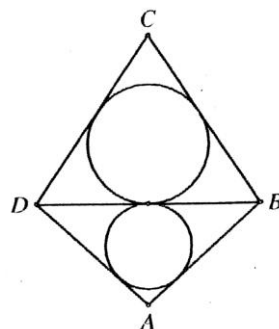


ММО 2002

1. Нека n е сложен број. Докажи дека постојат природни броеви a, b и c такви што

$$n = ab + bc + ca + 1.$$

2. Во конвексен четириаголник $ABCD$ повлечена е една од неговите дијагонали. Докажи дека четириаголникот е тангентен ако и само ако впишаните кружници во двата триаголника на кои со дијагоналата е поделен четириаголникот се допираат.



3. Нека $x_1, x_2, \dots, x_{4n+3}$ се ненулти реални броеви. Ако збирот на било кои два од нив не е еднаков на 1, тогаш постојат $i, j \in \{1, 2, \dots, 4n+3\}$, $i \neq j$ такви што $\frac{x_i x_j}{x_i + x_j - 1} \notin (0, 1)$. Докажи!

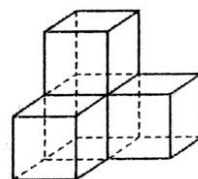
4. Нека S е множество од n , ($n > 1$) различни пермутации на множеството \mathbb{N} , т.е. биекции $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ такви што

а) ако $f, g, h, k \in S$ и $f \circ g = h \circ k$, тогаш $f = h, g = k$,

б) за секои $g_1, g_2, \dots, g_t \in S, t > 0$, постои единствен пар $(h, k) \in S^2$ така што $g_1 \circ g_2 \circ \dots \circ g_t = h \circ k$.

Докажи дека б) $|n$.

5. Дадена е коцка со должина на страна $2n, n \in \mathbb{N}$. Дали е можно употребувајќи блокови формирани од четири мали коцки со страна 1, како што е прикажано на цртежот десно, да се состави телото кое е добиено со отстранување на



- а) четири мали коцки со страна 1 од темињата на коцката,
 б) осумте мали коцки со страна 1 од темињата на коцката.