Ристо Малчески, Скопје
Самоил Малчески, Скопје

ЗА СЕКОГО ПО НЕШТО

Во оваа кратка статија ќе презентираме неколку, според нас, работи кои ќе ве заинтересираат.

1. ДАЛИ АХИЛ ЌЕ ЈА СТИГНЕ ЖЕЛКАТА?

Една од апориите (апорија - логичка тешкотија, доказ според кој не е можно никакво движење) на античкиот филозоф Зенон од Елеја (околу 464-401 год. п.н.е.) гласи:

Ахил трча десет пати побрзо од желката. Во моментот кога почнале да трчаат, желката имала 100 m предност. Додека Ахил ги претрча тие 100 m желката се оддалечува 10 m, па затоа Ахил нема да ја стигне. Додека Ахил ги претрча обвие 10 m желката се оддалечува 1 m и Ахил повторно нема да ја стигне, итн. Значи, Ахил нема да ја стигне желката.

Каде е грешката во ваквото залучување кое очигледно доведува до погрешен резултат?

Ако Ахил ги претрча првите 100 m за t секунди, тогаш 10 m ќе ги претрча за $\frac{t}{10}$ секунди итн. Тврдењето дека Ахил никогаш нема да ја стигне желката ќе биде точно во случајот ако времето

$$t+\frac{t}{10}+\frac{t}{10^2}+...+\frac{t}{10^n}$$

е неограничено. Но, како ова време е еднакво на

$$t\cdot\frac{1-\frac{1}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{t}{9}(10-\frac{1}{10^n})\ s$$

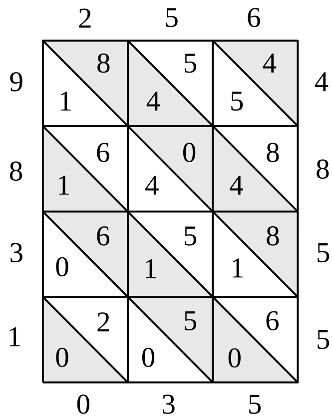
тоа за произволен природен број n е помало од $\frac{10t}{9}$ секунди, па значи не е бесконечно големо. Според тоа терминот „никогаш“ нема оправдување. Грешката во заклучувањето настанала бидејќи од бесконечноста на процесот се извлекува заклучок за бесконечност на збирот на времетраењата на поодделните етапи.

Дека Ахил ќе ја стигне желката можеме да се увериме и со најосновните поими од физиката. Нека S е должината на патот што Ахол мора да го помине да ја стигне желката и нека V е неговата брзина. Тогаш $\frac{S}{V}=\frac{S-100}{\frac{V}{10}}$ односно $S=\frac{1000}{9}$ метри. Ако Ахил претрчал 100 m за време од t секунди, тогаш желката ќе стигне за $\frac{\frac{1000}{9}m}{\frac{100}{t}m/s}=\frac{10}{9}t\ s$, што е јасно и од предходната дискусија (збир на геометриски ред).

2. КАКО МНОЖЕЛЕ СТАРИТЕ ИНДИЈЦИ?

Старите индијци за секоја математичка операција имале по неколку различни методи. Интересен е еден начин на множење кој може и денеска да се користи без никакви ограничувања. Методот ќе го објасниме на конкретен пример.

Ако сакаме да помножиме помножиме два повеќе цифрени броеви, на пример броевите 256 и 1389, цртаме правоаголна шема со димензии 4×3 (правоаголник разделен на 12 еднакви квадрати). На левата вертикална страна на правоаголникот го запишуваме бројот 1389 од долу нагоре (до секое квадратче по една цифра од бројот, редоследно) а бројот 256 го запишуваме на горната хоризонтална срана на правоаголникот, од лево кон десно (до секое квадратче по една цифра од бројот, редоследно), види цртеж.



Секое мало квадратче го делиме со една дијагонала, од горниот лев агол до долниот десен агол на два триаголника. Во секое квадратче го запишуваме производот на цифрите од соодветната редица и колона чиј пресек е тоа квадратче. Во долниот триаголник цирфата на десетките од множењето, а во горниот триаголник од квадратчето цифрата на единиците од множењето. Од така добиената пополнета правоаголна шема, вршиме собирање по појаси од горниот десен агол на правоаголникот кон долниот десен агол на триаголникот (појасите се исенчени наизменично), види цртеж. Цифрата од првиот појас ја запишуваме непосредно (за овој пример тоа е цифрата 4). Цифрите од вториот појас ги собираме. Во примерот тој збир е 18. Од збирот, цифрата на единиците ја запишуваме во продолжение на појасот, а цифрата на десетките ја додаваме на збирот на цифрите од третиот појас. Постапката ја продолжуваме додека не стигнеме до долниот лев агол на правоаголникот (последниот појас).

На ист начин со соодветна правоаголна шема можат да се помножат било кои два повеќецифрени броеви.

3. МАГИЧЕН БРОЈ ВО БИБЛИЈАТА

Во библијата во Евангелието по Иван (21:11), каде што се опишува привидението на Тиберијадското езеро пишува:

„Се качи на бротчето Шимун Петар и на копно извлече мрежа: сто педесет и три големи риби“

Зошто овде е запишан токму бројот 153?

Некој ќе реше случајно. Меѓутоа, малку по малку се открило дека овој број има некои интересни својства и веројатно кога е пишувана оваа книга некои од нив биле познати. Да ги наведеме својствата на овој број:

i) Збирот на првите 17 природни броеви е еднаков на 153, т.е.

$$1+2+3+...+17=153.$$

ii) Збирот на факториелите на првите пет природни броеви е еднаков на 153, т.е.

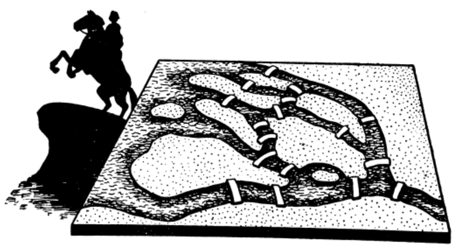
$$1!+2!+3!+4!+5!=153.$$

iii) Збирот на третите степени од цифрите со кои овој број е запишан е еднаков на самиот број, т.е.

$$1^3+2^3+3^3=153.$$

4. САН ПЕТЕРЗБУРГШКИТЕ МОСТОВИ

Градот Сан Петерзбург е познат по своите 17 мостови. За разлика од задачата за кенингсбериските мостови за која Леонард Ојлер докажал дека нема решение, задачата за Сан Петерзбургшките мостови има решение.



Обидете се да преминете преку овие седумнаесет мостови, при што преку ниту еден мост не треба да преминете два пати.

5. ВСЕЛЕНСКА ПРИКАЗНА

Во далечна галаксија се наоѓаат $2n+1$ планета, кои по парови се на различни растојанија. На секоја од ови планети се наоѓа астроном кој ја набљудува само најблиската планета.

Докажи, дека меѓу овие $2n+1$ планета постои планета која никој не ја набљудува.

6. НА ПРВ ПОГЛЕД ГРЕШНО, А ТОЧНО

Што ќе кажеш на прв поглед за равенствата

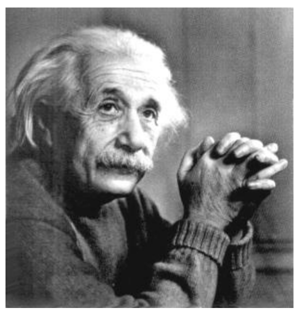
$$\sqrt{7+\frac{7}{48}}=7\sqrt{\frac{7}{48}} \text{ и } \sqrt[3]{6+\frac{6}{215}}=6\cdot\sqrt[3]{\frac{6}{215}}\,.$$

Веројатно, без многу размислување ќе одговориш дека равенствата не се точни. Но, не брзај! Овие равеннства сепак се точни и се специјален случај од поопштото равенство

$$\sqrt[n]{a+\frac{a}{a^n-1}}=a\cdot\sqrt[n]{\frac{a}{a^n-1}}\,,$$

кое лесно можеш да го докажеш.

7. АНЕГДОТИ ЗА АЈНШТАЈН



Анегдота 1. Еден од асистентите на Ајнштајн со радост зборувал за потврдата на теоријата со експерименталните резултати. „Но, јас знаев дека теоријата е во ред“ - смирено прокоментирал Ајнштајн. Тогаш асистентот го прашал што ќе правел ако експериментите не ги потврделе предвидувањата. „Тогаш“, - рекол Ајнштајн, „ќе ми беше жал за творецот на теоријата, бидејќи истата не е точна“.

Анегдота 2. Ајнштајн бил голем љубител на виолината и практикувал да свири во дует со својот пријател, пијанистот Рубинштајн. Еднаш Рубинштајн му укажувал на Ајнштајн дека греши во некој такт и му рекол: „Зарем не знаеш да броиш, Алберте?“

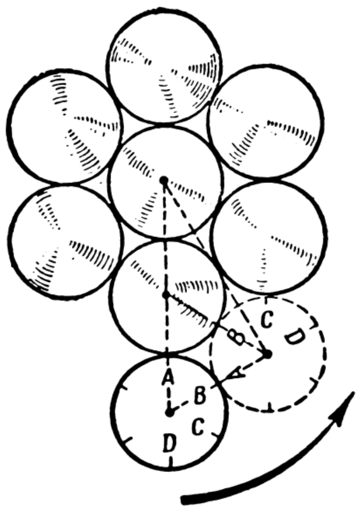
Анегдота 3. Композиторот Рубинштајн го запрашал Ајнштај колку се сигурни математичките закони, на што овој одговорил: „Оние математички закони кои се однесуваат на реалноста не се сигурни, а оние кои се сигурни, не се однесуваат на реалноста.“

Анегдота 4. И покрај тоа што Вернер Хајзенберг ја добил Нобеловата награда во 1932 за неговиот принцип на неопределеност, Ајнштајн никако не можел да го прифати тој принцип, и велел „Господ не се коцка со универзумот“. За таа изјава Нилс Бор остро му забележал „Кој си ти да му кажуваш на Господ што да прави?“ Многу години подоцна Стивен Хокинг додава: „Господ не само што се коцка, туку и ги фрла коцките кај што не можат да се видат.“

Анегдота 5. Во времето кога ја создал Специјалната теорија на релативноста, Ајнштајн работел како службеник во Швајцарскиот патентен завод. Сработувајќи го трудот во своето слободно време, го испратил за објавување, скромно пишувајќи: „Ако имате место во списанието ...“.

Анегдота 6. Во подоцнежните години, додека размислувал за обединета теорија на полиња, Ајнштајн добил писмо од една ученичка од средно училиште со некој математички проблем. Откако го исполнил листот со формули и дијаграми, тој ѝ напишал и зборови за утеха: „Не грижи се за твоите тешкотии во математиката. Те уверувам дека моите се многу поголеми!“

8. ОСУМ КРУГОВИ



Пред вас се осум еднакви кругови (цртеж лево). Седумте кругови, поставени во форма на шестаголник се неподвижни, а осмиот (најдолу на цртежот) се тркала по нив без лизгање. Колку свртувања ќе направи осмиот круг за да неподвижните кругови ги заобиколи еднаш.

Вие тоа можете да го објасните практично, ако на маса ставите осум петденарки, распоредени како на цртежот. Потоа држејќи ги седумте монети по нивните рабови ја движите осмата. За да го определите бројот на свртувањата пратете го вртењето на бројот 5 на петденарката. Но тоа е експериментално заклучување.

Обидете се добиениот резултат да го докажете.

9. ВО СВЕТОТ НА БРОЕВИТЕ

При операции со некои природни броеви се добиваат резултати кои предизвикуваат чудење и восхитување, познати под името *миракули*. Еве неколку од нив:

1)

$$\begin{gathered}123456789\cdot 9=111\ 111\ 111\\ 123456789\cdot 18=222\ 222\ 222\\ 123456789\cdot 27=333\ 333\ 333\\ 123456789\cdot 36=444\ 444\ 444\\ 123456789\cdot 45=555\ 555\ 555\\ 123456789\cdot 54=666\ 666\ 666\\ 123456789\cdot 63=777\ 777\ 777\\ 123456789\cdot 72=888\ 888\ 888\\ 123456789\cdot 81=999\ 999\ 999\end{gathered}$$

2)

$$\begin{gathered}1\cdot 8+1=9\\ 12\cdot 8+2=98\\ 123\cdot 8+3=987\\ 1234\cdot 8+4=9876\\ 12345\cdot 8+5=98765\\ 123456\cdot 8+6=987654\\ 1234567\cdot 8+7=9876543\\ 12345678\cdot 8+8=98765432\\ 123456789\cdot 8+9=987654321\end{gathered}$$

3)

$$\begin{gathered}0\cdot 9+1=1\\ 1\cdot 9+2=11\\ 12\cdot 9+3=111\\ 123\cdot 9+4=1111\\ 1234\cdot 9+5=11111\\ 12345\cdot 9+6=111111\\ 123456\cdot 9+7=1111111\\ 1234567\cdot 9+8=11111111\\ 12345678\cdot 9+9=111111111\\ 123456789\cdot 9+10=1111111111\end{gathered}$$

4)

$$\begin{gathered}9\cdot 9+7=88\\ 9\cdot 98+6=888\\ 9\cdot 987+5=8888\\ 9\cdot 9876+4=88888\\ 9\cdot 98765+3=888888\\ 9\cdot 987654+2=8888888\\ 9\cdot 9876543+1=88888888\\ 9\cdot 98765432+0=888888888\\ 9\cdot 987654321-12=8888888888\end{gathered}$$

10. ТРИЕСЕТ И ШЕСТ НУЛИ

Во полињата на оваа табела, како што можете да видите, се внесени 36 нули.

Потоа 12 нули се прецртани, но така што во секој ред и во секоја колона на табелата останува еднаков број на непрецртани нули.

Кои нули се прецртани?

o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o
o	o	o	o	o	o

11. ЕКОНОМИЧЕН РЕЗЕРВОАР

Марко сака да направи резервоар за вода, па затоа се распрашал за цената на цементот и заклучил дека со расположливите пари може да цементира $12\,m^2$. Но, не знае какви димензии треба да има резервоарот, така што неговиот волумен да биде најголем. Отишол кај ѕидарот Павле да му направи пресметка. Кажувајќи му го проблемот Марко додал дека резервоарот не треба да има поклопец. Со обзир на градежните тешкотии решиле основата на резервоарот да биде квадрат, а ѕидовите правоаголници, па останало да ги одредат димензиите на основата и висината.

Павле бил практичен и не сакал да губи време со детални пресметки, па размислувал на следниот начин: коцката е тело кое содржи најголем волумен од сите квадари со дадена плоштина, па значи коцката е најекономичен облик на резервоарот. Меѓутоа, бидејќи во овој случај нема капак, доволни се пет квадратни плочи. Бидејќи вкупната плоштина е $12\,m^2$, секоја плоча ќе има по $2,4\,m^2$. Страната на коцката, тогаш приближно е 1,55 m, а волуменот е $3,72\,m^3$.

Ова на Марко му изгледало добро, но не му се допаднала брзината со која Павле пресметувал. Можеби Павле сепак згрешил? Што мислите вие?

Навистина, Марко со право се сомневал. На пример, ако за резервоарот земеме основа квадрат со страна 1,8 m а висината да е 1,216 m, тогаш плоштината на резервоарот ќе биде $12\,m^2$, а волуменот $3,94\,m^3$. Каде згрешил Павле?

Фактите кои Павле ги користел се точни ако станува збор за вкупна плоштина на коцка. Но, овда резервоарот нема капак, па затоа ваквиот *некритичен пренос на фактите доведува до грешка*. Може да се каже дека, во случај кога основата е квадрат димензиите на резервоарот се 2*м*, 2 m и 1 m и тој ќе има најголем волумен од $4\,m^3$.

12. УЛАМОВА СПИРАЛА

Уламовата спирала се добива така што во полињата на мрежата ја запишуваме низата природни броеви по спиралата и полињата со прости броеви ги боиме.

101	100	99	98	97	96	95	94	93	92	91
102	65	64	63	62	61	60	59	58	57	90
103	66	37	36	35	34	33	32	31	56	89
104	67	38	17	16	15	14	13	30	55	88
105	68	39	18	5	4	3	12	29	54	87
106	69	40	19	6	1	2	11	28	53	86
107	70	41	20	7	8	9	10	27	52	85
108	71	42	21	22	23	24	25	26	51	84
109	72	43	44	45	46	47	48	49	50	83
110	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82
111	112	113	114	115	116	117	118	119	120	121

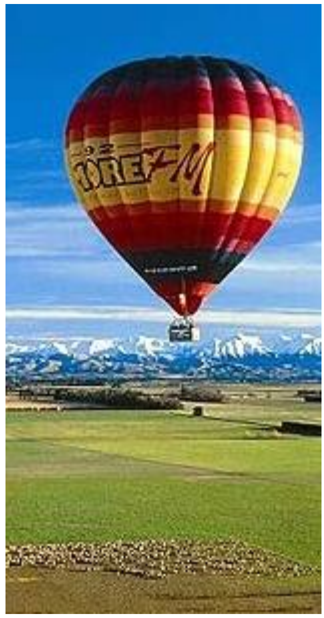
Со набљудување на Уламовата спирала може да се забележи следново:

1. На Уламовата спирала нема две обоени полиња кои имаат заедничка страна, освен полето со број 2 и две негови соседни полиња.
2. На Уламовата спирала, освен полето со број 12, нема ниту едно поле кое има заедничка страна со четири обоени полиња.

13. МАТЕМАТИЧАРИ ВО БАЛОН

Патувале двајца математичари во балон и ги зафатило невреме, кое го однесло балонот во непознат крај. Го спуштиле балонот неколку метра над земја и виделе човек на велосипед. Кога го запрашале каде се наоѓаат, дотичниот господин после кратко размислување одговорил:

\- Во балон.



- Е, овој господин сигурно е математичар. – прокоментирал едниот од пријателите.

- Од каде сега таков заклучок? – се зачудил другиот пријател.

- Па, три детали ме наведуваат да заклучам дека станува збор за математичар. Прво, на прашањето прво размисли, па одговори, што е одлика на математичар. Второ, одговорот кој го даде е точен, што повторно е одлика на математичар. Но, дека сигурно станува збор за математичар ми потврди фактот дека од добиениот одговор немаме никаква корист.

14. ЗАБРАНА ЗА МАТЕМАТИКАТА И МАТЕМАТИЧАРИТЕ

За време на византискиот цар Јустинијан (482 - 565), за кого се верува дека е роден во едно село близу денешен Ниш, издаден е таканаречениот Јустинијанов кодекс, објавен во 533 година. Тоа е зборник на одлуки и наредби на старите римски цареви. Во него се зборува за „... злочинци, математичари и слични на нив...“. Во овој кодекс два члена гласат:

„Под закана на казна се забранува исто така и математичката вештина“.

„Нека никој не бара совет од математичари“.