Geometrija Minkowskog

Romana Capor, Željka Milin Šipuš, Zagreb

Geometrija koju obično koristimo je euklidska geometrija. Njemački filozof Immanuel Kant je rekao da je ona "u čovjekovoj prirodi". No, postoje i mnoge druge geometrije, kao primjerice hiperbolička, eliptička, geometrija Minkowskog, Galilejeva geometrija i druge. Tema ovog članka je geometrija Minkowskog, koja je zanimljiva kako matematičarima za istraživanje svojstava krivulja i ploha u toj geometriji, tako i fizičarima, jer je ona ambijentalni prostor za teoriju relativnosti.

Da bismo definirali geometriju Minkowskog, prisjetimo se nekih pojmova iz euklidske geometrije. Standardni analitički model za dvodimenzionalnu euklidsku geometriju je realni vektorski prostor $\mathbf{R}^2$. To je skup svih uređenih parova realnih brojeva za koje su definirane operacije zbrajanja, $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ i množenja realnim brojem, $\lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.

U ovom kontekstu uređene parove (x_1, x_2) nazivamo vektorima, a realne brojeve λ skalarima. Uz navedene operacije zbrajanja vektora i množenja vektora skalarom, u euklidskom prostoru definirana je još operacija tzv. *euklidskog skalarnog množenja vektora*. To je preslikavanje koje paru vektora (x_1, x_2), (y_1, y_2) pridružuje realan broj (skalar, otuda ime operacije) zadan sa

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Za euklidsko skalarno množenje vrijedi svojstvo: skalarni kvadrat $(x_1, x_2)^2 = (x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2)$ uređenog para (x_1, x_2) je nenegativan realan broj

$$(x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 \geq 0.$$

Kada je skalarni kvadrat $(x_1, x_2)^2 = (x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2)$ jednak 0? Očito, ako i samo ako je $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Spomenuta svojstva euklidskog skalarnog produkta nazivamo *pozitivna definitnost*. Ona omogućuju da u euklidskom prostoru $\mathbf{R}^2$ pomoću skalarnog produkta definiramo duljinu (modul, normu) vektora $X = (x_1, x_2)$,

$$|X| = \sqrt{(x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Duljina svakog vektora $X \in \mathbf{R}^2$ je očito nenegativan realan broj. Nul-vektor je jedini vektor duljine 0. Nadalje, pomoću duljine vektora, definiramo i *euklidsku udaljenost (metriku)* između X, Y kao $d(X, Y) = |X - Y|$.

Definirajmo sada dvodimenzionalnu geometriju Minkowskog. Analitički model za dvodimenzionalnu geometriju Minkowskog je ponovo realni vektorski prostor $\mathbf{R}^2$, ali uz zadani *Lorentzov skalarni produkt*

$$(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = -x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Prostor $\mathbf{R}^2$ sa zadanim Lorentzovim skalarnim produktom nazivamo *prostorom Minkowskog* i označavamo ga $\mathbf{R}^2_1$. Još ga nazivamo i pseudoeuklidskim prostorom. Napomenimo da se ponekad Lorentzov skalarni produkt definira i kao $(x_1, x_2) \cdot (y_1, y_2) = x_1 y_1 - x_2 y_2$.

Je li Lorentzov skalarni produkt pozitivno definitan? Uočavamo da nije. Realan broj

$$(x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2) = -x_1^2 + x_2^2$$

može biti i pozitivan i negativan i jednak 0. Primjerice, $(0, 1) \cdot (0, 1) = 1$, $(1, 0) \cdot (1, 0) = -1$, $(1, 1) \cdot (1, 1) = 0$.

Zbog toga u prostoru Minkowskog $\mathbf{R}_1^2$ razlikujemo tri vrste vektora. Za vektor $X = (x_1, x_2)$ kažemo da je

1. prostorni ako je $X \cdot X > 0$;
2. vremenski ako je $X \cdot X < 0$;
3. svjetlosni ako je $X \cdot X = 0$.

Posebno, među vremenskim i svjetlosnim vektorima razlikujemo dvije klase vektora: pozitivne i negativne vektore kao vektore koji još zadovoljavaju $x_1 > 0$, odnosno $x_1 < 0$.

Imena tih vektora potječu upravo iz četverodimenzionalnog prostora Minkowskog i teorije relativnosti o čemu će biti riječi kasnije.

Analizirajmo kakav skup određuju koordinate svjetlosnih vektora $X = (x_1, x_2)$ u x_1x_2-ravnini? Za njih vrijedi

$$-x_1^2 + x_2^2 = (-x_1 + x_2)(x_1 + x_2) = 0,$$

što povlači $-x_1 + x_2 = 0$ ili $x_1 + x_2 = 0$. Prema tome, koordinate svjetlosnih vektora zadovoljavaju $x_2 = x_1$ ili $x_2 = -x_1$, a to su pravci u x_1x_2-ravnini s koeficijentom smjera 1, odnosno -1.

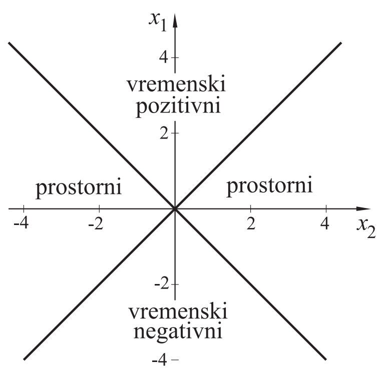
Za prostorne vektore vrijedi

$$-x_1^2 + x_2^2 > 0 \Leftrightarrow |x_2| > |x_1|,$$

a za vremenske vektore

$$-x_1^2 + x_2^2 < 0 \Leftrightarrow |x_2| < |x_1|.$$

Svjetlosni pravci i područja prostornih odnosno vremenskih vektora prikazana su na slici 1. Vremenski i svjetlosni pozitivni (negativni) vektori su u gornjoj (donjoj) poluravnini. Uočite položaje osi!



Slika 1. Svjetlosni, prostorni i vremenski vektori.

Kolika je duljina vektora $X \in \mathbf{R}_1^2$? Definiramo

$$|X| = \sqrt{(x_1, x_2) \cdot (x_1, x_2)} = \sqrt{-x_1^2 + x_2^2},$$

što može biti pozitivan realan broj, pozitivan imaginaran broj (tj. broj oblika ia, $a > 0$, $i = \sqrt{-1}$ kompleksna jedinica) ili 0. Prostorni vektori su vektori pozitivne duljine, svjetlosni vektori su vektori duljine 0 (iako sami nisu nul-vektori!), a vremenski vektori su vektori pozitivne imaginarne duljine. Udaljenost (metriku) između X, Y definiramo kao i u euklidskom prostoru, $d(X, Y) = |X - Y|$. Očito udaljenost može biti pozitivan realan broj, pozitivan imaginaran broj ili 0.

Nakon što smo definirali mjerenje udaljenosti u prostoru Minkowskog, definirajmo kako mjeriti kutove.

Kao i u euklidskom prostoru, za vektore X, Y iz $\mathbf{R}_1^2$ kažemo da su okomiti (ortogonalni) ako je

$$X \cdot Y = 0.$$

Geometrija Minkowskog, kao i euklidska geometrija, ima svojstvo da je jedini vektor koji je okomit na sve vektore nul-vektor. To svojstvo nazivamo *nedegeneriranost skalarnog produkta*.

Iz uvjeta okomitosti vektora slijedi, primjerice, uvjet okomitosti pravaca u geometriji Minkowskog: ako su $y = k_i x + l_i$, $i = 1, 2$, okomiti pravci, tada njihovi vektori smjera zadovoljavaju $(k_1, -1) \cdot (k_2, -1) = -k_1 k_2 + 1 = 0$. Dakle, pravci su okomiti ako i samo ako su im koeficijenti smjera recipročni.

Nadalje, vrijedi sljedeća tvrdnja:

Neka su vektori X, $Y \in \mathbf{R}_1^2$ okomiti. Ako je X vremenski vektor, tada je Y prostorni vektor (i obrnuto). Zaista, ako je $X = (x_1, x_2)$ vremenski vektor, tada je $X^2 < 0$, te je $x_2^2 < x_1^2$. Nadalje, kako su X, Y okomiti, to je $-x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0$, stoga je (uz pretpostavku da je, primjerice, $x_1 \neq 0$)

$$y_1 = \frac{x_2 y_2}{x_1}.$$

Prema tome

$$Y^2 = -y_1^2 + y_2^2 = -\left(\frac{x_2 y_2}{x_1}\right)^2 + y_2^2 = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2} y_2^2 > 0,$$

te je Y prostorni vektor. Slično, ako su X, Y okomiti i ako je, primjerice, vektor X svjetlosni, tada je X nul-vektor ili je Y također svjetlosni.

Uočimo nadalje da za sve vektore X, Y u prostoru Minkowskog $\mathbf{R}_1^2$ vrijedi

$$(X \cdot Y)^2 \geq |X|^2 |Y|^2. \tag{1}$$

Zaista,

$$\begin{aligned} |X|^2|Y|^2 &= (-x_1^2 + x_2^2)(-y_1^2 + y_2^2) = x_1^2 y_1^2 + x_2^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2 - x_1^2 y_2^2 \\ &= (X \cdot Y)^2 - (x_2 y_1 - x_1 y_2)^2 \leq (X \cdot Y)^2. \end{aligned}$$

Ta relacija nam omogućuje definirati kut između vektora u sljedećim situacijama. Ako su X, Y prostorni vektori, tada je umnožak $|X||Y|$ pozitivan, pa relacija (1) glasi $|X \cdot Y| \geq |X||Y|$. Možemo primijetiti da za zadane vektore X, Y postoji jedinstven nenegativan realni broj $\varphi(X, Y)$ tako da prethodnu relaciju zapisujemo kao

$$|X \cdot Y| = |X||Y| \operatorname{ch} \varphi(X, Y). \tag{2}$$

U izrazu (2) javila se elementarna funkcija *kosinus hiperbolički*. To je funkcija definirana za sve $\varphi \in \mathbf{R}$ sa

$$\operatorname{ch} \varphi = \frac{1}{2}(e^{\varphi} + e^{-\varphi})$$

i za nju vrijedi $\operatorname{ch} \varphi \geq 1$. Nenegativan realan broj $\varphi(X, Y)$ iz izraza (2) nazivamo *kutom* između prostornih vektora X, Y.

Kut definiramo i za vremenske pozitivne (negativne) vektore X, Y. Za njih vrijedi

$$|X||Y| = ia \cdot ib = -ab < 0, \quad a, b > 0. \tag{3}$$

Također

$$|X||Y| < 0 \tag{4}$$

jer iz $X^2 = -x_1^2 + x_2^2 < 0$, $Y^2 = -y_1^2 + y_2^2 < 0$ slijedi (uz pretpostavku da su oba vektora, primjerice, pozitivna, $x_1 > 0$, $y_1 > 0$)

$$-x_1 < x_2 < x_1, \quad -y_1 < y_2 < y_1.$$

Tada je $x_2y_2 < x_1y_1$, pa je $X \cdot Y = -x_1y_1 + x_2y_2 < -x_1y_1 + x_1y_1 = 0$. Kako su brojevi $X \cdot Y$ i $|X||Y|$ negativni, iz (1), (3) i (4) dobivamo

$$X \cdot Y \leq |X||Y| < 0.$$

Kao i prije zaključujemo da postoji jedinstven nenegativan realni broj $\varphi(X,Y)$ tako da vrijedi (2). Realan broj $\varphi(X,Y)$ definiran s (2) nazivamo *kutom* između vremenskih pozitivnih (negativnih) vektora X, Y.

Primijetimo da u euklidskoj geometriji vrijedi $X \cdot Y = |X||Y| \cos\varphi$, odakle slijedi $|X \cdot Y| \leq |X||Y|$.

Sjetimo se jednadžbe kružnice sa središtem u ishodištu O polumjera $R > 0$ u euklidskom prostoru $\mathbf{R}^2$. Ona glasi $x_1^2 + x_2^2 = R^2$, te kružnicu možemo definirati kao

$$\{X \in \mathbf{R}^2 : |X|^2 = R^2\}. \tag{5}$$

U prostoru Minkowskog $\mathbf{R}_1^2$ definiramo kružnicu sa središtem u ishodištu polumjera R također koristeći (5). Jednadžba te kružnice glasi $-x_1^2 + x_2^2 = R^2$.

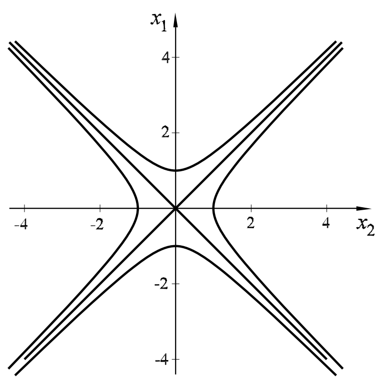
Kako izgleda kružnica u prostoru Minkowskog? Promatrano "euklidskim očima", to je zapravo jednakostrana hiperbola. Uočavamo da polumjer R kružnice u prostoru Minkowskog može biti pozitivan broj, pozitivan imaginaran broj ili 0. Kružnica polumjera 0 je upravo par pravaca koji određuje svjetlosne vektore. Jedinična kružnica pozitivnog polumjera ima jednadžbu

$$-x_1^2 + x_2^2 = 1,$$

a jedinična kružnica imaginarnog polumjera

$$-x_1^2 + x_2^2 = -1.$$

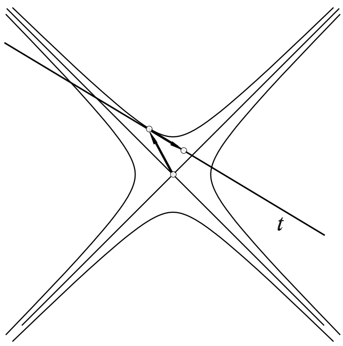
Te jedinične kružnice, kao i kružnica polumjera 0 prikazani su na slici 2. Kružnica pozitivnog realnog polumjera je hiperbola s tjemenima na x_2-osi, a kružnica imaginarnog polumjera je hiperbola s tjemenima na x_1-osi.



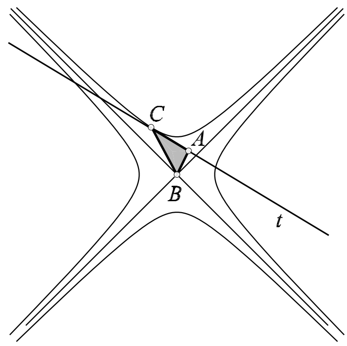
Slika 2. Kružnice pozitivnog, imaginarnog i polumjera 0.

Ako krivulju kojoj su svi tangencijalni vektori prostorni (vremenski) zovemo prostornom (vremenskom), tada je očito kružnica pozitivnog realnog polumjera vremenska krivulja, a kružnica imaginarnog polumjera prostorna krivulja.

Okomitost dvaju vektora sada možemo opravdati i geometrijski. Analogno kao i u euklidskom prostoru, i u prostoru Minkowskog je vektor polumjera kružnice (određen središtem kružnice i točkom kružnice) okomit na vektor smjera tangente na kružnicu u promatranoj točki (slika 3). Zaista, vektor polumjera ima smjer radij-vektora promatrane točke na kružnici, primjerice $(x_0, \sqrt{x_0^2 - 1})$, a vektor smjera tangente je određen derivacijom, pa je jednak $\left(1, \frac{1}{\sqrt{x_0^2-1}} x_0\right)$. Očito je Lorentzov skalarni produkt tih vektora jednak 0.



Slika 3. Okomiti vektori.



Slika 4. Pravokutan trokut.

Uočimo da ne možemo govoriti o mjeri kuta okomitih vektora (kao u euklidskom prostoru, gdje okomiti vektori zatvaraju kut od $\pi/2$), jer su okomiti vektori vektori različitih vrsta, te za njih kut nije definiran!

Pogledajmo kako glasi *Pitagorin teorem za pravokutan trokut* u geometriji Minkowskog (slika 4). Neka je $\triangle ABC$ pravokutan trokut, pri čemu su stranice $\overline{BC}$, $\overline{CA}$ okomite (one su katete), a stranica $\overline{AB}$ je hipotenuza. Označimo s $a = ||BC|| > 0$, $b = ||CA|| > 0$, $c = ||AB|| > 0$ apsolutne vrijednosti njihovih duljina. Okomiti vektori su vektori različitih vrsta. Primjerice, ako je vektor $\overrightarrow{BC}$ vremenski, tada je $\overrightarrow{CA}$ prostorni. Hipotenuza $\overrightarrow{AB}$ je ponovo vremenski vektor. Računajući skalarni kvadrat od $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$, uvažavajući da je $b^2 = -\overrightarrow{CA}^2$, dobivamo Pitagorin teorem u geometriji Minkowskog

$$a^2 - b^2 = c^2.$$

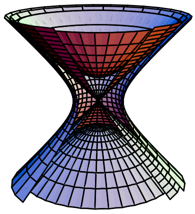
Sve prethodno možemo poopćiti i na trodimenzionalni prostor. Trodimenzionalni prostor Minkowskog $\mathbf{R}_1^3$ je realni vektorski prostor $\mathbf{R}^3$ s Lorentzovim skalarnim produktom

$$(x_1, x_2, x_3) \cdot (y_1, y_2, y_3) = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3.$$

Svjetlosni konus je konus (stožasta ploha) definiran jednadžbom

$$x_1^2 = x_2^2 + x_3^2.$$

Prostorni vektori, vektori pozitivne duljine, nalaze se izvan svjetlosnog konusa, a vremenski vektori, vektori imaginarne duljine, unutar svjetlosnog konusa.



Slika 5. Svjetlosni konus i jedinične sfere.

U trodimenzionalnom vektorskom prostoru Minkowskog definiramo jedinične sfere: jedinična sfera pozitivnog polumjera

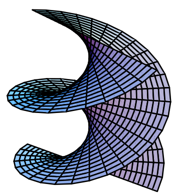
$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \tag{6}$$

je jednoplošni hiperboloid, a jedinična sfera pozitivnog imaginarnog polumjera

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1 \tag{7}$$

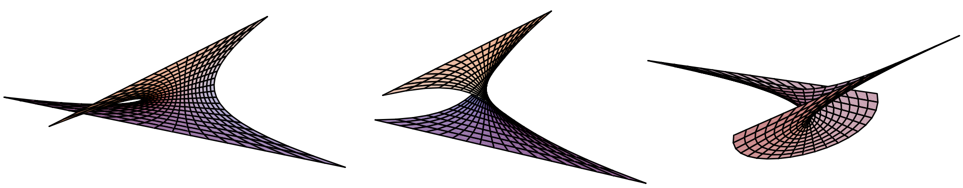
je dvoplošni hiperboloid (slika 5). Jedinična sfera pozitivnog polumjera je vremenska ploha, dok je jedinična sfera pozitivnog imaginarnog polumjera prostorna ploha. To su obje plohe konstantne zakrivljenosti, i to prva konstantne pozitivne, a druga konstantne negativne zakrivljenosti.

Osim tih ploha, u trodimenzionalnom prostoru Minkowskog zanimljivo je proučavati analogone euklidskih ploha. Postojanje triju vrsta vektora u prostoru Minkowskog često uzrokuje razlike u odnosu na euklidsku geometriju. Primjerice, u euklidskom prostoru je helikoid (osim ravnine) jedina pravčasta minimalna ploha (slika 6).



Slika 6. Helikoid, jedina pravčasta minimalna vitopera ploha u euklidskom prostoru.

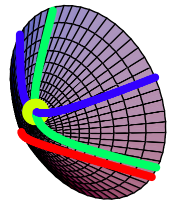
Pravčaste plohe su plohe koje su generirane familijom pravaca duž neke krivulje. Minimalne plohe su plohe kojima je srednja zakrivljenost jednaka 0. Geometrija prostora Minkowskog u tom je smislu bogatija, postoje četiri pravčaste minimalne vitopere plohe. Pored helikoida, to su plohe prikazane na slici 7.



Slika 7. Pravčaste minimalne vitopere plohe u prostoru Minkowskog.

U (trodimenzionalnom) prostoru Minkowskog moguće je realizirati još jednu vrlo važnu geometriju, tzv. hiperboličku (dvodimenzionalnu) geometriju. Hiperbolička geometrija je značajna po tome što su u njoj zadovoljeni svi aksiomi euklidske (dvodimenzionalne) geometrije, osim aksioma o paralelama. U euklidskoj geometriji taj aksiom kaže: *Kroz danu točku, paralelno sa zadanim pravcem, moguće je povući točno jedan pravac*. Navedeni aksiom euklidske geometrije ima vrlo važno povijesno značenje – zbog svoje neobične duljine smatralo se da je možda već on posljedica ostalih aksioma. Taj je problem bio neriješen skoro 2000 godina i tek je u 19. stoljeću dokazano da je on zaista aksiom karakterističan za euklidsku geometriju, a njegovim negiranjem dobivamo nove geometrije, tzv. neeuklidske geometrije. Jedna od tih geometrija je i hiperbolička geometrija. Za hiperboličku geometriju on glasi: *Kroz danu točku, paralelno sa zadanim pravcem, moguće je povući barem dva pravca.*

Model hiperboličke geometrije nalazimo na, primjerice, gornjoj plohi dvoplošnog hiperboloida (7), dakle, jedinične sfere imaginarnog polumjera u prostoru Minkowskog. Dvoplošni hiperboloid (7) je prostorna ploha konstantne negativne zakrivljenosti (jednake -1). Hiperbolička geometrija određena je ovako: njene točke su točke gornje grane dvoplošnog hiperboloida, a pravci su krivulje na dvoplošnom hiperboloidu koje se dobivaju kao presjeci dvoplošnog hiperboloida s ravninama kroz ishodište koordinatnog sustava. Te krivulje su hiperbole. Zaista, ovdje da se kroz danu točku paralelno sa zadanim pravcem (hiperbolom) mogu povući barem dva pravca (hiperbole), vidi sliku 8. Paralelni pravci su pravci koji se ne sijeku.



Slika 8. Pravac i dva s njim paralelna pravca kroz zadanu točku.

Geometrija Minkowskog je značajna i za fiziku. Četverodimenzionalni prostor Minkowskog je prostor Einsteinove teorije relativnosti. Naziva se *prostor-vrijeme* i osim tri prostorne koordinate x_1, x_2, x_3, ima i vremensku koordinatu koja ravnopravno sudjeluje u metrici prostora. U zapisu metrike koji smo mi koristili, to je prva koordinata ($x_1 = ct$, c je brzina svjetlosti)

$$|X|^2 = -c^2t^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Kao i prije, svjetlosni konus se sastoji od vektora za koje je

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = c^2t^2. \tag{8}$$

Vektori izvan konusa su prostorni vektori, a vektori unutar njega su vremenski, među kojima razlikujemo vektore budućnosti (vremenski pozitivni vektori, $t > 0$) i vektore prošlosti (vremenski negativni vektori, $t < 0$). Čestica se može gibati unutar svjetlosnog konusa, iz koordinate s vremenom $t < 0$ u koordinatu s vremenom $t > 0$. Po plaštu štošca mogu se gibati samo fotoni koji se gibaju brzinom svjetlosti.

Jednadžbu (8) možemo shvatiti kao sferu (u trodimenzionalnom euklidskom prostoru s koordinatama x_1, x_2, x_3) sa središtem u ishodištu O polumjera ct. Njome je opisana valna fronta svjetlosti koja se širi iz točkastog izvora u O.

Neka je $\{O'; t', x_1', x_2', x_3'\}$ drugi sustav koji se giba konstantnom brzinom u odnosu na sustav $\{O; t, x_1, x_2, x_3\}$. Pretpostavljamo da je brzina svjetlosti c u oba sustava ista. Ukoliko želimo da je sfera valne fronte u oba sustava dana istom jednadžbom, dobivamo tzv. *Lorentzove transformacije* za koordinate sustava. Pokazuje se da su Maxwellove jednadžbe za elektromagnetsko polje invarijantne na Lorentzove transformacije. One nisu bile invarijantne na tzv. *Galilejeve transformacije*, koje su transformacije Newtonove klasične mehanike. To je bila i motivacija za traženje novog konteksta za opis fizikalnih pojava. Kako su Lorentzove transformacije upravo transformacije koje čuvaju Lorentzovov skalarni produkt, geometrija Minkowskog je prirodni ambijent za teoriju relativnosti. Uz Lorentzove transformacije usko su vezani i pojmovi iz teorije relativnosti kao kontrakcija dužina, dilatacija vremena, kauzalnost, istodobnost i neistodobnost događaja.

Literatura

[1] W. KÜHNEL, *Differential Geometry, Curves – Surfaces – Manifolds*, American Mathematical Society, 2002.

[2] B. O'NEILL, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1983.