КОЛИКО ИМА РЕШЕЊА?

Војислав Андрић, Ваљево

У великом броју математичких проблема присутно је питање: Колико има решења? Ово питање карактеристично је не само за алгебарске, већ и за проблеме у другим областима математике. Циљ овога текста је да представи неке карактеристичне проблеме и методе за налажење броја њихових решења.

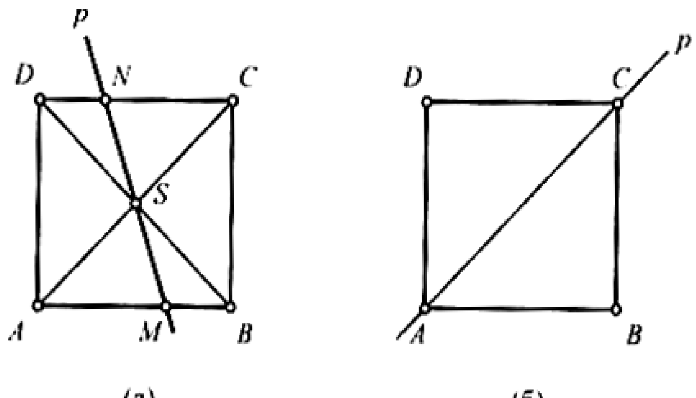
Пример 1. *На колико различитих начина се сума од 2005 динара може исплатити новчаницама од 2 динара и 5 динара?*

Решење. Нека је x број новчаница од 2 динара, а y број новчаница од 5 динара. Тада је $2x + 5y = 2005$ или $2x = 2005 - 5y = 5(401 - y)$. Како је десна страна дељива са 5, мора бити и лева. То значи да је $x = 5k$ ($k \in N_0$), па је $2 \cdot 5k = 5(401 - y)$ или $2k = 401 - y$. Следи $y = 401 - 2k$. Како број новчаница од 5 динара не може бити већи од 401, то је $0 \leq y \leq 401$. Дакле $0 \leq 401 - 2k \leq 401$. Следи да је $0 \leq 2k \leq 401$, одакле је $0 \leq k \leq 200$. Према томе, сума се може исплатити на 201 начин.

Напомињемо да се на сличан начин може одредити број решења сваке линеарне диофантске једначине $ax + by = c$ која задовољава дате услове.

Пример 2. *Колико има различитих правих које дати квадрат деле на две фигуре једнаких површина?*

Решење. Нека је тачка S пресек дијагонала AC и BD квадрата $ABCD$. Нека је p произвољна права која садржи тачку S, сече страницу AB у тачки M, а страницу CD у тачки N (сл. 1(а)).



Сл. 1

Тада је $\Delta AMS \cong \Delta CNS$, из чега следи $AM = CN$. Слично, из подударности троуглова MBS и DNS је $MB = DN$. То повлачи да су трапези $AMND$ и $MBCN$ такође подударни, па стога имају једнаке површине. Ако p садржи неку од дијагонала квадрата, тада она дели квадрат на два подударна једнакокрако-правоугла троугла (сл. 1(б)).

Тако свака права која садржи тачку S дели квадрат $ABCD$ на два дела једнаких површина. Према томе, постоји бесконачно много правих које дати квадрат деле на две фигуре једнаких површина.

Напомена. Може се показати да важи и обратно. Наиме, ако нека права дели квадрат $ABCD$ на два дела једнаких површина, тада она садржи тачку S. Препуштамо читаоцу да то сам докаже.

Пример 3. *На колико различитих начина се број 2005 може приказати као збир неколико узастопних целих бројева?*

Решење. Нека је $n + 1$ најмањи од тражених бројева и нека је тражени збир $S = (n + 1) + (n + 2) + ... + (n + k) = 2005$. Тада је $S = kn + \dfrac{k(k+1)}{2} =$ 2005, па је $2kn + k(k + 1) = k(2n + k + 1) = 4010$. Како је k делилац броја 4010 и $k \geq 2$, у обзир долази седам вредности и то 2, 5, 10, 401, 802, 2005 и 4010. Тражени збирови су:

$1002 + 1003 =$

$399 + 400 + ... + 403 =$

$196 + 197 + ... + 205 =$

$(-195) + (-194) + ... + 195 + 196 + ... + 205 =$

$(-398) + (-397) + ... + 398 + 399 + ... + 403 =$

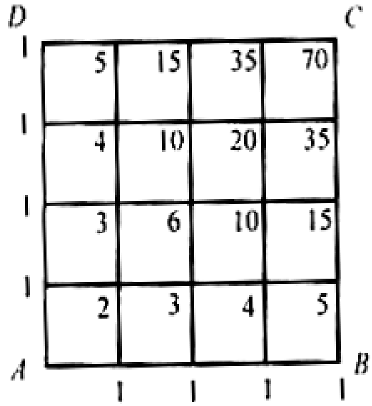
$(-1001) + (-1000) + ... + 1001 + 1002 + 1003 =$

$(-2004) + (-2003) + ... + 2003 + 2004 + 2005 = 2005.$

Дакле, број 2005 се може на 7 начина приказати као збир неколико узастопних целих бројева.

Пример 4. *У граду Математикусу постоји насеље Комбинаторика које има облик квадрата ABCD и садржи 5 улица које су паралелне и 5 улица које су нормалне на реку. На колико различитих начина се аутомобилом може из крајњег угла A доћи у дијагонални угао C, ако се аутомобил креће тако да се стално приближава циљу C?*

Решење. Почевши од A, сваком чвору уличне мреже насеља Комбинаторике придружимо број који представља број начина да се у тај чвор стигне из A аутомобилом који му се стално приближава. Тако је чвору А придружен број 0, а суседима десно и горе од A бројеви 1 (сл. 2). Чвору који је дијагонално од A придружен је број 2 који је једнак збиру бројева претходно придружених суседима лево и доле од њега.



Сл. 2.

Тако се, корак по корак, попуни цела мрежа. Јасно је да ти бројеви представљају број начина да се аутомобилом стигне из A у дотични чвор. Како је чвору C придружен број 70, из A у C може се стићи на 70 начина.

Проблем се може уопштити на случај када улична мрежа насеља Комбинаторика правоугаоник са m хоризонталних и n вертикалних улица. Број тражених путања изражава се преко тзв. биномних коефицијената.

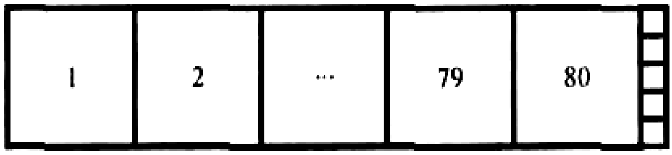
Пример 4. *Дат је комад картона у облику правоугаоника чије су странице целобројне и чија је површина 2005 cm^2. На колико најмање квадрата са целобројним страницама се може исећи дати комад картона?*

Решење. Како је $2005 = 1 \cdot 2005 = 5 \cdot 401$, постоје тачно два таква правоугаоника, један димензија 1×2005 и други димензија 5×401.

(а) 1×2005. Једини начин да се исече на квадрате је да се исече на 2005 квадрата страница 1 cm. То је уједно и најмањи број квадрата.

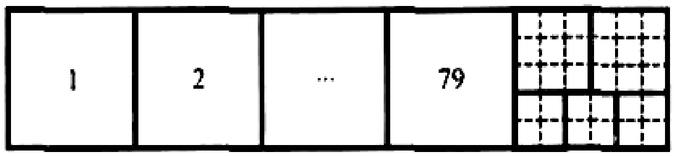
(б) 5×401. И у овом случају правоугаоник се може исећи на 2005 квадрата странице 1 cm, али то није најмањи број.

Ако дати правоугаоник исечемо на 80 квадрата странице 5 *cm*, остаје правоугаоник 1×5 који се може исећи на 5 јединичних квадрата (сл. 3). Укупно 85 квадрата.



Сл. 3.

Међутим, ни то није најмањи број. Наиме, дати правоугаоник исечемо на 79 квадрата странице 5 *cm*, остаје правоугаоник 6×5 који се може исећи на 5 јединичних квадрата (сл. 4). Тако се добија 84 квадрата.



Сл. 4.

Може се показати да 84 минималан број квадрата у овом случају.

Пример 6. *Колико има уређених парова* (x, y) *природних бројева* x и y *таквих да је* $x^2 - y^2 = 144$?

Решење. Како је $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 144 = 2^4 \cdot 3^2$ и како су бројеви $x + y$ и $x - y$ исте парности, оба морају бити парна. Сви могући случајеви дати су у табели:

$x + y$	$x - y$	x	y
18	8	13	5
24	6	15	9
36	4	20	16
72	2	37	35

Дакле, има 4 решења: (13, 5); (15, 9); (20, 16); (37,35).

ЗАДАЦИ

1. На колико различитих начина Воја, Раде и Зоран могу да поделе 2005 динара, а да при том свако од њих добије бар један динар?

2. У координатном систему дата је права $3x + 7y = 3\,737$. Колико има тачака дате праве који леже у првом квадранту и чије су обе координате цели бројеви?

3. Дат је систем једначина

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = 100$$
$$x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_k = 100,$$

где су $x_1, x_2, \ldots, x_k$ природни бројеви. Колико има решења? Колико је најмање, а колико највеће k за које систем има решење?

4. Нека су $x_1, x_2, \ldots, x_{1978}$, природни бројеви. Колико решења има једначина $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{1978}^2 = 2005$?

5. Колико решења има једначина $x^2 + y^3 = z^2$, ако су x, y и z природни бројеви?

6. Колико има правих које дати једнакостранични троугао деле на две фигуре једнаких површина?

7. Колико има парова правих $\{p, q\}$ које дати квадрат деле на три фигуре једнаких површина?

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија