

Površina tangentnog i tetivnog mnogougla

Hasan Smajić^a

^aJU OŠ "Malešići", Malešići

Sažetak: U ovom radu izvedena je formula za izračunavanje površine bicentričnog četverougla (četverougla koji je istovremeno i tangentni i tetivni) pomoću dužine njegovih stranica. Zatim su izvedene različite forme površine tetivnog mnogougla kao i formula za površinu tangentnog mnogougla.

1. Uvod

Ovaj rad predstavlja nastavak istraživanja započelih u ranijim radovima [1],[2],[3] u kojima su dokazani teoremi o potrebnim i dovoljnim uvjetima da bi konveksni mnogougao bio tangentni (može se u njega upisati kružnica), odnosno tetivni (može se oko njega opisati kružnica).

Poznato nam je da se proučavanje površine trougla, četverougla i pravilnog mnogougla može izvesti na više načina (pomoću različitih formula).

Postavlja se pitanje: kako izračunati površinu tangentnog i tetivnog mnogougla koji nisu pravilni? U ovome radu bit će dat odgovor na to pitanje.

Slike urađene u *GeoGebra* služe uglavnom kao provjera tačnosti algebarskih izračunavanja (valjanosti izvedenih formula).

Prije svega, neophodno je podsjetiti se nekih važnih rezultata dobijenih u [1],[2],[3], a koje ćemo koristiti u nastavku.

Teorem 1.1. *Konveksni mnogougao $A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n$ koji ima neparan broj tjemena ($n = 2k + 1$) je tetivni ako i samo ako vrijedi jednakost*

$$\frac{a_1}{\cos \varphi_1} = \cdots = \frac{a_{n-2}}{\cos \varphi_{n-2}} = \frac{a_{n-1}}{\cos \varphi_{n-1}} = 2R,$$

pri čemu su $a_i = A_iA_{i+1}$, ($i = 1, 2, \dots, n-1$) bilo kojih $n-1$ stranica mnogougla, $\alpha_i = \angle A_i$ uglovi mnogougla,

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \cdots + \alpha_{n-1} - \alpha_n}{2},$$

$$\varphi_i = \angle OA_iA_{i+1} = \angle OA_{i+1}A_i = \alpha_i - \varphi_{i-1}, (i = 2, 3, \dots, n-1),$$

R poluprečnik opisane kružnice trougla $A_1A_2A_3$ i O centar te kružnice.

Ciljna skupina: osnovna škola, srednja škola

Rad preuzet: 2018.

Kategorizacija: Stručno-istraživački rad

Email adresa: smajic.cico@gmail.com (Hasan Smajić)

Teorem 1.2. Konveksni mnogougao $A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n$ koji ima paran broj tjemena ($n = 2k$) je tetivni ako i samo ako vrijedi jednakost

$$\frac{a_1}{\cos \varphi_1} = \cdots = \frac{a_{n-2}}{\cos \varphi_{n-2}} = \frac{a_{n-1}}{\cos \varphi_{n-1}} = 2R,$$

pri čemu su $a_i = A_iA_{i+1}$, ($i = 1, 2, \dots, n-1$) bilo kojih $n-1$ stranica mnogougla, $\alpha_i = \angle A_i$ uglovi mnogougla,

$$\varphi_1 = \arctan \frac{a_2 - a_1 \cos \alpha_2}{a_1 \sin \alpha_2}, 0^\circ < \varphi_1 < 90^\circ,$$

$$\varphi_i = \angle OA_iA_{i+1} = \angle OA_{i+1}A_i = \alpha_i - \varphi_{i-1}, (i = 2, 3, \dots, n-1),$$

R poluprečnik opisane kružnice sa centrom u tački O .

Teorem 1.3. Mnogougao koji ima n tjemena je tangentni ako i samo ako vrijedi jednakost

$$\frac{a_1}{\cot \frac{\alpha_1}{2} + \cot \frac{\beta_1}{2}} = \cdots = \frac{a_{n-3}}{\cot \frac{\alpha_{n-3}}{2} + \cot \frac{\beta_{n-3}}{2}} = \frac{a_{n-2}}{\cot \frac{\alpha_{n-2}}{2} + \cot \frac{\beta_{n-2}}{2}} = r, \quad (1)$$

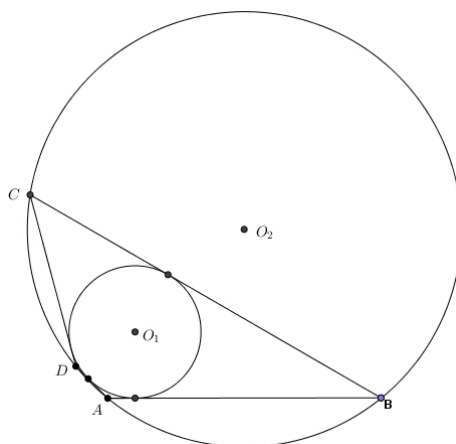
gdje su $a_1, a_2, \dots, a_{n-3}, a_{n-2}$ bilo kojih $(n-2)$ stranica pri čemu preostale dvije stranice nisu paralelne, α_i i β_i su uglovi na stranici a_i , ($i = 1, 2, \dots, n-2$), a r je poluprečnik upisane kružnice.

2. Površina bicentričnog četverougla (tangentno-tetivnog)

Na Slici 1 dat je primjer jednog tangentno-tetivnog četverougla, to jest četverougla koji je istovremeno i tangentni i tetivni. Naime, da bi konveksni četverougao $ABCD$ bio bicentrični mora ispunjavati dva uvjeta:

- zbrojevi suprotnih stranica su jednaki, to jest $a + c = b + d$ (uvjet tangენტnosti),
- zbrojevi suprotnih uglova su jednaki, to jest $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ (uvjet tetivnosti).

Međutim, prije nego pristupimo postupku izračunavanja površine bicentričnog četverougla, navest ćemo dokaz za izračunavanje površine tetivnog četverougla pomoću dužina njegovih stranica.



Slika 1: Tangentno-tetivni četverougao

Teorem 2.1. Ako su a, b, c i d dužine stranica tetivnog četverougla, $s = \frac{a+b+c+d}{2}$, tada se njegova površina P_{ABCD} izražava formulom

$$P_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}.$$

Dokaz : Neka je četverougao $ABCD$ tetivni. Vidjeti Sliku 1. Tada je $\alpha + \gamma = 180^\circ$ i

$$\sin \gamma = \sin (180^\circ - \alpha) = \sin \alpha .$$

Dalje, imamo da je

$$P_{ABCD} = P_{ABD} + P_{BDC} = \frac{ad \sin \alpha}{2} + \frac{bc \sin \gamma}{2} = \frac{(ad + bc) \sin \alpha}{2} = \frac{(ad + bc) \sqrt{1 - \cos^2 \alpha}}{2} .$$

Kako je

$$\cos \gamma = \cos (180^\circ - \alpha) = -\cos \alpha ,$$

primjenom kosinusnog teorema na trougao ABD i trougao BCD (koristeći da je $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $\cos \gamma = -\cos \alpha$), dobijamo

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos \alpha = b^2 + c^2 + 2bc \cos \alpha ,$$

odnosno

$$\cos \alpha = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)} .$$

Zamjenom ovako izračunatog $\cos \alpha$, dobijamo da je

$$P_{ABCD} = \frac{(ad + bc) \sqrt{1 - \left(\frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2(ad + bc)}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4(ad + bc)^2 - (a^2 + d^2 - b^2 - c^2)^2}}{4} ,$$

odnosno

$$\begin{aligned} P_{ABCD} &= \sqrt{\frac{-a+b+c+d}{2} \cdot \frac{a-b+c+d}{2} \cdot \frac{a+b-c+d}{2} \cdot \frac{a+b+c-d}{2}} \\ &= \sqrt{\left(\frac{a+b+c+d}{2} - a\right) \left(\frac{a+b+c+d}{2} - b\right) \left(\frac{a+b+c+d}{2} - c\right) \left(\frac{a+b+c+d}{2} - d\right)} , \end{aligned}$$

to jest

$$P_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} ,$$

što je i trebalo dokazati. \square

Zanimljivo je da će formula za površinu bicentričnog četverougla pomoću dužina njegovih stranica imati sličnu, ali jednostavniju formu nego u slučaju tetivnog četverougla.

Teorem 2.2. Neka su a, b, c i d dužine stranica bicentričnog četverougla $ABCD$. Tada je njegova površina data sa

$$P_{ABCD} = \sqrt{abcd} .$$

Dokaz : Za bicentrični četverougao $ABCD$ i $s = \frac{a+b+c+d}{2}$ znamo da je $a + c = b + d$ i da je površina data sa

$$P_{ABCD} = \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)} .$$

Kako je

$$\begin{aligned} s - a &= \frac{a+b+c+d}{2} - a = \frac{2(a+c)}{2} - a = c, & s - b &= \frac{a+b+c+d}{2} - b = \frac{2(b+d)}{2} - b = d, \\ s - c &= \frac{a+b+c+d}{2} - c = \frac{2(a+c)}{2} - c = a, & s - d &= \frac{a+b+c+d}{2} - d = \frac{2(b+d)}{2} - d = b, \end{aligned}$$

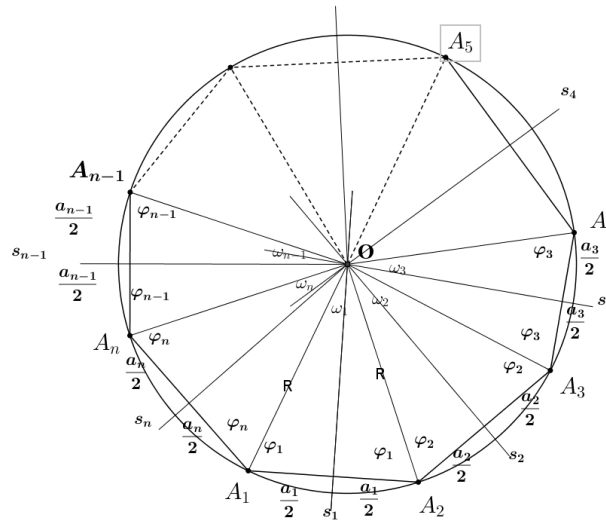
dobijamo da je

$$P_{ABCD} = \sqrt{abcd} ,$$

površina bicentričnog četverougla $ABCD$. \square

3. Površina tetivnog mnogougla

Na slici 2 dat je primjer jednog tetivnog mnogougla $A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n$.



Slika 2: Tetivni mnogougao

Teorem 3.1. Površina tetivnog mnogougla $A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n$ koji ima n tjemena data je sa

$$P_{A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n} = \frac{R^2 (\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \cdots + \sin 2\varphi_{n-1} + \sin 2\varphi_n)}{2},$$

gdje je $\alpha_i = \sphericalangle A_i$, ($i = 1, 2, \dots, n$),

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \cdots + \alpha_{n-1} - \alpha_n}{2}, \quad \text{za } n = 2k + 1,$$

i

$$\varphi_1 = \arctan \frac{a_2 - a_1 \cos \alpha_2}{a_1 \sin \alpha_2}, \quad \text{za } n = 2k,$$

a

$$\varphi_i = \sphericalangle OA_iA_{i+1} = \sphericalangle OA_{i+1}A_i = \alpha_i - \varphi_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Dokaz : Kako je

$$P_{A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n} = P_{OA_1A_2} + P_{OA_2A_3} + \cdots + P_{OA_{n-1}A_n},$$

to je

$$\begin{aligned} P_{A_1A_2 \cdots A_{n-1}A_n} &= \frac{R^2 \sin \omega_1}{2} + \frac{R^2 \sin \omega_2}{2} + \cdots + \frac{R^2 \sin \omega_n}{2} = \frac{R^2 (\sin \omega_1 + \sin \omega_2 + \cdots + \sin \omega_n)}{2} \\ &= \frac{R^2 (\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \cdots + \sin 2\varphi_{n-1} + \sin 2\varphi_n)}{2} = \frac{R^2 \sum_{k=1}^n \sin 2\varphi_k}{2}. \end{aligned}$$

Ovdje smo koristili poznatu jednakost

$$\sin \omega_i = \sin(180^\circ - 2\varphi_i) = \sin 2\varphi_i,$$

koja vrijedi za uglove ω_i i φ_i u trouglu $\triangle OA_i A_{i+1}$. \square

Izvedimo sada formulu za površinu tetivnog mnogougla $A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n$ u funkciji stranica a_1, a_2, \dots, a_n i uglova $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$. Kako je $\cos \varphi_i = \frac{a_i}{R}$, to je $R^2 = \frac{a_i^2}{4 \cos^2 \varphi_i}$ i

$$R^2 \sin 2\varphi_i = \frac{a_i^2}{4 \cos^2 \varphi_i} \cdot 2 \sin \varphi_i \cos \varphi_i = \frac{a_i^2 \sin \varphi_i}{2 \cos \varphi_i} = \frac{a_i^2 \tan \varphi_i}{2}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} P_{A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n} &= \frac{R^2 (\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \cdots + \sin 2\varphi_{n-1} + \sin 2\varphi_n)}{2} \\ &= \frac{\frac{a_1^2 \tan \varphi_1}{2} + \frac{a_2^2 \tan \varphi_2}{2} + \cdots + \frac{a_{n-1}^2 \tan \varphi_{n-1}}{2} + \frac{a_n^2 \tan \varphi_n}{2}}{2}, \end{aligned}$$

odnosno

$$P_{A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n} = \frac{a_1^2 \tan \varphi_1 + a_2^2 \tan \varphi_2 + \cdots + a_{n-1}^2 \tan \varphi_{n-1} + a_n^2 \tan \varphi_n}{4},$$

to jest

$$P_{A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n a_k^2 \tan \varphi_k.$$

Na kraju, izvedimo formulu za površinu tetivnog mnogougla $A_1 \cdots A_{n-1} A_n$ u funkciji stranica a_1, a_2, \dots, a_n i poluprečnika R .

Označimo sa h_i visine trouglova $OA_i A_{i+1}$ na stranice a_i , ($i = 1, 2, \dots, n-1$) i sa h_n visinu trougla $OA_n A_1$ na stranicu a_n . Kako je

$$\sin 2\varphi_i = 2 \sin \varphi_i \cos \varphi_i = 2 \cdot \frac{h_i}{R} \cdot \frac{a_i}{R} = \frac{a_i \sqrt{R^2 - \frac{a_i^2}{4}}}{R^2} = \frac{a_i \sqrt{4R^2 - a_i^2}}{2R^2},$$

to imamo da je površinu tetivnog mnogougla data sa

$$\begin{aligned} P_{A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n} &= \frac{R^2 (\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \cdots + \sin 2\varphi_{n-1} + \sin 2\varphi_n)}{2} \\ &= \frac{\frac{a_1}{2} \sqrt{4R^2 - a_1^2} + \frac{a_2}{2} \sqrt{4R^2 - a_2^2} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{2} \sqrt{4R^2 - a_{n-1}^2} + \frac{a_n}{2} \sqrt{4R^2 - a_n^2}}{2}, \end{aligned}$$

odnosno

$$P_{A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n} = \frac{1}{4} \sum_{k=1}^n a_k \sqrt{4R^2 - a_k^2}.$$

4. Površina tangentnog mnogougla

Uočimo da relacija (1) vrijedi i kad umjesto $n-2$ stavimo n .

Teorem 4.1. *Površina tangentnog mnogougla $A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n$ izražava se formulom*

$$P_{A_1 A_2 \cdots A_{n-1} A_n} = r \cdot s = r^2 \left(\cot \frac{\alpha_1}{2} + \cdots + \cot \frac{\alpha_{n-1}}{2} + \cot \frac{\alpha_n}{2} \right),$$

pri čemu je r poluprečnik upisane kružnice, a α_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) su uglovi mnogougla.

Dokaz : Neka su α_i, α_{i+1} uglovi na stranici $a_i, (i = 1, 2, \dots, n-1), \alpha_n, \alpha_1$ uglovi na stranici a_n i r poluprečnik upisane kružnice tangentsnog mnogougla. Iz

$$\frac{a_1}{\cot \frac{\alpha_1}{2} + \cot \frac{\alpha_2}{2}} = \dots = \frac{a_{n-1}}{\cot \frac{\alpha_{n-1}}{2} + \cot \frac{\alpha_n}{2}} = \frac{a_n}{\cot \frac{\alpha_n}{2} + \cot \frac{\alpha_1}{2}} = r ,$$

dobijamo da vrijedi

$$\begin{aligned} a_1 &= r \left(\cot \frac{\alpha_1}{2} + \cot \frac{\alpha_2}{2} \right), \\ &\vdots \\ a_{n-1} &= r \left(\cot \frac{\alpha_{n-1}}{2} + \cot \frac{\alpha_n}{2} \right), \\ a_n &= r \left(\cot \frac{\alpha_n}{2} + \cot \frac{\alpha_1}{2} \right), \end{aligned}$$

pa je

$$s = \frac{a_1 + \dots + a_{n-1} + a_n}{2} = r \left(\cot \frac{\alpha_1}{2} + \dots + \cot \frac{\alpha_{n-1}}{2} + \cot \frac{\alpha_n}{2} \right) .$$

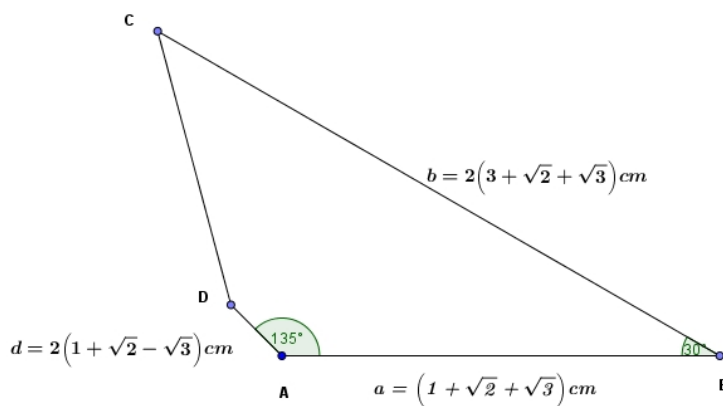
Dakle, formulom

$$P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1} A_n} = r \cdot s = r^2 \left(\cot \frac{\alpha_1}{2} + \dots + \cot \frac{\alpha_{n-1}}{2} + \cot \frac{\alpha_n}{2} \right) ,$$

izražava se površina tangentsnog mnogougla. \square

5. Primjeri primjene dobijenih rezultata

Primjer 5.1. Na Slici 3 dat je četverougao $ABCD$. Pokazati da je dati četverougao bicentričan. Zatim odrediti dužinu stranice $c = CD$, uglove $\gamma = \angle BCD$ i $\delta = \angle ADC$, poluprečnik upisane kružnice r i poluprečnik opisane kružnice R , te površinu P_{ABCD} .



Slika 3: Četverougao $ABCD$

Rješenje: Da je dati četverougao tetivan dovoljno je pokazati da su uglovi $\omega = \angle ACB$ i $\tau = \angle ADB$ jednaki. Primjenom kosinusnog teorema na trouglove ACB i ADB za $a = |AB| = 2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$, $b = |BC| = 2(3 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$, $d = |AD| = 2(1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})$ dobijamo

$$|AC| = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos(30^\circ)}, \quad |BD| = \sqrt{a^2 + d^2 - 2ad \cos(135^\circ)},$$

$$|AC| = 2\sqrt{2}\sqrt{4 + \sqrt{2}}, \quad |BD| = 4\sqrt{4 + \sqrt{2}},$$

te primjenom sinusnog teorema imamo da je

$$\frac{|AB|}{\sin \omega} = \frac{|AC|}{\sin(30^\circ)}, \quad \frac{|AB|}{\sin \tau} = \frac{|BD|}{\sin(135^\circ)}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} \sin \omega &= \frac{|AB| \cdot \sin(30^\circ)}{|AC|} = \frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{2\sqrt{2}\sqrt{4+\sqrt{2}}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4\sqrt{4+\sqrt{2}}}, \\ \sin \tau &= \frac{|AB| \cdot \sin(135^\circ)}{|BD|} = \frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{4\sqrt{4+\sqrt{2}}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})\sqrt{2}}{4\sqrt{4+\sqrt{2}}}. \end{aligned}$$

Dakle, dobili smo da je $\omega = \tau$, pa je četverougao $ABCD$ tetivni.

Kako je četverougao $ABCD$ tetivni, to je $\alpha + \gamma = \beta + \delta$. Sada je

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2(\beta + \delta) = 360^\circ,$$

odnosno

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= 180^\circ, \\ \beta + \delta &= 180^\circ, \end{aligned}$$

te je

$$\begin{aligned} \gamma &= 180^\circ - \alpha = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ, \\ \delta &= 180^\circ - \beta = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ. \end{aligned}$$

Pokažimo sada da je dati četverougao i tangenti. Prema Teoremu 1.3 dovoljno je pokazati da vrijedi

$$\frac{a}{\cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2}} = \frac{b}{\cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2}}.$$

Kako je

$$\frac{a}{\cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2}} = \frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\cot \frac{135^\circ}{2} + \cot \frac{30^\circ}{2}} = \frac{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}+2)} = 2,$$

i

$$\frac{b}{\cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2}} = \frac{2(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{\cot \frac{30^\circ}{2} + \cot \frac{45^\circ}{2}} = \frac{2(3+\sqrt{2}+\sqrt{3})}{(\sqrt{3}+2)+(\sqrt{2}+1)} = 2,$$

to je tačno. Dakle, četverougao je tangenti i poluprečnik upisane kružnice je $r = 2$. Za stranicu $c = |CD|$ imamo da je

$$c = r \left(\cot \frac{\gamma}{2} + \cot \frac{\delta}{2} \right) = 2 \left(\cot \frac{45^\circ}{2} + \cot \frac{150^\circ}{2} \right) = 2 \left((\sqrt{2} + 1) + (2 - \sqrt{3}) \right),$$

to jest $c = 2(3 + \sqrt{2} - \sqrt{3})$.

Odredimo dužinu poluprečnika R opisane kružnice. Kako je $n = 4$ paran broj, to prema Teoremu 1.2 imamo da je

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \arctan \frac{b - a \cos \beta}{a \sin \beta} = \arctan \frac{2(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}) - 2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) \cos 30^\circ}{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) \sin 30^\circ} \\ &= \arctan \frac{2(3+\sqrt{2}+\sqrt{3}) - 2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) \frac{\sqrt{3}}{2}}{2(1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) \frac{1}{2}} = \arctan \left(\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} + 4 \right) = \arctan(1.2327), \end{aligned}$$

odnosno $\varphi_1 \approx 50.95^\circ$. Sada je

$$R = \frac{a}{2 \cos \varphi_1} = \frac{2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{2 \cos 50.95^\circ} \approx \frac{2(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})}{2 \cdot 0.63},$$

to jest $R \approx 6.5814$. Dalje,

$$\varphi_2 = \beta - \varphi_1 \approx 30^\circ - 50.95^\circ = -20.95^\circ,$$

$$\varphi_3 = \gamma - \varphi_2 \approx 45^\circ + 20.95^\circ = 65.95^\circ,$$

$$\varphi_4 = \delta - \varphi_3 \approx 150^\circ - 65.95^\circ = 84.05^\circ.$$

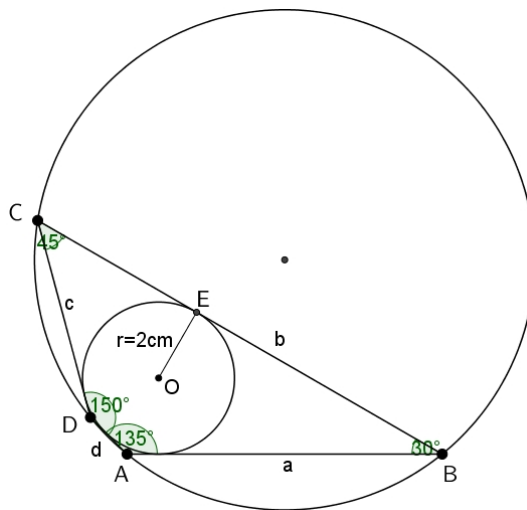
I konačno, izračunajmo površinu bicentričnog četverougla

$$P_{ABCD} = \frac{R^2 (\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_3 + \sin 2\varphi_4)}{2} \\ \approx \frac{(6.5814)^2 (\sin 2(50.95^\circ) + \sin 2(-20.95^\circ) + \sin 2(65.95^\circ) + \sin 2(84.05^\circ))}{2},$$

odnosno $P_{ABCD} \approx 27.314$. Isti rezultat dobijamo i ako koristimo sljedeću formulu $P_{ABCD} = \sqrt{abcd}$. Zaista,

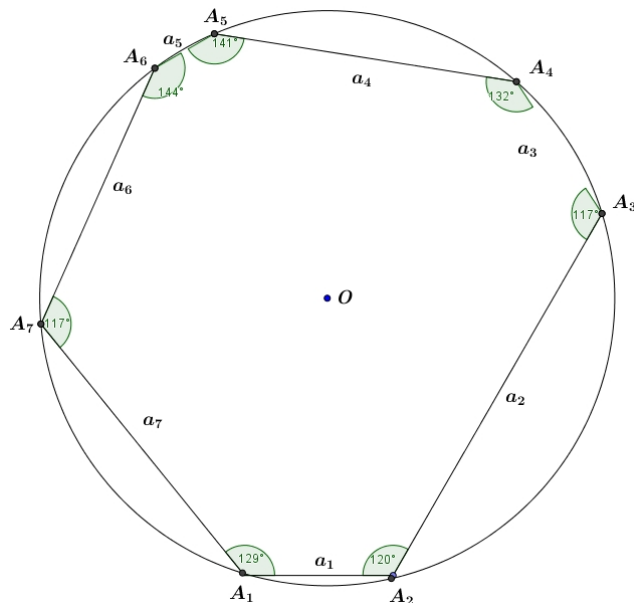
$$P_{ABCD} = \sqrt{abcd} = \sqrt{2^4 (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) (3 + \sqrt{2} + \sqrt{3}) (3 + \sqrt{2} - \sqrt{3}) (1 + \sqrt{2} - \sqrt{3})} \\ = 4\sqrt{\left((1 + \sqrt{2})^2 - 3 \right) \left((3 + \sqrt{2})^2 - 3 \right)} = 8\sqrt{6 + 4\sqrt{2}},$$

to jest $P_{ABCD} \approx 27.314$ (Vidjeti sliku 4). □



Slika 4: Bicentrični četverougao $ABCD$

Primjer 5.2. Na Slici 5 dat je sedmougao. Odrediti obim i površinu sedmougla upisanog u kružnicu poluprečnika $R = 3\text{cm}$ čiji su uglovi redom $\alpha_1 = 129^\circ$, $\alpha_2 = 120^\circ$, $\alpha_3 = 117^\circ$, $\alpha_4 = 132^\circ$, $\alpha_5 = 141^\circ$, $\alpha_6 = 144^\circ$, $\alpha_7 = 117^\circ$.



Slika 5: Sedmougao

Rješenje: Kako je $n = 7$ neparan broj imamo da je

$$\varphi_1 = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 + \alpha_6 - \alpha_7}{2} = \frac{129^\circ + 120^\circ - 117^\circ + 132^\circ - 141^\circ + 144^\circ - 117^\circ}{2} = 75^\circ,$$

pa je

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= \alpha_2 - \varphi_1 = 120^\circ - 75^\circ = 45^\circ, \\ \varphi_3 &= \alpha_3 - \varphi_2 = 117^\circ - 45^\circ = 72^\circ, \\ \varphi_4 &= \alpha_4 - \varphi_3 = 132^\circ - 72^\circ = 60^\circ, \\ \varphi_5 &= \alpha_5 - \varphi_4 = 141^\circ - 60^\circ = 81^\circ, \\ \varphi_6 &= \alpha_6 - \varphi_5 = 144^\circ - 81^\circ = 63^\circ, \\ \varphi_7 &= \alpha_7 - \varphi_6 = 117^\circ - 63^\circ = 54^\circ.\end{aligned}$$

Stranice sedmougla su

$$\begin{aligned}a_1 &= 2R \cos \varphi_1 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 75^\circ \approx 1.5529 \text{ cm}, \\ a_2 &= 2R \cos \varphi_2 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 45^\circ \approx 4.2426 \text{ cm}, \\ a_3 &= 2R \cos \varphi_3 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 72^\circ \approx 1.8541 \text{ cm}, \\ a_4 &= 2R \cos \varphi_4 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 60^\circ \approx 3.0 \text{ cm}, \\ a_5 &= 2R \cos \varphi_5 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 81^\circ \approx 0.93861 \text{ cm}, \\ a_6 &= 2R \cos \varphi_6 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 63^\circ \approx 2.7239 \text{ cm}, \\ a_7 &= 2R \cos \varphi_7 = 2 \cdot 3 \cdot \cos 54^\circ \approx 3.5267 \text{ cm},\end{aligned}$$

a obim

$$\begin{aligned}O &\approx (1.5529 + 4.2426 + 1.8541 + 3.0 + 0.93861 + 2.7239 + 3.5267) \text{ cm}, \\ O &\approx 17.839 \text{ cm}.\end{aligned}$$

I konačno,

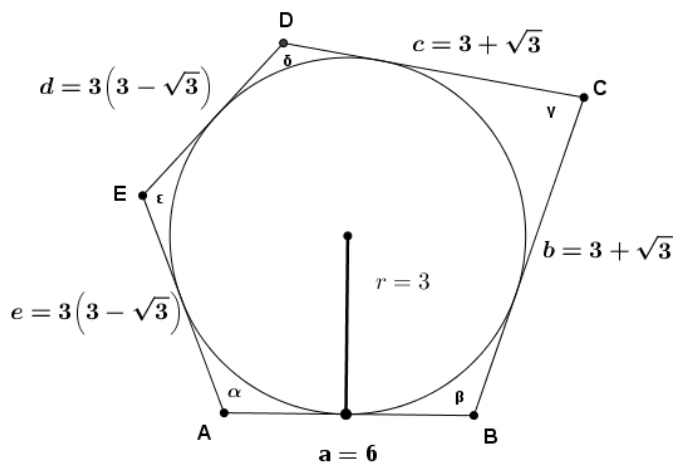
$$P = \frac{R^2 (\sin 2\varphi_1 + \sin 2\varphi_2 + \sin 2\varphi_3 + \sin 2\varphi_4 + \sin 2\varphi_5 + \sin 2\varphi_6 + \sin 2\varphi_7)}{2},$$

odnosno

$$\begin{aligned} P &\approx \frac{3^2 (\sin 2(75^\circ) + \sin 2(45^\circ) + \sin 2(72^\circ) + \sin 2(60^\circ) + \sin 2(81^\circ) + \sin 2(63^\circ) + \sin 2(54^\circ))}{2} \\ &= \frac{9(\sin 150^\circ + \sin 90^\circ + \sin 144^\circ + \sin 120^\circ + \sin 162^\circ + \sin 126^\circ + \sin 108^\circ)}{2} \\ &= \frac{9(\sin 30^\circ + 1 + \sin 36^\circ + \sin 60^\circ + \sin 18^\circ + \sin 54^\circ + \sin 72^\circ)}{2} \\ &= \frac{9\left(\frac{1}{2} + 1 + \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{5}-1}{4} + \frac{\sqrt{5}+1}{4} + \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)}{2} \\ &\approx 22.603. \end{aligned}$$

□

Primjer 5.3. Na Slici 6 dat je tangentni petougao $ABCDE$ površine $P_{ABCDE} = 3(15 - 2\sqrt{3})$. Odrediti njegove uglove.



Slika 6: Tangentni petougao

Rješenje: Koristeći podatke sa slike i Teorem 4.1 dobijamo da za uglove α_i, α_{i+1} na stranici $a_i, (i = 1, 2, 3, 4)$ i α_5, α_1 uglove na stranici $a_5 = e = 3(3 - \sqrt{3})$ i $r = 3$ poluprečnik upisane kružnice tangentnog mnogougla vrijedi

$$\cot \frac{\alpha_i}{2} + \cot \frac{\alpha_{i+1}}{2} = \frac{a_i}{r},$$

$$\cot \frac{\alpha_5}{2} + \cot \frac{\alpha_1}{2} = \frac{a_5}{2},$$

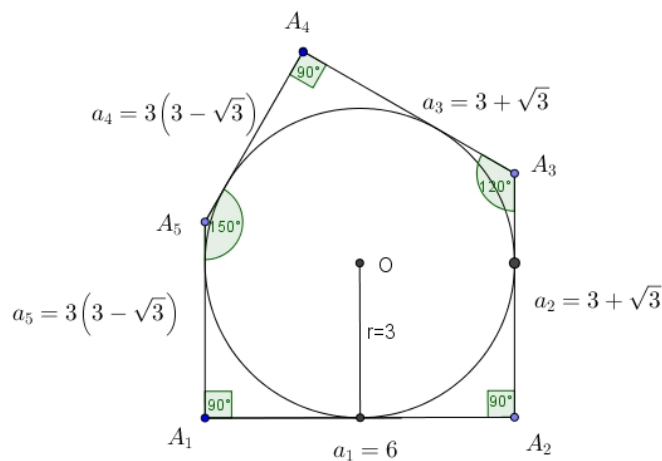
odnosno vrijedi

$$\begin{aligned} \cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} &= \frac{6}{3}, \\ \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} &= \frac{3 + \sqrt{3}}{3}, \\ \cot \frac{\gamma}{2} + \cot \frac{\delta}{2} &= \frac{3 + \sqrt{3}}{3}, \\ \cot \frac{\delta}{2} + \cot \frac{\varepsilon}{2} &= \frac{3(3 - \sqrt{3})}{3}, \\ \cot \frac{\varepsilon}{2} + \cot \frac{\alpha}{2} &= \frac{3(3 - \sqrt{3})}{3}. \end{aligned} \quad (2)$$

Sabiranjem gornjih jednakosti dobijamo

$$2 \left(\cot \frac{\alpha}{2} + \cot \frac{\beta}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} + \cot \frac{\delta}{2} + \cot \frac{\varepsilon}{2} \right) = 10 - \frac{4\sqrt{3}}{3}. \quad (3)$$

Sada koristeći drugu i četvrtu jednažbu iz (2) u (3) dobijamo da je $\cot \frac{\alpha}{2} = 1$, odnosno $\alpha = 90^\circ$. Uvrštavajući ovu vrijednost za α prvu jednažbu sistema (2) dobijamo da je $\beta = 90^\circ$, te iz druge jednažbe sistema (2) dobijamo $\gamma = 120^\circ$, iz treće $\delta = 90^\circ$ i iz četvrte $\varepsilon = 150^\circ$. Vidjeti rezultate na Slici 7. \square



Slika 7: Tangentni petougao

Literatura

- [1] H. Smajić: *Tangentni mnogougao*, Didaktički putokazi, Zenica, 2011.
- [2] H. Smajić: *Tetivni mnogougao*, Didaktički putokazi, Zenica, 2016.
- [3] H. Smajić: *Tetivni mnogougao koji ima paran broj tjemena*, Didaktički putokazi, Zenica, 2017.