XVII олимпијада

1. Нека $x_i, y_i \in \mathbb{R}$, $i=1,2,...,n$ и нека
$$x_1 \geq x_2 \geq ... \geq x_n \ , \ y_1 \geq y_2 \geq ... \geq y_n .$$
Докажи дека за секоја пермутација $z_1, z_2, ..., z_n$ на броевите $y_1, y_2, ..., y_n$ важи:
$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (x_i - z_i)^2 .$$
Решение. *Прв начин*. Лесно се докажува дека дадено неравенство е еквивалентно со неравенството
$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{1}$$
Неравенството (1) ќе го докажеме со на математичка индукција.
За $n=1$ неравенството очигледно е точно.
Нека претпоставиме дека тоа е точно за некој природен број n. Ќе докажеме дека тоа е точно и за $n+1$. Разгледуваме две можности.
1) $z_{n+1} = y_{n+1}$. Во овој случај $z_1, z_2, ..., z_n$ е пермутација на броевите $y_1, y_2, ..., y_n$, па според индуктивната претпоставка следува дека важи неравенството (1). Ако на левата и десната страна додадеме $x_{n+1} y_{n+1}$ добиваме дека неравенството (1) е точно и за $n+1$ броеви.
2) $z_k = y_{n+1}$, $k \neq n+1$. Нека $z_1', z_2', ..., z_n', z_{n+1}'$ е пермутација на броевите $z_1, z_2, ..., z_n, z_{n+1}$ која што се добива со замена на $k-$тиот и $n+1-$от член. Тогаш
$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i' - \sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i = x_k y_l + x_{n+1} y_{n+1} - x_k y_{n+1} - x_{n+1} y_l$$
$$= (x_k - x_{n+1})(y_l - y_{n+1}) \geq 0$$
каде што $y_l = z_{n+1}$. Бидејќи $\sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i \leq \sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i'$ доволно е да се докаже дека
$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i z_i' \leq \sum_{i=1}^{n+1} x_i y_i .$$
Последното неравенство е докажано во 1).
Втор начин. Точни се неравенствата
$$x_1 - x_2 \geq 0 ,\ x_2 - x_3 \geq 0 , ...,\ x_{n-1} - x_n \geq 0 ;$$
$$z_1 \leq y_1 ,\ z_1 + z_2 \leq y_1 + y_2 , ...,\ z_1 + z_2 + ... + z_n \leq y_1 + y_2 + ... + y_n .$$
Даденото неравенство е еквивалентно на неравенството
$$\sum_{i=1}^{n} x_i z_i \leq \sum_{i=1}^{n} x_i y_i ,$$

кое може да се докаже на следниот начин:

$$\begin{aligned} x_1z_1+x_2z_2+\ldots+x_nz_n &= (x_1-x_2)z_1+(x_2-x_3)(z_1+z_2)+\ldots \\ &\quad +(x_{n-1}-x_n)(z_1+z_2+\ldots+z_n)+x_n(z_1+z_2+\ldots+z_n) \\ &\le (x_1-x_2)y_1+(x_2-x_3)(y_1+y_2)+\ldots \\ &\quad +(x_{n-1}-x_n)(y_1+y_2+\ldots+y_n)++x_n(y_1+y_2+\ldots+y_n) \\ &= x_1y_1+x_2y_2+\ldots+x_ny_n\,. \end{aligned}$$

2. Нека $a_1, a_2, a_3, \ldots$ е строго растечка низа природни броеви. Докажи дека низата содржи бесконечно многу членови a_m кои може да се претставaт во облик

$$a_m = xa_p + ya_q$$

каде x и y се природни броеви и $p \neq q$.

Решение. Сите броеви од низата $\{a_i\}$ ги делиме во a_1 групи на следниот начин:

$$\begin{aligned} A_0 &= \{a_i \mid a_i \equiv 0 (\operatorname{mod} a_1)\} \\ A_1 &= \{a_i \mid a_i \equiv 1 (\operatorname{mod} a_1)\} \\ A_2 &= \{a_i \mid a_i \equiv 2 (\operatorname{mod} a_1)\} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{a_1-1} &= \{a_i \mid a_i \equiv a_1 - 1 (\operatorname{mod} a_1)\}. \end{aligned}$$

Од овие множества барем едно е бесконечно, бидејќи во спротивно множеството вредности на низата би било конечно, што не е можно бидејќи низата строго монотоно расте. Нека A_r е бесконечно множество. Тогаш, за секои два елементи a_m и a_p ($a_m > a_p$) од тоа множество е исполнето

$$a_m = la_1 + r\,,\ a_p = sa_1 + r$$

од што следува

$$a_m - a_p = (l-s)a_1$$

т.е. при ознака $l - s = y$, имаме $a_m = a_p + ya_1$. При тоа важи $a_q = a_1$ и $x = 1$.

Такви броеви a_m има бесконечно многу.

3. Над страните на произволен триаголникот ABC од надворешна страна се конструирани триаголници BPC, QAC и ARB такви што

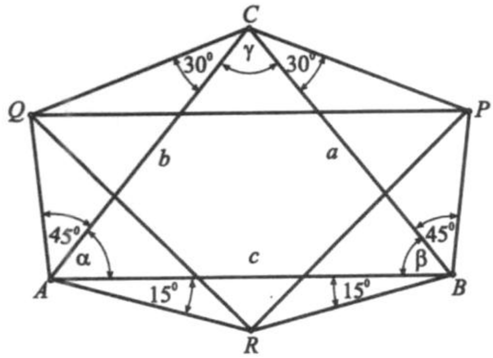
$$\measuredangle CBP = \measuredangle QAC = 45^\circ,$$

$$\measuredangle PCB = \measuredangle ACQ = 30^\circ,$$

$$\measuredangle RBA = \measuredangle BAR = 15^\circ.$$

Докажи дека $\measuredangle QRP = 90^\circ$ и $\overline{QR} = \overline{RP}$.

Решение. Нека α, β, γ се аглите при темињата A, B, C; a, b, c се спротивните страни на темињата и P е плоштината на $\triangle ABC$. Од синусната теорема добиваме



$$\overline{CP} = a\frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{a}{\sqrt{2}\cos 15^\circ},$$

$$\overline{CQ} = b\frac{\sin 45^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{b}{\sqrt{2}\cos 15^\circ},$$

па затоа од косинусната теорема следува

$$\begin{aligned}\overline{PQ}^2 &= \overline{CP}^2 + \overline{CQ}^2 - 2\overline{CP}\,\overline{CQ}\cos(\gamma + 60^\circ)\\ &= \frac{a^2}{2\cos^2 15^\circ} + \frac{b^2}{2\cos^2 15^\circ} - 2\frac{ab}{2\cos^2 15^\circ}\left(\tfrac{1}{2}\cos\gamma - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\gamma\right)\\ &= \frac{a^2}{2\cos^2 15^\circ} + \frac{b^2}{2\cos^2 15^\circ} - \frac{a^2+b^2-c^2}{4\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{\cos^2 15^\circ}\\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{4\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{\cos^2 15^\circ}.\end{aligned}$$

Повторно од синусната теорема следува

$$\overline{AQ} = b\frac{\sin 30^\circ}{\sin 105^\circ} = \frac{b}{2\cos 15^\circ},\quad \overline{AR} = c\frac{\sin 15^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{c}{2\cos 15^\circ}.$$

па затоа

$$\begin{aligned}\overline{QR}^2 &= \overline{AQ}^2 + \overline{AR}^2 - 2\overline{AQ}\,\overline{AR}\cos(\alpha + 60^\circ)\\ &= \frac{b^2}{4\cos^2 15^\circ} + \frac{c^2}{4\cos^2 15^\circ} - 2\frac{bc}{4\cos^2 15^\circ}\left(\tfrac{1}{2}\cos\alpha - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right)\\ &= \frac{b^2}{2\cos^2 15^\circ} + \frac{c^2}{2\cos^2 15^\circ} - \frac{b^2+c^2-a^2}{8\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{\cos^2 15^\circ}\\ &= \frac{a^2+b^2+c^2}{8\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{2\cos^2 15^\circ}.\end{aligned}$$

На сличен начин се покажува дека

$$\overline{PR}^2 = \frac{a^2+b^2+c^2}{8\cos^2 15^\circ} + \frac{P\sqrt{3}}{2\cos^2 15^\circ}.$$

Од досега изнесеното следува дека

$$\overline{PR} = \overline{QR} \text{ и } \overline{PR}^2 + \overline{QR}^2 = \overline{PQ}^2,$$

што значи дека триаголникот PQR е рамнокрак и правоаголен со прав агол кај темето R.

4. Нека A е збирот на цифрите на бројот 4444^{4444} и B збирот на цифрите на бројот A. Определи го збирот на цифрите на бројот B.

(Сите броеви се запишани во декаден броен систем).

Решение. Нека C е збирот на цифрите на бројот B. Бидејќи $4444 < 10000$, важи

$$4444^{4444} < 10000^{4444}.$$

Бројот на цифрите на 10000^{4444} е еднаков на $1 + 4 \cdot 4444 = 17777$. Според тоа, бројот на цифрите на 4444^{4444} е помал или еднаков на 17777, што значи дека е помал од 20000. Најголемиот број кој има 20000 цифри е бројот N кој има 20000 деветки. Збирот на цифрите на N е $20000 \cdot 9 = 180000$, па затоа $A < 180000$. Бројот кој е помал од 180000 и има најголем збир на цифри е бројот 99999. Затоа за збирот на цифрите на бројот A е исполенто $B \le 9 \cdot 5 = 45$. Бројот кој е помал од 45 и има наголем збир на цифри е 39, па затоа $C \le 3 + 9 = 12$. Понатаму, ако искористиме дека остатокот на бројот M при делење со 9 е еднаков на остатокот при делење на збирот на цифрите на бројот N со 9, добиваме дека

$$4444^{4444} \equiv A \equiv B \equiv C (\mathrm{mod}\, 9).$$

Ќе го определиме остатокот од делењето на бројот 4444^{4444} со 9. Од $4444 \equiv -2 (\bmod\ 9)$ следува

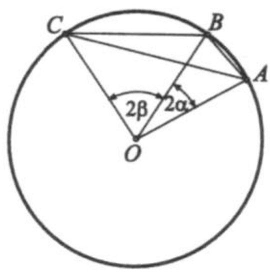
$$4444^{4444} \equiv (-2)^{4444} = 2^{3 \cdot 1481 + 1} = 2 \cdot 8^{1481} \equiv 2 \cdot (-1)^{1481} \equiv -2 \equiv 7 (\bmod 9).$$

Според тоа, $C \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 9)$. Природниот број C ги задоволува условите $C \le 12$ и $C \equiv 7 (\mathrm{mod}\, 9)$, па затоа $C = 7$.

5. Дали може на кружница со радиус 1 да се изберат 1975 точки, такви што растојанието меѓу секои две од нив да биде рационален број?

Решение. Нека A, B, C се три точки на дадената кружница со центар во точката O и $\measuredangle AOB = 2\alpha$, $\measuredangle BOC = 2\beta$. Тогаш $\measuredangle AOC = 2(\alpha + \beta)$ и

$$\overline{AB} = 2\sin\alpha,\ \overline{BC} = 2\sin\beta,\ \overline{AC} = 2\sin(\alpha + \beta).$$



Од $\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$, следува дека растојанијата меѓу точките A, B, C ќе бидат рационални броеви ако $\sin\alpha, \cos\beta, \cos\alpha,$ $\sin\beta$ се рационални броеви. Ќе го користиме идентитетот

$$\left(\tfrac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}\right)^2 + \left(\tfrac{2mn}{m^2 + n^2}\right)^2 = 1$$

Земаме:

$$\sin\alpha = \tfrac{m^2 - n^2}{m^2 + n^2}, \quad \cos\alpha = \tfrac{2mn}{m^2 + n^2},$$

а аналогно за аголот β.

Со замена на различни парови цели броеви m, n добиваме агли кои имаат рационален синус и косинус. Понатаму, земаме точка A на кружницата и нанесуваме два пати поголеми агли од најдените. Тогаш растојанието меѓу секои две од дадените точки е рационален број.

6. Определи ги сите хомогени полиноми од n-ти степен од две променливи такви што:

1° За секои три реални броеви a, b и c е исполнето

$$P(a+b,c)+P(b+c,a)+P(c+a,b)=0$$

2° $P(1,0)=1$.

Забелешка. Полином P е хомоген полином од n-ти степен ако за секои реални броеви t, x, y е исполнето $P(tx,ty)=t^n P(x,y)$, каде $n\in\mathbb{N}$.

Решение. Ставаме $a=2x$, $b=c=-x$ и од условот 1° и дефиницијата на хомоген полином добиваме

$$2P_n(x,-x)+(-2)^n P_n(-x,x)=0 \qquad (1)$$

Ставаме $a=x$, $b=-x$, $c=0$ и од $P_n(0,0)=0$ добиваме

$$P_n(x,-x)+P_n(-x,x)=0. \qquad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме

$$P_n(x,-x)=P_n(-x,x)=0.$$

Значи, $P_n(x,y)=0$ за $y=-x$, па па затоа постои полином $Q_{n-1}(x,y)$ таков што

$$P_n(x,y)=(x+y)Q_{n-1}(x,y). \qquad (3)$$

Го заменуваме (3) во условот 1° и добиваме

$$(a+b+c)[Q(a+b,c)+Q(b+c,a)+Q(c+a,b)]=0,$$

односно

$$Q(a+b,c)+Q(b+c,a)+Q(c+a,b)=0.$$

Да забележиме дека полиномот $Q_{n-1}(x,y)$ го има својството 1°, па според тоа заклучуваме дека и тој е делив со $x+y$ итн. се додека не дојдеме до полином од прв степен. Значи,

$$P_n(x,y)=(x+y)^{n-1}R_1(x,y). \qquad (4)$$

Ако во условот 1° ставиме $a=b=c=y$, добиваме $P(2y,y)=0$, па според тоа $P(x,y)$ е делив со $x-2y$, односно

$$R_1(x,y)=k(x-2y).$$

Сега од (4) добиваме

$$P_n(x,y) = k(x-2y)(x+y)^{n-1}.$$

Бидејќи $P(1,0)=1$, добиваме $k=1$, што значи

$$P_n(x,y) = (x-2y)(x+y)^{n-1}.$$

Од доказот е јасно дека тоа е единствен полином од n-ти степен кој ги задоволува условите на задачата.