. Определи го аголот што го формираат стрелките на часовникот во 13 часот и 20 минути.

Решение. Кругот има 360° , што значи дека кога големата стрелка минува 1 минута, таа минува $360^\circ : 60 = 6^\circ$, а кога малата стрелка минува 1 час, таа минува $360^\circ : 12 = 30^\circ$.

Во 13 часот малата стрелка е на бројот 1, што значи дека од бројот 12 таа поминала 30° , а по 20 минути таа ќе помине уште $\frac{1}{3}$ од 30° , односно гледано од бројот 12, таа ќе има поминато $30^\circ + \frac{1}{3} \cdot 30^\circ = 40^\circ$. Во 13 часот големата стрелка е на бројот 12, а за 20 минути таа ќе помине

$20 \cdot 6^\circ = 120^\circ$. Според тоа, во 13 часот и 20 минути аголот меѓу стрелките на часовникот е $120^\circ - 40^\circ = 80^\circ$.

8. Определи го аголот што го формираат стрелките на часовникот во 13 часот и 30 минути.

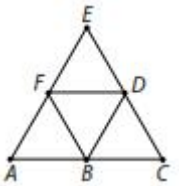
Решение. Кругот има 360°, што значи дека кога големата стрелка минува 1 минута, таа минува $360^\circ : 60 = 6^\circ$, а кога малата стрелка минува 1 час, таа минува $360^\circ : 12 = 30^\circ$.

Во 13 часот малата стрелка е на бројот 1, што значи дека од бројот 12 таа поминала 30°, а по 30 минути таа ќе помине уште $\frac{1}{2}$ од 30°, односно гледано од бројот 12, таа ќе има поминато $30^\circ + \frac{1}{2} \cdot 30^\circ = 45^\circ$.

Во 13 часот големата стрелка е на бројот 12, а за 30 минути таа ќе помине $30 \cdot 6^\circ = 180^\circ$. Според тоа, во 13 часот и 30 минути аголот меѓу стрелките на часовникот е $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$.

3.2. ТРИАГОЛНИК

9. а) Запиши ги сите триаголници кои се нацртани на цртежот десно.

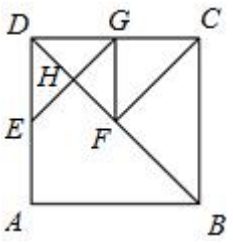


б) Запиши ги сите отсечки кои се нацртани на цртежот десно.

Решение. а) На цртежот се прикажани триаголниците *ABF*, *BCD*, *FBD*, *FDE* и *ACE*.

б) На цртежот се прикажани отсечките: *AB*, *BC*, *FD*, *CD*, *DE*, *BF*, *AF*, *FE*, *BD*, *AC*, *CE* и *AE*.

10. Колку триаголници се прикажани на цртежот десно. Кои се тие триаголници?



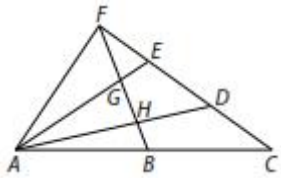
Решение. На цртежот се прикажани триаголниците:

ABD, *BCD*, *BCF*, *CDF*, *CGF*,

GDF, *GDE*, *FGH*, *GDH*, *DEH*.

Според тоа, на цртежот се прикажани вкупно 10 триаголници.

11. Запиши ги сите триаголници на цртежот десно.

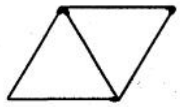


Решение. На цртежот се прикажани 15 триаголници и тоа:

$\triangle ABH$, $\triangle ABG$, $\triangle ABF$, $\triangle ACD$, $\triangle ACE$, $\triangle ACF$, $\triangle BCF$, $\triangle AHG$, $\triangle AHF$, $\triangle ADE$, $\triangle ADF$, $\triangle HDF$, $\triangle AGF$, $\triangle AEF$, $\triangle GEF$.

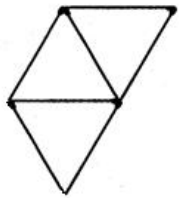
12. Со пет кибритени чкорчиња состави два рамностранитриаголницка.

Решение. Со три чкорчиња составуваме еден рамностран триаголник. Потоа над една од страните на овој триаголник со другите две чкорчиња составуваме уште еден рамностран триаголник (види цртеж десно).



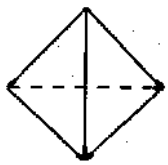
13. Со седум кибритени чкорчиња направи три рамностранитриаголници.

Решение. Како во задача 12 со пет кибритени чкорчиња составуваме два рамностранитриаголници. Понатаму, на потполн ист начин како во задача 12 со другите две чкорчиња составуваме уште еден рамностран триаголник (види цртеж десно), со што задачата е решена.



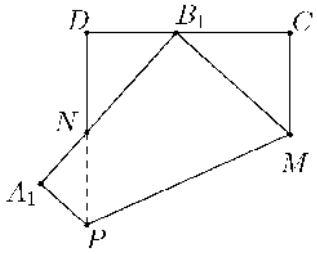
14. Со шест кибритени чкорчиња состави четири рамностранитриаголници.

Решение. На масата го конструираме првиот триаголник за што употребивме три чкорчиња. Преостанатите три чкорчиња ги земаме во рака така, што тие со едниот крај се допираат во една заедничка точка. Слободните краеви на овие три чкорчиња допри ги до темињата на претходно направениот триаголник, со што ќе добиеш три нови рамностранитриаголници. Сега, ги искористивме сите шест чкорчиња и направивме четири рамностранитриаголници.



15. Квадратен лист хартија $ABCD$ е превиткан по отсечка PM така што темето B паднало во точката B_1 на страната CD, а темето A во точката A_1 (цртеж десно). Така се добиени триаголниците CMB_1,

DNB_1 и NPA_1. Познато е дека плоштината на квадратниот лист е еднаква на $36\,cm^2$. Определи го збирот на периметрите на триаголниците CMB_1, DNB_1 и NPA_1.

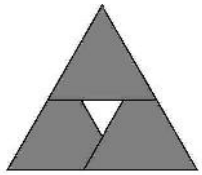


Решение. Бидејќи $6 \cdot 6 = 36$, заклучуваме дека должината на страната на квадратот $ABCD$ е еднаква на $6\,cm$. Понатаму, ако го развиткаме листот во обратна насока, ќе видиме дека збирот на периметрите на трите триаголници CMB_1, DNB_1 и NPA_1 е еднаков на периметарот на квадратот, односно на $4 \cdot 6 = 24\,cm$.

16. Должините на две страни на еден триаголник се по $7\,cm$, а должината на третата страна е изразена со цел број сантиметри. Колку сантиметри најмногу може да биде периметарот на тој триаголник?
Решение. Од неравенството на триаголник следува, дека должината x на третата страна мора да биде помала од збирот на другите две, односно $x < 7 + 7 = 14\,cm$. Освен тоа, нејзината должина x е изразена со цел број сантиметри, па затоа најголемата можна вредност на x е $13\,cm$. Конечно, периметарот на овој триаголник може најмногу да биде $7 + 7 + 13 = 27\,cm$.

17. Збирот на периметрите на два рамнострани триаголници е $120\,cm$. Страната на едниот триаголник е за $8\,cm$ подолга од страната на другиот триаголник. Определи ја должината на страната на помалиот триаголник?
Решение. Периметарот на поголемиот рамностран триаголник е за $3 \cdot 8 = 24\,cm$ поголем од периметарот на помалиот рамностран триаголник. Според тоа, периметарот на помалиот рамностран триаголник е $(120 - 24) : 2 = 48\,cm$. Конечно, должината на страната на помалиот рамностран триаголник е $48 : 3 = 16\,cm$.

18. Три плочки со форма на рамностра триаголник со должина на страна $21\,cm$ се поставени на рамностран триаголник со должина на страна $36\,cm$, како што е прикажано на цртежот десно. Опре-



дели ги страните на белиот триаголник, кој не е покриен од плочките.

Решение. Рамностраните обоени триаголници се препокриваат во помали рамностранитриаголници. Страните на овие рамностранитриаголници се еднакви на отсечките во кои се препокриваат страните на обоените триаголници. Страните на обоените триаголници се препокриваат во отсечки со должини $2\cdot 21-36=6\,cm$. Затоа должините на страните на белиот триаголник, кој не е покриен од плочките се еднакви на $21-2\cdot 6=9\,cm$.

19. Периметарот на еден триаголник е еднаков на 34 *cm*. Ако едната од страните се зголеми за 3 *cm*, другата се зголеми за 2 *cm*, а третата се намали за 3 *cm*, се добива нов триаголник кој е рамностран. Определи ја должината на страната на новодобиениот триаголник.

Решение. *Прв начин.* Со толку колку што се зголемува или намалува на должината на некоја страна соодветно се зголемува или намалува периметарот на триаголникот. Значи, периметарот на новиот триаголник ќе биде еднаков на $34+3+2-3=36\,cm$. Но, овој триаголник е рамностран, па значи должината на неговата страна е еднаква на $36:3=12\,cm$.

Втор начин. Нека должината на страната на добиениот рамностран триаголник е x. Тогаш, за должините на страните a,b,c на почетниот триаголник, чиј периметар е $a+b+c=34$, важи

$$a+3=x,\ b+2=x,\ c-3=x.$$

Тоа значи, дека

$$\begin{aligned}3x&=a+3+b+2+c-3,\\ 3x&=(a+b+c)+3+2-3,\\ 3x&=34+3+2-3\\ 3x&=36,\\ x&=12\,cm.\end{aligned}$$

20. Во триаголник со периметар 176 должините на страните се изразени со броевите $\overline{aa},\overline{ab}$ и $\overline{ba}$, каде a и b се последователни цифри. Определи ги должините на страните на триаголникот.

Решение. Нека $b=a+1$. Тогаш

$$\begin{aligned}\overline{aa}&=10a+a=11a,\\ \overline{ba}&=10b+a=10(a+1)+a=11a+10,\end{aligned}$$

$$\overline{ab} = 10a + b = 10a + (a+1) = 11a + 1.$$

Значи, $11a + 11a + 10 + 11a + 1 = 176$, од каде добиваме $33a = 165$, т.е. $a = 5$. Значи, $b = 6$ и должините на страните на триаголникот се 55, 56 и 65.

21. Една од страните на рамнокрак триаголник е еднаква на $4\,cm$, а периметарот е еднаков на $16\,cm$. Определи ги другите две страни на триаголникот.

Решение. Нека дадената страна е основата на рамнокракиот триаголник. Тогаш збирот на должините на краците е $16 - 4 = 12\,cm$. Значи, другите две страни се со должини $12 : 2 = 6\,cm$.

Нека дадената страна на триаголникот е крак. Тоа значи дека должината на основата на триаголникот е еднаква на $12 - 2 \cdot 4 = 8\,cm$. Сега, од $4 + 4 = 8$ следува дека врвот на рамнокракиот триаголник ќе лежи на основата, што значи дека не постои триаголник со основа $8\,cm$ и крак $4\,cm$. Конечно, должините на другите две страни се $6\,cm$ и $6\,cm$.

22. Рамнокрак триаголник има страни $14\,cm$ и $8\,cm$. Определи го периметарот на триаголникот ако се знае дека е еднаков на производот на два еднакви природни броја.

Решение. Можни се два рамнокраки триаголници со дадените страни: едниот со основа $14\,cm$, а другиот со основа $8\,cm$. Во првиот случај периметарот на триаголникот е еднаков на $14 + 2 \cdot 8 = 30\,cm$, а во вториот случај тој е еднаков на $8 + 2 \cdot 14 = 36\,cm$. Бидејќи $30 = 5 \cdot 6$ и $36 = 6 \cdot 6$ заклучуваме дека страните на триаголникот се основа $8\,cm$ и крак $14\,cm$.

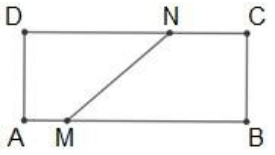
23. Определи ги должините на страните на рамнокрак триаголник со периметар $168\,cm$, ако должината на основата му е три пати помала од должината на кракот.

Решение. Ако должината на основата на триаголникот е a, тогаш должината на кракот е $b = 3a$. Но, $a + 2b = 168$, и со замена за b добиваме $a + 2 \cdot 3a = 168$, односно $7a = 168$, т.е. $a = 14\,cm$. Значи, должината на основата е $24\,cm$, а должината на кракот е $3 \cdot 24 = 72\,cm$.

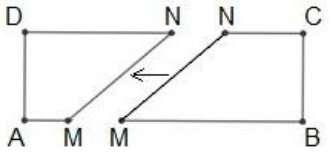
3.3. КВАДРАТ И ПРАВОАГОЛНИК

24. Правоаголник $ABCD$ со должини на страни $8\,cm$ и $5\,cm$ со отсечка MN е поделена на два четириаголника со еднакви периметри од по $20\,cm$. Определи ја должината на отсечката MN.

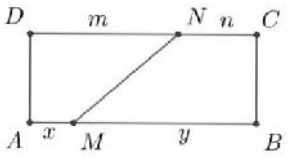
Решение. *Прв начин*. Периметарот на правоаголникот $ABCD$ е еднаков на $2\cdot(8+5)=26\,cm$. Збирот на периметрите на двата четириаголника $AMND$ и $MBCN$ е еднаков на $2\cdot 20=40\,cm$ и истиот се добива кога со периметарот на правоаголникот ќе се соберат две должини на отсечката MN, (цртеж десно). Оттука следува $26+2\overline{MN}=40$, т.е.



$$\overline{MN}=(40-26):2=7\,cm.$$



Втор начин. Нека $a=8\,cm$ и $b=5\,cm$. При ознаки како на цртежот десно, точни се равенствата



$$a=x+y=m+n,$$
$$L_{AMND}=x+\overline{MN}+m+b,$$
$$L_{MBCN}=y+b+n+\overline{MN},$$

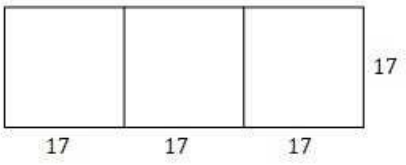
па затоа

$$\begin{aligned}L_{AMND}+L_{MBCN}&=x+\overline{MN}+m+b+y+b+n+\overline{MN}\\&=2\overline{MN}+(x+y)+(m+n)+2b\\&=2\overline{MN}+2(a+b),\end{aligned}$$

од каде добиваме

$$20+20=2\overline{MN}+2\cdot(8+5),\ \text{т.е.}\ \overline{MN}=(40-26):2=7\,cm.$$

25. Определи го збирот на периметрите на сите правоаголници прикажани на цртежот десно.
Забелешка. Квадратот е правоаголник.



Решение. На цртежот има:

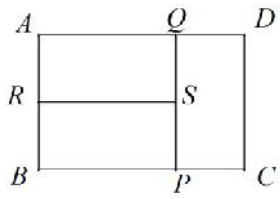
- три квадрати со страна 17, чии периметри се еднакви на $4\cdot 17=68$ и збирот на нивните периметри е $3\cdot 68=204$,
- два праваоголници со страни 17 и 34, чии периметри се еднакви на

$2\cdot(17+34)=102$ и збирот на нивните периметри е $2\cdot 102=204$,

- еден правоаголник со страни 17 и 51 и неговиот периметар е еднаков на $2\cdot(17+51)=136$.

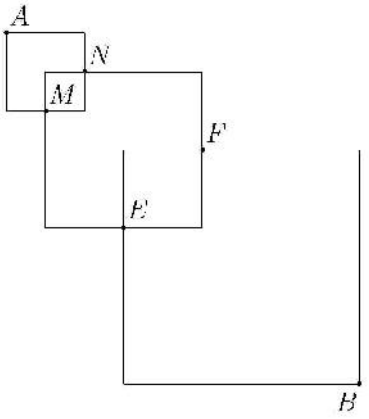
Конечно, збирот на периметрите на сите правоаголници е еднаков на $204+204+136=544$.

26. Правоаголник $ABCD$ е поделен на три еднакви правоаголника (цртеж десно). Периметарот на правоаголникот $ABCD$ е еднаков на $600\,cm$. Определи го збирот на должините на отсечките PQ и RS.



Решение. Ако должината на пократката страна на малите правоаголници е x, тогаш должината на подолгата странана малите правоаголници е $2x$. Значи, периметарот на правоаголникот $ABCD$ е $2\cdot(2x+(2x+x))=10x$, од каде добиваме $10x=600$ и затоа $x=60\,cm$. Според тоа, $\overline{PQ}+\overline{RS}=2x+2x=4x=4\cdot 60=240\,cm$.

27. На цртежот десно се прикажани три различни квадрати, чии должини на страни изразени во сантиметри се парни броеви. Збирот на нивните периметри е еднаков на $56\,cm$. Квадратите се сечат така што точките M и N се средини на страните на малиот квадрат, а точките E и F се средини на страните на средниот по големина квадрат. Мравка се Атом-ант се наоѓа во точката A и треба да стигне во точката B, при што може да оди само по страните на квадратите. Определи ја должината на најкраткиот пат по кој Атом-ант може да стигне од A до B.

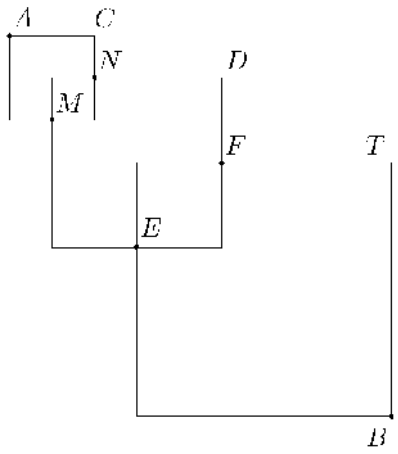


Решение. Нека должините на страните на квадратите се a,b и c, $a<b<c$. Од условот на задачата следува дека $4a+4b+4c=56$, односно $a+b+c=14$. Но, a,b и c се три различни парни броеви и како претставувањето на бројот 14 како збир на три различни парни

броеви е единствено, т.е. $14 = 2 + 4 + 8$, заклучуваме дека $a = 2\,cm$, $b = 4\,cm$ и $c = 8\,cm$.

Еден од двата најкратки патишта од A до B е искршената линија $ACNDFTB$.

Ако искористиме дека точките M, N, E и F се средини на страните на кои припаѓаат, заклучуваме дека квадратите се сечат исто така во квадрати. Сега имаме



$\overline{AC} = a = 2\,cm$,

$\overline{CN} = a : 2 = 1\,cm$,

$\overline{ND} = b - a : 2 = 4 - 1 = 3\,cm$,

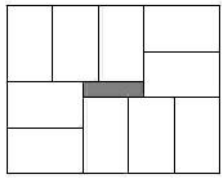
$\overline{DF} = b : 2 = 2\,cm$,

$\overline{FT} = c - b : 2 = 8 - 2 = 6\,cm$ и

$\overline{TB} = c = 8\,cm$.

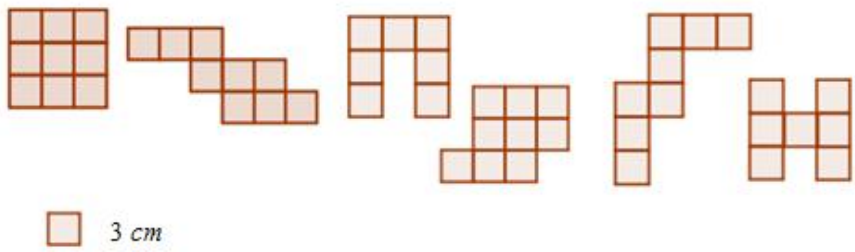
Според тоа, должината на најкратките пат од A до B е еднаква на $2 + 1 + 3 + 2 + 6 + 8 = 22\ cm$.

28. Определи го периметарот на сивиот правоаголник, ако должините на страните на секој од преостанатите десет бели правоаголници се $13\,cm$ и $19\,cm$.

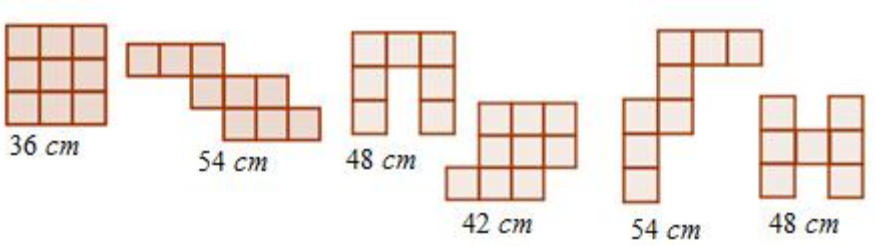


Решение. Должините на страните на обоениот правоаголник се еднакви на $2 \cdot 13 - 19 = 7\,cm$ и $3 \cdot 13 - 19 = 20\,cm$. Според тоа, периметарот на сивиот правоаголник е $L = 2 \cdot (20 + 7) = 54\,cm$.

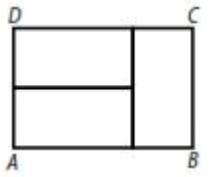
29. На цртежот се дадени шест фигури. Определи ги нивните периметри, ако должината на страната на малите квадратќиња е $3\,cm$



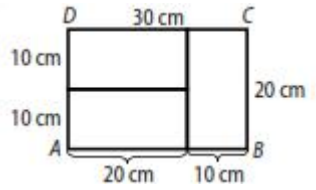
Решение. Имаме:



30. Правоаголникот $ABCD$ е составен од три помали правоаголници (види цртеж десно). Должината на пократката страна на секој од трите мали правоаголници е еднаква на $10\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на правоаголникот $ABCD$.



Решение. Должината на подолгата страна на малите правоаголници е два пати поголема од должината на пократката страна, што значи дека таа е еднаква на $20\,cm$ (цртеж десно). Според тоа, должините на страните на големиот триаголник се еднакви на $20\,cm$ и $30\,cm$. Периметарот на големиот правоаголник е еднаков на



$$2\cdot(20+30)=100\,cm,$$

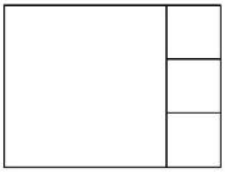
а плоштината на големиот правоаголник е еднаква на

$$20\cdot 30=600\,cm^2.$$

31. Ако должината на еден правоаголник се намали за неговата ширина, ќе добиеме нов правоаголник, чиј периметар е за $16\,cm$ помал од периметарот на почетниот правоаголник. Определи го периметарот на почетниот правоаголник, ако неговата должина е $12\,cm$.

Решение. Кога должината на правоаголникот се намалува за неговата ширина, тогаш неговиот периметар се намалува за две негови ширини (направи цртеж). Значи, удвоената ширина на правоаголникот е еднаква на $16\,cm$, т.е. ширината на правоаголникот е $16:2=8\,cm$. Значи, периметарот на почетниот правоаголник е $2\cdot(12+8)=40\,cm$.

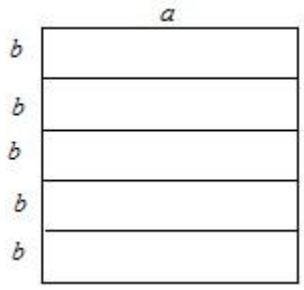
32. Правоаголникот на цртежот десно е составен од четири квадрати. Периметарот на најголемиот квадрат е еднаков на $552\,cm$. Определи го периметарот на целиот правоаголник.



Решение. Должината на страната на најголемиот квадрат е еднаква на $552:4=138\,cm$. Значи, должината на страната на секој од трите мали квадрати е еднаква на $138:3=46\,cm$. Според тоа, должините на страните на правоаголникот се $138\,cm$ и $138+46=184\,cm$. Конечно, периметарот на правоаголникот е еднаков на $2\cdot(138+184)=644\,cm$.

33. Квадрат е поделен на пет еднакви правоаголници со четири паралелни прави. Збирот на периметрите на тие правоаголници е 96 *cm*. Определи го периметарот на квадратот.

Решение. *Прв начин.* Ако должините на страните на петте еднакви делбени правоаголници ги означиме со a и b, тогаш збирот на периметрите на делбените правоаголници ќе биде еднаков на



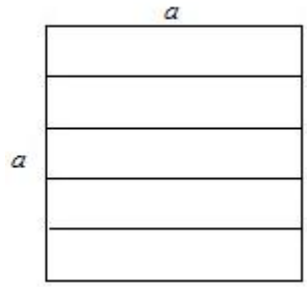
$$5\cdot 2(a+b)=10a+10b.$$

Понатаму, од условот на задачата следува дека $a=5b$, па затоа $2a=2\cdot 5b=10b$. Според тоа, збирот на периметрите на петте делбени правоаголници е еднаков на

$$10a+10b=10a+2a=12a.$$

Затоа $12a=96$, т.е. $a=96:12=8\,cm$. Конечно, периметарот на почетниот квадрат е еднаков на $4a=4\cdot 8=32\,cm$.

Втор начин. Од условот на задачата следува дека секоја од делбените отсечки по два пати учествува во збирот на периметрите на делбените правоаголници (еднаш во периметарот на горниот и еднаш во периметарот на долниот правоаголник). Ако со a ја означиме должината на страната на квадратот, тогаш периметарот на квадратот е $L=4a$, а збирот на периметрите на дел-бените правоаголници е



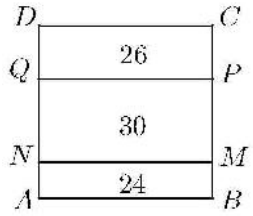
$$L' = L + 4 \cdot 2a = L + 2 \cdot 4a = L + 2L = 3L .$$

Затоа важи $3L = 96$, од каде добиваме $L = 32\ cm$.

Забелешка. Вториот начин на решавање може да се примени и кога делбените правоаголници не се еднакви, при што повторно се добива дека периметарот на почетниот квадрат е $L = 32\ cm$.

34. Квадрат $ABCD$ е поделен на три правоаголници $ABMN$, $MNPQ$ и $PCDQ$, чии периметри се $24\ cm$, $30\ cm$ и $26\ cm$, соодветно. Определи го периметарот на квадратот $ABCD$.

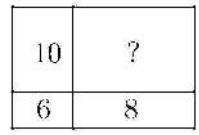
Решение. Нека должината на страната на квадратот е a. Имаме



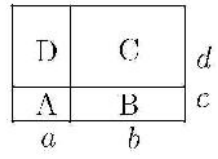
$$L_{ABMN} + L_{MNQP} + L_{PCDQ} = 80\ cm,$$
$$2a + 2\overline{AN} + 2a + 2\overline{NQ} + 2a + 2\overline{QD} = 80\ cm,$$
$$6a + 2(\overline{AN} + \overline{NQ} + \overline{QD}) = 80\ cm,$$
$$6a + 2a = 80\ cm,$$
$$8a = 80\ cm,$$
$$a = 10\ cm.$$

Конечно, $L_{ABCD} = 4a = 4 \cdot 10 = 40\ cm$.

35. Правоаголник е поделен на четири правоаголници. Периметрите на три од нив се еднакви на $6\ cm$, $8\ cm$ и $10\ cm$ (цртеж десно). Определи го периметарот на четвртиот правоаголник.



Решение. Ќе ги користиме ознаките како на цртежот десно. Збирот на периметрите на правоаголниците A и C е $(2a + 2c) + (2b + 2d)$. Збирот на периметрите на правоаголниците B и D е $(2b + 2c) + (2a + 2d)$. Значи, збирот на периметрите на правоаголниците A и C е еднаков на збирот на периметрите на правоаголниците B и D. Оттука следува, дека за периметарот x на правоаголникот C добиваме $6 + x = 8 + 10$, односно $x = 12\ cm$.



36. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на $86\ cm$. Ако две негови спротивни страни се зголемат два пати, тогаш новиот правоаголник ќе има периметар $122\ cm$. Определи ја плоштината на почетниот

правоаголник.

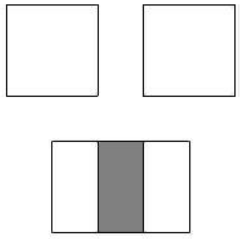
Решение. Ако страните еднакви на a се зголемат два пати, тогаш периметарот на правоаголникот се зголемува за $2a$. Значи, разликата на периметрите на правоаголниците е $122-86=2a$, од каде наоѓаме $a=18\,cm$. Значи, другата страна на правоаголникот е

$$b=(86-2a):2=(86-2\cdot 18):2=25\,cm.$$

Конечно, плоштината на почетниот правоаголник е

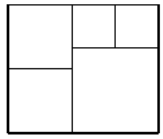
$$P=ab=18\cdot 25=450\,cm^2.$$

37. Два исти квадрати со должина на страна $9\,cm$ се преклопуваат, како што е прикажано на цртежот десно и формираат правоаголник со должини на страни $13\,cm$ и $9\,cm$. Определи ја плоштината на заедничкиот дел на квадратите.



Решение. Заедничкиот дел на квадратите е правоаголник, кај кој едната страна е долга $9\,cm$. Нека должината на другата страна на заедничкиот дел е x. Тогаш $13+x=9+9$, од каде добиваме $x=5\,cm$. Конечно, плоштината на заедничкиот правоаголник е $P=9\cdot 5=45\,cm^2$.

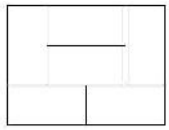
38. Правоаголникот на цртежот десно е поделен на пет квадрати. Должината на страната на најголемиот квадрат е еднаква на $16\,cm$. Определи ги плоштината и периметарот на правоаголникот.



Решение. Должината на страната на двата најмали квадрати е $16:2=8\,cm$. Должината на страната на секој од двата средни квадрати е $(16+8):2=12\,cm$. Значи, должините на страните на правоаголникот се $16+8=24\,cm$ и $12+16=28\,cm$.

Според тоа, периметарот на правоаголникот е $L=2\cdot(24+28)=104\,cm$, а плоштината е $P=24\cdot 28=672\,cm^2$.

39. Правоаголник со периметар $56\,cm$ е составен од шест еднакви правоаголници, како што е прикажано на цртежот десно. Определи ја плоштината на овој правоаголник.



Решение. Должината на пократката страна на еден од шесте правоаголници да ја означиме со a. Тогаш е јасно дека должината на подолгата страна е еднаква на $2a$. Според тоа, должините на станите на големиот правоаголник се $3a$ и $4a$, па затоа важи $2(3a+4a)=56$, односно $14a=56$, од каде добиваме $a=4\,cm$. Значи плоштината на големиот правоаголник е еднаква на

$$6\cdot(a\cdot 2a)=6\cdot(4\cdot 8)=192\,cm^2.$$

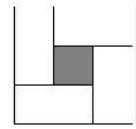
40. Квадрат е разделен на два правоаголника со периметри $24\,cm$ и $36\,cm$. Определи ја плоштината на квадратот.

Решение. Ако a е должината на страната на квадратот, тогаш должините на страните на првиот правоаголник се a и b, а должините на страните на вториот правоаголник се a и c, при што важи $b+c=a$. Според тоа,

$$\begin{aligned}
&2a+2b+2a+2c=24+36,\\
&4a+2(b+c)=60,\\
&4a+2a=60,\\
&6a=60,\\
&a=10\,cm.
\end{aligned}$$

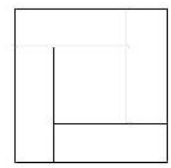
Значи, плоштината на квадратот е $10\cdot 10=100\,cm^2$.

41. Од четири бели правоаголни плочки со периметри $64\,cm$ и една црна квадратна плочка е составен квадрат. Определи ги периметарот и плоштината на големиот квадрат.



Решение. Должината на страната на големиот квадрат е еднаква на збирот на должината и ширината на една бела правоаголна плочка, што значи дека е еднаква на полупериметарот на една правоаголна плочка. Значи, должината на страната на големиот квадрат е еднаква на $64:2=32\,cm$. Според тоа, периметарот на големиот квадрат е еднаков на $4\cdot 32=128\,cm$, а неговата плоштина $32\cdot 32=1024\,cm^2$.

42. Квадратот на цртежот десно е составен од четири еднакви правоаголници и еден квадрат. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на $136\,cm$, а должи-



ната на страната на малиот квадрат е два пати помала од должината на страната на гомемиот квадрат. Определи ја плоштината на еден правоаголник.

Решение. Должината на страната на големиот квадрат е еднаква на збирот на должината и ширината на еден правоаголник. Според тоа, страната на големиот квадрат е еднаква на половина од периметарот на еден правоаголник, т.е. таа е еднаква на $136:2=68\,cm$. Значи, должината на страната на малиот квадрат е $68:2=34\,cm$. Значи, плоштината на големиот квадрат е еднаква на $68\cdot 68=4624\,cm^2$, а плоштината на малиот квадрат е еднаква на $34\cdot 34=1156\,cm^2$. Според тоа, збирот на плоштините на четирите правоаголници е еднаков на

$$4624-1156=3468\,cm^2.$$

Конечно, плоштината на еден правоаголник е еднаква на

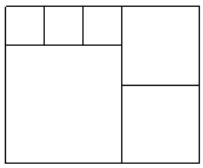
$$3467:4=867\,cm^2.$$

Забелешка. Плоштината на еден правоаголник може да се најде и откако ќе ги определиме должините на неговите страни. Така, ширината на еден правоаголник е еднаква на $\frac{68-34}{2}=17\,cm$,а неговата должина е еднаква на $34+17=51\,cm$. Според тоа, плоштината на еден правоаголник е еднаква на $51\cdot 17=867\,cm^2$

43. Периметарот на една правоаголна градина е 52 метра. Должината на градината е за 10 метри поголема од нејзината ширина. Градината е поделена на две леи, од кои едната е во форма на квадрат, а другата во форма на правоаголник. Определи ги плоштините на добиените леи.

Решение. Со x да ја означиме пирината на градината. Тогаш нејзината должина е $x+10$. Според тоа, $2(x+x+10)=52$, од каде добиваме $x=8\,m$. Значи, ширината на градината е $8\,m$, а нејзината должина е $18\,m$. Бидејќи леите на кои е поделена градината се во форма на квадрат и правоаголник, страната на квадратната леа е $8\,m$, а страните на правоаголната леа се $8\,m$ и $10\,m$. Значи, плоштината на квадратната леа е $8\cdot 8=64\,m^2$, а плоштината на правоаголната леа е $8\cdot 10=80\,m^2$.

44. Правоаголникот на цртежот десно е сотавен од шест квадрати. Подолгата страна на правоаголникот е еднаква на $60\,cm$. Определи ја плоштината на овој правоаголник.



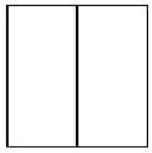
Решение. Нека должината на страната на најмалиот квадрат е a. Тогаш должината на страната на најголемиот квадрат е $3a$, па затоа должината на пократката страна на правоаголникот е $a+3a=4a$. Но, таа е еднаква на удвоената должина на страната на средниот квадрат, па затоа должината на страната на средниот квадрат е $4a:2=2a$. Значи, должината на подолгата страна на правоаголникот е $3a+2a=5a$. Според тоа,

$$5a=60\text{, т.е. } a=12\,cm.$$

Значи, пократката страна на правоаголникот е долга $4\cdot 12=48\,cm$ и неговата плоштина е еднаква на

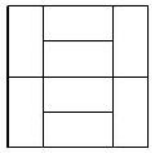
$$60\cdot 48=2880\,cm^2.$$

45. Квадратот на цртежот десно е составен од два еднакви правоаголника. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на $108\,cm$. Определи ги периметарот и плоштината на квадратот.



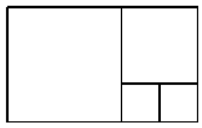
Решение. Периметарот на правоаголникот е еднаков на збирот на две страни на квадратот и две нивни половини, што значи е збир на три страни на квадратот. Според тоа, должината на страната на квадратот е еднаква на $108:3=36\,cm$. Конечно, периметарот на квадратот е $4\cdot 36=144\,cm$, а неговата плоштина е $36\cdot 36=1296\,cm^2$

46. Квадратот на цртежот десно има периметар $416\,cm$ и е покриен со осум еднакви правоаголници. Определи го периметарот на еден од овие правоаголници.



Решение. Должината a на еден правоаголник е два пати поголема од неговата ширина b, т.е. $a=2b$. Периметарот на квадратот е $6a+4b=416$, од каде добиваме $6\cdot 2b+4b=416$, односно $b=26\,cm$. Според тоа, периметарот на еден правоаголник е еднаков на $2(a+b)=2(2b+b)=6b=6\cdot 26=156\,cm$.

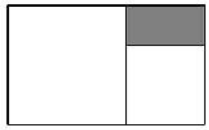
47. Правоаголникот на цртежот десно е поделен на четири квадрати. Периметарот на најголемиот квадрат е $24\,cm$. Определи ги плоштината и периметарот на на правоаголникот.



Решение. Со a да ја означиме должината на страната на најмалиет два квадрати. Тогаш должината на страната на средниот квадрат е $2a$, а должината на страната на големиот квадрат е $a+2a=3a$. Но должината на страната на големиот квадрат е $24:4=6\,cm$, па затоа $3a=6$, т.е. $a=2\,cm$.

Должините на страните на правоаголникот се $6\,cm$ и $6+2\cdot 2=10\,cm$, па затоа неговата плоштина е еднаква на $6\cdot 10=60\,cm^2$, а периметарот е еднаков на $2\cdot(6+10)=32\,cm$.

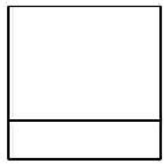
48. Правоаголен лист е расечен на два квадрати со периметри $412\,cm$ и $372\,cm$ и еден сив правоаголник (цртеж десно). Определи го периметарот на листот и периметарот на сивиот правоаголник.



Решение. Страните на двата квадрати се соодветно $412:4=103\,cm$ и $372:4=93\,cm$. Сивиот правоаголник има страни $103-93=10\,cm$ и $93\,cm$, па затоа неговиот периметар е $2\cdot(10+93)=206\,cm$. Листот има страни $103+93=196\,cm$ и $103\,cm$, па затоа неговиот периметар е $2\cdot(196+103)=598\,cm$.

49. Квадрат со периметар $604\,cm$ е поделен на два правоаголника. Ако периметарот на едниот правоаголник е $590\,cm$, определи ја плоштината на другиот правоаголник.

Решение. Должината на страната на квадратот е $604:4=151\,cm$. Правоаголник со периметар $590\,cm$ има една страна $151\,cm$, па затоа другата страна е $(590-2\cdot 151):2=144\,cm$. Според тоа, страните на другиот правоаголник се $151\,cm$ и $151-144=7\,cm$. Значи, плоштината на другиот правоаголник е $151\cdot 7=1057\,cm^2$.



50. Околу правоаголна градина со должина $8\,m$ и ширина $6\,m$ треба да

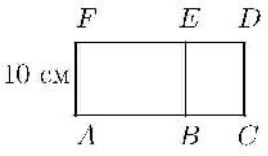
се направи цементна патека широка $50\,cm$. Колку килограми цемент се потребни ако за $3\,m^2$ се потребни $200\,kg$ цемент?

Решение. Страните на големиот правоаголник се по

$$2\cdot 50\,cm = 100\,cm = 1\,m$$

подолги од страните на градината. Значи страните на големиот правоаголник се $7\,m$ и $9\,m$. Плоштината на патеката е еднаква на разликата на плоштините на двата правоаголници, што значи дека е еднаква на $9\cdot 7 - 8\cdot 6 = 15\,m^2$. Бидејќи $15 = 5\cdot 3$, а за $3\,m^2$ се потребни $200\,kg$ цемент добиваме дека за $15\,m^2$ се потребни $5\cdot 200 = 1000\,kg$ цемент.

51. Должината на едната страна на секој од трите правоаголници $ABEF$, $BCDE$ и $ACDF$, прикажани на цртежот десно, е еднаква $10\,cm$. Збирот на периметрите на трите правоаголници е еднаков на $108\,cm$. Определи ја плоштината на правоаголникот $ACDF$.



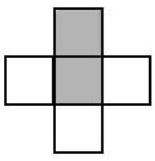
Решение. Нека $\overline{AC} = x$. Збирот на периметрите на правоаголниците $ABEF$, $BCDE$ и $ACDF$ е еднаков на $6\cdot 10 + 4x$ (Зошто?). Според тоа,

$$6\cdot 10 + 4x = 108,$$

од каде наоѓаме $4x = 108 - 60$, т.е. $x = 12\,cm$. Значи, плоштината на правоаголникот $ACDF$ е еднаква на $12\cdot 10 = 120\,cm^2$.

52. Над страните на квадрат надворешно се нацртани четири квадрати. Колку правоаголници има на добиениот цртеж. Ако страната на првиот квадрат е $1\,cm$, определи го збирот на периметрите на сите правоаголници.

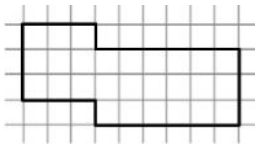
Решение. На добиениот цртеж има пет квадрати, четири правоаголници кои се составени од по два квадрати (еден од нив е обоениот) и уште два правоаголници составени од по 3 квадрати. Според тоа, бројот на сите правоаголници е еднаков на $5 + 4 + 2 = 11$.



Периметарот на еден квадрат е $4\cdot 1 = 4\,cm$, на еден правоаголник од првиот вид е $2\cdot 1 + 2\cdot 2 = 6\,cm$ и на еден правоаголник од вториот вид е $2\cdot 1 + 2\cdot 3 = 8\,cm$. Збирот на периметрите на сите правоаголници е

$5 \cdot 4 + 4 \cdot 6 + 2 \cdot 8 = 60\ cm$.

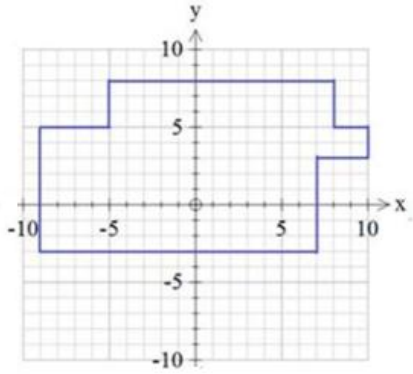
53. Секое квадратче во мрежата на цртежот десно има страна со должина $1\ cm$. Определи ги периметарот и плоштината на дадената фигура.



Решение. Четири страни на дадената фигура имаат должина $3\ cm$, две страни имаат должина $1\ cm$ и две страни имаат должина $6\ cm$. Според тоа, дадената фигура има периметар $L = 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 2 \cdot 6 = 26\ cm$.

Дадената фигура е составена од еден квадрат со страна $3\ cm$ и еден правоаголник со страни $3\ cm$ и $6\ cm$. Според тоа, нејзината плоштина е еднаква на $3 \cdot 3 + 3 \cdot 6 = 27\ cm^2$.

54. Пресметај ги периметарот и плоштината на фигурата при-ќкажана на цртежот десно. Должината на страната на секое квадратче е еднаква на $1\ cm$.



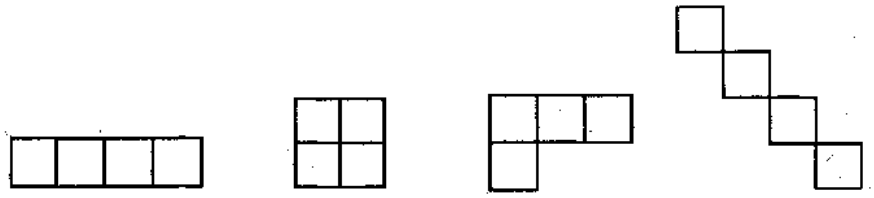
Решение. *Прв начин*. Две стра-ќни на дадената фигура имаат должина $2\ cm$, три страни има-ќат должина $3\ cm$, една страна има должина $4\ cm$, една страна има должина $6\ cm$, една страна има должина $8\ cm$, една страна има должина $13\ cm$ и една страна има должина $16\ cm$. Значи, периметарот на дадената фигура е еднаков на $2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 + 6 + 8 + 13 + 16 = 60\ cm$.

Плоштината на дадената фигура е збир на плоштините на правоагоник со страни $8\ cm$ и $16\ cm$, правоаголник со страни $3\ cm$ и $13\ cm$, правоаголник со страни $2\ cm$ и $3\ cm$. Значи, плоштината на дадената фигура е $8 \cdot 16 + 3 \cdot 13 + 2 \cdot 3 = 173\ cm^2$.

Втор начин. Периметарот на фигурата е еднаков на периметарот на минималниот правоаголник во кој може да се смести фигурата. Овој правоаголик има страни $11\ cm$ и $19\ cm$, па затоа периметарот на дадената фигура е еднаков на $2 \cdot (19 + 11) = 60\ cm$.

Плоштината на фигурата ќе ја добиеме кога од плоштината на правоаголникот со страни $11\,cm$ и $19\,cm$ ќе ги одземеме плоштините на правоаголниците со страни $4\,cm$ и $3\,cm$, $3\,cm$ и $2\,cm$, $3\,cm$ и $6\,cm$. Значи, плоштината е $11\cdot 19-3\cdot 6-3\cdot 2-3\cdot 4=173\,cm^2$

55. Должината на страната на едно квадратче е $1\,cm$. Определи ги плоштините и периметрите на дадеиите фигури. Која фигура има најголема плоштина? Која фигура има најмал периметар?



а) б) в) г)

Решение. а) Плоштината на фигурата е $4\,cm^2$, а периметарот е $10\,cm$.

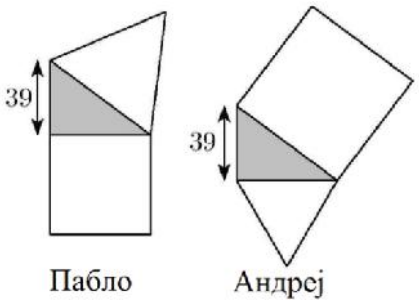
б) Плоштината на фигурата е $4\,cm^2$, а периметарот е $8\,cm$.

в) Плоштината на фигурата е $4\,cm^2$, а периметарот е $10\,cm$.

г) Плоштината на фигурата е $4\,cm^2$, а периметарот е $16\,cm$

Според тоа, сите фигури имаат еднакви плоштини, а најмал периметар има фигурата б).

56. Пабло и Андреј нацртале еден ист триаголник кој го обоиле во сиво. Должината на едната страна на триаголникот била $39\,cm$, а над другите две страни тие конструирале по еден квадрат и еден рамностран триаголник. Пабло добил петаголник со периметар $325\,cm$, а Андреј добил шестаголник со периметар $338\,cm$. Определи го периметарот на сивиот триаголник.

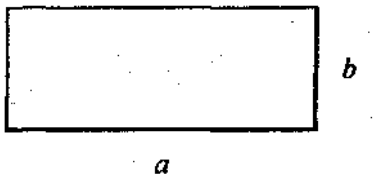


Решение. Нека должините на страните на сивиот триаголник се a,b и $39\,cm$. Тогаш збирот на периметрите на петаголникот и шестаголникот е еднаков на $2\cdot 39+5(a+b)$, па затоа $2\cdot 39+5(a+b)=325+338$.

Според тоа, $a+b=(325+338-2\cdot 39):5=117$, па периемтарот на сивиот триаголник е еднаков на $117+39=156\,cm$.

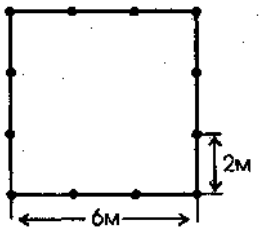
57. Една зеленчукова градина има правоаголна форма со плоштина $36\,m^2$. Должините на страните изразени во метри се природни броеви и е познато дека градината има најмал можен периметар. Колку колци се потребни за да се направи ограда на градината, ако колците се поставаат на растојание $2\,m$ еден од друг?

Решение. Ако должините на страните на правоаголникот се a и b, тогаш $ab=36$. Бидејќи a и b се природни броеви, тие се делители на 36. Делители на бројот 36 се: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 и 36, и димензиите на градината, како и соодветните периметри се дадени во долната табела:



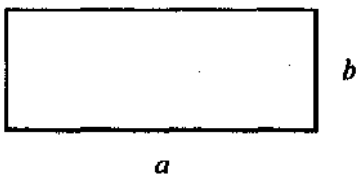
$a\,(m)$	1	2	3	4	6	9	12	18	36
$b\,(m)$	36	18	12	9	6	4	3	2	1
$L\,(m)$	74	40	30	26	24	26	30	40	74

Ос табелата се гледа дека во случајот најмал е периметарот кога градината има квадратна форма, т.е. кога $a=b=6\,m$. Бидејќи колците се на растојание $2\,m$, на секоја страна покрај колците во темињата на квадратот треба да се постава уште по 2 колци. Според тоа, вкупниот број колци треба да е $4+4\cdot 2=12$.



58. Павел сака да засади јагоди во леа која ќе има форма на правоаголник со периметар $36\,m$. Определи ги должините на леата ако тие изразени во метри се цели броеви и истата ќе има најголема плоштина. Колкав род ќе набере Павел од јагодите засадени во ваква леа, ако $1\,m^2$ дава род од $2\,kg$ јагоди?

Решение. Периметарот на правоаголник со страни a и b е $L=2(a+b)$. Во нашиот случај добиваме $36=2(a+b)$, односно $a+b=18$. Можните димензии на



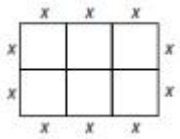
градината, како и соодветните плоштини се дадени во долната табела:

$a\,(m)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
$b\,(m)$	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	...
$P\,(m^2)$	17	32	34	56	65	72	77	80	81	80	...

Од табелата се гледа дека најголема плоштина од $81\,m^2$ има квадратната леа со страна $9\,m$. Според тоа, во една берба Павел ќе набере $2\cdot 81=162\,kg$ јагоди.

59. Ако едната страница на квадратот се зголеми два пати, а другата три пати, ќе се добие правоаголник со плоштина $96\,cm^2$. За колку е периметарот на новиот правоаголник е поголем од периметарот на стариот правоаголник?

Решение. Ако со x ја означиме страната на квадратот, правоаголникот ќе изгледа како на цртежот десно, т.е. ќе биде составен од 6 квадрати. Плоштината на еден од овие квадрати е $96:6=16\,cm^2$. Сега, бидејќи $4\cdot 4=16$, должината на страната квадратот ќе биде $4\,cm$. Понатаму, периметарот на квадратот ќе биде $4\cdot 4=16\,cm$, а на правоаголникот $10\cdot 4=40\,cm$. Значи, периметарот на правоаголникот е за $40-16=24\,cm$ поголем од периметарот на квадратот.



60. За колку ќе се намали должината на страната на квадратот ако неговиот периметар се намали за $100\,cm$?

Решение. Квадратот има четири страни со еднаква должина, па ако периметарот на квадратот се намали за $100\,cm$, тогаш должината на страната на квадратот ќе се намали за $100:4=25\,cm$.

61. а) Колку квадрати може да нацрташ така што темињата ќе им бидат некои четири од точките прикажани на цртежот десно?

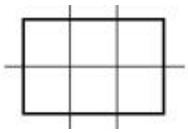
б) Определи ја плоштината на секој од овие квадрати ако растојанието меѓу секои две соседни хоризонтални и вертикални точки е $5\,mm$.

Решение. а) Имаме 4 квадрати со страна $5\,mm$, 1 квадрат

со страна $10\ mm$ и квадратот кој е прикажан на цртежот десно.

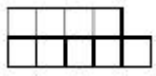
б) Плоштините на квадратите со страни $5\ mm$ се $5 \cdot 5 = 25\ mm^2$. Плоштината на квадратот со страна $10\ mm$ е $10 \cdot 10 = 100\ mm^2$. Квадратот прикажан на горниот цртеж е составен од половина од секој од четирите мали квадрати, па затоа неговата плоштина е еднаква на половина од плоштината на големиот квадрат, т.е. е еднаква на $100 : 2 = 50\ mm^2$.

62. Три прави го делат правоаголникот на 6 еднакви квадрати (види цртеж десно). Ако периметарот на правоаголникот е за $180\ cm$ поголем од периметарот на еден квадрат, определи ги периметрите на правоаголникот и квадратот.



Решение. Периметарот на правоаголникот е составен од 10 страни на квадратот, па затоа тој е за 6 страни на квадратот поголем од периметарот на квадратот. Според тоа, должината на страната на квадратот е $180 : 6 = 30\ cm$. Значи, периметарот на квадратот е $4 \cdot 30 = 120\ cm$, а периметарот на правоаголникот е $10 \cdot 30 = 300\ cm$.

63. Од девет исти квадрати е составена фигурата прикажана на цртежот десно, чиј периметар е еднаков на 28 см. Определи го збирот на периметрите на сите квадрати прикажани на дадената фигура.



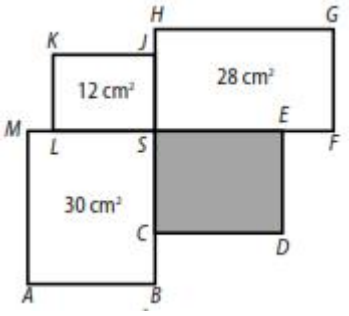
Решение. Периметарот на фигурата е формиран од 14 страни на малите квадрати од кои фигурата е составена. Според тоа, должината на страната на малиот квадрат е $28 : 14 = 2\ cm$.

Фигурата содржи 9 мали квадрати со страна $2\ cm$ и уште 3 големи квадрати, кои се составени од по 4 мали квадрати, па нивната страна е $2 \cdot 2 = 4\ cm$. Збирот на периметрите на малите квадтати е еднаков на $9 \cdot 4 \cdot 2 = 72\ cm$, а збирот на периметрите на големите квадрати е $3 \cdot 4 \cdot 4 = 48\ cm$. Според тоа, бараниот збир на периметрите на сите квадрати е $72 + 48 = 120\ cm$.

64. На три правоаголници на цртежот десно се запишани нивните плоштини. Определи ја плоштината на осенчениот правоаголник $CDES$

ако:

$$\overline{BC} = 2\,cm,\ \overline{EF} = 2\,cm,$$
$$\overline{FG} = 4\,cm, \overline{HJ} = 1\,cm,$$
$$\overline{ML} = 1\,cm.$$



Решение. Бидејќи плоштината на правоаголникот $SFGH$ е еднаква на $28\,cm^2$ и $\overline{FG} = 4\,cm$, добиваме дека $\overline{SE} = 7\,cm$. Но, $\overline{EF} = 2\,cm$, па затоа $\overline{SE} = 5\,cm$. Бидејќи $\overline{HJ} = 1\,cm$ и $\overline{HS} = 4\,cm$, важи $\overline{JS} = 3\,cm$. Понатаму, од четириаголникот $LSJK$ добиваме $\overline{LS} = 4\,cm$, па затоа

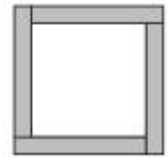
$$\overline{MS} = \overline{ML} + \overline{LS} = 5\,cm.$$

Сега, од четириаголникот $ABSM$ добиваме $\overline{BS} = 6\,cm$, па затоа

$$\overline{CS} = \overline{BS} + \overline{BC} = 4\,cm.$$

Конечно, бараната плоштина е $P = 4 \cdot 5 = 20\,cm^2$.

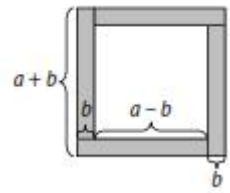
65. Околу огледало со квадратен облик е направена рамка составена од четири исти правоаголници (види цртеж). Периметарот на еден правоаголник е $220\,cm$, а периметарот на целата рамка $800\,cm$. Определи ја плоштината на рамката. (Периметарот на целата рамка е еднаков на збирот на внтрешните и надворешините страни на рамката.)



Решение. Нека должините на страните на еден правоаголник од кои е направена рамката се a и b. Тогаш

$$2(a+b) = 220, \text{ т.е. } a+b = 110.$$

Должините на надворешите страни на рамката се $a+b$, а должините на внатрешните страни на рамката се $a-b$. Затоа

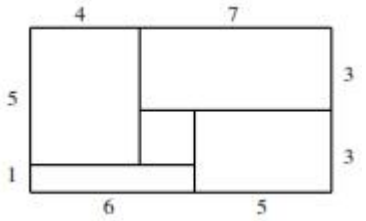


$$4(a+b) + 4(a-b) = 800, \text{ т.е. } 8a = 800,$$

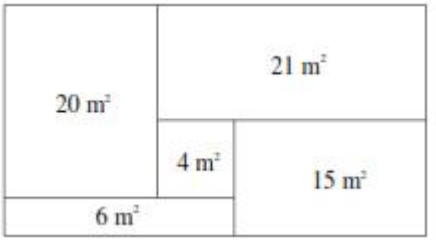
од каде добиваме $a = 100\,cm$. Според тоа, $b = 110 - a = 10cm$.

Конечно,плоштината на рамката е $P = 4ab = 4 \cdot 100 \cdot 10 = 4000\,cm^2$.

66. Фросина има градина која е поделена на правоаголни делови како на цртежот десно, на кој се означени димензиите изразени во метри. Во секој дел таа планира да засади различен вид цвеќе. Ќе посади бегонии, лилјани, далии, ружи и ириси и тоа по едно растение на секој квадратен метар од градината. За цените се распрашала во најблиската цвеќара. Луковиците на ирисот се продаваат само во пакети од по 5 парчиња, а садниците на преостанатите цвеќиња се продаваат на парче. Три садници бегонии чинат 39 евра, четири садници лилјани чинат 73 евра, две садници далии чинат 75 евра, две садници ружи чинат 83 евра, а пакет од 5 луковици ирис чини 104 евра. Која е најмалата сума која Фросина треба да ја потроши за купување на цвеќето, а да притоа во својата градина ги засади сите купени садници и луковиви?



Решение. Прво ќе ги определиме плоштините на секој дел од градината. Димензиите на неозначениот правоаголник се еднакви на $6-4=2\,m$ и $3-1=2\,m$. Плоштините на одделните делови се означени на цртежот десно.



Ирисот се продава во пакети од по 5 луковици, па фросина мора да го засади на површина со плоштина $15\,m^2$ или $20\,m^2$. Да ги определиме цените на цвежињата (по парче) и да ги подредиме од најмалата кон најголемата:

- садница бегонија $39:3=13$ евра
- садница лилјан $73:4=18$ евра и 25 евроценти,
- садница далија $75:2=37$ евра и 50 евроценти,
- садница ружа $83:2=41$ евро и 50 евроценти,
- луковица на ирис $104:5=20$ евра и 80 евроценти.

Вкупниот трошок ќе биде најмал, ако Фросина цвеќињата ги засади така што цвеќињата ги засади така што почнувајќи од најголемата површина редоследно ги сади цвеќињата со најмали цени, односно ако:

- бегониите ги засади на површината со плоштина $21\,m^2$,
- лилјаните ги засади на површината со плоштина $20\,m^2$,

- ирисите ги засади на површината со плоштина $15\,m^2$,
- далиите ги засади на површината со плоштина $6\,m^2$, и
- ружите ги засади на површината со плоштина $4\,m^2$.

Јасно, бидејќи ирисите се засадени на површина со плоштина $15\,m^2$ сите ириси ќе бидат засадени.

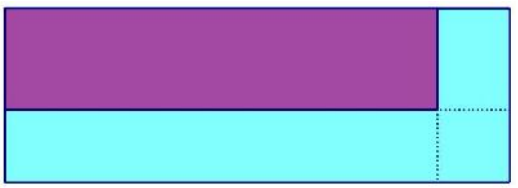
Трошокот ќе биде:

	Плоштина	Цена	Платено
Бегонии	$21\,m^2$	3 за 39 евра	$7 \cdot 39 = 273$ евра
Лилјани	$20\,m^2$	4 за 73 евра	$5 \cdot 73 = 365$ евра
Ириси	$15\,m^2$	5 за 105 евра	$3 \cdot 104 = 312$ евра
Далии	$6\,m^2$	2 за 75 евра	$3 \cdot 75 = 225$ евра
Ружи	$4\,m^2$	2 за 83 евра	$2 \cdot 83 = 166$ евра
Вкупно			1341 евра

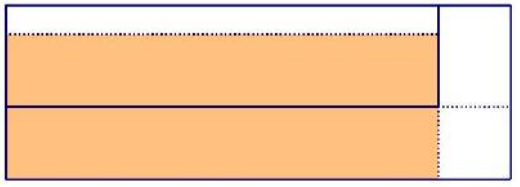
Значи, најмалата сума која Фросина треба да ја потроши е 1341 евро.

67. Ленка и Кирјана се играат со куп еднакви стапчиња. Секоја од определен број стапчиња составила правоаголник. Секоја страна на правоаголникот на Кирјана е направена со 5 стапчиња повеќе од соодветната страна на правоаголникот на Ленка. Плоштината на правоаголникот на Кирјана е два пати поголема од плоштината на правоаголникот на Ленка. Колку стапчиња за составување на својот правоаголник можела да употреби Ленка?

Решение. Нека со лилјакова боја е правоаголникот на Ленка. Со продолжување на страните се добива правоагоникот како на цртежот десно. Според условот на задачата плоштината на новодобиениот правоаголник е два пати поголема од плоштината на почетниот правоаголник. Тоа значи дека плоштините на лилјаковиот и синиот дел се еднакви.



Сега, ако од лилјаковиот дел го отсечеме долниот син правоаголник го добиваме цртежот десно, на кој



плоштините на двата обоени правоаголници се еднакви.

Сега, ако овие два правоаголници ги отстраниме од почетниот правоаголник, го добиваме цртежот десно, на кој плоштините на лилјаковиот и синиот дел се еднакви.

Понатаму, ако ја продолжиме поголемата страна на лилјаковиот правоаголник и од десно на неа ја нанесеме помалата страна на синиот правоаголник, добиваме два правоаголници со еднакви плоштини (цртеж десно). Сега, ако овие правоаголници ги отстраниме од лилјаковиот и синиот правоаголник го добиваме долниот цртеж, на кој синиот и лилјаковиот дел имаат еднакви плоштини.

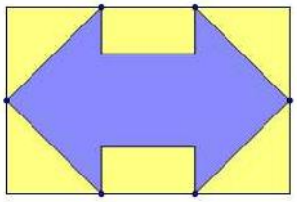
Преостанатиот син правоаголник е составен од два квадрати со должина 5 стапчиња. Ако за основна мерка ја земеме должината на стапчињата, тогаш неговата плоштина е $5 \cdot 5 + 5 \cdot 5 = 50$. Затоа производот на должините на страните на лилјаковиот правоаголник е еднаков на 50. Според тоа, ги имаме следниве можности:

- ширина 1 стапче и дожина 50 стапчиња,
- ширина 2 стапчиља и дожина 25 стапчиња,
- ширина 5 стапчиња и дожина 10 стапчиња.

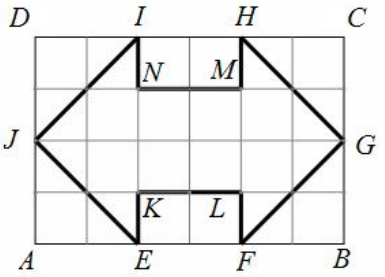
Дплжините на страните на правоаголникот на Ленка се поголеми за по 5 стапчиња, па затоа ги имаме следниве можности:

- ширина 6 стапчиња и дожина 55 стапчиња,
- ширина 8 стапчиља и дожина 30 стапчиња,
- ширина 10 стапчиња и дожина 15 стапчиња.

68. На цртежот десно е прикажан правоаголник со страни со должини $48\,mm$ и $32\,mm$. Подолгите страна на правоаголникот со означените точки се поделени на три еднакви отсечки, а пократките на две еднакви отсечки. Периметарот на секој жолт правоаголник е еднаков на должината на подолгата страна на правоаголникот. Определи ја плоштината на фигурата обоена со сина боја.



Решение. *Прв начин*. Подолгата страна на правоаголникот е поделена на отсечки со должина $48:3=16\,mm$. Пократката страна на правоаголникот е поделена на отсечки со должина $32:2=16\,mm$. Жолтите правоаголници имаат периметри $48\,mm$ и по две страни еднакви на $16\,mm$. Значи, должините на другите две страни им се $(48-2\cdot16):2=8\,mm$. Понатаму, да го поделиме правоаголникот на квадрати со должини на страни $8\,mm$ (види цртеж). Плоштината на секој квадрат е еднаква на $P'=8\cdot8=64\,mm^2$, а плоштината на триаголникот кој е половина од квадратот е $P''=P':2=32\,mm^2$. Сега, бидејќи сината фигура е составена од 8 квадрати и 8 триаголници, нејзината плоштина е

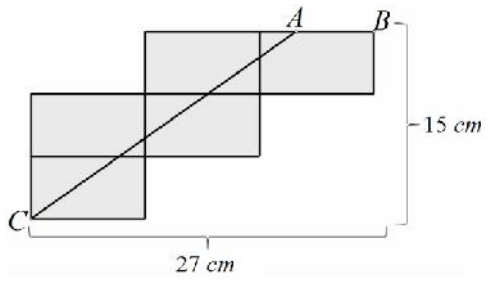


$$P=8P'+8P''=8\cdot64+8\cdot32=512+256=768\,mm^2.$$

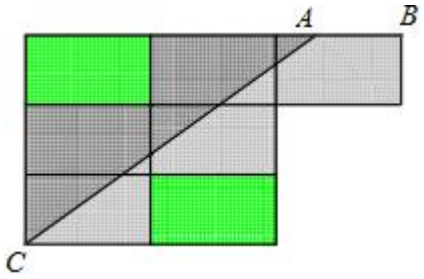
Втор начин. Како во првиот начин, да ги пресметаме должините на страните на жолтите правоаголници и да го поделиме почетниот правоаголник на квадратна мрежа со страна на квадратите $8\,mm$. Плоштината на сината фигура ќе ја добиеме ако од плоштината на целиот правоаголник ја одземеме плоштината на жолтите делови. Жолтите правоаголници имаат плоштина $8\cdot16=128\,mm^2$, плоштината на секој жолт триаголник е еднаква на половина од плоштината на квадрат со страна $16\,mm$, т.е. е еднаква на $(16\cdot16):2=128\,mm^2$. Конечно, плоштината на сината фигура е

$$P=48\cdot32-2\cdot128-4\cdot128=1536-6\cdot128=768\,mm^2.$$

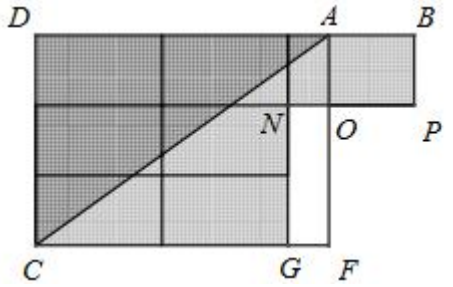
69. Пет еднакви правоаголници се распоредени така што формираат фигура со должина $27\,cm$ и ширина $15\,cm$, како што е прикажано на цртежот десно. Во внатрешноста на фигурата е нацртана отсечка AC која фигурата ја дели на два дела со еднакви плоштини. Определи ја должината на отсечката AB.



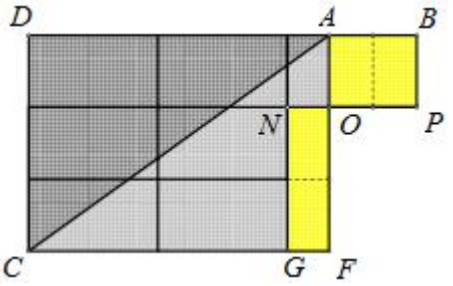
Решение. Должините на страните на правоаголниците се $27:3=9\,cm$ и $15:3=5\,cm$. На дадената фигура ќе и доцртаме два правоаголници како што е прикажано на цртежот десно. Бидејќи овие правоаголници имаат еднакви плоштини, отсечката AC повторно ја дели добиената фигура на два дела со еднакви плоштини.



Повлекуваме отсечка AF така што четириаголникот $CFAD$ е правоаголник. Отсечката AC го дели овој правоаголник на два дела со еднакви плоштини. Бидејќи плоштините на триаголниците CFA и CAD се еднакви, заклучуваме дека плоштината на триаголникот CFA е еднаква на плоштината на фигурата која на горниот цртеж е обоена со светлосива боја. Тоа значи дека плоштината на светлосивиот дел надвор од триаголникот CFA е еднаква на плоштината на белиот дел внатре во триаголникот CFA. Со други зборови, плоштините на правоаголниците $GFON$ и $OPBA$ се еднакви.



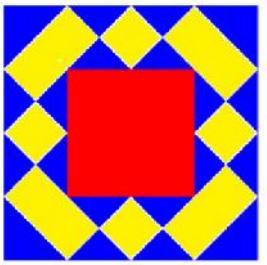
Но, едната страна на правоаголникот $OPBA$ е еднаква на половина од едната страна на правоаголникот $GFON$ ($\overline{FO}=2\overline{AO}$), па затоа другата страна на пра-



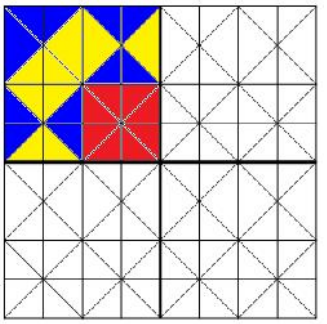
воаголникот $OPBA$ е два пати подолга од другата страна на правоаголникот $GFON$, т.е. $\overline{OP}=2\overline{ON}$. Сега имаме, $\overline{NO}+\overline{OP}=\overline{NP}$, т.е. $\overline{NO}+2\overline{NO}=9\,cm$, од каде добиваме $\overline{NO}=3\,cm$. Значи,

$$\overline{AB}=\overline{OP}=2\overline{NO}=6\,cm.$$

70. Филип во квадрат направил шара како на цртежот десно. Плоштината на црвениот квадрат е еднаква на $350\,dm^2$. Жолтата боја се продава во лименка спреј чија цена е 120 денари. Со секоја лименка може да се покрие плоштина од $70\,dm^2$. Колку пари платил Филип за жолтата боја?



Решение. Забележуваме дека шарата е симетрична и во однос на хоризонталната и во однос на вертикалната права, кои минуваат низ средните на страните. Затоа е доволно да се разгледа четвртина од квадратот (цртеж десно).

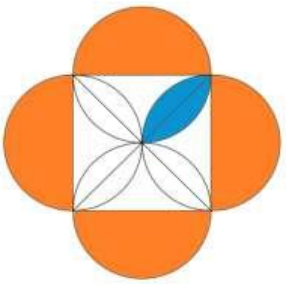


Ако даденият квадрат го сместиме во триаголна мрежа (види цртеж), тогаш лесно се заклучува дека површината која ја формираат сините и жолтите делови е три пати поголема од површината на црвениот дел. Исто така, површините на жолтиот и синиот дел се еднакви.

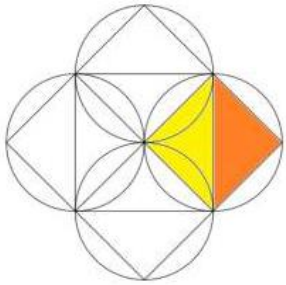
Според тоа, вкупната површина на жолтиот и синиот дел има плоштина $3\cdot 350=1050\,dm^2$, па затоа плоштината на жолтиот дел е е еднаква на $1050:2=525\,dm^2$.

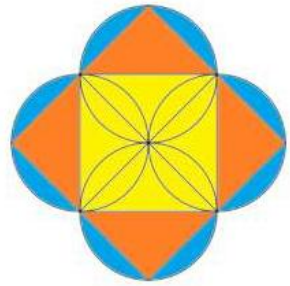
Сега, бидејќи $525=7\cdot 70+35$, потребно е да се купат 8 лименки спреј. Значи, Филип за жолтата боја платил $8\cdot 120=960$ денари.

71. Плоштината на делот од фигурата на цртежот десно кој е сино обоен е еднаква на $124\,cm^2$. За колку квадратни сантиметри е плоштината на квадратот помала од вкупната плоштина на портокалово обоените полукругови?



Решение. Отсечките кои го ги поврзуваат спротивните темиња го делат квадратот на четири триаголници. Да ги нацртаме овие четири триаголници внатре во портокаловите полукругови. На долниот лев цртеж плоштината на жолтиот триаголник е еднаква на плоштината на портокаловиот триаголник.





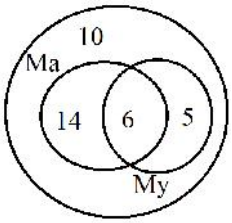
На десниот цртеж збирот на плоштините на портокаловите триаголници е еднаков на плоштината на жолтиот триаголник, па разликата на плоштините која ја бараме во задачата е еднаква на збирот на плоштините на сините фигури. Бидејќи збирот на плоштините на две сини фигури е еднаков на плоштините на сино обоениот дел зададен во задачата, т.е. на $124\,cm^2$, заклучуваме дека збирот на сите 8 сино обоените делови е еднаков на $4 \cdot 124 = 496\,cm^2$.

4. ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

4.1. ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

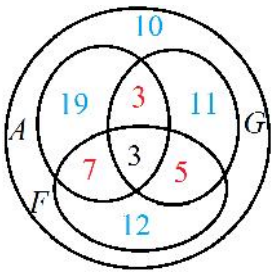
1. Во едно одделение има 35 ученици. Од нив 20 членуваат во математичката секција, 11 во музичката секција и 10 ученици не се во ниту една од овие две секции. Колку ученици членуваат во двете секции?

   Решение. Во двете секции членуваат $35-10=25$ ученици. Понатаму, 20 ученици членуваат во математичката секција, што значи дека $25-20=5$ ученици членуваат само во музичката секција. Но, во музичката секција членуваат вкупно 11 ученици, па затоа од нив $11-5=6$ ученици членуваат во двете секции. Податоците од пресметувањата се дадени во веновиот дијаграм на цртежот десно.



2. На една меѓународна конференција присуствувале 70 делегати. Од нив 32 говорат англиски, 27 говорат француски и 22 говорат германски. Англиски и француски знаат 10 делегати, англиски и германски знаат 6 делегати, француски и германски знаат 8 делегати. Сите три јазици ги говорат 3 делегати. Колку делегати не знаат ниту еден од наведените јазици?

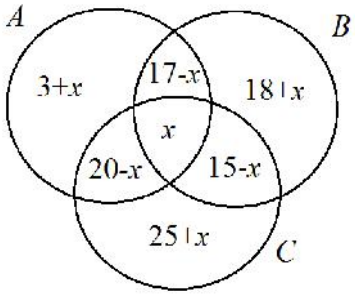
   Решение. Само англиски и француски знаат $10-3=7$ делегати, само француски и германски знаат $8-3=5$ делегати, само англиски и германски знаат $6-3=3$ делегати. Сега, само англиски знаат $32-(7+3+3)=19$, само француски знаат $27-(7+3+5)=12$ делегати. Понатаму, барем еден од трите јазици знаат $19+11+12+3+5+7+3=60$ делегати, што значи дека ниту еден од наведените јазици не знаат $70-60=10$ делегати.



3. Меѓу стоте витези на кралот Артур 40 се верни, 50 се смели и 60 се силни. Истовремено смели и силни се 15, верни и силни се 20, смели и верни се 17. Секој витез е верен, смел или силен. Колку витези се

едновремено смели, верни и силни?

Решение. Нека A, B и C се множествата верни, смели и силни витези, соодветно. Со x да го означиме бројот на витезите кои се едновремено смели, верни и силни. Од условот на задачата го имаме Веновиот дијаграм прикажан на цртежот десно. Бидејќи секој витез е верен, смел или силен, а вкупно има 100 витези, ја добиваме равенката



$$3+x+18+x+25+x+17-x+20-x+15-x+x=100,$$

чие решение е $x=2$. Според тоа, 2 витези на дворот на кралот Артур се едновремено смели, верни и силни.

4. Колку

а) најмногу, б) најмалку

денови може да има во 4 последователни месеци?

Решение. а) Најмногу денови може да се 123. На пример, тоа се месеците јули, август, септември и октомври.

б) Најмалку денови се 120. На пример, кога годината не е престапна тоа се месеците јануари, февруари, март и април.

5. На една автобуска линија се движат два автобуси и на линијата автобусите минуваат во интервал од 21 минута. Во кој интервал ќе минува автобусите ако на линијата се пушти уште еден автобус?

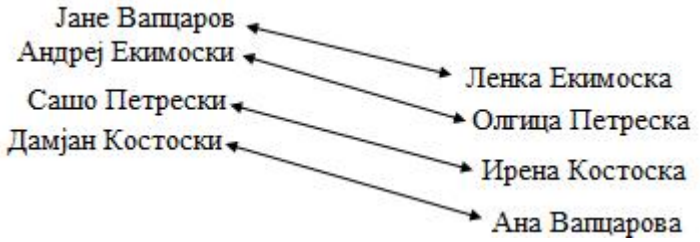
Решение. Ако на линијата се движи само еден автобус, тогаш тој ќе минува на два пати подолго време, односно на $2\cdot 21=42$ минути. Затоа, ако на линијата има три автобуси, тие ќе минуваат во три пати пократок интервал отколку еден автобус, односно на $42:3=14$ минути.

6. Презимињата, татковите имиња и имињата на мажите во една фимилија се: Јакопетрески Рампо Тодор, Јакопетрески Тодор Рампо, Јакопетрески Симон Ристо, Јакопетрески Рампо Симон и Јакопетрески Симон Павел. Тие се членови на фамилијарна музичка група во која еден е пеач, таткото на пеачот е тапанар, братот на пеачот свири на клавијатура и децата на пеачот се гитаристи. Како се вика пеачот?

Решение. Да забележиме дека во музичката група има два пара браќа. Тоа се лицата со исти презимиња и исти имиња на таткото. Понатаму, Јакопетрески Тодор Рампо е единствениот со име на таткото Тодор, па затоа тој нема брат во групата, што значи дека тој е татко на пејачот. Според тоа, пејачот и неговиот брат во некој редослед се Јакопетрески Рампо Тодор и Јакопетрески Рампо Симон. Но, пејачот има два сина и името на нивниот татко е Симон, па затоа пејачот е Јакопетрески Рампо Симон.

7. Четири пријателки имаат по еден брат. Заедно со браќата отишле на игранка, се поделиле во парови момче-девојка и почнале да танцуваат, при што ниту една од пријателките не играла со својот брат. Во секој пар кавалерот бил повисок од партнерката. Имињата и презимињата на девојките и момчињата се: Јане Вапцаров, Андреј Екимоски, Ленка Екимоска, Сашо Петрески, Олгица Петреска, Дамјан Костоски, Ирена Костоска и Ана Вапцарова, и во овој редослед се подредени по височина од највисоката до најниската личност. Определи ги четирите парови?

Решение. Податоците од условот ќе ги претставиме во две колони така, што од лево ќе ги претставиме момчињата, а од десно девојките. Во најгорниот ред се највисоките момче и девојче, а надолу се подредени во опаѓачки редослед.



Понатаму, Дамјан е повиско од Ирена и Ана, но како со Ирена има исто презиме тој е нејзин брат, па затоа еден пар е Дамјан – Ана. Сега, Сашо е повисок од Олгица и Ирена, но како со Олгица има исто презиме тој е нејзин брат, што значи дека друг пар е Сашо – Ирена. Сега е јасно дека третиот пар е Андреј – Олгица и четвртиот пар е Јане – Ленка.

8. На пролетниот маратон првите четири места ги освоиле петтоодделенците Иван, Марија, Горан и Софија. Ако по Горан е пласиран барем еден ученик, местото на Софија е парен број, местото на Иван е

непарен број и Софија е пласирана пред Иван, определи кој кое место го завзел.

Решение. Бидејќи по Горан е пласиран барем еден ученик, заклучуваме дека Горан е пласиран на прво, второ или трето место. Понатаму, Софија е на второ или четврто место, а Иван е на прво или трето место. Бидејќи Софија е пласирана пред Иван, таа не може да е на четврто место. Според тоа, Софија е на второ место, па затоа Иван е на трето место. Сега, Горан не може да е на второ или трето место, бидејќи овие места ги завзеле Софија и Иван, па затоа тој е на прво место и конечно, Марија е четврта.

9. Ана, Дорка, Бранко, Цанко и Фидан на пролетниот кроз ги освоиле првите пет места. На прашањето кој кое место го освоил, пет гледачи ги дале следниве одговори:
   1) Цанко стигна втор, а Бранко трет.
   2) Фидан стигна трет, а Дорка петта.
   3) Ана стигна четврта, а Цанко втор.
   4) Дорка стигна прва, а Фидан втор.
   5) Бранко стигна прв, а Ана четврта.

   Во секој одговор еден дел е точен, а другиот е неточен. Определи го редоследот на натпреварувачите.

   Решение. Да ги разгледаме сите можности за Ана.
   - Ако Ана стигнала прва, тогаш според 5) Бранко стигнал прв, што не е можно бидејќи не може двајца да се први.
   - Ако Ана сигнала втора, тогаш од 1) следува дека Бранко е трет, па од 2) следува дека Дорка е петта. Потоа од 4) следува дека Фидан е втор, што не е можно бидејќи не може двајца да се втори.
   - Ако Ана стигнала трета, тогаш од 1) следува дека Цанко е втор. Понатаму, од 5) следува дека Бранко е прв, па затоа од 4) следува дека Фидан е втор, што не е можно бидејќи не може двајца да се втори.
   - Ако Ана е четврта, тогаш од 3) следува дека Цанко не е втор. Сега, од 1) следува дека Бранко е трет, па од 2) следува дека Дорка е петта. Според 4) следува дека Фидан е втор, па останува Цанко да е прв. На крајот, тврдењето 5) е согласно со горните заклучоци.
   - Ако Ана е петта, тогаш од 2) следува дека Фидан е трет. Сега од 4) следува дека Дорка е прва, а од 5) следува дека Бранко е прв, што не е можно двајца да се први.

Конечно, единствено можно е: Цанко прв, Фидан втор, Бранко трет, Ана четврта и Дорка петта.

10. Горјан замислил трицифрен број, а неговите пријатели пробале да го погодат. Ова се нивните обиди:
Бојан: 218, Рампо: 571, Марко:732, Дамјан: 853.
Горјан им рекол: „Еден од вас ги погоди сите три цифри, а преостанатите само по една, но ниту една од погодените цифри не е на прво место.“ На тоа Рампо рекол: „Врз основа на оваа информација не можеме да определиме кој број си го замислил, бидејќи постојат повеќе такви броеви.“ Определи го збирот на сите можни броеви.
Решение. Да препоставиме дека Бојан ги погодил сите цифри. Тогаш цифрата 2 мора да е на местото местото на десетките. Понатаму, цифрата 1 мора да е на местото на стотките. Сега, цифрата 8 мора да е на местото на десетките, што е противречност, бидејќи две цифри 2 и 8 не може да се на местото на десетките. Значи, Бојан не ги погодил сите три цифри.
Нека претпоставиме дека Рампо ги погодил сите три цифри. Тогаш на сличен начин заклучуваме дека цифрата 5 мора да е на местото на единиците и цифрата 7 мора да е на местото на единиците, што е противречност.
Нека претпоставиме дека Марко ги погодил сите три цифри. Тогаш цифрата 7 мора да е на местото на единиците, цифрата 3 мора да е на местото на стотките и цифрата 2 мора да е на местото на десетките. Според тоа, во овој случај замисленият број е 327.
Нека претпоставиме дека Дамјан ги погодил сите три цифри. Тогаш цифрата 8 мора да е на местото на десетките, цифрата 5 мора да е на местото на единиците и цифрата 3 мора да е на местото на стотките. Според тоа, во овој случај замисленият број е 385.
Збирот на сите можни броеви е $327 + 385 = 712$.

11. На математичката олимпијада учествувале 100 ученици кои решавале три задачи. Првата задача ја решиле 90 ученици, втората задача ја решиле 80 ученици и третата задача ја решиле 75 ученици. Определи го најмалиот можен број ученици кои ги решиле трите задачи.
Решение. Да претпоставиме, дека секој ученик го пишувал решението на секоја задача на посебен лист. Од условот следува дека учениците предале $90 + 80 + 75 = 245$ листови. Бидејќи имаме 100 ученици,

добиваме дека од нив три листа предале најмалку $245 - 2 \cdot 100 = 45$ ученици. Според тоа, најмалку 45 ученици ги решиле сите три задачи.

12. Во кутија Горјан има 6 црвени, 14 сини и 8 зелени топчиња. Без да гледа тој вади топчиња од кутија.
а) Кој е најмалиот број топчиња што треба да ги извади Горјан, за да е сигурен дека извадил две истобојни топчиња.
б) Кој е најмалиот број топчиња што треба да ги извади Горјан, за да е сигурен дека извадил топче од секоја од трите брои?
Решение. а) Во кутијата има три бои и ако Горјан извади 3 топчиња, тие може да бидат црвено, сино и зелено. Така тој нема да има две топчиња со иста боја. Но, ако Горјан извади четири топчиња, две од нив сигурно ќе бидат истобојни.
б) Во кутијата има 6 црвени, 14 сини и 8 зелени топчиња. Ако Горјан извади $14 + 8 = 22$ топчиња, тогаш сите топчиња може да се сини и зелени. Така тој нема да има топче од секоја боја. Но, ако извади 23 топчиња, тогаш сигурно че има барем по едно топче од секоја боја.

13. На еден математички натпревар учествувале 30 ученици. Од нив 25 ја решиле првата задача, 24 ја решиле втората задача, 23 ја решиле третата задача и 22 ја решиле четвртата задача. Докажи дека барем четири ученици ги решиле сите четири задачи.
Решение. *Прв начин*. Според условот 5 ученици не ја решиле првата задача, 6 – втората, 7 – третата и 8 четвртата. Според тоа, најмногу $5 + 6 + 7 + 8 = 26$ ученици може да не ги решиле сите четири задачи. Според тоа, сигурно $30 - 26 = 4$ ученици ги решиле сите четири задачи.
Втор начин. На натпреварот биле дадени $25 + 24 + 23 + 22 = 94$ решенија на сите четири задачи. Имаме 30 ученици и ако секој ученик решил најмногу по три задачи, тогаш бројот на дадените решенија ќе биде $3 \cdot 30 = 90$ задачи. Но, дадени се 94 решенија на задачите, што $94 - 90 = 4$ решенија повеќе. Тоа значи, дека најмалку 4 ученици ги решиле сите задачи.

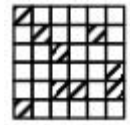
14. Дванаесет едноглави, двоглави и триглави змејови вкупно имаат 25 глави. Докажи дека, триглавите змејови се повеќе од едноглавите.
Решение. Ако замениме 1 едноглав и 1 триглав змеј со 2 двоглави змеја, тогаш бидејќи $1 + 3 = 2 \cdot 2$ бројот на змејовите и бројот на гла-

вите нема да се промени. Ако има толку едноглави колку и триглави змејови, со вакви замени бројот на главите ќе биде 25, а ќе добиеме 12 двоглави змејови кои вкупно имаат $12 \cdot 2 = 24$ глави, што не е можно. За да има 25 глави, треба да има 1 триглав змеј повеќе од едноглавите. На крајот да провериме дека задачата не опишува невозможна ситуација. За тоа е доволно да најдеме пример на 12 змејови кои имаат точно 25 глави. Навистина, 3 едноглави, 5 двоглави и 4 триглави змејови вкупно имаат $3 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 25$ глави.

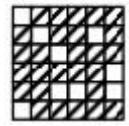
15. Во продавница добиле 20 кутии со по 20 бомбони, за кои што пишувало, дека се по 10 грама. Продавачот бил предупреден, дека во една кутија бомбоните се по 9 грама. Дали може продавачот со едно мерење да открие во која кутија се бомбоните од по 9 грама.
Решение. Да ги значиме кутиите со броевите од 1 до 20. Потоа од првата кутија земаме 1 бомбона, од втората кутија 2 бомбони, од третата кутија 3 бомбони итн. од дваесеттата кутија 20 бомбони. Ако сите бомбони се од по 10 грама, тогаш масата на земените бомбони треба да биде $(1+2+3+...+20) \cdot 10 = 2050$ грама. Разликата меѓу оваа маса и измерената маса ќе биде еднаква на бројот на бомбоните кои се со маса од 9 грама, а тие се земени од кутијата која е означена со тој број. Значи, продавачот може со едно мерење да открие во која кутија бомбоните се по 9 грама.

16. Во една кутија има седум картички на кои се запишани броевите од 3 до 9 (на секоја картичка по еден број). Андреј од кутијата без да гледа зел три картички, а Пабло без да гледа зел две картички, додека две картички останале во кутијата. Андреј погледнал во своите картички и му рекол на Пабло: „Знам дека збирот на броевите на твоите картички е парен.“ Колку е производот на сите броеви на картичките на Андреј?
Решение. Збирот на два броја на картичките кои ги зел Пабло може да е парен само ако двата броја се со иста парност. На картичките се запишани четири непарни и три парни броеви.
Ако Андреј има барем еден непарен број запишан на неговите картички, т.е. ако сите три броја не се парни, тогаш не може да е сигурен дека Пабло не зел еден парен и еден непарен број. Значи, на картичките на Андреј се запишани броевите 4, 6 и 8, па нивниот производ е $4 \cdot 6 \cdot 8 - 192$.

17. Некои од единечните квадратчиња на квадратот прикажан на цртежот десно се штрафирани, а другите се бели. Потоа сите штрафирани квадратчиња се обоени во бело, а сите бели се штрафирани. Ако не е дозволено вртење на квадратот, како сега тој изгледа?



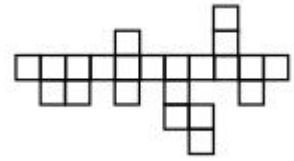
Решение. Во првиот ред бело е првото квадратче, во вториот ред бели се второто и петтото квадратчев во третиот ред бело е третото квадратче, во четвртиот ред бело е шестото квадратче, во петтиот ред бели се третото, четвртото и шестото квадратче, во шестиот ред бело е првото квадратче. Новиот квадрат е прикажан на цртежот десно.



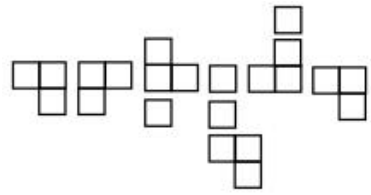
18. Неколку книги со различни дебелини се ставени една до друга на полица. Лево од најдебелата книга има 6 книги, а десно од најтенката има 7 книги. Најстарата книга е до натенката и најдебелата. Кој е најмалиот можен број книги на полицата?

Решение. На долниот цртеж се прикажани две можности на распоредот на книгите согласно условите на задачата. Во првиот случај имаме вкупно 16, а во вториот случај12 книги. Значи, најмалиот можен број книги на полицата е 12.

19. Фигурата прикажана на цртежот десно е поделена на цели квадратчиња така што е добие најголем можен број фигури од видот  . Колку фигури се добиени? Дади пример на поделба?



Решение. Фигурата е составена од 22 квадратчиња, а малата фигура е составена од 3 квадратчиња. Притоа квадратчето во најголемиот ред не



може да е дел од мала фигура, а истото важи за едно од квадратчињата во петтата колона. Значи, во поделбата може да учествуваат најмногу $22-2=20$ квадратчиња. Сега, од $20=6\cdot 3+2$ следува дека може да се добијат најмногу 6 мали фигури. Еден пример на поделба е прикажан на цртежот горе десно.

20. Лифтот во една дваесеткатница може да ги изврши само следниве наредби: да оди 8 ката нагоре и да се спушти за 13 ката. Лифтот не може да тргне нагоре ако над него нема барем 8 ката, ниту надолу ако под него нема барем 13 ката.
а) Како лифтот може да се спушти од дваесеттиот кат на приземје?
б) Како лифтот може да стигне од осми на тринаесети кат?
Решение. а) Имаме
$$20\to 7\to 15\to 2\to 10\to 18\to 5\to 13\to \text{приземје}\ .$$
б) Имаме
$$8\to 16\to 3\to 11\to 19\to 6\to 14\to 1\to 9\to 17\to 4$$
$$\to 12\to 20\to 7\to 15\to 2\to 10\to 18\to 5\to 13.$$

21. Во една соба има две светилки. Кога ќе се приклучи прекинувачот на првата светилка, таа засветува по 6 секунди и свети 5 секунди, потоа пак не свети 6 секунди и свети 5 секунди, и тоа се повторува. Кога ќе се приклучи прекинувачот на втората светилка , таа засветува по 4 секунди и свети 3 секунди, па не свети 4 секунди и свети 3 секунди, и тоа се повторува. Матео ги приклучил истовремено двете светилки и по 2021 секунди ги исклучил. Колку секунди за тоа време две светилки светеле истовремено.
Решение. Секои 11 секунди првата светилка не свети 6 секунди и свети 5 секунди. А кај втората светилка ваков период се повторува секои 7 секунди. Затоа временскиот период кој треба да го набљудуваме како заеднички период за двете светилки трае $7\cdot 11=77$ секунди.

Во првите два правоаголник со посветлите квадратчиња се прикажани секундите во кои светилките светат, а со потемните секундите во кои светилките не светат. Првиот правоаголник ја прикажува состојбата на првата светилка, а вториот правоаголник на втората светилка. Во третиот правоаголник се прикажани секундите во кои двете светилки

светат истовремено. Во разгледуваниот период од 77 секунди двете светилки истовремено светат $1+3+1+3+2+2+3=15$ секунди. Бидејќи $2021=26\cdot 77+19$, такви периоди има 26 , а потоа преостануваат уште 19 секунди. Во овие 19 секунди светилките истовремено ќе светат 2 секунди.

Конечно, во 2021 секунди светилките истовремено ќе светат $26\cdot 15+2=392$ секунди.

4.2. БРОЕЊА

22. На таблата се запишани сите природни броеви од 1 до 243. Андреј ги избришал сите непарни броеви помали од 10. Потоа, Горјан ги избришал сите броеви помали од 100, чија цифра на единиците е 8. На крајот, Пабло ги избришал сите броеви чија цифра на единиците е 9. Колку цифри вкупно останале на таблата?

Решение. На почетокот на таблата имало $9+2\cdot 90+3\cdot 144=621$ цифри. Андреј избришал 5 цифри. Горјан избришал $1+2\cdot 9=19$ цифри, а Пало избришал $2\cdot 9+3\cdot 14=60$ цифри. Значи, сите тројца заедно избришале $5+19+60=84$ цифри и на таблата останале $621-84=537$ цифри.

23. Колку пати е употребена цифрата 7 за запишување на сите броеви од осмата стотка?

Решение. Броеви од осмата стотка се броевите од 701 до 800. На местната вредност на единиците цифрата 7 е употребена 10 пати (во броевите 707, 717, 727, ..., 797). На местната вредност на десетките цифрата 7 е употребена 10 пати (во броевите 770, 771, 771, ..., 779). На местната вредност на стотките е употребена 99 пати (во броевите 701, 702, 703, ..., 779). Значи, цифрата 7 во запишување на броевите на осмата стотка е употребена $10+10+99=119$ пати.

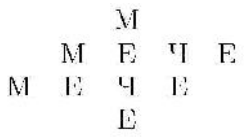
24. Матео има вага со по еден тег од 1 грам, 2 грама, 3 грама, 4 грама и 5 грама. На колку различни начини Матео може да измери маса од 10 грама?

Решение. Бројорт 10 може да се претстави како збир на различни собирци еднакви на некои од броевите 1, 2, 3, 4 и 5, на следниве начини: $1+2+3+4=1+4+5=2+3+5=10$. Според тоа, Матео на три

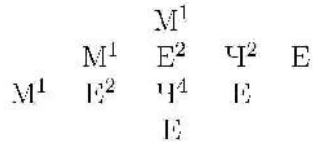
различни начини може да измери маса од 10 грама.

25. На едно дрво живеат голем број камелеони, секој од кои во текот на еден час најмногу еднаш ја менува бојата. Притоа, штом еден камелеон ја промени бојата, по 5 секунди други два камелеони ја менуваат бојата. Утрово, по изгрејсонце еден камелеон ја променил бојата. Колку камелеони ја промениле бојата во следните 36 секунди?
Решение. На почетокот 1 камелеон ја променил бојата. По 5 секунди – други 2, по 10 секунди други $2\cdot 2=4$, по 15 секунди други $2\cdot 4=8$, по 20 секунди други $2\cdot 8=16$, по 25 секунди други $2\cdot 16=32$, по 30 секунди други $2\cdot 32=64$ и по 35 секунди други $2\cdot 64=128$ камелеони ја промениле бојата. Според тоа, по изгрејсонце, бројот на камелеоните кои ја промениле бојата е еднаков на
$$1+2+4+8+16+32+64+128=255.$$

26. На колку различни начини на шемата десно може да се прочита зборот МЕЧЕ.

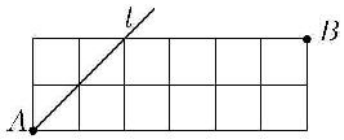


Решение. На секое читање на зборот МЕЧЕ во дадената шема соодветствува маршрута
$$\text{М}\to\text{Е}\to\text{Ч}\to\text{Е},$$
при што се движиме вертикално или хоризонтално. Секоја буква М може да е почеток на маршрутата, па затоа до секоја буква М запишуваме 1. До првата буква Е во вториот ред и до првата буква Е во третиот ред може да се стигне на два начина, па затоа до нив запишуваме 2. Сега, до буквата Ч во вториот ред може да се стигне на два начина и затоа до неа запишуваме 2, а до буквата Ч во третиот ред може да се стигне на четири начини и затоа до неа запишуваме 4. Понатаму, од буквата Ч во вториот ред може да се стигне до три букви Е, што значи дека зборот МЕЧЕ може да се прочита на $2\cdot 3=6$ начина, а од буквата Ч во третиот ред може да се стигне до четири букви Е, што значи дека зборот МЕЧЕ може да се прочита на $4\cdot 4=16$ начина.



Конечно, во дадената шема зборот МЕЧЕ може да се прочита на $6+16=22$ начина.

27. На мрежата дадена на цртежот десно, определи го бројот на патиштата со почеток во точката A и крај во точката B, кои минуваат по линиите на мрежата со чекори само нагоре или надесно, но по излегувањето од точката A не ја сечат правата l.



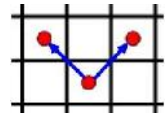
Решение. Секој пат со почеток во A и крај во B вклучува 6 чекори надесно и 2 чекори нагоре. Патот е определен од тоа како се направени чекорите нагоре. За да патот не ја сече правата l, чекорот нагоре не може да е прв, а ако е втор, следниот чекор нагоре не може да е трет.

Понатаму,

- ако првиот чекор нагоре е седми, тогаш имаме 1 пат;
- ако првиот чекор нагоре е шести, тогаш имаме 2 пата;
- ако првиот чекор нагоре е петти, тогаш имаме 3 пата,
- ако првиот чекор нагоре е четврти, тогаш имаме 4 пата,
- ако првиот чекор нагоре е трет, тогаш имаме 5 пата,
- ако првиот чекор нагоре е втор, тогаш имаме 5 пата.

Значи, бараниот број патишта е $5+5+4+3+2+1=20$.

28. Фигура се наоѓа во средното поле на долниот ред на табла 9×9. Во секој потез фигура може да се поместува дијагонално горе за едно поле, односно горе-лево или горе-десно, како што е прикажано на цртежот десно. На колку различни начини фигурата може со низа од осум потези да се премести во горниот ред на таблата?



Решение. На секое поле ќо го запишеме бројот на начините фигурата да дојде до тоа поле. Да го разгледаме жолтото поле на цртежот десно. Ако фигурата е на тоа поле, тогаш претходно морала да биде на едно од зелените полиња. Затоа во жолтото поле ќе го запишеме збирот на броевите кои се во зелените полиња.

20		55		70		55		20
	20		35		35		20	
5		15		20		15		5
	5		10		10		5	
1		4		6		4		1
	1		3		3		1	
		1		2		1		
			1		1			
				●				

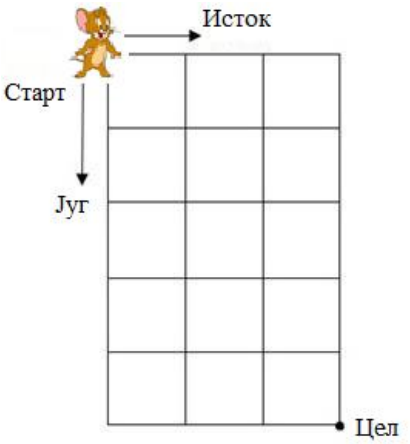
Почетната положба на фигурата е означена со црвено кругче. Од тоа поле може да дојде на две полиња во вториот ред, и тоа на секое поле на еден начин, па во тие полиња запишуваме 1. Таблата ја пополнуваме по редови, одејќи нагоре. Кога ќе

ја пополниме таблата треба да ги собереме броевите кои се запишани во најгорниот ред. Имаме:

$$20+55+70+55+20=220,$$

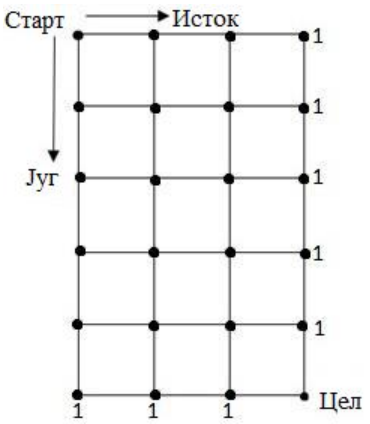
што значи дека фигурата може со низа од осум потези да се премести во горниот ред на таблата на 220 начини.

29. Глувчето Џери се наоѓа во горниот лев агол на лавиринтот прикажан на цртежот десно и мора да стигне до целта која е во спротивниот агол. Џери смее да се движи само на југ и на исток (види цртеж). На колку начини Џери може да стигне до целта?

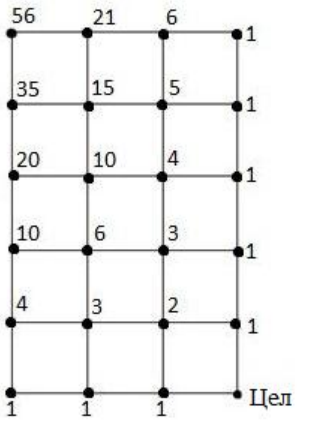


Решение. Движењето за еден чекор во правец исток ќе го означуваме со I, а движењето за еден чекор во правец југ со J.

Да ги означиме сите темиња на квадратот со точки. Од секој точка Џери може да оди на исток или на југ, а бројот покрај точката нека го означува бројот на различните начини на движење од тоа место до целта. На точките од кои постои само еден можен пат ќе им го придружиме бројот 1 (цртеж десно).



Да го разгледаме квадратот во долниот десен агол. Од последната неозначена точка до целта можеме да дојдеме на 2 начина (IJ, JI). Затоа на оваа точка и го придружуваме бројот 2.



Од точката над точката на која и го придруживме бројот 2 до целта можеме да дојдеме на 3 начина (IJJ, JIJ, JJI). Истото важи и за точката лево од точката на која сме и го придружиле бројот 2, т.е. и од неа до целта можеме да стигнеме на 3

начина ($ИЈ, ИЈИ, ЈИИ$). Од претходните разгледувања заклучуваме дека вредноста придружена на секоја означена точка се добива така што ќе ги собереме вредностите придружени на точките кои се наоѓаат едно место кон исток и едно место кон југ. Така го добиваме цртежот десно. Значи, постојат 56 различни начини на кои Џери може да стигне до целта.

30. На колку различни начини може да се избере цифра $a > 0$ така, што збирот на двоцифрениот број запишан со две исти цифри a и двоцифрениот број запишан со различни цифри кои се поголеми од a е еднаков на 100?

Решение. Не е можно $a > 4$, бидејќи тогаш двоцифрениот број со две исти цифри a е најмалку 55 и вториот собирок, со кој се добива збир 100, треба да има цифра на десетките не поголема од 4. Но, според условот таа треба да е поголема од 5. Така, единствените можности за двоцифрениот број запишан со две исти цифри се 11, 22, 33 и 44, Четирите случаи се реализираат на следниов начин:

$$11+89=100,\ 22+78=100,\ 33+67=100,\ 44+56=100.$$

31. Андреј ги запишал сите трицифрени броеви, во кои цифрата на стотките е еднаква на збирот на цифрите на единиците и десетките. Колку броеви запишал Андреј?

Решение. Збирот на цифрите на десетките и единиците во броевите на Андреј е од 1 до 9.

Ако цифрата не единиците е 0, тогаш цифрата е десетките може да биде било која цифра од 1 до 9. Значи, Андреј запишал 9 броја со цифрата на единиците 0.

Ако цифрата на единиците е 1, тогаш цифрата на десетките може да биде било која цифра од 0 до 8. Значи, Андреј запишал 9 броја со цифрата на единиците 1.

Ако цифрата на единиците е 2, тогаш цифрата на десетките може да биде било која цифра од 0 до 7. Значи, Андреј запишал 8 броја со цифрата на единиците 2.

Ако цифрата на единиците е 3, тогаш цифрата на десетките може да биде било која цифра од 0 до 6. Значи, Андреј запишал 7 броја со цифрата на единиците 3.

Ако цифрата на единиците е 4, тогаш цифрата на десетките може да биде било која цифра од 0 до 5. Значи, Андреј запишал 6 броја со

цифрата на единиците 4.
Продолжувајќи ја горната постапка, добиваме дека Андреј запишал $9+9+8+7+6+5+4+3+2+1=54$ броја.

32. Определи го бројот на петцифрените броеви $\overline{abcde}$, за кои цифрите b и d се еднакви на збировите на двете нивни соседни цифри, т.е. $b=a+c$ и $d=c+e$.
Решение. Јасно, $a>0$, па затоа $b>c$, а $e\geq 0$, од каде следува $d\geq c$. Ако ги избереме броевите b,c,d така, што $b>c$ и $d\geq c$, тогаш ќе имаме единствени броеви a и e, за кои бројот $\overline{abcde}$ ги задоволува условоите на задачата. Јасно, бројот c може да биде од 0 до 8, па така ако $c=0$, тогаш за a имаме 9, а за e имаме 10 можности, т.е. вкупно $10\cdot 9$ можности; ако $c=1$, тогаш за a имаме 8, а за e имаме 9 можности, т.е. вкупно $9\cdot 8$ можности, итн. ако $c=8$, тогаш за a имаме 1 можност, а за e имаме 2 можности. Според тоа, бараниот број броеви е:
$$10\cdot 9+9\cdot 8+8\cdot 7+7\cdot 6+6\cdot 5+5\cdot 4+4\cdot 3+3\cdot 2+2\cdot 1=330.$$

33. Определи го бројот на трицифрените броеви, кај кои цифрата на десетките е еднаква на збирот на другите две цифри.
Решение. Цифрата на десетките може да биде било ненулта цифра, што значи дека имаме 9 можности. Затоа броевите со саканото својство може да се поделат во 9 групи и то:
Прва група: 110,
Втора група: 220, 121,
Трета група: 330, 231, 123,
Четврта група: 440, 341, 242, 143,
Петта група: 550, 451, 352, 253, 154,
Шеста група: 660, 561, 462, 363, 264, 165,
Седма група: 770, 671, 572, 473, 374, 275, 176,
Осма група: 880, 781, 682, 583, 484, 385, 286, 187,
Деветта група: 990, 891, 792, 693, 594, 495, 396, 297, 198.
Конечно, имаме $1+2+3+4+5+6+7+8+9=45$ броја со саканото својство.

34. Определи го бројот на природните броеви чиј производ на цифри е 14 и збирот на цифрите е 11? Определи го најголемиот од овие броеви.

Решение. Имаме, $14 = 2 \cdot 7$ и како при множење со 1 се добива истиот број, за да збирот на цифрите е еднаков на 11, цифирите со кои е запишан бројот се: 1, 1, 2 и 7. Според тоа, има 12 броеви чиј производ на цифрите е 14, а збирот на цифрите е 11: 7211, 7121, 7112, 2711, 2171, 2117, 1721, 1712, 1271, 1217, 1172 и 1127. Најголем меѓу овие броеви е бројот 7211.

35. Запиши ги сите трицифрени броеви чиј збир на цифри е 10, а најголемата цифра е за 6 поголема од најмалата?
Решение. Ако најмалата цифра е 2, тогаш најголемата цифра треба да биде 8, па затоа третата цифра ќе биде $10 - (2 + 8) = 0$, што не е можно бидејќи 2 треба да е најмала цифра.
Ако најмалата цифра е 1, тогаш најголемата цифра е 7, па третата цифра е $10 - (1 + 7) = 2$ и во овој случај ги добиваме броевите: 127, 172, 217, 271, 712 и 721.
Ако најмалата цифра е 0, тогаш најголемата цифра е 6, па третата цифра е $10 - (0 + 6) = 4$ и во овој случај ги добиваме броевите: 406, 460, 604 и 640.

36. За колку бројот на непарните трицифрени броеви е поголем од бројот на трицифрените броеви запишани со непарни цифри?
Решение. Имаме $999 - 99 = 900$ трицифрени броеви и од нив половината се непарни. Значи, непарни трицифрени броеви се $900 : 2 = 450$.
При запишување на трицифрен број со непарни цифри за секоја цифра има 5 можности (тоа се цифрите 1, 3, 5, 7 и 9). Значи, за првата цифра 5 можности, па за втората 5 можности и за третата 5 можности, т.е. имаме вкупно $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ трицифрени броеви запишани со непарни цифри. Конечно, бараната разлика е $450 - 125 = 325$.

37. Определи го бројот на сите трицифрени природни броеви кои се парни и не се деливи со 10.
Решение. Бараните броеви се трицифрени броеви со цифрата на единиците 2, 4, 6 или 8. Значи, за цифрата на единиците имаме 4 можности. Цифрата на десетките може да е било која цифра, па затоа имаме 10 можности, а цифрата на стотките може да е било која ненулта цифра, па затоа имаме 9 можности. Конечно, бараниот број броеви е $4 \cdot 10 \cdot 9 = 360$.

38. Определи го бројот на трицифрените броеви кај кои цифрата на стотките е поголема од цифрата на десетките, а оваа е поголема од цифрата на единиците.

Решение. Три различни цифри можеме да избереме на $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ начини, бидејќи првата цифра можеме да ја избереме на 10 начини, втората на 9 начини и третата на 8 начини. Понатаму, цифрите a, b, c можеме да ги распоредиме на шест начини: abc, acb, bac, bca, cab, cba. Но точно во еден од овие шест распореди цифрите се распоредени така што секоја следна е помала од претходната. Затоа, бројот на бараните броеви е еднаков на $720 : 6 = 120$.

39. Определи го бројот на четирицифрените броеви чиј производ на цифри е 4. Колку е збирот на овие броеви?

Решение. Бројот 4 како производ на четири цифри може да се запише на следниве начини $4 = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 = 1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 2$. Со цифрите 1, 1, 1, 4 се добиваат броевите 4111, 1411, 1141 и 1114. Со цифрите 2, 2, 1, 1 се добивамаат броевите 2211, 2121, 2112, 1122, 1212 и 1221. Значи, имаме 10 броеви чиј производ на цифри е 4 и нивниот збир е 17776.

40. Запиши ги сите броеви помали од 300 кои во својот запис имаат точно две двојки. Колку броеви запиша?

Решение. Меѓу двоцифрените броеви има само еден таков број: 22. Меѓу трицифрените броеви такви броеви се: 122, 202, 212, 220, 221, 223, 224, 225, 226, 227, 228, 229, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292. Значи, постојат $1 + 19 = 20$ броеви кои се помали од 300 и кои во својот запис содржат точно две двојки.

41. За еден број ќе велиме дека е *интересен* ако е запишан со различни цифри и првата цифра му е еднаква на збирот на сите преостанати цифри. На пример, броевите 321 и 80413 се интересни. Определи го бројот на интересни броеви.

Решение. Прво да забележиме дека интересен број може да има 3, 4 или 5 цифри. Навистина, интересен број не може да има повеќе од 5 цифри, бидејќи $0 + 1 + 2 + 3 + 4 = 10$. Трицифрени интересни броеви се:

$$3 = 1 + 2,$$
$$4 = 1 + 3,$$
$$5 = 1 + 4 = 2 + 3,$$
$$6 = 1 + 5 = 2 + 4,$$

$$7 = 1+6 = 2+5 = 3+4,$$
$$8 = 1+7 = 2+6 = 3+5,$$
$$9 = 1+8 = 2+7 = 3+6 = 4+5.$$

Тоа се 16 можности, но редоследот на втората и третата цифра е произволен, па затоа имаме $2 \cdot 16 = 32$ трицифрени интересни броеви.

Кај четирицифрените броеви ги имаме сите 16 комбинации како кај трицифрените броеви, бидејќи секаде можеме да го додадеме собирокот 0, и имаме 7 дополнителни можности:

$$6 = 1+2+3,$$
$$7 = 1+2+4,$$
$$8 = 1+2+5 = 1+3+4,$$
$$9 = 1+2+6 = 1+3+5 = 2+3+4.$$

Тоа се вкупно $16+7 = 23$ различни збирови. Секој збир дава шест интересни броеви бидејќи сите цифри, освен првата, може да ги менуваат местата. Значи, има $6 \cdot 23 = 138$ интересни четирицифрени броеви.

Кај петцифрените броеви не се можни комбинации без 0, бидејќи $1+2+3+4 = 10 > 9$. Според тоа, ги имаме истите 7 можности како кај четирицифрените броеви без 0, па во секоја можност додаваме 0. Понатаму, секој збир дава 24 интересни броеви, бидејќи последните четири цифри може произволно да се распоредат на $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ начини. Значи, петцифрени интересни броеви има $7 \cdot 24 = 168$.

Конечно, имаме вкуно $168 + 138 + 32 = 338$ интересни броеви.

42. Определи го бројот на природните броеви помали од 10000 кои во својот запис имаат точно три еднакви цифри.

Решение. Броевите чиј број треба да го определиме мора да се трицифрени и четирицифрени.

Трицифрени броеви со саканото својство се 9 и тоа: 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888 и 999.

Четирицифрените броеви кои во својот запи имаат точно три еднакви цифри може да се од видот: $\overline{aaab}, \overline{aaba}, \overline{abaa}$ и $\overline{baaa}$. За да определиме колку броеви има од видот $\overline{aaab}$, да забележиме дека a и b мора да се различни цифри и a не може да е 0. Според тоа, цифрата a може да се избере на 9 начини (било која цифра освен 0), а потоа цифрата b може да се избере на 9 начини (било која цифра освен a). Значи, броеви од видот $\overline{aaab}$ има $9 \cdot 9 = 81$. На потополно ист начин

се докажува дека броеви од видовите $\overline{aaba}, \overline{abaa}$ има по 81, а исто важи и за броевите од видот $\overline{baaa}$ само што прво ја избираме b (различна од 0), а потоа ја избираме a (различна од b). Според тоа, вкупно имаме $4 \cdot 81 = 324$ четирицифрени броеви во чиј запис има точно три еднакви цифри.

Конечно, бараниот број броеви е $324 + 9 = 333$.

43. На колку различни начини може банкнота од 50 евра да се размени со монети пд 2 евра и банкноти од 5 и 10 евра? Испиши ги сите можности.

Решение. Јасно, монети од 2 евра може да има 0, 5, 10, 15, 20 или 25. Во долната табела редоследно се запишани овие случаи.

Од 10	5	4	3	2	1	0	4	3	2	1	0
Од 5	0	2	4	6	8	10	0	2	4	6	8
Од 2	0	0	0	0	0	0	5	5	5	5	5
Сума	**50**	**50**	**50**	**50**	**50**	**50**	**50**	**50**	**50**	**50**	**50**
Од 10	3	2	1	0	2	1	0	1	0	0	
Од 5	0	2	4	6	0	2	4	0	2	0	
Од 2	10	10	10	10	15	15	15	20	20	25	
Сума	**50**	**50**	**50**	**50**	**50**	**50**	**50**	**50**	**50**	**50**	

Конечно, банкнота од 50 евра може на 21 начин да се рамени со монети од 2 евра и банкноти од 5 и 10 евра.

44. На еден шаховски турнир учествувале 12 шахисти. Секој шахист со секој друг шахист одиграл по 3 партии. Колку партии се одиграни на турнирот?

Решение. На турнирот учествувале 12 шахисти и ако секој одиграл по една партија со секој од преостанатите 11 шахисти, тогаш бидејќи партијата на X со Y е истата партија на Y со X, заклучуваме дека во производот $12 \cdot 11 = 132$ секоја партија е броена два пати. Според тоа, ако секој шахист одиграл по една партија со секој друг шахист, тогаш бројот на одиграните партии е еднаков на $\frac{12 \cdot 11}{2} = 66$. Но, секој со секого одиграл по 3 партии, па затоа бројот на одиграните партии е еднаков на $3 \cdot 66 = 198$.

45. Во една држава има 10 фудбалски екипи. Првенството е организирано така што секоја екипа игра со секоја друга екипа по четири натпрева-

ри. Колку натпревари ќе се одиграат во текот на целото првенство?

Решение. Прво ќе пресметаме колку натпревари ќе се одиграат ако секоја екипа игра со секоја друга екипа игра по еден натпревар.

Секоја екипа игра со секоја од другите 9 екипи по еден натпревар, што значи дека секоја екипа игра по 9 натпревари. Имаме 10 екипи, но како при ваквото броење натпреварот меѓу било кои две екипи A и B е броен два пати (прво A со B, а потоа B со A), во случај кога секоја екипа игра со секоја друга екипа по еден натпревар вкупниот број натпревари е $(10 \cdot 9) : 2 = 45$.

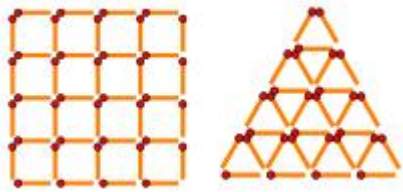
Јасно, ако секоја екипа со секоја друга екипа игра по 4 натпревари, тогаш вкупниот број натпревари е 4 пати поголем, што значи дека бараниот број натпревари е $45 \cdot 4 = 180$.

46. На турнир во новиот спорт *метломет* се натпреваруваат 19 екипи и секоја екипа со секоја друга екипа одиграла по еден натпревар. За победа екипата добива 4 бода, а поразената екипа не добива бодови. Во случај на нерешен резултат, секоја од двет екипи добива по еден бод. На турнирот сите екипи освоиле вкупно 600 бодови. Колку натпревари завршиле со победа на едната екипа?

Решение. Да замислиме дека секои две екипи играат два пати, еднаш едната екипа е домаќин, а вториот пат другата екипа е домаќин. Домаќинот може да го избереме на 19 начини, а втората екипа на 18 начини. Значи, удвоениот број на натпревари е еднаков на $19 \cdot 18 = 342$, па затоа на турнирот се одиграни $342 : 2 = 171$ натпревар.

Ако сите натпревари завршеле со победа на едната екипа, тогаш екипите ќе освоеле $4 \cdot 171 = 684$ бодови. Но, на турнирот сите екипи освоиле $684 - 600 = 84$ бодови помалку. Тоа значи дека наместо 4 бодови, некои натпревари донесле 2 бода. Според тоа, на $84 : 2 = 42$ натпревари се освоени по 2 бода, што значи дека 42 натпревари завршиле нерешено.

47. Иван од кибритењни чкорчиња составил квадрат со должина 36. Марија ги зела истите тие чкорчиња и направила рамностран триаголник со должина 36. Колку чкорчиња останале неискористени. (На цртежот десно се прикажани квадратот и триаголникот со



должина 4 составени од кибритени чкорчиња.)

Решение. Ќе пребројме колку чкорчиња се потребни за квадрат, а колку за триаголник со страна со должина 36.

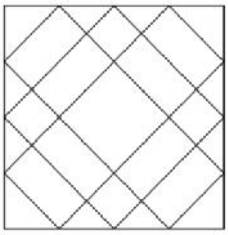
Чкорчињата кои го формираат квадратот се поставени хоризонтално и вертикално. Во секој ред на квадратот има по 36 чкорчиња, а има 37 редови со чкорчиња. Значи хоризонтално се поставени $36 \cdot 37 = 1332$ чкорчиња. Исто толку чкорчиња се поставени и вертикално. Според тоа, за квадрат со страна 36 се употребени $2 \cdot 1332 = 2664$ чкорчиња.

Чкорчињата од кои е направен триаголникот се поставени во три смера. Во секој смер бројот на чкорчињата е

$$36 + 35 + 34 + 33 + \ldots + 4 + 3 + 2 + 1 = (36 + 1) + (35 + 2) + \ldots + (19 + 18)$$
$$= 18 \cdot 37 = 666.$$

Значи, за триаголникот се употребени $3 \cdot 666 = 1998$ чкорчиња. Според тоа, неискористени останале $2664 - 1998 = 666$ чкорчиња.

48. Во квадратот прикажан на цртежот десно се нацртани три правоаголника со темиња на страните на квадратот. Колку различни триаголници и колку различни правоаголници има на дадениот цртеж?

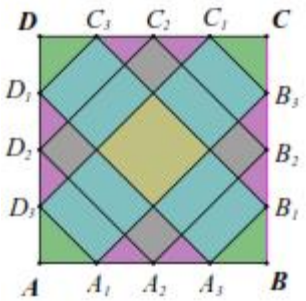


Решение. Отсечките кои се нацртани го делат почетниот квадрат на мали триаголници и правоаголници кои не се преклопуваат, а кои ќе ги нарекуваме основни триаголници и правоаголници. Сите преостанати триаголници и правоаголници се состојат од основните.

Квадратот е поделен на 8 мали (лилјакови) и 4 големи (зелени) основни триаголници, потоа на 4 мали (сиви) основни квадрати, 8 средни (сини) основни правоаголници и 1 голем (жолт) основен квадрат.

Триаголници се:

- 8 лилјакови триаголници,
- 4 зелени триаголници,
- 4 триаголници составени од 2 лилјакови триаголници и 1 сив квадрат,
- 4 триаголници составени од 1 зелен триаголник, 2 лилјакови триаголници и 1 син триаголник,
- 4 триаголници составени од 1 зелен триаголник, 4 лилјакови триаголници,



2 сиви квадрати и 2 сини правоагол-ници.

Според тоа, на цртежот имаме вкупно 24 триаголници.

Правоаголници има (броени по ред според бројот на основните правоаголници од кои се составени):

- 1 жолт квадрат,
- 4 сиви квадрати,
- 8 сини правоаголници,
- 4 квадрати формирани од по два сини правоаголника,
- 4 правоаголници формирани од син праваоголник и жолт квадрат,
- 8 правоаголници формирани од син правоаголник и сив квадрат,
- 4 правоаголници формирани од син правоаголник и 2 сиви квадрати,
- 6 правоаголници формирани од по два сини квадратии два сиви квадрати,
- 4 правоаголници формирани од по три сини правоаголници и жолт квадрат,
- 4 квадрати формирани од жолт квадрат, еден сив квадрат и два сини правоаголници,
- 2 правоаголника формирани од по четири сини правоаголници и жолт квадрат,
- 4 правоаголници формирани од жолт квадрат, два сиви квадрати и три сини правоголници,
- 1 квадрат фомрмиран од жолт квадрат, четири сиви квадрати и четири сини квадрати,
- 1 почетен квадрат.

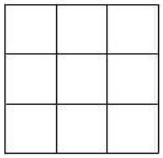
Значи, на цртежот има 55 правоаголници.

4.3. РАСПОРЕДУВАЊА

49. Подреди во редица две единици, две двојки, две тројки и две четворки, така што меѓу двете единици да има точно една цифра, меѓу двете двојки да има точно две цифри, меѓу двете тројки да има точно три цифри и меѓу двете четворки да има точно четири цифри.

Решение. Едно од можните подредувања на цифрите е 23421314. Обиди се да најдеш друго подредување на цифрите.

50. Во секое од деветте мали квадратчиња на големиот квадрат е запишан еден од броевите 1, 2 или 3 така, што во секој ред и во секоја колона се среќаваат сите три броја. Во горното лево квадратче е запишан бројот 1. Колку големи квадрати може да се пополнат на овој начин.



Решение. За квадратчето десно од 1 има две можности – да се стави 2 или 3. За квадратчето под 1 има две можности – да се стави 2 или 3. Според тоа, досега имаме $2 \cdot 2 = 4$ можности. Преостанатите квадратчиња се пополнуваат еднозначно (види ги долните цртежи)

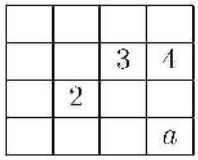
1	2	3
3	1	2
2	3	1

1	3	2
2	1	3
3	2	1

1	2	3
2	3	1
3	1	2

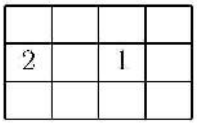
1	3	2
3	2	1
2	1	3

51. Броевите 1, 2, 3 и 4 се запишани во единечните квадратчиња на 4×4 квадратот така што во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала нема два еднакви броја (цртеж десно). Кој број е бројот a?



Решение. Во вториот ред недостасуваат броевите 1 и 2, но бројот 2 не може да е запишан во втората колона, па затоа бројот 2 е запишан во првата колона на вториот ред. Понатаму, во првиот ред бројот 2 не може да е првата, втората и четвртата цифра, бидејќи во спротивно се добива колона или дијагонала со два броја 2. Сега во четвртата колона во првите три квадратчиња не може да е запишан бројот 2, бидејќи ќе се добие ред со два броја 2, па затоа во четвртата колона бројот 2 е на местото на бројот a ,т.е. $a = 2$.

52. Некои квадратчиња во табелата десно се минирани. Секој запишан број го покажува бројот на мините во квадратчињата, соседни на неговото квадратче. (Соседни се квадратчињата кои имаат барем едно заедничко теме, во квадратче со број нема мина.) На колку начини може да се распоредат мините во табелата.



Решение. Во втората колона од лево може да има најмногу една мина. Ако во некое од трите полиња во втората колона има мина, тогаш уште една мина е поставена во едно од другите две полиња на првата колона, па така добиваме $3 \cdot 2 = 6$ можности. Ако во полињата на втората колона нема мина, тогаш има мина во двете полиња на првата

колона и само една мина во петте слободни полиња на третата и четвртата колона, па во овој случај имаме $1\cdot 5=5$ можности.
Конечно, вкупно има $6+5=11$ можности за рспоредување на мините.

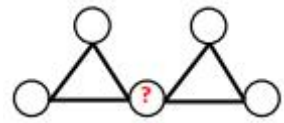
53. Марија ги пополнила полињата во табела 8×8 така, што секој број во првиот ред или првата колона е поголем или еднаков на 1, секој број во вториот ред или втората колона е поголем или еднаков на 2, секој број во третиот ред или третата колона е поголем или еднаков на 3, итн. секој број во осмиот ред или осмата колона е поголем или еднаков на 8. Кој е најмалиот можен збир на броевите кои ги запишала Марија?

Решение. Најмал збир се добива ако во осмиот ред или осмата колона сите 15 броеви се еднакви на 8, потоа преостанатите 13 броеви во седмиот ред или седмата колона се еднакви на 7, па преостанатите 11 броеви во шестиот ред или шестата колона се еднакви на 6 итн. (види табела десно). Според тоа, намалиот можен збир на броевите кли ги запишала Марија е еднаков на:

1	2	3	4	5	6	7	8
2	2	3	4	5	6	7	8
3	3	3	4	5	6	7	8
4	4	4	4	5	6	7	8
5	5	5	5	5	6	7	8
6	6	6	6	6	6	7	8
7	7	7	7	7	7	7	8
8	8	8	8	8	8	8	8

$$15\cdot 8+13\cdot 7+11\cdot 6\_9\cdot 5+7\cdot 4+5\cdot 3+3\cdot 2+1\cdot 1=372\,.$$

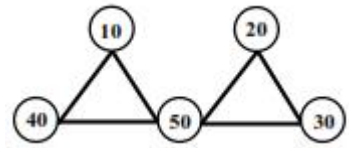
54. Запиши ги броевите 10, 20, 30, 40 и 50 во темињата на двата триаголника така, што збирот на броевите запишани во темињата на секој од триаголниците е еднаков на 100 (цртеж десно). Кој број е запишан на местото на прашалникот?



Решение. Збирот на броевите запишани во темињата на едниот триаголник и збирот на броевите запишани во другиот триаголник е еднаков на $100+100=200$. Понатаму, овој збир се добива кога на збирот на петте броја, т.е. на

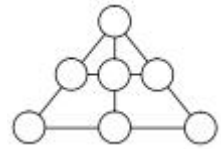
$$10+20+30+40+50=150$$

се додаде бројот запишан на местото на прашалникот. Значи, бројот запишан на местото на прашалникот е еднаков на $200-150=50$. Едно пополнување е да-

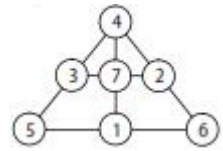


дено на цртежот десно.

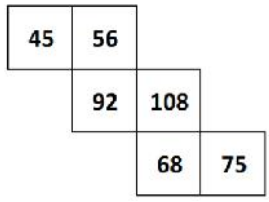
55. Во кругчињата на дијаграмот десно запиши ги сите броеви од 1 до 7 така што збирот на броевите запишани во кругчињата на секоја права ќе биде еднаков на 12.

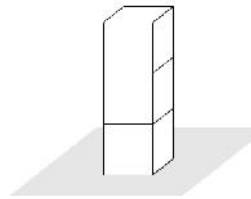


Решение. Збирот на броевите од 1 до 7 е еднаков на $1+2+3+4+5+6+7=28$, а збирот на броевите запишани во долните два реда е еднаков на $12+12=24$. Според тоа, во горното кругче мора да е запишан бројот $28-24=4$. На трите прави на кои е бројот 4 мора збирот на другите два броја да е 8, па затоа преостанатите шест броја се поделени во паровите: 1 и 7, 2 и 6, 5 и 3. Сега, земајќи по еден број од секој од овие три парови броеви треба да добиеме збир еднаков на 12, па затоа во кругчињата на долните два реда треба да ги запишема броевите 1, 6, 5 и 7, 2, 3. Едно решение на задачата е дадено на цртежот десно, а можни се и други пополнувања пришто треба да се запазат паровите и тројките по правите.



56. Три еднакви коцки имаат мрежа како на долниот лев цртеж. Коцките се поставени на маса една над друга како на долниот десен цртеж. Колкав е најмалиот можен збир на сите видливи ѕидови на така поставените коцки на масата?





Решение. Кога три вакви коцки се постават една над друга, 5 ѕидови не се видливи, а преостанатите 13 ѕидови се видливи. За да го определиме најмалиот можен збир на броевите на видливите ѕидови, ќе го определиме најголемиот можен збир на 5 ѕидови кои не се видливи.

Кога од прикажаната мрежа ќе се направи коцка, на нејзините спротивни ѕидови ќе бидат броевите: 45 и 108, 92 и 75, 56 и 68. Најголем можен збир на таков пар е $92+75=167$ Долните две коцки имаат невидливи ѕидови со броевите 92 и 75, а горната коцка ќе ја поставиме така што на невидливиот ѕид ќе биде бројот 108. Тогаш, збирот на броевите на невисливите ѕидови ќе биде $167+167+108=442$.

Збирот на броевите на секоја коцка е $45+56+92+108+68+75=444$. Имаме три коцки, па затоа збирот на броевите на сите ѕидови е $3\cdot 444=1332$. Конечно, најмалиот можен збир на броевите на сите видливи ѕидови е $1332-442=890$.