Ристо Малчески
Алекса Малчески
Самоил Малчески

БАЛКАНСКИ МАТЕМАТИЧКИ ОЛИМПИЈАДИ 1984-2020

Скопје, 2021

Рецензенти
Проф. д-р Павел Димовски
Проф. д-р Даниел Велинов

С О Д Р Ж И Н А

ПРЕДГОВОР

> Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука, ако истото не е поткрепено со математички доказ.
>
> Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките, каде нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.
>
> Леонардо да Винчи

Успехот на учениците на натпреварите по математика не е можен без решавање на соодветни задачи, меѓу кои се и задачите кои претходно биле задавани на престижните натпревари, како што е Балканската математичка олимпијада. Затоа, имајќи ја предвид долгогодишната наша работа со надарените ученици за математика, пристапивме кон издавање на книгава која е пред вас и во која се содржани задачите и нивните решенија кои се задавани на Балканската математичка олимпијада од нејзиното основање во 1984 година, па се до 2020 година.

На балканските математички олимпијади, покрај балканските држави Босна и Херцеговина, Србија, Романија, Молдавија, Црна Гора, Албанија, Македонија, Бугарија, Грција, Турција и Кипар, последниве години по правило учествуваат и десетина земји кои имаат статус на гости на натпреварот, но учениците од овие земји имаат рамноправен третман како и учениците од балканските држави. Сето ова доволно говори за тежината на натпреварот, особено ако се земе предвид дека меѓу учесниците на балканијадите има неколку држави кои според работата со надарените ученици се наоѓаат во самиот светски врз.

Балканската математичка олимпијада, по правило секоја година се одржува во различна држава. Изборот на задачите кои се задават на Балканските математички олимпијади е според следните правила:

- земјите учеснички, освен домаќинот, испраќаат задачи до домаќинот на олимпијадата,
- домаќинот формира комисија, која од предлозите издвојува дваесетина задачи и истите ги групира во четири основни области, и тоа: алгебра, геометрија, комбинаторика и теорија на броеви,

- од избраните задачи Жирито на натпреварот, кое го сочинуваат водачите на екипите на земјите учеснички, заедно со претседателот на Жирито кој го определува државата домаќин, врши избор на четири задачи, кои по правило се од четтирите наведени области,
- за избраните задачи Жирито составува маркинг шема според која се врши прегледувањето, односно бодирањето на решенијата на учениците, при што секоја задача се вреднува по 10 бодови.

Како што рековме во книгава се дадени решенијата на сите задачи задавани на балканијадите во разгледуваниот период. Притоа, за голем број задачи се дадени по два или повеќе начини на решавање на истите.

Стандардно, книгава содржи список на користената литература. За крај, и покрај вложениот напор, свесни сме дека се можни подобрувања на оваа книга, како и дека се присутни грешки, кои за жал не го одминуваат издавањето на било кој ракопис. Затоа однапред сме благодарни на секоја добронамерна критика и сугестија, која ќе допринесе да се подобри книгава.

Март 2021 Авторите
Скопје

БМО 1984

1. Нека $a_i, i=1,2,...,n, (n\geq 2)$ се позитивни броеви такви што $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$. Докажи дека

$$\frac{a_1}{1+a_2+a_3+...+a_n}+\frac{a_2}{1+a_1+a_3+...+a_n}+...+\frac{a_n}{1+a_1+a_2+...+a_{n-1}}\geq\frac{n}{2n-1}.$$

Решение. За секој $i=1,2,...,n$ важи

$$\frac{a_i}{1+a_2+...+a_{i-1}+a_{i+1}+...+a_n}=\frac{a_i}{2-a_i}=\frac{2}{2-a_i}-1,$$

па затоа даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{2-a_2}+...+\frac{1}{2-a_n}\geq\frac{n^2}{2n-1}.$$

Ставаме $x_i = 2-a_i, i=1,2,...,n$ и добиваме

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+...+\frac{1}{x_n}\geq\frac{n^2}{2n-1},$$

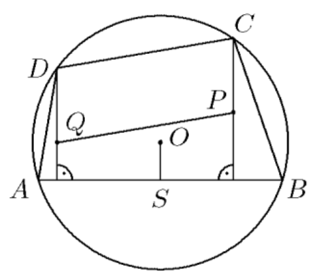
каде $x_i > 0$ и $\sum_{i=1}^{n} x_i = 2n-\sum_{i=1}^{n} a_i = 2n-1$. Според тоа, неравенството е еквивалентно со неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \geq \frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}}.$$

2. Нека $A_1A_2A_3A_4$ тетивен е четириаголник. Со H_1, H_2, H_3, H_4 соодветно да ги означиме ортоцентрите на триаголниците $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4, A_1A_2A_3$. Докажи дека четириаголниците $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ се складни.

Решение. *Прв начин*. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

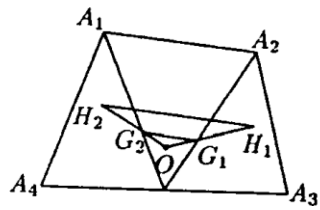
Лема. Ако $ABCD$ е тетивен четириаголник и P и Q се ортоцентрите соодветно на $\triangle ABC$ и $\triangle ABD$, тогаш четириаголникот $PCDQ$ е паралелограм.



Доказ. Од $CP \perp AB$ и $DQ \perp AB$ следува $CP \parallel DQ$. Ако O е центарот на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$ и S е средината на AB, тогаш важи $2\overline{OS}=\overline{CP}$ (ова својство се докажува ако се искористи дека пресечната точка на CS и OP е тежиштето на триаголникот ABC). Аналогно, $2\overline{OS}=\overline{DQ}$, па затоа $\overline{DQ}=\overline{CP}$. Конечно, од $CP \parallel DQ$ и $\overline{DQ}=\overline{CP}$ следува, дека $PCDQ$ е паралелограм. ■

Од лемата следува, дека отсечките A_1A_2 и H_2H_1; A_2A_3 и H_3H_2; A_3A_4 и H_4H_3; A_4A_1 и H_1H_4 се паралелни и еднакви, па затоа четириаголниците $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ се складни.

Втор начин. Нека O е центарот на опишаната кружница, а G_1, G_2, G_2, G_4 се тежиштата на триаголниците $A_2A_3A_4, A_1A_3A_4, A_1A_2A_4, A_1A_2A_3$, соодветно. Точките O, G_i, H_i, за $i = 1,2,3,4$ припаѓаат на соодветните Ојлерови прави и притоа важи $\overrightarrow{OH_i} = 3\overrightarrow{OG_i}$. Тогаш



$$\overrightarrow{OH_i} = 3 \cdot \tfrac{1}{3} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{4} \overrightarrow{OA_j} = \vec{v} - \overrightarrow{OA_i},$$

каде $\vec{v} = \sum_{j=1}^{4} \overrightarrow{OA_j}$. Ако $\overrightarrow{OAB_i} = -\overrightarrow{OA_i}$, за $i = 1,2,3,4$, тогаш $\overrightarrow{OH_i} = \vec{v} + \overrightarrow{OB_i}$, па значи четириаголникот $H_1H_2H_3H_4$ се добива од четириаголникот $B_1B_2B_3B_4$ со транслација за вектор $\vec{v}$. Но, $B_1B_2B_3B_4$ и $A_1A_2A_3A_4$ се симетрични при централна симетрија со центар O, т.е. $H_1H_2H_3H_4$ се добива од $A_1A_2A_3A_4$ со помош на централна симетрија и транслација, па затоа овие четириаголници се складни.

Трет начин. Да разгледаме координатен систем со координатен почеток во центарот O на опишаната кружница околу четириаголникот $A_1A_2A_3A_4$. Нека a_i и h_i се комплексните броеви (афиксите) соодветни на A_i и H_i, за $i = 1,2,3,4$. Тогаш $h_i = \sum_{j=1}^{4} a_j - a_i$, па затоа $\overline{H_iH_k} = |h_i - h_k| = |a_i - a_k| = \overline{A_iA_k}$.

Според тоа, четириаголниците $H_1H_2H_3H_4$ и $A_1A_2A_3A_4$ имаат еднакви страни и еднакви дијагонали. Затоа, $\triangle A_4A_1A_2 \cong \triangle H_4H_1H_2$, т.е. $\measuredangle A_1 = \measuredangle H_1$, што значи дека разгледуваните четириаголници се складни.

Четврт начин. Четириаголниците $G_1G_2G_2G_4$ и $A_1A_2A_3A_4$ се слични со коефициент на сличност $\frac{1}{3}$, бидејќи на пример $G_1G_2 \parallel A_2A_1$ и $\frac{\overline{G_1G_2}}{\overline{A_2A_1}} = \frac{1}{3}$. Четириаголниците $G_1G_2G_2G_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ се исто така слични со коефициент на сличност $\frac{1}{3}$, бидејќи на пример $G_1G_2 \parallel H_2H_1$ и $\frac{\overline{G_1G_2}}{\overline{H_2H_1}} = \frac{1}{3}$ (Ојлерова права). Значи, четириаголниците $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$ се слични со коефициент на сличност 1, т.е. тие се складни.

3. Докажи, дека за секој природен број m постои природен број $n > m$ таков што декадниот запис на 5^n се добива од декадниот запис на 5^m со додавање на неколку цифри од лево.

Решение. *Прв начин*. Прво ќе докажеме, дека ако бројот 5^m има k цифри, тогаш $k \le m$. Навистина, ако го претпоставиме спротивното, тогаш $k-1 \ge m$, па како секој број со k цифри е поголем или еднаков на 10^{k-1} добиваме

$$10^{k-1} \ge 10^m > 5^m \ge 10^{k-1},$$

што е противречност.

Ако најдеме n таков што $5^n - 5^m$ е делив со 10^k, тогаш последните k цифри на 5^n се совпаѓаат со бројот 5^m, т.е. 5^n се добива од 5^m со додавање на неколку цифри од лево. Бидејќи броевите 2 и 5 се заемно прости, заклучуваме дека бројот $5^{\varphi(2^k)} - 1$ е делив со 2^k, каде $\varphi(x)$ е Ојлеровата функција. Тогаш бројот

$$5^{m+\varphi(2^k)} - 5^m = 5^m(5^{\varphi(2^k)} - 1)$$

е делив со 5^k и со 2^k, т.е. е делив со 10^k. Значи, $n = m + \varphi(2^k)$ е бројот со саканото својство.

Втор начин. Ќе бараме n во облик $n = m + k$, каде $k > 0$. Нека r_m е бројот на цифрите на декадниот запис на 5^m. Бидејќи треба $5^n - 5^m = 10^{r_m} a$, доволно е 10^{r_m} да е делител на $5^n - 5^m$. Но, $5^n - 5^m = 5^m(5^k - 1)$ и како $r_m < m$ (Зошто?), добиваме дека 5^{r_m} е делител на 5^m. Од друга страна $10^{r_m} = 5^{r_m} 2^{r_m}$ и затоа доволно е 2^{r_m} да е делител на $5^k - 1$. Ќе користиме индукција. Нека $r_m = 1$ и да ставиме $k = 1$. Очигледно $2^{r_m} = 2$ е делител на $5^k - 1 = 4$. Нека $r_m \ge 1$ и нека k е таков што 2^{r_m} е делител на $5^k - 1$. На $r_m + 1$ во соодветствве му ставаме $2k$. Тогаш, бидејќи $2^{r_m} \mid 5^k - 1$ и $2 \mid 5^k + 1$, добиваме $2^{r_m + 1} \mid 5^{2k} - 1$, што и требаше да се докаже.

4. Во множеството реални броеви реши го системот равенки

$$\begin{cases} ax + by = (x-y)^2 \\ by + cz = (y-z)^2 \\ cz + ax = (z-x)^2 \end{cases}$$

каде a, b, c се позитивни броеви.

Решение. Ги собираме трите равенки и добиваме

$$ax + by + cz = x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx.$$

Во последното равенство заменуваме

$$ax+by=x^2+y^2-2xy$$

и добиваме

$$cz=z^2+xy-yz-zx=(z-x)(z-y)\ .$$

Аналогно добиваме $by=(y-x)(y-z)$ и $ax=(x-z)(x-y)$. Ако $x\geq y\geq z$, тогаш

$$ax=(x-z)(x-y)\geq 0$$
$$by=(y-x)(y-z)\leq 0$$
$$cz=(z-x)(z-y)\geq 0.$$

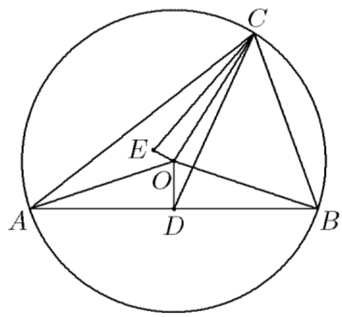
Бидејќи a,b,c се позитивни броеви, добиваме $x\geq 0, y\leq 0$ и $z\geq 0$. Сега од $y\geq z$ следува дека $y=z=0$ и од $ax=x^2$ добиваме $x=0$ или $x=a$. Во овој случај ги добиваме решенијата $(0,0,0)$ и $(a,0,0)$. Аналогно добиваме уште две решенија $(0,b,0)$ и $(0,0,c)$.

БМО 1985

1. Нека O е центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, а D е средината на AB. Нека E е тежиштето на $\triangle ACD$. Докажи, дека правата CD е нормална на OE ако и само ако $\overline{AB}=\overline{AC}$.

Решение. *Прв начин*. Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на триаголник. Ќе докажеме дека скаларниот производ на векторите $\overrightarrow{OE}$ и $\overrightarrow{CD}$ е нула ако и само ако $\overline{AB}=\overline{AC}$. Бидејќи E е тежиштето на $\triangle ACD$, добиваме

$$\overrightarrow{OE}=\frac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{3} \text{ и } \overrightarrow{CD}=\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}.$$



Освен тоа,

$$\overline{OD}=|R\cos\gamma|,\ \measuredangle OAC=\measuredangle OCA=|90^\circ-\beta|,$$

$$\measuredangle OAB=|90^\circ-\gamma| \text{ и } \measuredangle OCB=|90^\circ-\alpha|.$$

Пресметуваме:

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CA}=Rb\sin\beta$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{CB}=Rb\sin(\beta-\gamma)$,

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CA}=-Rb\sin\beta$, $\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{CB}=-Ra\sin\alpha$,

$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CA}=Rb\cos\gamma\sin\alpha$,

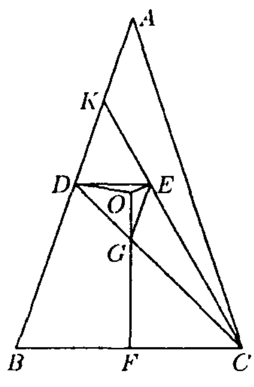
$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CB}=Ra\cos\gamma\sin\beta$.

Ако искористиме дека $b\sin\alpha=a\sin\beta$, добиваме

$$\begin{aligned}6\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD}&=(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\cdot(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB})\\&=Ra(\sin(\beta-\gamma)+2\cos\gamma\sin\beta-\sin\alpha)\\&=Ra(\sin(\beta-\gamma)+2\cos\gamma\sin\beta-\sin(\gamma+\beta))\\&=2Ra(\sin\beta\cos\gamma-\cos\beta\sin\gamma)=2Ra\sin(\beta-\gamma).\end{aligned}$$

Според тоа, скаларниот производ $\overrightarrow{OE}\cdot\overrightarrow{CD}$ е еднаков на нула ако и само ако $\sin(\beta-\gamma)=0$, т.е. ако и само ако $\beta=\gamma$, што значи ако и само ако $\overline{AB}=\overline{AC}$.

Втор начин. Од условот на задачата следува $O\neq E$. Во спротивно $DE\perp AB$ и DE е тежишна линија во $\triangle ACD$ повлечена од темето D, т.е. $DE\perp AC$, што не е можно. Нека F и K се средините на BC и AD, соодветно. Бидејќи $\frac{\overline{GC}}{\overline{GD}}=2$ и $\frac{\overline{EC}}{\overline{EK}}=2$, од теоремата на Талес следува дека $EG\,||\,AB$.



Нека $OE\perp CD$. Но, $OD\perp AB$ и како $EG\,||\,AB$, добиваме $OD\perp EG$. Значи, O е ортоцентар во $\triangle DGE$ и $OG\perp DE$. Од друга страна $\frac{\overline{KD}}{\overline{DB}}=\frac{1}{2}$, $\frac{\overline{KE}}{\overline{EC}}=\frac{1}{2}$ и од теоремата на Талес заклучуваме дека $DE \parallel BC$. Според тоа, $OG \perp BC$, што значи дека OG минува низ средината F на BC. Значи, тежишната линија AF во $\triangle ABC$ е и висина, па затоа $\overline{AB} = \overline{AC}$.

Нека $\overline{AB} = \overline{AC}$. Тогаш $OG \perp BC$ и како $DE \parallel BC$, добиваме $OG \perp DE$. Аналогно на претходните разгледувања $OD \perp EG$, па значи O е ортоцентар на $\triangle DGE$, т.е. $OE \perp CD$.

2. Нека a,b,c,d се реални броеви од интервалот $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ такви што

$$\sin a + \sin b + \sin c + \sin d = 1,$$
$$\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2d \geq \tfrac{10}{3}.$$

Докажи дека $a,b,c,d \in [0, \frac{\pi}{6}]$.

Решение. Ако искористиме дека $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ добиваме

$$\tfrac{10}{3} \leq \cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + \cos 2d = 4 - 2(\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c + \sin^2 d),$$

т.е.

$$\tfrac{1}{3} \geq \sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c + \sin^2 d.$$

За да докажеме дека $a,b,c,d \in [0, \frac{\pi}{6}]$, доволно е да докажеме дека $\sin a, \sin b, \sin c, \sin d \in [0, \frac{1}{2}]$.

Ако ставиме $x = \sin a, y = \sin b, z = \sin c, t = \sin d$, треба да докажеме дека ако $x + y + z + t = 1$ и $x^2 + y^2 + z^2 + t^2 \leq \frac{1}{3}$, тогаш $x, y, z, t \in [0, \frac{1}{2}]$. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц за броевите x, y, z и $1,1,1$ следува

$$(x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

па ако земеме предвид дека

$$1 - t = x + y + z, \quad \text{и} \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq \tfrac{1}{3} - t^2,$$

добиваме дека

$$(1-t)^2 = (x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2) \leq 3(\tfrac{1}{3} - t^2),$$

т.е. $2t^2 - t \leq 0$. Оттука добиваме $t \in [0, \frac{1}{2}]$. Аналогно се докажува дека $x, y, z \in [0, \frac{1}{2}]$.

3. Нека E е бројната оска (т.е. ориентирана права со единечна отсечка на неа) и нека S е множеството точки од E кои имаат координати $19x + 85y$, каде x и y се природни броеви. Точките од S се обоени во црвено, а останатите точки од E кои имаат целобројни координати се обоени во зелено. Дали постои

точка A од E (не задолжително со целобројна координата) таква што секои две точки B и C од E со целобројни координати кои се симетрични во однос на A да се различно обоени?

Решение. Ќе докажеме дека точката A со координата $\frac{19\cdot 85+19+85}{2}=\frac{1719}{2}$ го задоволува условот на задачата. За таа цел треба да докажеме дека секои две точки кои се симетрични во однос на A се разнобојни. Нека точките p и q се симетрични во однос на A. Тоа значи, дека $p+q=2A=1719$.

1) Нека точките p и q се црвени. Тогаш постојат природни броеви x_1, y_1, x_2 и y_2 такви што $p=19x_1+85y_1,\ q=19x_2+85y_2$. Оттука
$$19\cdot 85+19+85=19(x_1+x_2)+85(y_1+y_2),$$
односно
$$19\cdot 85=19(x_1+x_2-1)+85(y_1+y_2-1).$$
Броевите 19 и 85 се заемно прости, па од последното равенство следува дека x_1+x_2-1 е делив со 85, а y_1+y_2-1 е делив со 19.
Од $x_1+x_2-1\geq 1$ и $y_1+y_2-1\geq 1$ заклучуваме дека $x_1+x_2-1\geq 85$ и $y_1+y_2-1\geq 19$, што значи дека
$$19\cdot 85=19(x_1+x_2-1)+85(y_1+y_2-1)\geq 2\cdot 19\cdot 85,$$
што е противречност.

2) Нека претпоставиме дека p и q се зелени. Бидејќи 19 и 85 се заемно прости броеви, постојат x_1, y_1, x_2 и y_2 за кои што важи $p=19x_1+85y_1$, $q=19x_2+85y_2$. Притоа можеме да сметаме дека сме избрале решенија за кои x_1 и x_2 се можните најмали природни броеви. Бидејќи p и q се зелени, важи $y_1\leq 0,\ y_2\leq 0$. Ако $x_1>85$ од
$$19(x_1-85)+85(y_1+19)=19x_1+85y_1=p$$
добиваме противречност со минималноста на x_1. Според тоа, $x_1\leq 85$ и аналогно $x_2\leq 85$. Како во случајот 1) добиваме дека x_1+x_2-1 е делив со 85 и $x_1+x_2\geq 86$. Но, $x_1+x_2<2\cdot 85$, па затоа $x_1+x_2=86$. Тогаш
$$19\cdot 85+19+85=19(x_1+x_2)+85(y_1+y_2)=19\cdot 86+85(y_1+y_2),$$
па затоа $y_1+y_2=1$, што противречни на $y_1\leq 0,\ y_2\leq 0$.

Конечно, останува единствена можност p и q да се разнобојни точки.

4. На меѓународна средба учествувале 1985 лица. Меѓу секои три лица има двајца кои зборуваат еден ист јазик. Докажи, дека ако секој учесник зборува на не повеќе од 5 јазици, тогаш има барем 200 лица кои знаат еден ист јазик.

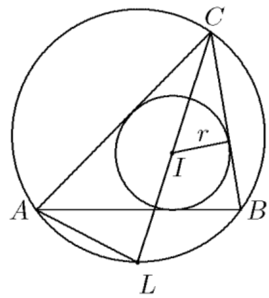
Решение. Ќе докажеме дека има учесник кој се разбира со најмалку 992 од преостанатите учесници. Ако има учесник, кој се разбира со сите останати учесници, тогаш тој се разбира со $1984 > 992$ учесници. Нека претпоставиме дека два учесника A и B не се разбираат. Од условот на задачата следува дека секој од останатите 1983 учесници се разбира или со A или со B. Од принципот на Дирихле следува дека еден од нив (на пример A) се разбира со 992 учесници.

Учесникот A говори најмногу 5 јазици и $992 = 5 \cdot 198 + 2$, па од принципот на Дирихле заклучуваме дека барем 199 од учесниците со кои A се разбира на еден ист јазик. Овие 199 учесници заедно со A ја формираат бараната група од најмалку 200 лица кои говорат еден ист јазик.

БМО 1986

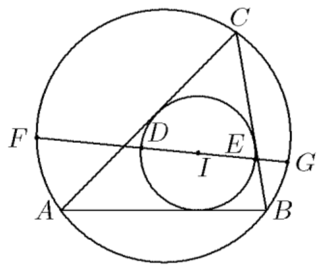
1. Права, која минува низа центарот I на впишаната кружница во $\triangle ABC$, ја сече опишаната кружницата во точките F и G и впишаната кружница во точките D и E, при што D е меѓу I и F. Докажи, дека $\overline{DF}\cdot\overline{EG}\geq r^2$, каде r е радиусот на впишаната кружница во $\triangle ABC$. Кога важи знак за равенство?

Решение. *Прв начин.* Ќе докажеме дека степенот на центарот I на впишаната кружница во однос на опишаната кружница е еднаков на $2Rr$. Ако L е средината на лакот AB (види цртеж), тогаш од



$$\measuredangle LIA=\measuredangle LAI=\tfrac{\alpha+\gamma}{2}$$

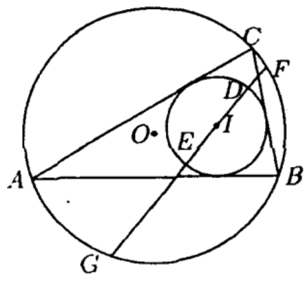
следува $\overline{LI}=\overline{LA}$. Од синусната теорема за $\triangle ACL$ следува дека $\overline{LI}=\overline{LA}=2R\sin\frac{\gamma}{2}$ и ако искористиме дека $\overline{CI}=\frac{r}{\sin\frac{\gamma}{2}}$, добиваме $\overline{CI}\cdot\overline{LI}=2Rr$. Оттука следува дека $\overline{FI}\cdot\overline{GI}=2Rr$. Пресметуваме



$$\begin{aligned}\overline{FD}\cdot\overline{EG}&=(\overline{FI}-r)(\overline{GI}-r)\\&=\overline{FI}\cdot\overline{GI}-r(\overline{FI}+\overline{GI})+r^2\\&=2Rr-r\overline{FG}+r^2.\end{aligned}$$

Неравенството $\overline{FD}\cdot\overline{EG}\geq r^2$ е еквивалентно со неравенството $2R\geq\overline{FG}$, кое очигледно важи. Знак за равенство важи ако и само ако FG е дијаметар.

Втор начин. Нека O е центарот на опишаната кружница. Според Ојлеровата формула добиваме



$$\begin{aligned}\overline{DF}\cdot\overline{EG}&=(\overline{IF}-r)\cdot(\overline{EG}-r)\\&=\overline{IF}\cdot\overline{EG}-r(\overline{IF}+\overline{EG})+r^2\\&=R^2-\overline{OI}^2-r\cdot\overline{FG}+r^2 \qquad (*)\\&=R^2-(R^2-2Rr)-r\cdot\overline{FG}+r^2\\&=r(2R-\overline{FG})+r^2\geq r^2,\end{aligned}$$

бидејќи FG е тетива на опишаната кружница и $\overline{FG}\leq 2R$. Јасно, знак за равенство важи ако FG е дијаметар, т.е. ако правата од условот на задачата минува низ O и I. Имено, ако $O\equiv I$, тогаш триаголникот е рамностран и според (*) имаме $\overline{DF}\cdot\overline{EG}=r^2$.

2. Нека $ABCD$ е тетраедар и E,F,G,H,K,L се точки соодветно на рабовите AB,BC,CA,DA,DB,DC. Докажи, дека ако
$$\overline{AE}\cdot\overline{BE}=\overline{BF}\cdot\overline{CF}=\overline{CG}\cdot\overline{AG}=\overline{DH}\cdot\overline{AH}=\overline{DK}\cdot\overline{BK}=\overline{DL}\cdot\overline{CL},$$
тогаш точките E,F,G,H,K,L лежат на една свера.

Решение. Нека $p=\overline{AE}\cdot\overline{BE}=\overline{BF}\cdot\overline{CF}=\overline{CG}\cdot\overline{AG}=\overline{DH}\cdot\overline{AH}=\overline{DK}\cdot\overline{BK}=\overline{DL}\cdot\overline{CL}$ и со O да го означиме центарот на опишаната свера околу тетраедарот. Пресекот на рамнината определена со точките O,A и B со опишаната свера е кружница. Во оваа кружница степенот на точката E е еднаков на
$$R^2-\overline{OE}^2=\overline{AE}\cdot\overline{BE}=p,$$
па затоа $\overline{OE}=\sqrt{R^2-p}$. Аналогно
$$\overline{OF}=\overline{OG}=\overline{OH}=\overline{OK}=\overline{OL}=\sqrt{R^2-p},$$
т.е. шесте точки лежат на сверата со центар во точката O и радиус $\sqrt{R^2-p}$.

3. Низата $a_1,a_2,a_3,...,a_n,...$ е определена со равенствата
$$a_1=a,\ a_2=b \text{ и } a_{n+1}=\tfrac{a_n^2+c}{a_{n-1}},\text{ за } n\geq 2,$$
каде a,b,c се реални броеви, $ab\neq 0$ и $c>0$. Докажи дека сите членови на низата се цели броеви ако и само ако a,b и $\frac{a^2+b^2+c}{ab}$ се цели броеви.

Решение. Од условот на задачата следува
$$a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2=c=a_{n+2}a_n-a_{n+1}^2,\ n\geq 2$$
т.е.
$$\tfrac{a_n+a_{n+2}}{a_{n+1}}=\tfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{a_n}=\text{const}=t,$$
па затоа $a_{n+1}=ta_n-a_{n-1}$, за $n\geq 2$. Од друга страна
$$t=\tfrac{a_1+a_3}{a_2}=\tfrac{a_1+\frac{a_2^2+c}{a_1}}{a_2}=\tfrac{a^2+b^2+c}{ab}.$$
Ако a,b и t се цели броеви, тогаш по индукција ќе следува дека $a_{n+1}=ta_n-a_{n-1}$ исто така е цел број.

Обратно, нека претпоставиме дека a_n е цел број за секој $n=1,2,...$. Тогаш $a_1=a$ и $a_2=b$ се цели броеви и $t=\frac{a_1+a_3}{a_2}$ е рационален број. Нека претпоставиме дека t не е цел број. Тогаш $t=\frac{p}{q}$, каде p и $q>1$ се заемно прости броеви. Од $pa_2=q(a_1+a_3)$ следува дека $q\,|\,a_2$. Понатаму, од
$$pa_n=q(a_{n-1}+a_{n+1})$$

по индукција следува дека $q \mid a_n$ за секој $n \geq 2$. Одново од

$$pa_n = q(a_{n-1} + a_{n+1})$$

следува дека за $n \geq l+1$ важи дека $q^l \mid a_n$. Сега, од $c = a_{n+1}a_{n-1} - a_n^2$ следува дека $q^{2l} \mid c$ за секој природен број l, што не е можно. Според тоа $q = 1$ и t е цел број.

4. Триаголникот ABC е таков што во рамнината постои точка P таква, што триаголниците PAB, PBC и PCA имаат еднакви периметри и еднакви плоштини. Докажи, дека

1) Ако P е внатрешна точка за $\triangle ABC$, тогаш тој е рамностран.

2) Ако P не е внатрешна точка за $\triangle ABC$, тогаш тој е правоаголен.

Решение. Плоштината на $\triangle ABC$ да ја означиме со S.

1) Бидејќи P е внатрешна точка, од условот следува дека $P_{PAB} = \frac{S}{3}$. Според тоа, должината на висината повлечена од P во $\triangle PAB$ е еднаква на $\frac{1}{3}$ од должината на висината повлечена од C во $\triangle ABC$. Тоа значи дека P лежи на права која минува низ тежиштето G на $\triangle ABC$, која е паралелна на AB. Аналогно P припаѓа на права низ G која е паралелна со BC и затоа P се совпаѓа со G. Сега, од условот следува

$$a + \tfrac{2}{3}(m_b + m_c) = b + \tfrac{2}{3}(m_a + m_c) = c + \tfrac{2}{3}(m_b + m_a)\ .$$

Без ограничување на општоста можеме да земеме дека $a \geq b \geq c$. Бидејќи

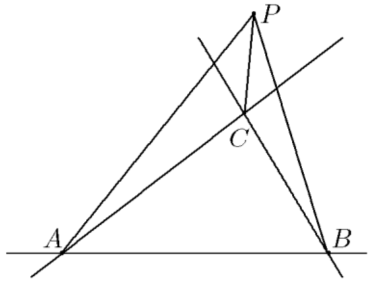
$$4m_a^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3a^2,$$
$$4m_b^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3b^2,$$
$$4m_c^2 = 2(a^2 + b^2 + c^2) - 3c^2,$$

добиваме дека $m_a \leq m_b \leq m_c$. Оттука следува

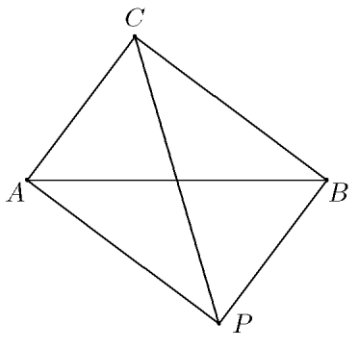
$$a + \tfrac{2}{3}(m_b + m_c) \geq b + \tfrac{2}{3}(m_a + m_c) \geq c + \tfrac{2}{3}(m_b + m_a)\,,$$

при што равенства се можни само ако $a = b = c$, т.е. $\triangle ABC$ е рамностран.

2) Нека претпоставиме дека точката P лежи во некој од трите надворешни агли при темињата A, B и C (цртеж десно). Тогаш $\triangle PBC$ се содржи во $\triangle PAB$, што значи дека нивните плоштини не може да се еднакви.



Без ограничување на општоста можеме точката P да ја избереме како на цртежот долу лево. Ако



$$P_{PAB} = P_{PAC} = P_{PBC} = t\ ,$$

тогаш

$$S = P_{PAC} + P_{PBC} - P_{PAB} = t\ ,$$

па затоа $S = P_{PAC} = P_{PBC}$. Оттука добиваме дека висината во $\triangle ACP$ повлечена од темето P е еднаква на висината во $\triangle ABC$ повлечена од темето B, т.е. BP е паралелна на AC. Аналогно $PA \| BC$, т.е. $PBCA$ е паралелограм. Сега од еднаквоста на периметрите на $\triangle PAB$ и $\triangle PCB$ добиваме

$$\overline{PA} + \overline{AB} + \overline{BP} = \overline{PC} + \overline{CB} + \overline{BP}\ ,$$

од каде следува $\overline{PC} = \overline{AB}$. Според тоа, $PBCA$ е правоаголник, па затоа $\measuredangle ACB = 90^\circ$.

БМО 1987

1. Нека $a \in \mathbb{R}$ и функцијата $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е таква што

   1) $f(x+y) = f(x)f(a-y) + f(y)f(a-x)$, за секои $x, y \in \mathbb{R}$

   2) $f(0) = \frac{1}{2}$.

   Докажи, дека $f = \text{const}$.

   Решение. *Прв начин*. Ако во 1) ставиме $x = y = 0$ добиваме $f(a) = \frac{1}{2}$. Тогаш за $x = 0$ и произволно y добиваме $f(y) = \frac{1}{2} f(a-y) + \frac{1}{2} f(y)$, од каде следува дека $f(y) = f(a-y)$. Сега равенството од условот може да се запише во видот $f(x+y) = 2f(x)f(y)$, за секои $x, y \in \mathbb{R}$. Ако го искористиме последното равенство последователно добиваме

   $$f(x+y) = 2f(x)f(y) = 2f(a-x)f(y) = f(a-x+y).$$

   За $y = -x$ имаме $\frac{1}{2} = f(0) = f(a-2x) = f(2x)$. Според тоа, за секој $z \in \mathbb{R}$ важи $f(z) = f(2\frac{z}{2}) = \frac{1}{2}$.

   Втор начин. Ќе го докажеме следново поопшто тврдење:

   Нека $a \in \mathbb{R}$ и функцијата $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ е таква што

   а) $f(0) = \frac{1}{n}$,

   б) $f(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{k=1}^{n} f(\sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} x_i) f(a-x_k)$, за секои $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}$.

   Тогаш f е константна функција.

   Доказ. Ако во б) ставиме $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$, добиваме $f(a) = \frac{1}{n}$, а ако ставиме $x_1 = x, x_2 = x_3 = ... = x_n = 0$ добиваме $f(x) = \frac{1}{n} f(a-x) + \frac{n-1}{n} f(x)$, од каде следува дека $f(x) = f(a-x)$, за секој $x \in \mathbb{R}$. Од последното равенство и од условот б) следува

   $$f(\sum_{i=1}^{n} x_i) = \sum_{k=1}^{n} f(\sum_{i=1,\, i\neq k}^{n} x_i) f(x_k).$$

   Нека $n = 2$, т.е. $f(x_1 + x_2) = 2f(x_1)f(x_2)$, за секои $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Овој случај се совпаѓа со почетната задача. Ако во последното равенство x_1 го замениме со $a - x_1$ добиваме

   $$f(a + x_2 - x_1) = 2f(a-x_1)f(x_2) = 2f(x_1)f(x_2) = f(x_1 + x_2).$$

   Ако наместо x_1 ставиме $-x_2$, од последното равенство следува

   $$f(a + 2x_2) = f(0) = \frac{1}{2}, \text{ за секој } x_2 \in \mathbb{R}.$$

Сега, ставаме $x_2 = \frac{x-a}{2}$ и добиваме $f(x) = \frac{1}{2}$, за секој $x \in \mathbb{R}$.

Понатаму, ќе користме математичка индукција. Ако во б) ставиме $x_n = 0$ и земеме предвид дека $f(x) = f(a-x)$, добиваме

$$f(\sum_{i=1}^{n-1} x_i) = \sum_{k=1}^{n-1} f(\sum_{i=1,\, i\neq k}^{n-1} x_i) f(x_k) + f(0) f(\sum_{i=1}^{n-1} x_i),$$

па од условот а) следува

$$\frac{n-1}{n} f(\sum_{i=1}^{n-1} x_i) = \sum_{k=1}^{n-1} f(\sum_{i=1,\, i\neq k}^{n-1} x_i) f(x_k).$$

Ако последното равенство го помножиме со $(\frac{n}{n-1})^2$ и ставиме $g(x) = \frac{n}{n-1} f(x)$, тогаш

$$g(0) = \frac{1}{n-1} \text{ и } g(\sum_{i=1}^{n-1} x_i) = \sum_{k=1}^{n-1} g(\sum_{i=1,\, i\neq k}^{n-1} x_i) g(x_k), \text{ за секои } x_1, x_2, ..., x_{n-1} \in \mathbb{R}.$$

Според индуктивната претпоставка тврдењето е точно за $n-1$, што значи дека функцијата g е константна, т.е. $g(x) = \frac{1}{n-1}$, за секој $x \in \mathbb{R}$. Конечно, од $f(x) = \frac{n-1}{n} g(x)$ следува $f(x) = \frac{1}{n}$, за секој $x \in \mathbb{R}$, што и требаше да се докаже.

2. Нека $x \geq 1$ и $y \geq 1$ се такви реални броеви што броевите $a = \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}$ и $b = \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1}$ се цели и нивната разлика е поголема од 1. Докажи дека $b = a+2$ и $x = y = \frac{5}{4}$.

Решение. Бидејќи $\sqrt{t+1} - \sqrt{t-1} = \frac{2}{\sqrt{t+1}+\sqrt{t-1}} \leq \sqrt{2}$, за $t \geq 1$, добиваме

$$\begin{aligned} b-a &= \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} - (\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1}) \\ &= (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) + (\sqrt{y+1} - \sqrt{y-1}) \\ &\leq 2\sqrt{2} < 3. \end{aligned}$$

Според тоа, $1 < b-a < 3$, од каде следува $b-a = 2$. Така го добиваме системот

$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} = a \\ \sqrt{x+1} + \sqrt{y+1} = a+2. \end{cases}$$

Воведуваме замена $u = \sqrt{x-1} \geq 0$ и $v = \sqrt{y-1} \geq 0$ и системот го добива видот

$$\begin{cases} u+v = a \\ \sqrt{u^2+2} + \sqrt{v^2+2} = a+2 \end{cases},$$

каде $u, v \in [0, a]$. Во втората равенка заменуваме $u = v-a$ и истата ја запишуваме во обликот

$$\sqrt{a^2+v^2-2av+2}=a+2-\sqrt{v^2+2}\,.$$

По квадрирањето и средувањето ја добиваме равенката

$$(a+2)\sqrt{v^2+2}=2(a+1)+av\,.$$

Повторно квадрираме и ја добиваме равенката

$$f(v)=2(a+1)v^2-2a(a+1)v+2-a^2=0\,.$$

Нека претпоставиме дека $a\geq 2$. Тогаш $f(0)=f(a)=2-a^2<0$. Тоа значи дека корените на $f(v)=0$ се надвор од интервалот $[0,a]$, што е противречност. Значи, $a=1$ и од $4v^2-4x+1=0$ следува $v=\frac{1}{2}$, па затоа $u=\frac{1}{2}$. Конечно, од $\frac{1}{2}=\sqrt{x-1}$ и $\frac{1}{2}=\sqrt{y-1}$, следува $x=y=\frac{5}{4}$.

3. Ако за $\triangle ABC$ важи

$$(\sin\tfrac{\alpha}{2})^{23}(\cos\tfrac{\beta}{2})^{48}=(\sin\tfrac{\beta}{2})^{23}(\cos\tfrac{\alpha}{2})^{48}\,,$$

каде α и β се аглите при темињата A и B, соодветно, пресметај го односот $\overline{AC}:\overline{BC}$.

Решение. Ќе докажеме дека $\alpha=\beta$, т.е. $\overline{AC}:\overline{BC}=1$. Нека претпоставиме, дека $\alpha<\beta$. Тогаш $0<\frac{\alpha}{2}<\frac{\beta}{2}<\frac{\pi}{2}$. Бидејќи $\sin x$ и $\cos x$ се соодветно растечка и опаѓачка функција на интервалот $[0,\frac{\pi}{2}]$, добиваме дека важи

$$0<\sin\tfrac{\alpha}{2}<\sin\tfrac{\beta}{2} \text{ и } 0<\cos\tfrac{\beta}{2}<\cos\tfrac{\alpha}{2}\,.$$

Според тоа,

$$0<(\sin\tfrac{\alpha}{2})^{23}<(\sin\tfrac{\beta}{2})^{23} \text{ и } 0<(\cos\tfrac{\beta}{2})^{48}<(\cos\tfrac{\alpha}{2})^{48}\,.\,.$$

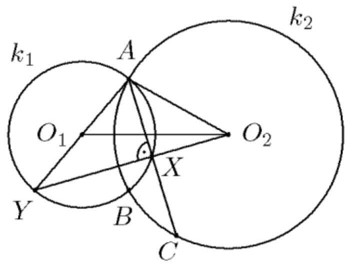
Ако ги помножиме последните неравенства, добиваме

$$(\sin\tfrac{\alpha}{2})^{23}(\cos\tfrac{\beta}{2})^{48}<(\sin\tfrac{\beta}{2})^{23}(\cos\tfrac{\alpha}{2})^{48}\,,$$

што противречи на условот на задачата. Случајот $\alpha>\beta$ се разгледува аналогно. Според тоа, $\alpha=\beta$, т.е. $\overline{AC}:\overline{BC}=1$.

4. Две кружници k_1 и k_2 соодветно со центри O_1 и O_2 и радиуси 1 и $\sqrt{2}$ се сечат во точките A и B, при што $\overline{O_2O_1}=2$. Нека AC е тетива во k_2 чија средина лежи на k_1. Определи ја должината на AC.

Решение. *Прв начин*. Средината на AC да ја означиме со X, а пресечната точка на O_2X и k_1 со Y. Тогаш $O_2X\perp AC$ и затоа AY е дијаметар на k_1, т.е. $O_1\in AY$. Значи, O_2O_1 е тежишна линија во $\triangle YO_2A$, па затоа



$16=4\overline{O_1O_2}^2=2\overline{O_2A}^2+2\overline{O_2Y}^2-\overline{YA}^2=2\overline{O_2Y}^2$,

т.е. $\overline{O_2Y}=2\sqrt{2}$. Останува да ја пресметаме висината во $\triangle YO_2A$. Бидејќи

$$\cos\measuredangle YAO_2=\frac{2^2+\sqrt{2}^2-(2\sqrt{2})^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{2}}{4},$$

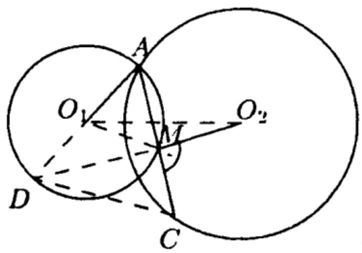
добиваме

$$\sin\measuredangle YAO_2=\sqrt{1-\cos^2\measuredangle YO_2A}=\frac{\sqrt{14}}{4}.$$

Сега, од равенството

$$2P_{YAO_2}=\overline{AY}\cdot\overline{AO_2}\sin\measuredangle YAO_2=\overline{AX}\cdot\overline{YO_2}$$

добиваме $\overline{AX}=\frac{\sqrt{14}}{4}$, па затоа $\overline{AC}=2\overline{AX}=\frac{\sqrt{14}}{2}$.



Втор начин. Нека M е средината на AC и D е дијаметрално спротивната точка на A во однос на O_1. Тогаш O_1M е средна линија во $\triangle DCA$ и $\overline{DC}=2\cdot\overline{O_1M}=2$. Од друга страна O_2O_1 е тежишна линија во $\triangle DO_2A$ и од формулата за тежишналинија имаме

$$\overline{O_1O_2}^2=\tfrac{1}{4}(2\overline{O_2A}^2+2\overline{O_2D}^2-\overline{DA}^2)=2\overline{O_2D}^2.$$

Значи, $\overline{O_2D}=2\sqrt{2}$. Понатаму ќе користиме дека $O_2M\perp AC$ и дека $\triangle DMA$ е правоаголен, т.е. точките D,M и O_2 се колинеарни. Нека $\overline{AM}=x$. Од $\triangle DMA$ имаме $\overline{DM}=\sqrt{4-x^2}$, а од $\triangle MO_2A$ следува $\overline{MO_2}=\sqrt{2-x^2}$. Значи,

$$2\sqrt{2}=\overline{O_2D}=\overline{DM}+\overline{MO_2}=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{2-x^2}.$$

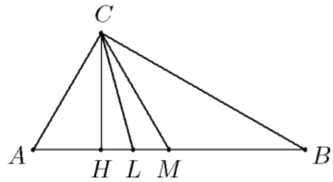
Равенката $2\sqrt{2}=\sqrt{4-x^2}+\sqrt{2-x^2}$ има единствен корен $x=\frac{\sqrt{14}}{2}$, па затоа $\overline{AC}=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

Трет начин. Ќе ги користиме истите ознаки како при вториот начин на решавање. Нека $\measuredangle O_1MA=\alpha$. Од рамностраниот $\triangle O_1MA$ имаме $\cos\alpha=\frac{x}{2}$, па значи $\sin\alpha=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$, бидејќи $\alpha\in(0,\frac{\pi}{2})$. Од друга страна, од косинусната теорема за $\triangle O_1O_2M$ имаме $\cos(\alpha+\frac{\pi}{2})=-\frac{1+x^2}{2\sqrt{2-x^2}}$, т.е. $\sin\alpha=\frac{1+x^2}{2\sqrt{2-x^2}}$. Така, ја добиваме равенката $\frac{1+x^2}{2\sqrt{2-x^2}}=\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}$, чие решение е $x=\frac{\sqrt{14}}{2}$, па затоа $\overline{AC}=\frac{\sqrt{14}}{2}$.

БМО 1988

1. Нека CH, CL и CM се соодветно висината, симетралата на аголот и тежишната линија повлечени од темето C во $\triangle ABC$ (точките H, L и M се на правата AB). Односите на плоштините на $\triangle HMC$ и $\triangle LMC$ спрема плоштината на $\triangle ABC$ се $\frac{1}{4}$ и $1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, соодветно. Определи ги аглите на $\triangle ABC$.

Решение. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека $\measuredangle BAC \geq \measuredangle ABC$. Тогаш точките A, H, L, M и B на AB се распоредени според овој редослед (цртеж десно). Од $4P_{HMC} = P_{ABC}$ следува $4\overline{HM} = \overline{AB}$, т.е. H е средина на AM и $\overline{AC} = \overline{CM}$. Од



$P_{LMC} = (1-\frac{\sqrt{3}}{2})P_{ABC}$ следува дека $\frac{\overline{LM}}{2\overline{AM}} = 1-\frac{\sqrt{3}}{2}$, па затоа $\frac{\overline{AM}-\overline{LM}}{\overline{AM}+\overline{LM}} = \frac{\sqrt{3}-1}{3-\sqrt{3}}$, т.е. $\frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AL}}{\overline{BL}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Го изразуваме $\overline{CH}^2$ на два начина, преку Питагоровата теорема за $\triangle AHC$ и $\triangle BHC$ и добиваме $\overline{AC}^2 - (\frac{\overline{AB}}{4})^2 = 3\overline{AC}^2 - (\frac{3\overline{AB}}{4})$, од каде добиваме $\overline{AB} = 2\overline{AC}$. Тогаш $\overline{AB} = 2\overline{CM}$, што значи дека $\measuredangle ACB = 90^\circ$. Оттука и од $\overline{BC} = \sqrt{3}\overline{AC}$ заклучуваме дека $\measuredangle BAC = 60^\circ$ и $\measuredangle ABC = 30^\circ$.

Кога $\measuredangle BAC \leq \measuredangle ABC$, аналогно се добива дека $\measuredangle ACB = 90^\circ$, $\measuredangle BAC = 30^\circ$ и $\measuredangle ABC = 60^\circ$.

2. Определи ги сите полиноми со две променливи $P(x, y)$ за кои равенството $P(a,b)P(c,d) = P(ac+bd, ad+bc)$ е исполнето за секои реални броеви a, b, c, d.

Решение. *Лема* 1. Ако $f(x, y)$ е полином од две променливи и $f(x, x) = 0$ за секој реален број x, тогаш $f(x, y) = (x-y)g(x, y)$, каде $g(x, y)$ е полином од две променливи.

Доказ. Да го запишеме $f(x, y)$ по степени на x, т.е.

$$f(x, y) = a_0(y)x^n + a_1(y)x^{n-1} + ... + a_{n-1}(y)x + a_n(y),$$

каде $a_i(y), i = 0,1,...,n$ се полиноми од y. Го бараме $g(x, y)$ во облик

$$g(x, y) = b_0(y)x^{n-1} + b_1(y)x^{n-2} + ... + b_{n-2}(y)x + b_{n-1}(y)$$

каде $b_i(y), i = 0,1,...,n-1$ се полиноми од y.

Равенството $f(x, y) = (x-y)g(x, y)$ е еквивалентно со

$$b_0(y) = a_0(y),$$
$$b_1(y) = yb_0(y) + a_1(y),$$

$$\begin{aligned}
&..................................,\\
&b_{n-1}(y) = yb_{n-2}(y) + a_{n-1}(y),\\
&-yb_{n-1}(y) = a_n(y).
\end{aligned}$$

Првите n равенства еднозначно ги определуваат $b_i(y), i = 0,1,...,n-1$ и останува да докажеме дека и последното равенство е точно. Ако првото равенство го помножиме со y^n, второто со y^{n-1} итн. $n-$тото со y и ги собереме добиените равенства добиваме

$$yb_{n-1}(y) = a_0(y)y^n + a_1(y)y^{n-1} + ... + a_{n-1}(y)y = f(y,y) - a_n(y) = -a_n(y),$$

со што доказот е завршен. ■

Аналогно се докажува дека ако $f(x,y)$ е полином од две променливи таков што $f(x,-x) = 0$ за секој реален број x, тогаш $f(x,y) = (x+y)g(x,y)$, каде $g(x,y)$ е полином од две променливи.

Лема 2. Ако $f(x)$ е полином од една променлива и $f(x)f(y) = f(xy)$ за секои реални броеви x и y, тогаш $f(x) = 0$ или $f(x) = x^m$ за некој ненегативен цел број m.

Доказ. Од условот следува $f(x)f(0) = f(0)$ за секој реален број x. Нека полиномот $f(x)$ не е идентично еднаков на 0. Ако $f(0) \neq 0$ добиваме $f(x) = 1$ за секој реален број x. Ако $f(0) = 0$ имаме $f(x) = x^m g(x)$, каде m е природен број и $g(x)$ е полином за кој $g(0) \neq 0$. Тогаш од условот следува дека $g(x)g(y) = g(xy)$ за секои реални броеви x и y и како погоре заклучувамне дека $g(x) = 1$. Според тоа, $f(x) = x^m, m \geq 0$, со што доказот е завршен. ■

Да го разгледаме полиномот $Q(x) = P(x,0)$. Од условот на задачата следува $P(x,0)P(y,0) = P(xy,0)$, т.е. дека $Q(x)Q(y) = Q(xy)$ за секои реални броеви x и y. Согласно со лема 2 можни се следниве случаи:

1) Нека $Q(x) = 0$ за секој x. Тогаш $0 = Q(t)P(x,y) = P(t,0)P(x,y) = P(tx,ty)$ за секои t,x,y, па затоа за $t = 1$ добиваме $P(x,y) = 0$ за секои реални броеви x и y.

2) Нека $Q(x) = x^m$ за некој цел ненегативен број m. Имаме

$$\begin{aligned}
P(x,y)P(1,1) &= P(x+y,x+y) = P(x+y,0)P(1,1)\\
&= Q(x+y)P(1,1) = (x+y)^m P(1,1)
\end{aligned}$$

и аналогно $P(x,y)P(1,-1) = (x-y)^m P(1,-1)$.

Одделно ќе ги разгледаме четирите можности за анулирање на $P(1,1)$ и $P(1,-1)$. Имаме:

2.1. Ако $P(1,1)\neq 0$ и $P(1,-1)\neq 0$, добиваме $P(x,y)=(x+y)^m=(x-y)^m$, што е можно само за $m=0$. Според тоа, $P(x,y)=1$ за секои реални броеви x и y.

2.2. Ако $P(1,1)\neq 0$ и $P(1,-1)=0$, добиваме $P(x,y)=(x+y)^m$, за секои реални броеви x и y.

2.3. Ако $P(1,1)=0$ и $P(1,-1)\neq 0$, добиваме $P(x,y)=(x-y)^m$, за секои реални броеви x и y.

2.4. Ако $P(1,1)=0$ и $P(1,-1)=0$, добиваме

$$0=P(1,1)P(x,y)=P(x+y,x+y),$$

т.е. $P(x,x)=0$ за секој x. Аналогно $P(x,-x)=0$ за секој x. Сега од лема 1 следува дека

$$P(x,y)=(x-y)^k(x+y)^n R(x,y),$$

каде $R(x,y)$ е полином од две променливи за кој важи $R(1,1)\neq 0$ и $R(1,-1)\neq 0$. Но, од условот на задачата следува дека

$$R(a,b)R(c,d)=R(ac+bd)R(ad+bc),$$

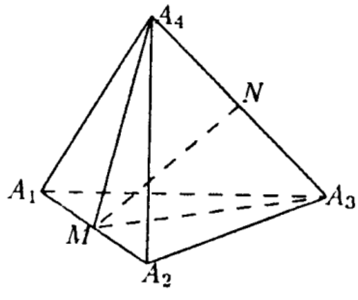
за секои реални броеви a,b,c,d. Оттука и од претходните разгледувања следува дека $R(x,y)=1$, т.е.

$$P(x,y)=(x-y)^k(x+y)^n, \text{ за секои } x,y\in\mathbb{R}.$$

3. Докажи, дека секој тетраедар $A_1A_2A_3A_4$ може да биде поставен меѓу две паралелни рамнини, кои се на растојание d и бројот d го задоволува неравенството $d\leq\frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{3}}$, каде

$$p=\overline{A_1A_2}^2+\overline{A_1A_3}^2+\overline{A_1A_4}^2+\overline{A_2A_3}^2+\overline{A_2A_4}^2+\overline{A_3A_4}^2.$$

Решение. Ќе ја користиме следнава теорема на Ојлер.



Теорема. Квадратот на растојанието меѓу средините на два спротивни раба на тетраедарот е четири пати помал од збирот на квадратите на должините на рабовите кои не ги содржат тие средини, намален за збирот на квадратите на должините на рабовите кои ги содржат тие средини.

Доказ. Нека a,b,c се растојанијата меѓу средините на A_1A_2 и A_3A_4, A_1A_3 и A_2A_4, A_1A_4 и A_2A_3, соодветно. Теоремата ќе ја докажеме за a. Нека M е средината на A_1A_2 и N е средината A_3A_4. Од формулите за тежишните линии MN, A_3M, A_4M соодветно за триаголнисите MA_3A_4, $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$ следува

$$
\begin{aligned}
a^2 &= \tfrac{1}{4}(2\overline{A_3M}^2 + 2\overline{A_4M}^2 - \overline{A_3A_4}^2)\\
&= \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{2}(2\overline{A_1A_3}^2 + 2\overline{A_2A_3}^2 - \overline{A_1A_2}^2) + \tfrac{1}{4}(2\overline{A_1A_4}^2 + 2\overline{A_2A_4}^2 - \overline{A_1A_2}^2) - \overline{A_3A_4}^2)\\
&= \tfrac{1}{4}(\overline{A_1A_3}^2 + \overline{A_2A_3}^2 + \overline{A_1A_4}^2 + \overline{A_2A_4}^2 - \overline{A_1A_2}^2 - \overline{A_3A_4}^2),
\end{aligned}
$$

што и требаше да се докаже. ■

Од теоремата на Ојлер следува $4(a^2+b^2+c^2) = p$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $a = \min\{a,b,c\}$. Тогаш $p \geq 12a^2$, т.е. $a \leq \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{3}}$.

Нека α е рамнината која го содржи работ A_1A_2 и е паралелна на работ A_3A_4 и β е рамнината која го содржи работ A_3A_4 и е паралелна на работ A_1A_2. Јасно, $\alpha \parallel \beta$ и тетраедарот се наоѓа меѓу овие две рамнини. Освен тоа растојанието меѓу α и β не е поголемо од $a \leq \frac{\sqrt{p}}{2\sqrt{3}}$.

4. Определи ги сите парови (a_n, a_{n+1}) од последователни чкенови на низата $a_n = 2^n + 49,\ n = 1,2,...$ за кои $a_n = pq, a_{n+1} = rs$, каде p,q,r,s се прости броеви такви што $p<q, r<s$ и $q-p=s-r$.

Решение. Да означиме $q-p=s-r=x>0$.Тогаш

$$a_n = p(p+x) \text{ и } a_{n+1} = r(r+x)$$

и од $a_{n+1} > a_n$ следува дека $r>p$. Од друга страна $a_{n+1} - 2a_n = -49$, т.е. $a_{n+1} < 2a_n$, што значи $r(r+x) < 2p(p+x)$. Според тоа,

$$2p(p+x) > r(r+x) > r(p+x),$$

па затоа $2p > r$.

Бидејќи $a_n = 2^n + 49$ е делив со 3 ако и само ако n е непарен број, од $\min\{p,q,r,s\} = p$ следува дека $p=3$. Оттука и од $2p>r$ следува дека $r=5$. Тогаш од $a_{n+1} = 2a_n - 49$ наоѓаме $x = 56$ и конечно

$$a_7 = 3\cdot 59 = 2^7 + 49 \text{ и } a_8 = 5\cdot 61 = 2^8 + 49.$$

Според тоа, единствено решение е подредениот пар (a_7, a_8).

БМО 1989

1. Нека $d_1, d_2, ..., d_k$ се сите делители на природниот број n, каде
$$1 = d_1 < d_2 < ... < d_k = n.$$
Определи ги сите природни броеви, за кои $k \geq 4$ и
$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n.$$
Решение. Ако n е непарен број, тогаш и неговите делители се непарни броеви, од каде следува дека $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$ е парен број, што е противречност. Според тоа, n е парен број, $d_1 = 1, d_2 = 2$ и $n = 5 + d_3^2 + d_4^2$. Тогаш, само еден од броевите d_3 и d_4 е парен. Одделно ќе ги разгледаме двата случаја.
   1) Нека d_3 е парен, т.е. $d_3 = 2a, a > 1$. Тогаш a е делител на n кој е поголем од d_1 и е помал од d_3, па затоа $a = d_2 = 2$ и $d_3 = 4$. Според тоа, $n = 21 + d_4^2$, што не е можно бидејќи n е делив со 4, а $d_4^2 \equiv 0$ или $1 (\mathrm{mod}\, 4)$ и $21 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$.
   2) Нека d_4 е парен, т.е. $d_4 = 2a, a > 1$. Ако $a = 2$, добиваме $d_4 = 4$ и од $2 = d_2 < d_3 < d_4 = 4$ следува $d_3 = 3$. Тогаш $n = 30$, кој не е делив со 4 и значи не е решение на задачата. Според тоа, a е делител на n кој е поголем од $d_2 = 2$ и помал од d_4, т.е. $a = d_3$. Значи, $n = 5(1 + d_3^2)$. Од $d_3 \mid n$ и $\mathrm{NZD}(d_3, 1 + d_3^2) = 1$ заклучуваме дека $d_3 \mid 5$, и како $d_3 > 1$ следува $d_3 = 5$. Тогаш $n = 130$ и тоа е единственото решение на задачата.

2. Нека $\overline{a_n a_{n-1} ... a_1 a_0} = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + 10 a_1 + a_0$ е декаден запис на прост број, каде $n > 1$ и $a_n > 1$. Докажи дека полиномот
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$$
е неразложлив, т.е. не може да се претстави како производ на два полиноми со позитивни степени и целобројни коефициенти.
Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.
Лема. Ако a е комплексен корен на полином со реални коефициенти
$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n,$$
тогаш $|a| < 1 + m$, каде
$$m = \max\{|\frac{a_k}{a_n}| : 0 \leq k \leq n-1\}.$$
Доказ. Ако $|a| \geq m + 1$, тогаш последователно добиваме

$$0 = | f(a) | \geq | a_n a^n | \cdot | 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n a} + \frac{a_{n-2}}{a_n a^2} + \ldots + \frac{a_0}{a_n a^n} |$$

$$\geq | a_n a^n | (1 - | \frac{a_{n-1}}{a_n a} | - | \frac{a_{n-2}}{a_n a^2} | - \ldots - | \frac{a_0}{a_n a^n} |)$$

$$\geq | a_n a^n | (1 - | \frac{m}{a} | - | \frac{m}{a^2} | - \ldots - | \frac{m}{a^n} |)$$

$$\geq | a_n a^n | [1 - m(\frac{1}{m+1} + \frac{1}{(m+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(m+1)^n})]$$

$$> | a_n a^n | [1 - m(-1 + \frac{1}{1 - \frac{1}{m+1}})] = 0,$$

што е противречност. Според тоа, $| a | < 1 + m$. ■

Нека претпоставиме дека $P(x) = f(x)g(x)$, каде $f(x)$ и $g(x)$ се полиноми со позитивни степени и целобројни коефициенти. Нека корените на $f(x)$ се $x_1, x_2, ..., x_k$. Тогаш $x_1, x_2, ..., x_k$ се корени на $P(x)$ и согласно со докажаната лема модулите им се помали од $1 + \frac{9}{2} < 9$. Според тоа, ако b е коефициентот пред највисокиот степен на $f(x)$, тогаш

$$| f(10) | = | b | \cdot | \prod_{i=1}^{k} (10 - x_i) | \geq | b | \prod_{i=1}^{k} (10 - | x_i |) > 1$$

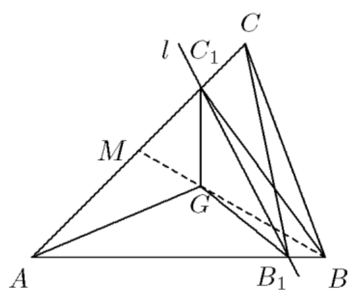
и аналогно $| g(10) | > 1$. Значи, $P(10) = f(10)g(10)$ не е прост број, што противречи на условот на задачата.

3. Нека BAC е триаголник со тежиште G и нека l е права која ги сече страните AB и AC соодветно во точките B_1 и C_1 така што A и G лежат во иста полурамнина во однос на l. Докажи дека

$$P_{BB_1GC_1} + P_{CC_1GB_1} \geq \frac{4}{9} P_{ABC}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Заради пократко запишување да означиме $P_{ABC} = P, P_{AB_1C_1} = P_0$, $P_{AB_1G} = P_1$ и $P_{AC_1G} = P_2$. Од условот на задачата следува, т.е. бидејќи A и G лежат од иста страна на правата l, важи $P_0 \geq P_1 + P_2$. Имаме



$$P_{BB_1GC_1} = P_{ABC_1} - P_1 - P_2 \text{ и}$$

$$P_{CC_1GB_1} = P_{ACB_1} - P_1 - P_2.$$

Од $P_{ABG} : P_{AMG} = 2:1 = P_{BGC_1} : P_{MGC_1}$ следува дека $P_{ABC_1} = 3P_2$. Аналогно се докажува дека $P_{ACB_1} = 3P_1$. Тогаш

$$P_{BB_1GC_1}+P_{CC_1GB_1}=P_{ABC_1}-P_1-P_2+P_{ACB_1}-P_1-P_2=P_1+P_2 .$$

Останува да докажеме дека $P_1+P_2 \geq \frac{4P}{9}$. Имаме

$$P_1=\frac{P_{AB_1C}}{3}=\frac{P\cdot\overline{AB_1}}{3\overline{AB}} \text{ и } P_2=\frac{P\cdot\overline{AC_1}}{3\overline{AC}} .$$

Тогаш од горните равенства, неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина за $\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}}$ и $\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC}}$ и од равенствата

$$P_0=\frac{\overline{AB_1}\cdot\overline{AC_1}\sin\measuredangle ABC}{2} \text{ и } P=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\measuredangle ABC}{2}$$

следува:

$$P_1+P_2=\frac{P}{3}\left(\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}}+\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC}}\right)\geq\frac{2P}{3}\sqrt{\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}}\cdot\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC}}}=\frac{2P}{3}\sqrt{\frac{P_0}{P}}\geq\frac{2}{3}\sqrt{P(P_1+P_2)} ,$$

од каде што следува саканото неравенство. Знак за равенство важи ако и само ако $\frac{\overline{AB_1}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AC_1}}{\overline{AC}}$ и $P_0=P_1+P_2$, т.е. ако и само ако правата l минува низ G и е паралелна со BC.

4. Нека $\mathbb{F}$ е множество, чии елементи се подмножества на множеството $\{1,2,...,n\}$ и кои ги имаат следниве својства:

   1) Ако $A\in\mathbb{F}$, тогаш $|A|=3$.

   2) Ако $A,B\in\mathbb{F}$ и $A\neq B$, тогаш $|A\cap B|\leq 1$.

   Нека $f(n)$ е максималната вредност на $|\mathbb{F}|$ за сите такви множества $\mathbb{F}$. Докажи дека за $n\geq 3$ важи

$$\frac{n^2-4n}{6}\leq f(n)\leq\frac{n^2-n}{6} .$$

Решение. Нека $\mathbb{F}$ е произволна фамилија од триелементни подмножества на множеството $\{1,2,...,n\}$ која ги има саканите својства. Секој $A\in\mathbb{F}$ има $\binom{3}{2}=3$ двоелементни подмножества, при што заради 2) за $A,B\in\mathbb{F}$, $A\neq B$ не е можно да содржат едно исто двоелементно подмножество, што значи дека различните A и B генерираат различни двоелементни подмножества. Тоа значи, дека множествата од $\mathbb{F}$ заедно содржат $3|\mathbb{F}|$ различни двоелементни подмножества на $\{1,2,...,n\}$. Според тоа, $3|\mathbb{F}|\leq\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$, т.е. $f(n)\leq\frac{n^2-n}{6}$.

За левото неравенство е потребна конкретна конструкција на множество со најмалку $\frac{n^2-4n}{6}$ елементи за кои се исполнети условите 1) и 2). Нека $\mathbb{F}_0$ е множеството од оние триелементни подмножества $\{a,b,c\}$ на $\{1,2,...,n\}$ за кои важи $a+b+c=n$ или $a+b+c=2n$. Секои две такви множества имаат најмногу еден заеднички елемент. Навистина, нека $a+b+c_1\in\{n,2n\}$ и $a+b+c_2\in\{n,2n\}$.

Ако $c_1 \neq c_2$, тогаш $|c_1 - c_2| = 2n - n = n$, што не е можно бидејќи $c_1, c_2 \in \{1, 2, ..., n\}$. Значи, за множеството F_0 се исполнети условите 1) и 2), па затоа $f(n) \geq |F_0|$. Останува оддолу да го оцениме F_0. Нека $a, b, c \in F_0$. За бројот a имаме n можности, а при фиксирано a за b имаме најмалку $n-4$ можности (единствени ограничувања за b се $1 \leq b \leq n$, $b \neq a$, $b \neq \frac{n-a}{2}$, $b \neq \frac{2n-a}{2}$, $b \neq n-2a$). Всушност бираме подредени тројки (a, b, c) за кои $\{a, b, c\} \in F_0$. Но, тројката (a, b, c) има $3! = 6$ пермутации и затоа секој елемент на F_0 се брои шест пати. Според тоа, $6|F_0| \geq n(n-4)$, од каде следува дека $f(n) \geq |F_0| \geq \frac{n^2-4n}{6}$.

БМО 1990

1. Нека $a_1=1, a_2=3$ и $a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$, за секој $n=1,2,\dots$. Определи ги сите броеви n за кои a_n е делив со 11.

Решение. *Прв начин.* Од рекурентната врска следува дека ако два последователни члена на низата се деливи со 11, тогаш сите следни членови се деливи со 11. Со непосредна проверка се добива дека a_{10} и a_{11} се деливи со 11, а меѓу членовите $a_1,a_2,\dots,a_9$ само a_4 и a_8 се деливи со 11. Според тоа, a_n е делив со 11 за $n=4, n=8$ и $n\geq 10$.

Втор начин. Ставаме $b_n=a_{n+1}-a_n$, за $n=1,2,\dots$. Тогаш рекурзијата можеме да ја запишеме во видот $b_{n+1}=(n+2)b_n$, за $n=1,2,3,\dots$. Бидејќи $a_2-a_1=2$, со индукција лесно се докажува дека $b_n=(n+1)!$, за $n=1,2,3,\dots$. Значи,

$$\sum_{i=1}^{n-1}(i+1)!=\sum_{i=1}^{n-1}b_i=\sum_{i=1}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)=a_n-a_1=a_n-1 .$$

Затоа $a_n=\sum_{i=1}^{n}i!$. Јасно, ако $n\geq 11$, бројот $n!$ е делив со 11, така што ако $n=11,12,\dots$ имаме $a_n\equiv a_{10}(\mathrm{mod}\,11)$. Понатаму, ако ги земеме предвид остатоците на броевите $1!,2!,\dots,10!$ по модул 11, добиваме:

$a_1\equiv 1(\mathrm{mod}\,11)$, $a_2\equiv 3(\mathrm{mod}\,11)$, $a_3\equiv 9(\mathrm{mod}\,11)$, $a_4\equiv 0(\mathrm{mod}\,11)$, $a_5\equiv 10(\mathrm{mod}\,11)$,
$a_6\equiv 4(\mathrm{mod}\,11)$, $a_7\equiv 6(\mathrm{mod}\,11)$, $a_8\equiv 0(\mathrm{mod}\,11)$, $a_9\equiv 1(\mathrm{mod}\,11)$, $a_{10}\equiv 0(\mathrm{mod}\,11)$.

Од досега изнесеното следува дека a_n е делив со 11 за $n=4, n=8$ и $n\geq 10$.

2. Нека $p(x)$ е полином дефиниран со равенството

$$P(x)\equiv a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_{2n}x^{2n}=(1\cdot x+2x^2+3x^3+\dots+nx^n)^2 .$$

Докажи, дека

$$a_{n+1}+a_{n+2}+\dots+a_{2n}=\frac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24} .$$

Решение. Ќе ги искористиме познатите равенства

$$S_1=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2},\ S_2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ \text{и}\ S_3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4} .$$

Тогаш $P(1)=\sum_{i=0}^{2n}a_i=S_1^2$. Од друга страна, од принципот на споредување на коефициентите, следува дека за секој фиксиран $k\in\{0,1,2,\dots,n\}$ важи

$$a_k=\sum_{i=0}^{k}i(k-i)=k\sum_{i=0}^{k}i-\sum_{i=0}^{k}i^2=\frac{k^2(k+1)}{2}-\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}=\frac{k^3-k}{6} .$$

Според тоа,

$$a_0+a_1+...+a_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{k^3-k}{6}=\frac{S_1^2-S_1}{6}$$

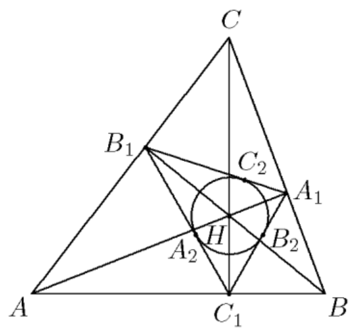
и за бараниот збир добиваме

$$a_{n+1}+a_{n+2}+...+a_{2n}=P(1)-\sum_{k=0}^{n}a_k=S_1^2-\frac{S_1^2-S_1}{6}$$
$$=\frac{5S_1^2+S_1}{6}=\frac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24}.$$

3. Нека ABC е остроаголен триаголник кој не е рамностран. Нека A_1, B_1, C_1 се подножјата на висините повлечени соодветно од темињата A, B, C и нека A_2, B_2, C_2 се допирните точки на впишаната кружница во $\triangle A_1B_1C_1$ со неговите страни. Докажи дека Ојлеровите прави на $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ се совпаѓаат.

Забелешка. Ојлеровата права на даден триаголник е правата определена од ортоцентарот и центарот на опишаната кружница околу триаголникот.

Решение. Ќе го користиме фактот дека висините на $\triangle ABC$ се симетрали на аглите на $\triangle A_1B_1C_1$ (Докажи!). Според тоа, ортоцентарот H на $\triangle ABC$ е центар на впишаната кружница k во $\triangle A_1B_1C_1$, која истовремено е опишана кружница околу $\triangle A_2B_2C_2$. Значи, Ојлеровите прави l и l_2 соодветни на $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ имаат заедничка точка H. Од рамнокракиот $\triangle B_2C_2A_1$ следува дека $AA_1 \perp B_2C_2$, па затоа $B_2C_2 \parallel BC$. Аналогно се докажува дека $A_2B_2 \parallel AB$ и $A_2C_2 \parallel AC$. Според тоа, $\triangle ABC$ и $\triangle A_2B_2C_2$ се слични, па затоа постои хомотетија h која $\triangle ABC$ го пресликува во $\triangle A_2B_2C_2$. Но, тоа значи дека $h(l)=l_2$, од каде следува $l \parallel l_2$. Но, правите l и l_2 имаат заедничка точка H, па затоа тие се совпаѓаат.



4. Определи го минималниот број елементи на конечното множество A за кое постои функција $f:\mathbb{N}\to A$ со следново својство: $f(i)\neq f(j)$ секогаш кога $|i-j|$ е прост број.

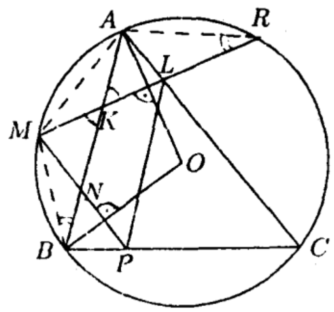
Решение. Нека функцијата $f:\mathbb{N}\to A$ го има саканото својство. Да ги разгледаме броевите 1, 3, 6 и 8. Разликата меѓу секои два од овие броеви е прост број. Тогаш $f(1), f(3), f(6), f(8)$ се различни елементи од A, па затоа A има барем 4 елементи.

Ќе докажеме дека минималниот број елементи на A е четири, така што ќе конструираме функција $f:\mathbb{N}\to A$ со разгледуваното својство, за која A има четири елементи. Нека $A=\{0,1,2,3\}$ и за секој n нека $f(n)$ е остатокот од делењето на n со 4. Очигледно f е добро дефинирана, бидејќи $f(n)\in\{0,1,2,3\}$ за секој $n\in\mathbb{N}$. Нека $i,j\in\mathbb{N}$ и $|i-j|$ е прост број. Ако допуштиме $f(i)=f(j)$, од дефиницијата на f следува дека $i\equiv j(\mathrm{mod}\,4)$. Но, во тој случај $|i-j|$ е делив со 4, т.е. $|i-j|$ е сложен број, што е противречност. Според тоа, минималниот број елементи на A е 4.

БМО 1991

1. Нека M е точка на лакот AB од опишаната кружница околу остроаголен $\triangle ABC$, кој не ја содржи точката C. Нормалата повлечена од M на радиусот OA (O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$) ги сече страните AB и AC соодветно во точките K и L, а нормалата повлечена од M на радиусот OB ги сече страните AB и BC соодветно во точките N и P. Изрази го $\measuredangle MLP$ со помош на аглите на триаголникот, ако е дадено, дека $\overline{KL} = \overline{MN}$.

   Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за аглите на $\triangle ABC$. Имаме:
$$\measuredangle MKN = \measuredangle AKL = 90^\circ - \measuredangle OAB = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(180^\circ - \measuredangle AOB) = \gamma.$$
   Аналогно, $\measuredangle MNK = \gamma$, т.е. $\triangle MNK$ е рамнокрак и од условот добиваме, дека $\overline{MK} = \overline{MN} = \overline{KL}$. Од друга страна $\triangle ALK \sim \triangle ABC$ (аглите им се α е заедниччки агол и $\measuredangle AKL = \gamma$). Оттука следува $\overline{KL} = \overline{AK} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$. Понатаму, нека R е пресечната точка на MK со кружницата. Бидејќи $AO \perp MR$, добиваме $\overline{AM} = \overline{AR}$. Освен тоа, $\triangle AKR \sim \triangle MKB$, т.е.
$$\overline{AK} = \overline{MK} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}.$$
   Добиваме
$$\overline{KL} = \overline{MK} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}.$$
   Аналогно,
$$\overline{NP} = \overline{MN} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}.$$
   Бидејќи $\overline{KL} = \overline{MN}$, важи $\overline{MN} = \overline{MK} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$



   и значи
$$\overline{NP} = \overline{MK} \cdot \frac{\overline{AM}}{\overline{BM}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{AM}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \overline{MK}.$$
   Според тоа, $\overline{NP} = \overline{MN}$, а претходно видовме дека $\overline{MK} = \overline{KL}$. Значи, NK е средна линија во $\triangle MLP$, па затоа $\measuredangle MLP = \measuredangle MKN = \gamma$.

2. Докажи, дека постојат бесконечно многу триаголници T кои не се складни и за кои:

   а) должините на страните a, b, c на T се заемно прости природни броеви, т.е. најголемиот заеднички делител на a, b, c е 1,

   б) плоштината на T е природен број,

   в) должините на висините на T не се природни броеви.

   Решение. Триаголниците со страни

$$a = 4n^2 + 1, b = 4n^4 + 1, c = 4n^2(n^2 + 1),$$

каде $n \geq 2$ е природен број, ги имаат саканите својства. Доказот непосредно следува од равенствата $s - a = 4n^4$, $s - b = 4n^2$, $s - c = 1$ и Хероновата формула

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Триаголниците со страни

$$a = (n+1)^2(n^2+1), b = n^2(n^2+n+2), c = 2n^4 + 2n^2 + 1,$$

каде $n \geq 5$ е непарен природен број ги имаат саканите својства. Докажи!

3. Правилен шестаголник со плоштина H е впишан во конвексен многуаголник со плоштина P. Докажи дека $P \leq \frac{3H}{2}$. Кога важи знак за равенство?

Решение. *Прв начин*. Нека правилниот шестаголник е $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ и должината на неговата страна е a. Да конструираме шест рамнострани триаголници $A_iA_{i+1}B_i$, $i = 1,2,3,4,5,6$, каде $A_7 \equiv A_1$, надворешни за шестаголникот. Тогаш за секој $i = 1,2,3,4,5,6$ постои права l_i која минува низ A_i, но не содржи внатрешни точки ниту на шестаголникот, нуту на опишаниот многуаголник. Со M_i, $i = 1,2,3,4,5,6$ да ја означиме пресечната точка на l_i и l_{i+1}, соодветно. Тогаш опишаниот многуаголник се содржи во многуаголникот $M_1M_2M_3M_4$ M_5M_6.

Точката M_i е внатрешна за $\triangle A_iA_{i+1}B_i$, па затоа $\alpha_i = \measuredangle M_iA_iA_{i+1} \leq 60^\circ$. Имаме

$$\begin{aligned} P_{A_iA_{i+1}M_i} &= \frac{a^2 \sin\alpha_i \sin(60^\circ - \alpha_{i+1})}{2\sin(\alpha_i + 60^\circ - \alpha_{i+1})} \\ &= \frac{a^2}{2(\operatorname{ctg}\alpha_i + \operatorname{ctg}(60^\circ - \alpha_{i+1}))} \\ &\leq \frac{a^2}{8}(\operatorname{tg}\alpha_i + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha_{i+1})), \end{aligned}$$

при што знак за равенство важи ако и само ако $\alpha_i = 60^\circ - \alpha_{i+1}$. (Тука го искористивме неравенството $(x+y)(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}) \geq 4,\ x > 0, y > 0$.) Според тоа,

$$\begin{aligned} P \leq P_{M_1M_2...M_6} &= H + \sum_{i=1}^{6} P_{A_iA_{i+1}M_i} \\ &\leq H + \frac{a^2}{8}\sum_{i=1}^{6}(\operatorname{tg}\alpha_i + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha_{i+1})) \\ &= H + \frac{a^2}{8}\sum_{i=1}^{6}(\operatorname{tg}\alpha_i + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha_i)). \end{aligned}$$

Но,

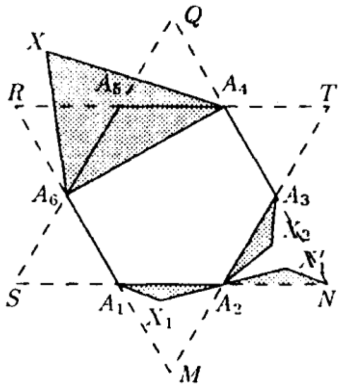
$$\operatorname{tg} 60^\circ = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha)} \geq \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}(60^\circ - \alpha),\ \text{за}\ 0 \leq \alpha \leq 60^\circ,$$

па затоа

$$P \leq H + \frac{a^2}{8} \cdot 6 \operatorname{tg} 60^\circ = H + \frac{3a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3H}{2},$$

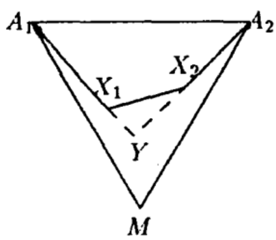
со што е неравенството е докажано.

Втор начин. Нека правилниот шестаголник е $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$. Со M, N, T, Q, R, S ги означуваме пресечните точки на правите A_1A_6 и A_2A_3, A_1A_2 и A_3A_4, A_2A_3 и A_4A_5, A_3A_4 и A_5A_6, A_4A_5 и A_6A_1, A_5A_6 и A_1A_2, соодветно. Ќе докажеме дека многуаголникот со плоштина P, кој исто така ќе го означуваме со P, е впишан во ѕвездата $A_1MA_2NA_3TA_4Q$ A_5RA_6S.



Да претпоставиме дека X е од P и нека X не е во ѕвездата, на пример X е во внатрешноста на $\measuredangle QA_5R$ (цртеж десно). Од конвексноста на P следува дека отсечките XA_4, XA_6, A_4A_6 се во P, па значи $\triangle A_6A_4X \subset P$. Но, тогаш A_5 е внатрешна точка за $\triangle A_6A_4X$, а тоа противречи на условот дека $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ е впишан во P (A_5 треба да лежи на страна на P).

Понатаму, можеме да сметаме дека во секој од триаголниците A_1A_2M, A_2A_3N, A_3A_4T, A_4A_5Q, A_5A_6R и A_6A_1S е содржи најмногу по едно теме од P. Во спротивно, ако на пример темињата X_1 и X_2 се во $\triangle A_1A_2M$, тогаш X_1 и X_2 може да се заменат со пресечната точка Y на A_1X_1 и A_2X_2 при што новодобиениот многуаголник ќе има поголема плоштина од P (цртеж десно).



Нека X_1 и X_2 се две последователни темиња на P кои се соодветно во триаголниците A_1A_2M и A_2A_3N. Да разгледаме црнтрална симетрија со центар во A_2 и нека таа симетрија ја пресликува X_1 во $X_1^{'}$. Бидејќи сликата на A_1 е N и P е конвексен, следува дека триаголниците $A_2A_3X_2$ и $A_2NX_1^{'}$ немаат заеднички внатрешни точки. Оттука следува дека

$$P_{A_2A_3X_2} + P_{A_2NX_1^{'}} \leq P_{A_2A_3N},$$

па значи

$$P_{A_2A_3X_2} + P_{A_2NX} \leq P_{A_2A_3N} = \frac{1}{6}H.$$

Ако ги повоториме истите размислувања за останатиоте темиња на P добиваме

$$P \le H + 3 \cdot \tfrac{1}{6} H = \tfrac{3}{2} H .$$

Равенство се достигнува само кога

$$P_{A_2A_3X_2} + P_{A_2NX_1^{'}} = P_{A_2A_3N} ,$$

а тоа е можно кога во еден од триаголниците A_1A_2M и A_2A_3N нема теме од P, а кога тоа теме го има истото се совпаѓа со M или N. Според тоа, равенство се достигнува ако и само ако P е еден од триаголниците TRM или SNQ.

4. Докажи дека не постои бикеција $f:\{1,2,...,n,...\} \to \{0,1,2,...,n,...\}$ таква што

$$f(mn) = f(m) + f(n) + 3f(m)f(n) \text{, за секои } m,n \in \mathbb{N} .$$

Решение. Нека претпоставиме дека постои функција $f(x)$ со саканите својства и да ја разгледаме функцијата $g(x) = 3f(x)+1$. Лесно се проверува дека g е инјекција и $g(mn) = g(m)g(n)$, за секои $m,n \in \mathbb{N}$. Да забележиме дека $g(x)$ не е сурјекција, т.е. за секој $y \in \{0,1,2,...\}$ не постои $x \in \{1,2,...\}$ таков што $g(x) = y$. Имено, g го пресликува множеството $\{1,2,...\}$ во множеството природни броеви од видот $3n+1$, каде $n \in \{1,2,...\}$.

Освен тоа важи $g(1) = g(1^2) = g^2(1) = 1$, па затоа важи $g(1) = 1$.

Нека p,q и r се природни броеви за кои $g(p) = 4, g(q) = 10$ и $g(r) = 25$. Бидејќи ниту еден од броевите 4, 10 и 25 не може да се запише како производ на два броја од множеството $\{4,7,10,...\}$, заклучуваме дека p,q и r се различни прости броеви. Но,

$$4 \cdot 25 = 10^2 \quad \Leftrightarrow \quad g(p)g(r) = g^2(q) \quad \Leftrightarrow \quad g(pr) = g(q^2) \quad \Leftrightarrow \quad pr = q^2 ,$$

што не е можно за различни прости броеви.

Конечно, од добиената противречност следува дека не постои функција со саканите својства.

БМО 1992

1. Нека $m,n\in\mathbb{N}$ и
$$A(m,n)=m^{3^{4n}+6}-m^{3^{4n}+4}-m^5+m^3.$$
Определи ги сите природни броеви n за кои $A(m,n)$ е делив со 1992 за секој $m\in\mathbb{N}$.

Решение. *Лема*. Нека a и b се заемно прости броеви и s е најмалиот природен број таков што $a^s\equiv 1(\bmod b)$. Ако n е природен број таков што $a^n\equiv 1(\bmod b)$, тогаш $s\,|\,n$. Бројот s го нарекуваме *степенов показател* на a по модул b.

Доказ. Нека $q,r\in\mathbb{N}$ се такви што $n=sq+r$, $0\le r<s$. Тогаш
$$1=a^n\equiv a^{qs+r}\equiv (a^s)^q a^r(\bmod b),$$
па од монималноста на s следува $r=0$, т.е. $s\,|\,n$. ■

Да забележиме дека $1992=2^3\cdot 3\cdot 83$ и
$$A(m,n)=m^3(m^2-1)(m^{3^{4n}+1}-1).$$
Лесно се докажува дека 24 е делител на $A(m,n)$. Имено, $m(m^2-1)$ е производ на три последователни броеви, па затоа $3\,|\,m(m^2-1)$, што значи $3\,|\,A(m,n)$. Ако m е парен број, тогаш $2^3\,|\,m^3$, т.е. $2^3\,|\,A(m,n)$. Ако m е непарен број, тогаш m^2-1 е производ на два последователни парни броеви, едниот од кои е делив со 4, па затоа $2^3\,|\,A(m,n)$. Броевите 2, 3 и 83 се заемно прости и значи $1992\,|\,A(m,n)$ ако и само ако $83\,|\,A(m,n)$. Нека n е таков што $83\,|\,A(m,n)$ за секој $m\in\mathbb{N}$. Во случајов имаме $83\,|\,A(2,n)=2^{3^{4n}+1}-1$. Ако s е степенов показател на 2 по модул 83, тогаш од лемата следува дека $s\,|\,3^{4n}+1$. Да го определиме s. Бидејќи $\mathrm{NZD}(2,83)=1$ од малата теорема на Ферма следува $2^{82}\equiv 1(\bmod 83)$, па значи $s\,|\,82$, т.е. $s\in\{1,2,41,82\}$. Но, $2^1\not\equiv 1(\bmod 83)$, $2^2\not\equiv 1(\bmod 83)$ и $2^{41}\equiv 1024^4\cdot 2\equiv 28^4\cdot 2\equiv 784^4\cdot 2\equiv 37^4\cdot 2\equiv 82(\bmod 83)$, односно $2^{41}\not\equiv 1(\bmod 83)$. Според тоа, $s=82$, па значи $82\,|\,3^{4n}+1$. Од друга страна $3^{4n}=81^n$ и $81\equiv -1(\bmod 82)$, па затоа $82\,|\,3^{4n}+1$ само ако n е непарен број. ќе докажеме дека последното е доволно, т.е. дека за секој непарен број важи $83\,|\,A(m,n)$. За $m=1$ имаме $83\,|\,0=A(1,n)$ и уште можеме да сметаме дека 83 не е делител на m. Но, 83 е прост број и затоа $\mathrm{NZD}(m,83)=1$. Повторно од

малата теорема на Ферма следува дека $m^{82}\equiv 1(\mathrm{mod}\,83)$. Сега, бидејќи n е непарен број добиваме

$$3^{4n}+1=81^n+1=82(81^{n-1}-81^{n-2}+\ldots+1)=82K\ ,\ K\in\mathbb{N}\ .$$

Значи, $m^{3^{4n}+1}=m^{82K}=(m^{82})^K\equiv 1^K=1(\mathrm{mod}\,83)$.

2. Докажи дека за секој природен број n е исполнето неравенството

$$(2n^2+3n+1)^n\geq 6^n(n!)^2\,.$$

Решение. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува за броевите $1^2,2^2,\ldots,n^2$ следува дека

$$\frac{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}{n}\geq\sqrt[n]{(n!)^2}\ . \tag{1}$$

Од друга страна, ако го искористиме познатото равенство

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,,$$

и замениме во (1) добиваме

$$\frac{(n+1)(2n+1)}{6}\geq\sqrt[n]{(n!)^2}\ .$$

Но $(n+1)(2n+1)=2n^2+3n+1$, па ако последното неравенство го степенуваме на $n-$ степен добиваме

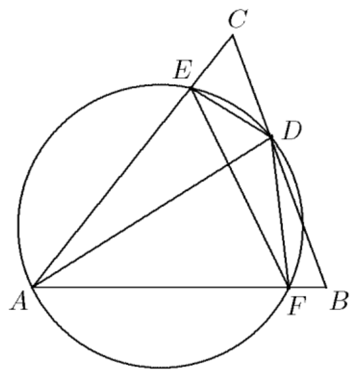
$$(2n^2+3n+1)^n\geq 6^n(n!)^2\,.$$

3. Даден е $\triangle ABC$ и точки D,E,F соодветно на неговите страни BC,CA,AB, различни од темињата на триаголникот. Докажи дека ако четириаголникот $AFDE$ е тетивен, тогаш

$$\frac{4P_{DEF}}{P_{ABC}}\leq\frac{\overline{EF}^2}{\overline{AD}^2}\,.$$

Решение. *Прв начин*. Последователно имаме

$$\begin{aligned}\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}}&=\frac{P_{ABD}+P_{ACD}}{P_{DEF}}=\frac{P_{ABD}}{P_{DEF}}+\frac{P_{ACD}}{P_{DEF}}\\&=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}\sin\measuredangle FAD}{\overline{ED}\cdot\overline{EF}\sin\measuredangle DEF}+\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AD}\sin\measuredangle EAD}{\overline{DF}\cdot\overline{EF}\sin\measuredangle DFE}\\&=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AD}}{\overline{ED}\cdot\overline{EF}}+\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AD}}{\overline{DF}\cdot\overline{EF}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{EF}}\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}+\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}\right)\\&\geq 2\frac{\overline{AD}}{\overline{EF}}\sqrt{\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}\cdot\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}},\end{aligned}$$



при што искористивме дека

$\measuredangle FAD=\measuredangle DEF$ и $\measuredangle EAD=\measuredangle DFE$,

бидејќи четириаголникот $AFDE$ е тетивен.

Од друга страна $\measuredangle BAC+\measuredangle EDF=180^\circ$, па затоа $\sin\measuredangle BAC = \sin\measuredangle EDF$, од што слеува

$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}\sin\measuredangle BAC}{\overline{DE}\cdot\overline{DF}\sin\measuredangle EDF} = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{DE}\cdot\overline{DF}}.$$

Според тоа,

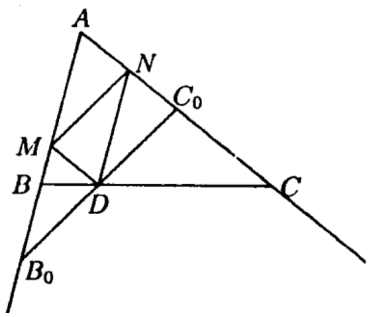
$$\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}} \geq 2\frac{\overline{AD}}{\overline{EF}}\sqrt{\frac{P_{ABC}}{P_{DEF}}},$$

и со квадрирање на последното неравенство го добиваме бараното неравенство. Јасно, знак за равенство важи ако и само ако точката D е средина на BC .

Втор начин. Лема. Ако D е точка во внатрешноста на даден $\measuredangle BAC$, тогаш меѓу сите прави кои минуваат низ D и ги сечат краците на аголот, триаголник со минимална плоштина отсекува правата од која краците на аголот отсекуваат отсечка чија средина е D .

Доказ. Нека $DM \parallel AC\ (M \in AB)$, $DN \parallel AB$ $(N \in AC)$ и $B_0C_0 \parallel MN$ $(B_0 \in AB, C_0 \in AC)$. Од конструкцијата следува дека D е средина на B_0C_0 . Сега ќе докажеме дека

$$P_{B_0C_0A} \leq P_{ABC}.$$



Нека за определност земеме дека B е меѓу A и B_0 . Бидејќи D е внатрешна точка за $\measuredangle BAC$, па затоа C_0 е меѓу A и C (цртеж десно). Затоа ако искористиме дека $\overline{DC_0} = \overline{DB_0} = \overline{MN}$ добиваме

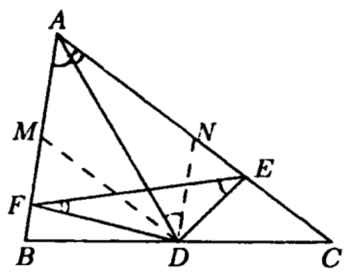
$$\begin{aligned} P_{ABC} - P_{B_0C_0A} &= P_{DCC_0} - P_{DBB_0} \\ &= \tfrac{1}{2}(\overline{DC}\cdot\overline{DC_0} - \overline{DB}\cdot\overline{DB_0})\sin\measuredangle BDB_0 \\ &= \tfrac{1}{2}(\overline{DC} - \overline{DB})\overline{MN}\sin\measuredangle BDB_0. \end{aligned}$$

Од друга страна, од теоремата на Талес следува

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{NA}} \geq \frac{\overline{NC_0}}{\overline{NA}} = 1,$$

па затоа $\overline{DC} \geq \overline{DB}$, односно $P_{ABC} \geq P_{B_0C_0A}$. ■

Од лемата следува дека доволно е да се разгледа парцијалниот случај кога D е средина на BC . Ќе докажеме дека во тој случај неравенството од условот преминува во равенство. Нека M и N соодветно се средините на AB и AC (цртеж десно). Имаме



$$\frac{4P_{DEF}}{P_{ABC}} = \frac{P_{DEF}}{\frac{1}{2}P_{AMDN}} = \frac{P_{DEF}}{P_{ADN}}.$$

Понатаму, четириаголникот $AFDE$ е тетивен, па затоа

$$\measuredangle DFE = \measuredangle DAE \text{ и } \measuredangle DEF = \measuredangle FAD.$$

Но, $\measuredangle FAD = \measuredangle ADN$ ($DN \parallel AB$), па затоа $\measuredangle DEF = \measuredangle ADN$. Тогаш од

$$P_{DEF} = \frac{\overline{EF}^2 \sin\measuredangle DFE \sin\measuredangle DEF}{2\sin(2\pi - \measuredangle DFE - \measuredangle DEF)} \text{ и } P_{ADN} = \frac{\overline{AD}^2 \sin\measuredangle DAE \sin\measuredangle ADN}{2\sin(2\pi - \measuredangle DAE - \measuredangle ADN)}$$

следува $\frac{P_{DEF}}{P_{ADN}} = \frac{\overline{EF}^2}{\overline{AD}^2}$, па затоа $\frac{4P_{DEF}}{P_{ABC}} = \frac{\overline{EF}^2}{\overline{AD}^2}$.

4. За секој природен број $n \ge 3$ определи го најмалиот природен број $f(n)$ со следново својство: за секој избор на множество $A \subseteq \{1,2,...,n\}$ со $f(n)$ елементи постојат $x, y, z \in A$ кои се по парови заемно прости.

Решение. Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Нека m е природен број и $M = \{m, m+1,..., m+5\}$. Тогаш секое петелементно подмножество на M содржи три броја кои се по парови заемно прости.

Доказ. Постои непарен број a таков што $A = \{a, a+2, a+4\} \subset M$. Навистина, ако m е непарен број, тогаш $a = m$, а ако m е парен број, тогаш $a = m+1$. Елементите на $\{a, a+2, a+4\}$ се по парови заемно прости. Барем еден од броевите $a+1$ и $a+3$ не е делив со 3. Тој број да го означиме со b и да го разгледаме множеството $B = \{a, a+2,\ a+4, b\} \subset M$. Тогаш елементите на B се по парови заемно прости, а секое петелементно подмножество на M содржи три елементи од B . Со тоа доказот на лемата е завршен. ■

Да го разгледаме множеството $X \subset \{1,2,3,...,n\}$ кое се состои од броевите деливи со 2 или со 3. Тогаш X го нема саканото својство, бидејќи во секое триелементно подмножество на X ќе има два броја со заеднички делител 2 или 3. Според тоа, секое множество со саканото својство има најмалку $|X|+1$ елемент, па затоа

$$f(n) \ge [\tfrac{n}{2}] + [\tfrac{n}{3}] - [\tfrac{n}{6}] + 1.$$

Со индукција ќе докажеме дека за секој избор на множество $A \subseteq \{1,2,...,n\}$ со

$$g(n) = [\tfrac{n}{2}] + [\tfrac{n}{3}] - [\tfrac{n}{6}] + 1$$

елементи постојат $x, y, z \in A$ кои се по парови заемно прости. Да забележиме дека $g(n+6) = g(n) + 4$.

Случаите $n = 3,4,5$ се тривијални, а за $n = 6$ тврдењето следува од лемата. За $n = 7$ ја применуваме лемата кога $1,7 \notin A$, а во спротивен случај тројката $\{1, 7, x\}$, каде $x \ne 1,7$ е произволен елемент од A е бараната тројка од условот на задачата. На сличен начин се разгледува и случајот $n = 8$.

Нека $n \geq 9$ и $f(k) \leq g(k)$ за секој $k \in \{3,4,...,n-1\}$. Нека A е произволно подмножество од $\{1,2,...,n\}$ со $g(n)$ елементи. Ако $A \cap \{n-5,n-4,...,n\}$ содржи барем пет елементи, тогаш тврдењето следува од лемата. Ако $|A \cap \{n-5,n-4,...,n\}| \leq 4$, тогаш во A се содржат најмалку $g(n)-4 = g(n-6)$ елемент од $\{1,2,...,n-6\}$, а според индуктивната претпоставка меѓу нив постојат $x,y,z \in A$ кои се по парови заемно прости.

БМО 1993

1. Нека a,b,c,d,e и f се реални броеви такви што
$$a+b+c+d+e+f=10$$
$$(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+(d-1)^2+(e-1)^2+(f-1)^2=6.$$
Определи ја најголемата вредност која може да ја прими бројот f.
Решение. Од условот на задачата следува
$$a+b+c+d+e+f=10 \text{ и } a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2=20.$$
Тогаш, од неравенството меѓу аритметичката и кавадратната средина следува
$$10-f=a+b+c+d+e\le 5\sqrt{\tfrac{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2}{5}}=\sqrt{5(20-f^2)},$$
па затоа $(10-f)^2\le 5(20-f^2)$, т.е. $2f(3f-10)\le 0$. Според тоа, бараната максимална вредност на f е $f_{\max}=\frac{10}{3}$ и се достигнува кога $a=b=c=d=e=\frac{4}{3}$.

2. За природниот број чиј декаден запис е
$$a_N 10^N+a_{N-1}10^{N-1}+...+10a_1+a_0,\ a_i\in\{0,1,2,...,9\}$$
ќе велиме дека е *монотон* ако $a_N\le a_{N-1}\le ...\le a_1\le a_0$. Определи го бројот на сите монотони броеви со најмногу 1993 цифри.
Решение. Нека A е множеството од сите монотони броеви со најмногу 1993 цифри. Нека B е множеството од сите низи со должина 1993 од видот
$$\underbrace{00...0}_{a_0}\underbrace{11...1}_{a_1}\underbrace{22...2}_{a_2}...\underbrace{99...9}_{a_9}, \tag{1}$$
каде $a_0+a_1+...+a_9=1993$, со барем еден ненулти елемент (не е задолжително сите цифри да се појавуваат). Тогаш меѓу множествата A и B постои биекција, т.е. $|A|=|B|$. Низите во B заедно со низата од 1993 нули можат да бидат преброени на следниот начин: тие се еднакви на бројот на начините на кои можеме да поставиме девет прегради меѓу различните цифри, при што ако две прегради се соседни, тогаш соодветната цифра отсуствува. Овој број е еднаков на $\binom{1993+10-1}{10-1}$, што значи дека
$$|A|=|B|=\binom{2002}{9}-1.$$

3. Кружниците C_1 и C_2 со центри соодветно O_1 и O_2 надворешно се допираат во точката T. Нека C е кружница со центар O таква што C_1 и C_2 се допираат внатрешно со C соодветно во точките A и B. Заедничката тангента на C_1 и C_2 во точката T ја сече C во точките K и L. Ако D е средината на отсечката KL, докажи дека $\measuredangle O_1OO_2=\measuredangle ADB$.

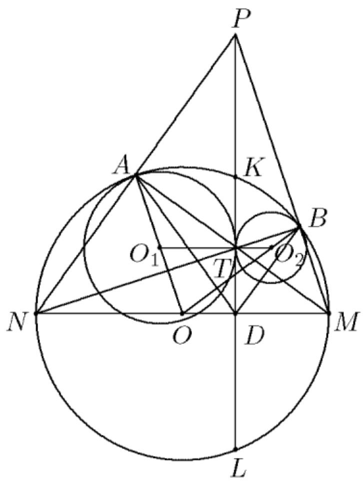
Решение. Нека правите AT и BT по вторпат ја сечат кружницата C соодветно во точките M и N. Тогаш од рамнокракиот триаголник ATO_1 добиваме

$$\measuredangle O_1TA = \measuredangle O_1AT,$$

од рамнокракиот триаголник AMO добиваме

$$\measuredangle OMA = \measuredangle OAT,$$

а точките A, O_1 и O лежат на една права. Значи, $\measuredangle O_1TA = \measuredangle OMA$, па затоа $O_1O_2 \parallel OM$. Аналогно $O_1O_2 \parallel ON$, т.е. точките O, M и N лежат на една права. На истата права лежи и точката D, бидејќи $KL \perp O_1O_2$, па затоа дијаметарот MN е нормален на тетивата KL, а D е средина на KL. Бидејќи MN е дијаметар, важи $\measuredangle NBM = \measuredangle NAM = 90^\circ$, па затоа темињата на $\triangle ABD$ се подножјата на висините во $\triangle MNP$, каде P е пресечната точка на NA и MB. Тогаш



$$\measuredangle NDA = \measuredangle MDB = \measuredangle MPN$$

и затоа

$$\begin{aligned}\measuredangle O_1OO_2 = \measuredangle AOB &= 180^\circ - \measuredangle AON - \measuredangle BOM \\ &= 180^\circ - (180^\circ - 2\measuredangle ANM) - (180^\circ - 2\measuredangle BMN) \\ &= 2(\measuredangle ANM + \measuredangle BMN) - 180^\circ = 180^\circ - 2\measuredangle MPN \\ &= 180^\circ - \measuredangle NDA - \measuredangle MDB = \measuredangle ADB.\end{aligned}$$

4. Нека p е прост број и $m \geq 2$ е природен број. Докажи дека равенката

$$\frac{x^p+y^p}{2} = \left(\frac{x+y}{2}\right)^m$$

во множеството природни броеви има решение $(x, y) \neq (1,1)$ само ако $m = p$.

Решение. Јасно, ако $m = p$, тогаш дадената равенка има бесконечно многу решенија од видот $(x, x), x \in \mathbb{N}$.

Нека (x, y) е решение на равенката. Ако $x = y$, тогаш $x^p = x^m$, па затоа $m = p$. Затоа во натамошните разгледувања ќе сметаме дека $x \neq y$. Да забележиме дека од

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^m = \frac{x^p+y^p}{2} > \left(\frac{x+y}{2}\right)^p$$

следува дека $m > p$.

Нека $\mathrm{NZD}(x,y)=d$, $x=du$ и $y=dv$, каде $\mathrm{NZD}(u,v)=1$. Заменуваме во равенката и добиваме

$$u^p+v^p=2d^{m-p}(\tfrac{u+v}{2})^m . \tag{1}$$

Ако u и v се со различна парност, тогаш $(u+v)^m$ е делител на u^p+v^p , што не е можно, бидејќи $(u+v)^m>(u+v)^p\geq u^p+v^p$. Според тоа, u и v се непарни броеви. Нека $u+v=2^a t$, каде a е природен број и t е непарен број. Да забележиме дека $\mathrm{NZD}(t,u)=\mathrm{NZD}(t,v)=1$. За $p=2$ имаме $u^2+v^2\equiv 2(\mathrm{mod}\,4)$, а кога p е непарен прост број имаме

$$\begin{aligned}u^p+v^p&=(2^a t-v)+v^p\\&=2^a t[(2^a t)^{p-1}-\tbinom{p}{1}(2^a t)^{p-2}v+...-2^a tv^{p-2}\tbinom{p}{p-2})+pv^{p-1}],\end{aligned}$$

каде pv^{p-1} е непарен број, а сите собирци освен него во средната заграда се парни броеви. Според тоа, ако p е непарен број, тогаш највисокиот степен на 2 кој е делител на u^p+v^p е 2^a , а ако $p=2$, тогаш е 2. Но десната страна на (1) е делива барем со $2^{1+(m-1)a}$. Затоа $1+(m-1)a\leq a$, а тоа е можно само за $a=1$. Добивме $u+v=2t$, каде t е непарен број, при што очигледно $t\geq 3$. Сега равенката (1) го добива видот

$$(2t-v)^p+v^p=2d^{m-p}t^m .$$

За $p=2$ имаме $t\,|\,2v^2$, што не е можно бидејќи $\mathrm{NZD}(t,v)=1$. Ако p е непарен прост број, добиваме

$$2^p t^{p-1}-\tbinom{p}{1}2^{p-1}t^{p-2}v+...-\tbinom{p}{p-2}4tv^{p-2}+2pv^{p-1}=2d^{m-p}t^{m-1} ,$$

од каде следува дека $t\,|\,p$, т.е. $t=p$. Но, сега сите членови со исключок на $2pv^{p-1}$ се деливи со p^2 , што не е можно.

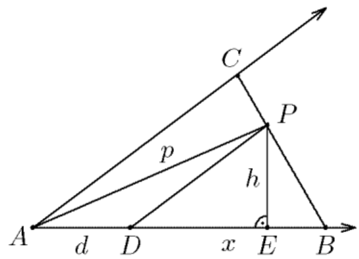
Според тоа, равенката нема решенија за кои $x\neq y$, со што тврдењето е докажано.

БМО 1994

1. Дадени се остар агол XAY и точка P во неговата внатрешност. Конструирај права која минува низ точката P и ги сече краците на аголот AX и AY соодветно во точките B и C така што плоштината на $\triangle ABC$ е еднаква на плоштината на квадрат со страна AP.

Решение. *Прв начин*. *Анализа*. Нека претпоставиме дека $\triangle ABC$ е конструиран и нека точките D и E припаѓаат на AB и се такви што $PD \parallel AC$ и $PE \perp AB$ (цртеж десно). Да означиме

$$\overline{AP} = p, \overline{AD} = d, \overline{PE} = h \text{ и } \overline{BD} = x.$$



Тогаш од условот следува дека p, d и h се познати и треба да се најде x. Од $\triangle ABC \sim \triangle DBP$ следува дека

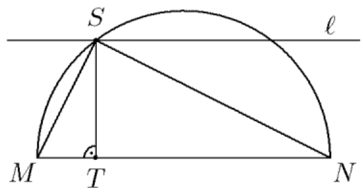
$$\frac{(d+x)^2}{x^2} = \frac{P_{\triangle ABC}}{P_{\triangle DBP}} = \frac{2p^2}{xh}.$$

Според тоа, x е корен на квадратната равенка $x^2 - 2bx + d^2 = 0$, каде $b = \frac{p^2 - dh}{h}$.

Конструкција. 1) Конструираме отсечка со должина $b = \frac{p^2}{h} - d$.

2) Конструираме отсечка $\overline{MN} = 2b$ и полукружница k со дијаметар MN (цртеж десно).

3) Во полурамнината на k конструираме права $l \parallel MN$ која од MN е на растојание d.



4) Конструираме нормала $ST \perp MN, T \in MN$.

5) Отсечките MT и NT имаат должини еднакви на корените на равенката $x^2 - 2bx + d^2 = 0$.

Доказ. Од правоаголниот $\triangle MNS$ имаме $\overline{MN} \cdot \overline{NT} = d^2$ и $\overline{MN} + \overline{NT} = 2b$.

Дискусија. Задачата има две решенија ако $d < b$, односно $2dh < p^2$, точно едно решение ако $d = b$, односно $2dh = p^2$ и нема решение ако $d > b$.

Втор начин. Со $S_{\mathbf{P}}$ ја означуваме плоштината на многуаголникот $\mathbf{P}$. Нека претпоставиме дека BC е бараната права. Нека M и N се точки соодветно на краците Ax и Ay такви што $PM \parallel Ay$ и $PN \parallel Ax$. Од сличноста на триаголниците BMP и PNC следува

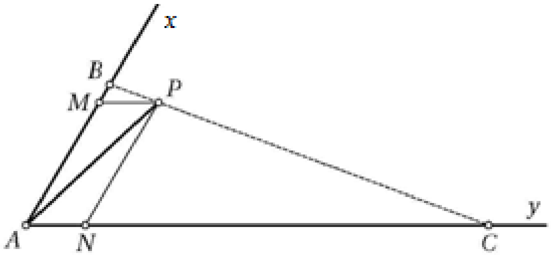
$\frac{\overline{BM}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{PN}}{\overline{NC}}$, т.е. $\frac{\overline{BM}}{\overline{AN}}=\frac{\overline{AM}}{\overline{NC}}$,

па затоа

$\overline{AC}=\overline{AN}+\overline{NC}=\overline{AN}(1+\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}})$.

Сега имаме

$$k=\frac{\overline{AP}^2}{P_{AMN}}=\frac{P_{ABC}}{P_{AMN}}=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\overline{AM}\cdot\overline{AN}}$$
$$=\frac{(\overline{AM}+\overline{BM})\cdot\overline{AN}\cdot(1+\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}})}{\overline{AM}\cdot\overline{AN}}$$
$$=2+\frac{\overline{BM}}{\overline{AM}}+\frac{\overline{AM}}{\overline{BM}}.$$



Значи, доволно е да се конструира отсечка BM таква што

$$\overline{BM}+\frac{\overline{AM}^2}{\overline{BM}}=d \text{, каде } d=(k-2)\overline{AM}.$$

Отсечка со должина d се конструира едноставно: ако h е висината од темето M во триаголникот AMP, тогаш $k=\frac{2\overline{AP}}{h}$ и $d=\frac{2(\overline{AP}-h)\overline{AM}}{h}$. Сега конструираме точка Z на кружницата над дијаметар XY, на растојание еднакво на $\overline{AM}$ од правата XY (таа постои ако и само ако $d\geq 2\overline{AM}$). Ако Z' е подножјето на нормалата од Z на XY, тогаш $\overline{AM}^2=\overline{XZ'}\cdot\overline{Z'Y}$, т.е. $\overline{XZ'}+\frac{\overline{AM}^2}{\overline{XZ'}}=\overline{XZ'}+\overline{YZ'}=d$, па можеме да земеме $BM\cong XZ''$.

Задачата има две решенија ако $d>2\overline{AM}$, едно решение ако $d=2\overline{AM}$ и нема решение ако $d<2\overline{AM}$.

2. Докажи, дека полиномот $P(x)=x^4-1994x^3+(1993+m)x^2-11x+m$, каде m е цел број, има најмногу еден целоброен корен.

Решение. *Прв начин*. Нека претпоставиме дека полиномот има барем два целобројни корени. Тогаш

$$x^4-1994x^3+(1993+m)x^2-11x+m=(x^2-ax+b)(x^2-cx+d)$$

каде a и b се цели броеви. Со споредување на коефициентите добиваме

$$a+c=1994 \tag{1}$$
$$ac+b+d=1993+m \tag{2}$$
$$ad+bc=11 \tag{3}$$
$$bd=m. \tag{4}$$

Од (1) следува дека c е цел број, а тогаш од (2) следува дека и d е цел број. Повторно од (1) следува дека a и c се со иста парност, а од (3) добиваме дека тие не може да се истовремено парни. Според тоа, a и c се непарни, па од (3) заклучуваме дека b и d се со различна парност. Сега од (4) следува дека m е парен број. Но, тоа значи дека левата страна на (2) е парна, а десната страна е непарна што е противречност.

Конечно, од добиената противречност следува дека полиномот има најмногу еден целоброен корен.

Втор начин. Нека претпоставиме дека x е целобројна нула на дадениот полином. Тогаш

$$-m=\frac{x^4-1994x^3+1993x^2-11x}{x^2+1}=x^2-1994x+1992+\frac{1983x-1992}{x^2+1}.$$

Според тоа, x^2+1 е делител на $1983x-1992$, па затоа x^2+1 е делител на $1983^2x^2-1992^2=1983^2(x^2+1)-(1983^2+1992^2)$. Тоа значи дека x^2+1 е делител на $1983^2+1992^2=3^2\cdot 877817$. Последното е можно само за $x=0$, бидејќи кога $x\neq 0$ имаме $x^2+1\nmid 3^2$, а 877187 е прост број и не е од видот x^2+1. Од претходно изнесеното следува дека дадениот полином може да има најмногу една целобројна нула.

3. Нека $(a_1,a_2,...,a_n)$ е пермутација на броевите $1,2,...,n$, $n\geq 2$. Определи ја најголемата можна вредност на изразот

$$\sum_{k=1}^{n-1}|a_{k+1}-a_k|.$$

Решение. *Прв начин*. Да означиме

$$S=|a_n-a_1|+\sum_{k=1}^{n-1}|a_{k+1}-a_k| \qquad (1)$$

и на реалната оска да ги разгледаме точките $A_1,A_2,...,A_n$ со координати $a_1,a_2,...,a_n$, соодветно. Тогаш збирот S е еднаков на должината на затворената искршена линија $A_1A_2...A_nA_1$. Ќе ја оцениме оваа должина ако го разгледаме покривањето на интервалите од видот $[k,k+1]$, каде $k\in\{1,2,...,n-1\}$.

Ако $k<\frac{n}{2}$, интервалот $[k,k+1]$ е покриен најмногу $2k$ пати, бидејќи на располагање имаме најмногу k леви краеви на покривните отсечки, а секоја точка е крајна за две отсечки. Аналогно при $k\geq\frac{n}{2}$ интервалот $[k,k+1]$ е покриен најмногу $2(n-k)$ пати. Според тоа, кога $n=2m$ имаме

$$S\leq 2[1+2+...+m+(m-1)+...+2+1]=2m^2,$$

а кога $n=2m+1$ имаме

$$S\leq 2[1+2+...+m+m+(m-1)+...+2+1]=2m(m+1).$$

Можеме да ги обединиме двете оценки со

$$S\leq 2m(n-m),\text{ каде } m=[\tfrac{n}{2}].$$

Бидејќи $|a_n - a_1| \geq 1$ бараниот збир е помал или еднаков на $2m(n-m-1)$.

Не е тешко да се провери дека пермутацијата зададена со $a_{2k} = k$ и $a_{2k-1} = n-m-k$, за $k = 1,2,...,m$, $a_n = m+1$, ако n е непарен број, дава збир $2m(n-m)-1$. Според тоа, бараната најголема вредност е $[\frac{n}{2}](n-[\frac{n}{2}])-1$.

Втор начин. Да означиме $S = \sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{i+1}|$, каде $a_{n+1} = a_1$. Овој збир може да се запише во видот

$$S = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i (a_i - a_{i+1}) = \sum_{i=1}^{n} c_i a_i \text{ , за некои } \varepsilon_i \in \{-1,1\} \text{ и } c_i = \varepsilon_i - \varepsilon_{i-1},$$

при што $\varepsilon_0 = \varepsilon_n$. За секој i важи $c_i \in \{-2,0,2\}$. Ги разгледуваме множествата $A = \{i \,|\, c_i = 2\}$ и $B = \{i \,|\, c_i = -2\}$. Од $c_1 + c_2 + ... + c_n = 0$ следува дека $|A| = |B|$ $= k$, за некој $k \leq \frac{n}{2}$. Според тоа,

$$S = 2\sum_{i\in A} x_i - \sum_{i \in B} x_i \leq 2(n+(n-1)+...+(n-k+1)) - 2(1+2+...+k) = 2k(n-k).$$

Изразот $2k(n-k)$ прима најголема вредност за $k = [\frac{n}{2}]$, па затоа

$$S \leq 2k(n-k) \text{, каде } k = [\tfrac{n}{2}].$$

Бидејќи $|a_n - a_1| \geq 1$ бараниот збир е помал или еднаков на $2m(n-m)-1$.

Равенство се достигнува, на пример, за пермутацијата

$$(a_1, a_2, ..., a_n) = (m+1, 1, m+2, 2, m+3, 3, ..., m) \text{, каде } m = n - [\tfrac{n}{2}].$$

Според тоа, бараната најголема вредност е $[\frac{n}{2}](n-[\frac{n}{2}])-1$.

4. Определи го најмалиот број $n \geq 5$ за кој постои група од n лица, така што секои две лица кои се познаваат немаат заеднички познаник, а секои две лица кои не се познаваат имаат точно два заеднички познаници. (Ако $A \neq B$ и A го познава B, тогаш и B го познава A .)

Решение. Нека A е фиксиран член на групата и $A_1, A_2, ..., A_r$ се познаниците на A. Тогаш од условот на задачата следува дека меѓу лицата $A_1, A_2, ..., A_r$ не постојат двајца кои се познаваат и за секои две лица A_i и A_j, $1 \leq i < j \leq r$ постои точно едно лице $A_{ij} \neq A$ кое се познава со двајцата. Освен тоа, не постојат две од лицата A_{ij} кои се познаваат меѓу себе, бидејќи во спротивно ќе има член на групата кој има барем три заеднички познаници со A.

Множеството членови A_{ij}, $1 \leq i < j \leq r$ всушност е множеството од оние лица кои не го познаваат A. Според тоа, $n = 1 + r + \binom{r}{2}$, од каде наоѓаме $r = \frac{\sqrt{8n-7}-1}{2}$.

Добиениот израз за r не зависи од изборот на A, што значи дека сите членови на групата имаат ист број познаници.

Од условот $n \geq 5$ следува $r \geq 3$. Уште повеќе, бидејќи познаниците на $A_{1,2}$ се A_1, A_2 и уште $r-2$ членови на множеството $\{A_{ij} \mid 3 \leq i < j \leq r\}$ треба да биде исполнето неравенството $r-2 < \binom{r-2}{2}$, па затоа $r \geq 5$ и $n \geq 16$.

Ќе дадеме пример на група од 16 лица $A, A_1, A_2, ..., A_5, A_{1,2}, A_{1,3}, ..., A_{4,5}$ во која познанствата се меѓу следниве парови

1) $(A, A_i), i = 1, 2, ..., 5$
2) (A_i, A_{ij}), $(A_j, A_{ij}), 1 \leq i < j \leq 5$,
3) $(A_{ij}, A_{km}), 1 \leq i < j \leq 5, 1 \leq k < m \leq 5, \{i, j\} \cap \{k, m\} = \varnothing$.

Лесно се проверува дека оваа група ги има саканите својства, па затоа најмалиот број е 16.

БМО 1995

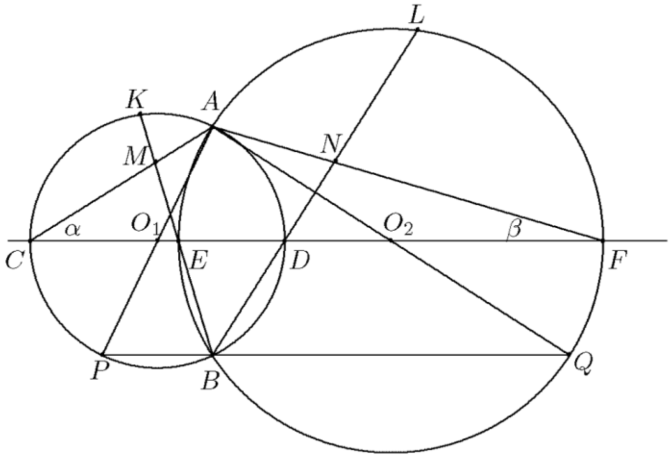
1. Определи ја вредноста на изразот
$$(...(((2*3)*4)*5)*...)*1995$$
каде $x*y=\frac{x+y}{1+xy}$ за произволни позитивни броеви x и y.

Решение. *Прв начин.* Нека $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ и $n*=(...(((2*3)*4)*5)*...)*n$. Непосредно се проверува дека $f(x*y)=f(x)f(y)$ и затоа
$$f(n*)=f(2)f(3)...f(n)=(-1)^n\frac{2}{n(n+1)}.$$
Оттука, ако во $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ ставиме $x=n*$ добиваме $f(n*)=\frac{1-n*}{1+n*}$, односно
$$n*=\frac{1-f(n*)}{1+f(n*)}=\frac{n(n+1)+2(-1)^n}{n(n+1)-2(-1)^n}.$$
Во случајов $1995*=\frac{1991009}{1991011}$.

Втор начин. Со индукција се докажува дека $n*=\frac{n(n+1)+2(-1)^n}{n(n+1)-2(-1)^n}$, за $n\ge 3$. Навистина, за $n=3$ имаме $2*3=\frac{2+3}{1+2\cdot 3}=\frac{5}{7}=\frac{3\cdot 4-2}{3\cdot 4+2}=\frac{3\cdot 4+2(-1)^3}{3\cdot 4-2(-1)^3}$. Нека претпоставиме дека за $n-1$ важи $(n-1)*=\frac{(n-1)n+2(-1)^{n-1}}{(n-1)n-2(-1)^{n-1}}$. Тогаш
$$n*=((n-1)*)*n=\frac{(n-1)n+2(-1)^{n-1}+n((n-1)n-2(-1)^{n-1})}{(n-1)n-2(-1)^{n-1}+n((n-1)n+2(-1)^{n-1})}$$
$$=\frac{(n-1)n+n(n-1)n-2(-1)^{n-1}(n-1)}{(n-1)n+n(n-1)n+2(-1)^{n-1}(n-1)}=\frac{n+n^2-2(-1)^{n-1}}{n+n^2+2(-1)^{n-1}}=\frac{n(n+1)+2(-1)^n}{n(n+1)-2(-1)^n}.$$
Во случајов $1995*=\frac{1991009}{1991011}$.

2. Дадени се кружниците $c_1(O_1,r_1)$ и $c_2(O_2,r_2)$, кои се сечат во точките A и B, при што $r_2>r_1$ и $\measuredangle O_1AO_2=90^\circ$. Правата O_1O_2 ја сече c_1 во точките C и D, а c_2 ја сече во точките E и F (E е меѓу C и D, а D е меѓу E и F). Правата BE ги сече кружницата c_1 во точката K и правата AC во точката M, а правата BD ги сече кружницата c_2 во точката L и правата AF во точката N. Докажи, дека
$$\frac{r_2}{r_1}=\frac{\overline{KE}}{\overline{KM}}\cdot\frac{\overline{LN}}{\overline{LD}}.$$

Решение. *Прв начин.* Нека $P=AO_1\cap c_1$, $Q=AO_2\cap c_2$, $\measuredangle ACO_1=\alpha$ и $\measuredangle AFO_2=\beta$. Тогаш $\measuredangle AFL=\measuredangle ABD=\measuredangle ACD=\alpha$ и аналогно $\measuredangle ACK=\beta$. Од друга страна имаме $\measuredangle APB=2\alpha$ и $\measuredangle AQB=2\beta$. Сега од $\triangle MKC$ и $\triangle CKE$ соодветно добиваме, дека $\overline{KM}=\frac{\overline{CK}\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)}$ и $\overline{KE}=\frac{\overline{CK}\sin(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$. Според тоа, $\frac{\overline{KE}}{\overline{KM}}=\frac{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}{\sin\beta\cos\beta}$ и аналогно $\frac{\overline{LN}}{\overline{LD}}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$. Од последните две равенства следува $\frac{\overline{KE}}{\overline{KM}}\cdot\frac{\overline{LN}}{\overline{LD}}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}$. Останува да забележиме, дека $\measuredangle ABP=\measuredangle ABQ=90^\circ$ и значи $\frac{\overline{AB}}{2r_1}=\sin 2\alpha, \frac{\overline{AB}}{2r_2}=\sin 2\beta$. Според тоа,

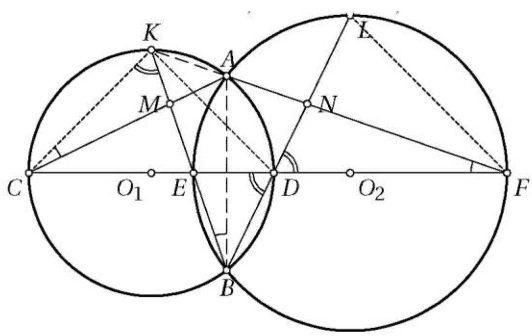


$$\frac{r_1}{r_2}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\beta}=\frac{\overline{KE}}{\overline{KM}}\cdot\frac{\overline{LN}}{\overline{LD}}.$$

Забелешка. Тврдењето на задачата го докажавме без да го искористиме условот $\measuredangle O_1AO_2=90^\circ$, што значи дека задачата е предефинирана.

Втор начин. Бидејќи

$$\begin{aligned}\measuredangle KCD=\measuredangle EBD&=180^\circ-\measuredangle BED-\measuredangle BDE\\&=180^\circ-(90^\circ-\tfrac{1}{2}\measuredangle BO_2E)-(90^\circ-\tfrac{1}{2}\measuredangle BO_1D)\\&=\tfrac{1}{2}\measuredangle O_1BO_2=45^\circ\end{aligned}$$



и

$$\measuredangle CAF \;=\; 90^\circ + 90^\circ - \measuredangle E\,AD = 135^\circ,$$

точките F, A и k се колинеарни. Аналогно $\measuredangle LFD = 45^\circ$. Сега ги имаме следниве сличности:

- $\triangle KCM \sim \triangle DFN$ ($\measuredangle KCM = \measuredangle KBA = \measuredangle DFN$ и $\measuredangle CKM = \measuredangle CDB = \measuredangle FDN$) и оттука следува $\overline{KM} = \overline{KC} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{DF}}$,
- $\triangle KEC \sim \triangle DLF$ ($\measuredangle KCE = \measuredangle DLF = 45^\circ$ и $\measuredangle CKE = \measuredangle FDL$) и оттука следува $\overline{KE} = \overline{KC} \cdot \frac{\overline{LD}}{\overline{FD}}$,
- $\triangle KDN \sim \triangle FLN$ ($KD \parallel LF$ и $A \in KN$) и оттука следува $\overline{LN} = \overline{LF} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{KD}}$.

Сега,

$$\frac{\overline{KE}}{\overline{KM}} \cdot \frac{\overline{LN}}{\overline{LD}} = \frac{\overline{KC} \cdot \frac{\overline{LD}}{\overline{FD}}}{\overline{KC} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{DF}}} \cdot \frac{\overline{LF} \cdot \frac{\overline{DN}}{\overline{KD}}}{\overline{LD}} = \frac{\overline{LF}}{\overline{KD}} = \frac{r_2\sqrt{2}}{r_1\sqrt{2}} = \frac{r_2}{r_1}.$$

3. Нека $a, b \in \mathbb{N}, a > b$ и $a+b$ е парен број. Докажи, дека корените на равенката

$$x^2 - (a^2 - a + 1)(x - b^2 - 1) - (b^2+1)^2 = 0$$

се природни броеви, но ниту еден од нив не е точен квадрат.

Решение. Корените на равенката се $x_1 = b^2 + 1$ и $x_2 = a^2 - b^2 - a$. Јасно, тие се природни броеви и x_1 не е точен квадрат. Да претпоставиме дека постојат природни броеви $a > b$, за кои $a+b$ е парен број и x_2 е точен квадрат, на пример c^2. Тогаш $m = \frac{a+b}{2}$ и $n = \frac{a-b}{2}$ се природни броеви и важи

$$(4m-1)(4n-1) = 4(4mn - m - n) + 1 = 4(a^2 - b^2 - a) + 1 = (2c)^2 + 1.$$

Според тоа, бројот $(2c)^2 + 1$ има прост делител од видот $4k-1$. Како што е познато, на пример, следува од малата теорема на Ферма, дека тој делител треба да е делител на $2c$ и 1, што е противречност.

4. Нека n е природен број и S е множеството од сите точки (x, y), каде x и y се природни броеви и $x \le n, y \le n$. Нека $\mathbf{T}$ е множеството од сите квадрати со темиња од S. Со a_k, $k \ge 0$ да го означиме бројот на паровите точки од S, кои се темиња на точно k квадрати од $\mathbf{T}$. Докажи дека $a_0 = a_2 + 2a_3$.

Решение. Бидејќи $a_k = 0$, за $k > 3$, бројот на паровите различни точки од S е еднаков на $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = \binom{n^2}{2}$. Бројот на квадратите од $\mathbf{T}$, чии страни се паралелни со координатните оски и имаат должина k е еднаков на $(n-k)^2$.

Секој од тие квадрати содржи $k-1$ квадрати чии темиња лежат на неговите страни и чии страни се паралелни со координатните оски. Според тоа, бројот на сите квадрати од $\mathbf{T}$ е еднаков на

$$\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)j^2 = n\sum_{j=1}^{n-1} j^2 - \sum_{j=1}^{n-1} j^3 = n\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} - \frac{n^2(n-1)^2}{4} = \frac{n^2(n^2-1)}{12}.$$

Од друга страна, ако земеме предвид дека темињата на секој квадрат генерираат 6 парови точки од S, добиваме дека бројот на сите квадрати од $\mathbf{T}$ е еднаков на $\frac{a_1+2a_2+3a_3}{6}$. Според тоа,

$$a_1+2a_2+3a_3 = \frac{n^2(n^2-1)}{2} = \binom{n^2}{2} = a_0+a_1+a_2+a_3,$$

од каде следува дека $a_0 = a_2 + 2a_3$.

БМО 1996

1. Нека G и O се соодветно тежиштето и центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, а R и r соодветно се радиусите на опишаната и впишаната кружница. Докажи дека $\overline{OG} \le \sqrt{R(R-2r)}$.

   Решение. Ако го искористиме равенството на Лајбниц $\overline{OG}^2 = R^2 - \frac{a^2+b^2+c^2}{9}$, добиваме дека даденото неравенство е еквивалентно на неравенството
   $$a^2 + b^2 + c^2 \ge 18Rr .$$
   Но, $R = \frac{abc}{4P}$ и $r = \frac{2P}{a+b+c}$, па затоа доволно е да докажеме дека
   $$(a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2) \ge 9abc .$$
   Последното следува ако ги помножиме неравенствата
   $$a+b+c \ge 3\sqrt[3]{abc} \text{ и } a^2 + b^2 + c^2 \ge 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} .$$

2. Нека $p > 5$ е прост број и $X = \{p - n^2 \mid n \in \mathbb{N}, n^2 < p\}$. Докажи, дека множеството X содржи два различни елементи x и y такви што $x \ne 1$ и $x \mid y$.

   Решение. *Прв начин*. Нека $m = [\sqrt{p}]$, $x = p - m^2$ и $y = p - |m-x|^2$. Тогаш
   $$y = m^2 + x - (m-x)^2 = x(2m+1-x) ,$$
   па затоа $x \mid y$. Освен тоа, од $x + m^2 = p < (m+1)^2$ следува дека $x < 2m+1$, т.е. $y > 0$. Исто така, $m \ne x$ бидејќи $p \ne m^2$. Освен тоа, $y \ne x$, бидејќи во спротивно $x = 0$ или $x = 2m$, од каде следува $p = m^2$ или $p = m(m+2)$, т.е. $m = 1$ и $p = 3$. Од досега изнесеното следува дека $x, y \in X$ и $x \mid y$. Ако $x \ne 1$, тогаш задачата е решена. За $x = 1$ следува дека m е парен број и затоа $2m = p - (m-1)^2$ е делител на $m^2 = p - 1^2$. Останува да забележиме дека $2m < m^2$, бидејќи во спротивно $m = 2$ и $p = 1 + 2^2 = 5$.

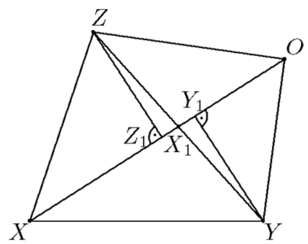
   Втор начин. Нека $n^2 < p < (n+1)^2$. Ако е $p - n^2 > 1$ земаме $x = p - n^2$. Јасно, $x \mid p - (x-n)^2$. Бидејќи броевите $n^2 + n$ и $n^2 + 2n$ се сложени, нора да важи $x \le 2n-1$ и $x \ne n$, т.е. $0 < |x-n| < n$, па можеме да земеме $y = p - (x-n)^2$.

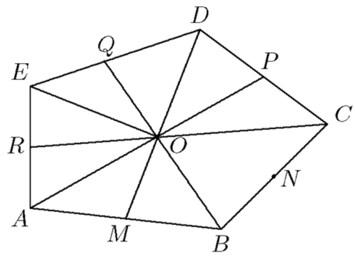
   Ако е $p - n^2 = 1$, земаме $x = p - (n-1)^2 = 2n$ и $y = p - 1^2 = n^2$. Бројот n мора да е парен, па затоа $2n \mid n^2$.

3. Нека $ABCDE$ е конвексен петаголник и нека M, N, P, Q и R се средините на

страните AB, BC, CD, DE и EA, соодветно. Ако AP, BQ, CR и DM се сечат во една точка, докажи дека таа точка лежи на отсечката EN.

Решение. Ќе докажеме, дека точката O лежи на тежишната линија XX_1 на $\triangle XYZ$ ако и само ако $P_{XYO} = P_{XZO}$. Навистина, $\frac{P_{XYO}}{P_{XZO}} = \frac{\overline{Y_1Y}}{\overline{Z_1Z}} = \frac{\overline{X_1Y}}{\overline{X_1Z}}$. Според тоа, $P_{XYO} = P_{XZO}$ ако и само ако X_1 е средина на YZ.





Сега, ако O е заедничка точка на AP, BQ, CR и DM, последователно добиваме $P_{BEO} = P_{BDO} = P_{ADO} = P_{ACO} = P_{CEO}$. Според тоа, $P_{BEO} = P_{CEO}$, т.е. EO минува низ средината N на отсечката BC.

4. Докажи, дека постои подмножество A на множеството $\{1,2,3,4,...,2^{1996}-1\}$ со следниве својства:

1) $1, 2^{1996}-1 \in A$,
2) Секој елемент од $A \setminus \{1\}$ е збир на два (не задолжително различни) елементи од A,
3) Бројот на елементите на A е најмногу 2012.

Решение. *Прв начин*. Нека $f(n)$ е најмалиот можен број на елементи на подмножеството A од множеството $\{1,2,3,4,...,2^n\}$, кое ги задоволува условите 1) и 2). Тогаш

- $f(2^{n+1}-1) \le f(2^n-1)+2$. Навистина, $B = A \cup \{2^{n+1}-2, 2^{n+1}-1\}$ е подмножество на $\{1,2,3,...,2^{n+1}\}$ кое ги задоволува условите 1) и 2), бидејќи
$$2^{n+1}-2 = 2^n-1+2^n-1 \text{ и } 2^{n+1}-1 = 1+2^{n+1}-2 .$$
- $f(2^{2n}-1) \le f(2^n-1)+(n+1)$. Навистина
$$C = A \cup \{2(2^n-1), 2^2(2^n-1), ..., 2^n(2^n-1), 2^{2n}-1\}$$
е подмножество на $\{1,2,3,...,2^{2n}-1\}$, кое ги задоволува условите 1) и 2), бидејќи
$$2^{j+1}(2^n-1) = 2^j(2^n-1)+2^j(2^n-1) \text{, за } j = 0,1,...,n-1$$

и

$$2^{2n}-1=2^n(2^n-1)+2^n-1.$$

Тогаш

$$\begin{array}{ll}
f(2^{1996}-1)\le f(2^{998}-1)+999, & f(2^{998}-1)\le f(2^{499}-1)+500,\\
f(2^{499}-1)\le f(2^{498}-1)+2, & f(2^{498}-1)\le f(2^{249}-1)+250,\\
f(2^{249}-1)\le f(2^{248}-1)+2, & f(2^{248}-1)\le f(2^{124}-1)+125,\\
f(2^{124}-1)\le f(2^{62}-1)+63, & f(2^{62}-1)\le f(2^{31}-1)+32,\\
f(2^{31}-1)\le f(2^{30}-1)+2, & f(2^{30}-1)\le f(2^{15}-1)+16,\\
f(2^{15}-1)\le f(2^{14}-1)+2, & f(2^{14}-1)\le f(2^{7}-1)+8,\\
f(2^{7}-1)\le f(2^{6}-1)+2, & f(2^{6}-1)\le f(2^{3}-1)+4,\\
f(2^{3}-1)\le f(2^{2}-1)+2, & f(2^{2}-1)\le f(2^{1}-1)+2,\\
f(2^{1}-1)\le 1. &
\end{array}$$

Ако ги собереме горните неравенства, после скратувањето добиваме

$$f(2^{1996}-1)\le 2012.$$

Втор начин. Со $a_0(x)$ и $a_1(x)$ ќе го означуваме бројот на нулите и единиците во бинарниот запис на природниот број x. Со индукција по n ќе докажеме дека постои множество $A_n \subset \mathbb{N}$ кое го задоволува условот 2) такво што $1, 2^n-1 \in A_n$ и $|A_n| \le n-2+a_0(n)+2a_1(n)$. Бидејќи $a_0(1996)=4$ и $a_1(1996)=7$ ($1996=11111001100_2$), од тука ќе следува тврдењето на задачата.

За $n=1$ тврдењето важи. Нека претпоставиме дека $n=2k, k\in\mathbb{N}$. Тогаш за множеството A_n доволно е да земеме

$$A_k \cup \{2^{k+1}-2, 2^{k+2}-2^2, \ldots, 2^{2k}-2^k, 2^{2k}-1\}.$$

Навистина, лесно се гледа дека множеството го задоволува условот 2) и има $2k-1+a_0(k)+2a_1(k)=n-2+a_0(n)+2a_1(n)$ елементи.

Нека сега $n=2k+1, k\in\mathbb{N}$. Слично како во претходниот случај за множеството A_n можеме да го земеме множеството

$$A_k \cup \{2^{k+1}-2, 2^{k+2}-2^2, \ldots, 2^{2k+1}-2^{k+1}, 2^{k+1}-1, 2^{2k+1}-1\}.$$

БМО 1997

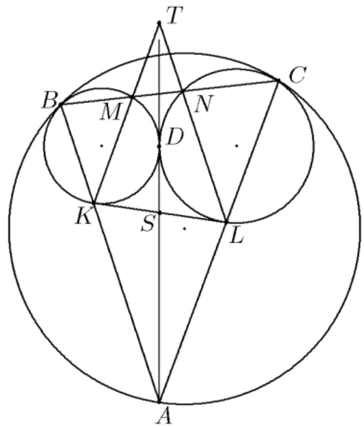
1. Нека O е внатрешна точка на конвексен четириаголник $ABCD$ со плоштина P таква што $\overline{OA}^2+\overline{OB}^2+\overline{OC}^2+\overline{OD}^2=2P$. Докажи, дека $ABCD$ е квадрат со центар O.
Решение. Имаме
$$\begin{aligned}4P_{ABCD}&=4(P_{AOB}+P_{BOC}+P_{COD}+P_{DOA})\\&=2\overline{OA}\cdot\overline{OB}\sin\measuredangle AOB+2\overline{OB}\cdot\overline{OC}\sin\measuredangle BOC\\&\quad+2\overline{OC}\cdot\overline{OD}\sin\measuredangle COD+2\overline{OD}\cdot\overline{OA}\sin\measuredangle DOA\\&\le(\overline{OA}^2+\overline{OB}^2)+(\overline{OB}^2+\overline{OC}^2)+(\overline{OC}^2+\overline{OD}^2)+(\overline{OD}^2+\overline{OA}^2)\\&=4P=4P_{ABCD}.\end{aligned}$$
Тогаш од горното неравенство следува дека $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}=\overline{OD}$ и четирите синуси се еднакви на 1. Според тоа, четириаголникот $ABCD$ е квадрат со центар O.

2. Нека S е множество со $n\ge2$ елементи и $A_1,A_2,...,A_m$ $(m\ge2)$ се подмножества од S со следново својство: за секои два различни елементи x и y од S постои подмножество A_i кое содржи точно еден од овие два елементи. Докажи дека $2^m\ge n$.
Решение. *Прв начин*. Нека $S=\{x_1,x_2,...,x_n\}$ и $x_i\in A_{i_1},A_{i_2},...,A_{i_{k(i)}}$. Од условот следува дека ако $i\ne j$, тогаш
$$\{A_{i_1},A_{i_2},...,A_{i_{k(i)}}\}\ne\{A_{i_1},A_{i_2},...,A_{j_{k(j)}}\}.$$
Бројот на сите подмножества на множеството $\{A_1,A_2,...,A_m\}$ е еднаков на 2^m и овој број не е помал од бројот на елементите на S.
Втор начин. На секој елемент a од множеството S му придружуваме низа од нули и единици $[a]=(x_1,...,x_k)$, каде $x_i=1$ ако $a\in A_i$ и $x_i=0$ ако $a\notin A_i$. Според условот на задачата сите низи $[a]$ се различни. Но, низи со должина m има 2^m, па затоа $2^m\ge n$.

3. Нека C_1 и C_2 се две кружници, кои надворешно се допираат во точка D, а Γ е кружница која C_1 и C_2 внатрешно ја допираат соодветно во точки B и C. Со A да ја означиме едната од двете пресечни точки на Γ со заедничката тангента на C_1 и C_2 во точката D. Ако K и L се пресечните точки на AB и AC соодветно со C_1 и C_2, а M и N се пресечните точки на BC соодветно со C_1 и C_2, докажи дека правите AD, KM и LN се сечат во една точка.

Решение. *Прв начин*. Нека i е инверзија со центар A и радиус AD. Бидејќи $i(C_1)=C_1$, $i(C_2)=C_2$, $i(B)=K$, $i(C)=L$ и $i(\Gamma)=KL$, заклучуваме дека KL е заедничка тангента на C_1 и C_2. Од друга страна,

$$\overline{AK}\cdot\overline{AB}=\overline{AD}^2=\overline{AL}\cdot\overline{AC},$$

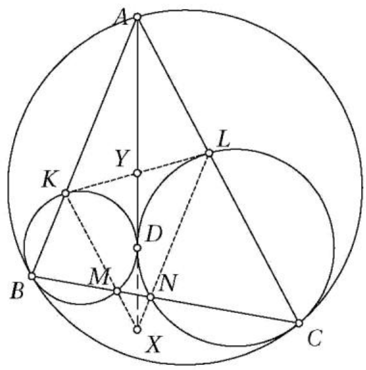


па затоа четириаголникот $BCLK$ е тетивен. Ако $T=KM\cap LN$, тогаш

$$\measuredangle LKT=\measuredangle KBC=\measuredangle ALK,$$

па затоа $KT\,||\,AL$. Аналогно $LT\,||\,AK$, од каде што следува дека четириаголникот $AKTL$ е паралелограм. Според тоа, AT ја полови KL. Од друга страна, ако $S=AD\cap KL$, тогаш $\overline{SK}=\overline{SD}=\overline{SL}$, како тангенти. Значи, и AD ја полови KL, па затоа $T\in AD$.

Втор начин. Нека правите KM и LN се сечат во точката X. Хомотетијата H_B која кружницата C_1 ја пресликува во кружницата Γ ги пресликува точките K и M во точките A и C, соодветно, па затоа $KM\,||\,AC$. Аналогно $LN\,||\,AB$. Според тоа, четириаголникот $AKXL$ е паралелограм, што значи дека AX минува низ средината Y наотсечката KL. Од друга страна важи



$$\overline{AK}\cdot\overline{AB}=\overline{AD}^2=\overline{AL}\cdot\overline{AC},$$

па затоа четириаголникот $BCLK$ е тетивен. Затоа $\measuredangle AKL=\measuredangle ACB=\measuredangle KMB$, па правата KL ја допира кружницата C_1. Слично, Kl ја допира кружницата C_2. Според тоа, ако правите AD и KL се сечат во точката Y', тогаш од $\overline{Y'K}=\overline{Y'D}=\overline{Y'L}$ следува дека $Y'\equiv Y$, т.е. правите AD и AX се совпаѓаат, од каде следува тврдењето на задачата.

4. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што

$$f(xf(x)+f(y))=(f(x))^2+y, \text{ за секои } x,y\in\mathbb{R}.$$

Решение. За $x=0$ добиваме $f(f(y))=y+(f(0))^2$. Според тоа, $f(f(y))$, па затоа и $f(y)$ е сурјекција. Тогаш, ако $f(a)=0$, со замена во равенката добиваме $f(f(y))=y$, од каде следува дека $f(0)=0$. Сега, за $y=0$ од условот добиваме $f(xf(x))=(f(x))^2$. Според тоа

$$(f(x))^2=f(xf(x))=f(f(f(x))\cdot f(x))=[f(f(x))]^2=x^2.$$

Ако $f(x)=x$ и $f(y)=-y$ за некои x и y, тогаш од условот следува дека $f(x^2-y)=x^2+y$. Оттука добиваме $\pm(x^2-y)=x^2+y$, т.е. $x=0$ или $y=0$. Значи, $f(x)=x$ или $f(x)=-x$ за секој $x\in\mathbb{R}$. Очигледно овие функции се решенија на задачата.

БМО 1998

1. Определи го бројот на различните членови на конечната низа со општ член $[\frac{k^2}{1998}]$, каде $k=1,2,...,1997$.

   Решение. Бидејќи разликата на два последователни членови на низата $\{\frac{k^2}{1998}\}_{k=1}^{999}$ е помала од 1, заклучуваме дека секои два соседни членови на низата $\{[\frac{k^2}{1998}]\}_{k=1}^{999}$ се еднакви или се разликуваат за 1. Бидејќи првиот член на таа низа е еднаков на $[\frac{0^2}{1998}]=0$, а последниот на $[\frac{999^2}{1998}]=499$, заклучуваме дека бројот на нејзините различни членови е 500. Од друга страна, разликата на два последователни членови на низата $\{\frac{k^2}{1998}\}_{k=1000}^{1997}$ е поголема од 1 и затоа членовите на низата $\{[\frac{k^2}{1998}]\}_{k=1000}^{1997}$ се различни.

   Конечно, дадената низа има $500+998=1498$ различни членови.

2. Нека $n\geq 2$ е природен број и $0<a_1<a_2<...<a_{2n+1}$ се реални броеви. Докажи го неравенството

$$\sqrt[n]{a_1}-\sqrt[n]{a_2}+...-\sqrt[n]{a_{2n}}+\sqrt[n]{a_{2n+1}}<\sqrt[n]{a_1-a_2+a_3-...-a_{2n}+a_{2n+1}}\,.$$

   Решение. Нека $m\geq 2$ е природен број. Со индукција по $n\geq 1$ ќе докажеме поопшто неравенство од даденото, т.е. ќе докажеме дека

$$\sqrt[m]{a_1}-\sqrt[m]{a_2}+...-\sqrt[m]{a_{2n}}+\sqrt[m]{a_{2n+1}}<\sqrt[m]{a_1-a_2+a_3-...-a_{2n}+a_{2n+1}}\,.$$

   За $n=1$ треба да докажеме дека

$$\sqrt[m]{a_1}-\sqrt[m]{a_2}+\sqrt[m]{a_3}<\sqrt[m]{a_1-a_2+a_3}\,,$$

   т.е.

$$(a-b+c)^m-a^m\leq c^m-b^m\,,$$

   каде $a=\sqrt[m]{a_1}, b=\sqrt[m]{a_2}, c=\sqrt[m]{a_3}$.Последното следува од

$$\begin{aligned}(a-b+c)^m-a^m&=(c-b)(a^{m-1}+a^{m-2}(c-b)+...+a(c-b)^{m-2}+(c-b)^{m-1})\\&<(c-b)(b^{m-1}+b^{m-2}c+...+bc^{m-2}+c^{m-1})\\&=c^m-b^m,\end{aligned}$$

   (искористивме дека $m>1, 0<a<b, 0<c-b<c$).

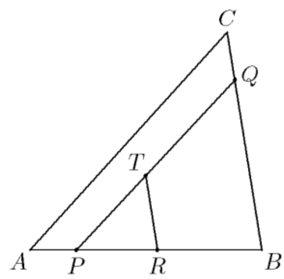
   Нека претпоставиме дека неравенството е точно за некој $n\geq 1$. Тогаш

$$\begin{aligned}&\sqrt[m]{a_1}-\sqrt[m]{a_2}+...-\sqrt[m]{a_{2n}}+\sqrt[m]{a_{2n+1}}-\sqrt[m]{a_{2n+2}}+\sqrt[m]{a_{2n+3}}<\\&<\sqrt[m]{a_1-a_2+a_3-...-a_{2n}+a_{2n+1}}-\sqrt[m]{a_{2n+2}}+\sqrt[m]{a_{2n+3}}\\&<\sqrt[m]{a_1-a_2+a_3-...-a_{2n}+a_{2n+1}-a_{2n+2}+a_{2n+3}}\end{aligned}$$

При што првото неравенство важи заради индуктивната претпоставка, а второто неравенство е веќе докажаната база на индукцијата, т.е. неравенството за три броја. Со тоа поопштото неравенство е докажано за $n+1$ и од принципот на математичка индукција следува дека тоа важи за секој природен број n.

3. Нека S е множеството внатрешни точки на даден триаголник без една контурна точка. Докажи, дека S може да се претстави како унија на затворени отсечки такви што не постојат две отсечки кои имаат заедничка точка.

Решение. Нека T е внатрешна точка на триаголникот ABC, Q е точка на страната BC таква што $TQ \parallel AC$, а P и R се точки на страната AB такви што $TP \parallel AC$ и $TR \parallel BC$. Ги разгледуваме сите затворени отсечки $XY, X \in AP, X \neq P$, $Y \in CQ, Y \neq Q$. Овие отсечки го покриваат трапезот $APQC$ без отсечката PQ. Аналогно, отсечките $MN, M \in QT, M \neq T, N \in BR, N \neq R$ го покриваат трапезот $TRBQ$ без отсечката TR. На крајот, на ист начин го покриваме $\triangle PRT$ без точката T со отсечки паралелни со PR.



4. Докажи, дека равенката $m^2 = n^5 - 4$ нема решенија во множеството цели броеви.

Решение. *Прв начин*. Од условот следува дека n е природен број и $n \geq 2$, т.е. доволно е да бараме решенија во множеството природни броеви. Лесно се проверува дека можните остатоци на квадрат на еден природен број при делење со 11 се 0, 1, 3, 4, 5 и 9, т.е. $m^2 \equiv 0,1,3,4,5,9 \pmod{11}$. Аналогно $n^5 \equiv 0,1,10 \pmod{11}$, па затоа $n^5 - 4 \equiv 6,7,8 \pmod{11}$. Од горните конгруенции следува дека $m^2 \not\equiv n^5 - 4 \pmod{11}$, што значи дека дадената равенка нема решенија во множеството цели броеви.

Втор начин. Равенката $m^2 = n^5 - 4$ нема решение по модул 11. Навистина, можни остатоци на m^2 по модил 11 се 0, 1, 3, 4, 5 и 9, а $n^5 - 4$ дава само остатоци 6, 7 и 8. Тоа значи дека равенката нема решение во множеството цели броеви.

БМО 1999

1. Даден е остроаголен триаголник ABC. Нека D е средина на помалиот лак BC на кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Точките E и F се симетрични на точката D соодветно во однос на правата BC и центарот на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Нека K е средина на отсечката EA.

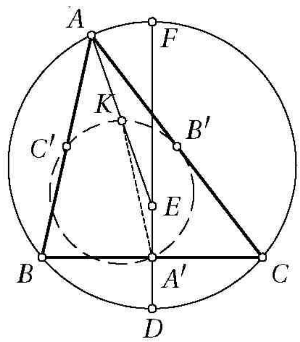
   а) Докажи дека кружницата која минува низ средините на страните на $\triangle ABC$ ја содржи точката K.

   б) Докажи дека правата која минува низ точката K и средината на страната BC е нормална на правата AF.

   Решение. а) Нека со A', B', C' соодветно ги означиме средините на страните BC, CA, AB. Отсечките KB' и KC' се средни линии на триаголниците AEC и AEB, па затоа

$$\measuredangle C'KB' = \measuredangle BEC = \measuredangle CDB = 180^\circ - \measuredangle BAC$$
$$= 180^\circ - \measuredangle B'A'C',$$

   што значи дека точката K лежи на кружницата $A'B'C'$.



   б) Отсечката KA' е средна линија во триаголникот EAD, па затоа $KA' \parallel AD$. Понатаму, DF е дијаметар на кружницата ABC па затоа атоа $AD \perp AF$. Конечно, од $KA' \parallel AD$ и $AD \perp AF$ следува $KA' \perp AF$.

2. Нека $p > 2$ е прост број таков што $3 \mid p-2$. Докажи, дека најмногу $p-1$ елементи на множеството

$$S = \{y^2 - x^3 - 1 \mid x, y \in \mathbb{Z}, 0 \le x, y \le p-1\}$$

   се деливи со p.

   Решение. Од $p \equiv 2 \pmod 3$ следува дека броевите $0^3, 1^3, \ldots, (p-1)^3$ даваат различни остатоци при делење со p. Навистина, ако $a^3 \equiv b^3 \pmod p$, тогаш со степенување на $\frac{p-2}{3}$ добиваме $a^{p-2} \equiv b^{p-2} \pmod p$. Но, $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \pmod p$, па затоа $a \equiv b \pmod p$. Според тоа, за секој $y \in \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ постои точно еден елемент $s_y = y^2 - x^3 - 1 \in S$ делив со p. Меѓутоа,

$$s_1 = 1^2 - 0^3 - 1 = 0 = 3^2 - 2^3 - 1 = s_3,$$

   па затоа меѓу елементите $s_0, s_1, \ldots, s_{p-1}$ има најмногу $p-1$ различни.

3. Нека M, N, P се подножјата на нормалите повлечени од тежиштето G на остроаголниот $\triangle ABC$ соодветно на страните AB, BC, CA. Докажи дека важи

$$\frac{4}{27} < \frac{P_{MNP}}{P_{ABC}} \le \frac{1}{4}. \qquad (1)$$

Решение. *Прв начин.* Ќе ги користиме стандардните ознаки a, b, c за страните на триаголникот соодветно наспроти темињата A, B, C, α, β, γ за соодветните агли и h_a, h_b, h_c за висините. Од

$$\overline{GM} = \tfrac{1}{3}h_c = \tfrac{1}{3}a\cos\beta, \overline{GN} = \tfrac{1}{3}h_a = \tfrac{1}{3}c\cos\beta \text{ и } \measuredangle MGN = 180^\circ - \beta$$

следува

$$P_{GMN} = \tfrac{1}{18}h_c h_a \sin\beta = \tfrac{1}{18}ac\sin^3\beta = \tfrac{1}{9}P_{ABC}\sin^2\beta.$$

Слично,

$$P_{GNP} = \tfrac{1}{9}P_{ABC}\sin^2\gamma \text{ и } P_{GPM} = \tfrac{1}{9}P_{ABC}\sin^2\alpha.$$

Според тоа, имаме

$$P_{MNP} = P_{GMN} + P_{GNP} + P_{GPM} = \tfrac{1}{9}P_{ABC}(\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma). \qquad (2)$$

Но,

$$K = \sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = \sin^2\alpha + 1 - \tfrac{\cos 2\beta + \cos 2\gamma}{2} = 1 + \sin^2\alpha + \cos\alpha\cos(\beta - \gamma),$$

па како $\cos\alpha < \cos(\beta - \gamma) \le 1$ следува

$$2 = 1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha < K \le 1 + \sin^2\alpha + \cos\alpha = 2 + \cos\alpha - \cos^2\alpha \le \tfrac{9}{4}. \qquad (3)$$

Конечно, неравенствата (1) следуваат од равенството (2) и неравенствата (3).

Втор начин. Нека O и R се центарот и радиусот на опишаната кружница околу триаголникот ABC и D е произволна точка во триаголникот ABC. Ако D_a, D_b, D_c се подножјата на нормалите повлечени од точката D на страните на триаголникот ABC, тогаш точна е Ојлеровата формула

$$P_{D_a D_b D_c} = \tfrac{1}{4}\left(1 - \tfrac{\overline{OD}^2}{R^2}\right)P_{ABC}.$$

Десното неравенство сега е очигледно и тоа за произволен триаголник, при што знак за равенство важи ако и само ако $G \equiv O$, т.е. триаголникот ABC е рамностран.

Левото неравенство може да биде подобрено. Поточно ќе докажеме дека $\frac{2}{9} < \frac{P_{MNP}}{P_{ABC}}$ ако и само триаголникот ABC е остроаголен. Навистина, од формулата на Ојлер следува дека последното неравенство е еквивалентно со неравенството $\frac{1}{4}\left(1 - \frac{\overline{OD}^2}{R^2}\right) > \frac{2}{9}$, т.е. со неравенството $R > 3\overline{OG}$. Бидејќи $3\overline{OG} = \overline{OH}$, добиваме дека $R > \overline{OH}$, каде H е ортоцентарот на триаголникот ABC. Тоа значи дека H е внатрешна точка за опишаната кружница околу триаголникот

ABC, што значи дека триаголникот е остроаголен.

4. Дадена е низата $0 \le x_0 \le x_1 \le x_2 \le \dots$ цели броеви таква што за секој $k \ge 0$ бројот на членовите кои не се поголеми од k е конечен (тој број да го означиме со y_k). Докажи дека за секои природни броеви m и n важи

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \ge (n+1)(m+1) .$$

Решение. *Прв начин.* Да ги обележиме сите точки (i, j), $i, j \ge 0$ на целобројната решетка во рамнината за кои важи $j < x_i$. За дадено i, бројот на обележените точки (i, j) е еднаков на x_i, па така во множеството

$$S = \{(i, j) \mid 0 \le i \le n, 0 \le j \le m\}$$

има најмногу $\sum_{i=0}^{n} x_i$ обележени точки. Од друга страна, за дадено j, необележени точки (i, j) за кои $i \ge 0$ има точно y_j, па така во множеството S има $\sum_{j=0}^{m} y_j$ необележени точки. Но, сите точки од множеството S се обележени или не се обележени, па затоа $\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j$ не е помал од бројот на точките на множеството S, т.е. од $(n+1)(m+1)$.

Втор начин. Тврдењето ќе го докажеме со индукција по $m+n$. Од условот на задачата следува дека за $m+n=0$ имаме $x_0 \ge 1$ или $y_0 \ge 1$. Нека претпоставиме дека тврдењето е точно за $m+n$. Ќе докажеме дека тоа важи за $m+n+1$. Ако $x_0 \ge m+1$, тогаш

$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \ge \sum_{i=0}^{n-1} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j + x_0 \ge n(m+1) + m + 1 = (n+1)(m+1) .$$

Ако $x_0 \le m$, од условот следува дека $y_m \ge n+1$ и тогаш

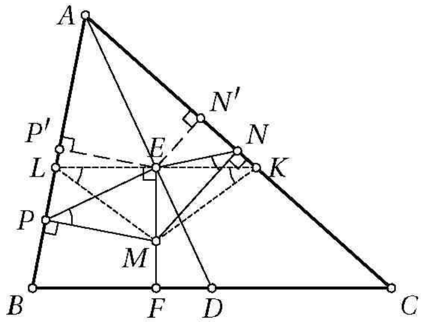
$$\sum_{i=0}^{n} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j \ge \sum_{i=0}^{n-1} x_i + \sum_{j=0}^{m} y_j + y_m \ge (n+1)m + n + 1 = (n+1)(m+1) .$$

БМО 2000

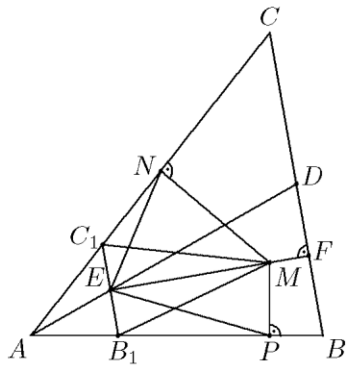
1. Задачата е иста со четвртата задача од БМО 1997 година

2. Нека ABC е разностран остроаголен триаголник и E е внатрешна точка на тежишната линија $AD\,(D \in BC)$. Нека точката F е подножјето на нормалата повлечена од точката E на правата BC, M е внатрепна точка на отсечката EF, а N и P се подножјата на нормалите повлечени од точката M на правите AC и AB, соодветно. Докажи дека правите на кои лежат симетралите на аглите PMN и PEN немаат заеднички точки.

Решение. *Прв начин.* Нека правата низ E паралелна на правата BC ги сече страните AC и AB соодветно во точките K и L. Од Талесовата теорема следува $\overline{EK} = \overline{EL}$, па затоа $\triangle MKL$ е рамнокрак. Освен тоа четириаголниците $MENK$ и $MELP$ се тетивни, па затоа важи $\measuredangle MNE = \measuredangle MKE = \measuredangle MLE = \measuredangle MPE$. Ако P' и N' се соодветно подножните точки на нормалите повлечени од точката E на страните AB и AC, тогаш од претходно изнесеното следува $\measuredangle PEP' = \measuredangle NEN'$, па затоа симетралите на аглите $\measuredangle PEN$ и $\measuredangle P'EN'$ се совпаѓаат. Бидејќи симетралите на аглите $\measuredangle P'EN'$ и $\measuredangle PMN$ се паралелни, останува само да забележиме дека тие не се совпаѓаат, бидејќи во спротивно двете симетрали би се совпаѓале со правата ME, што не е можно затоа што $\overline{AB} \neq \overline{AC}$.



Втор начин. Прво ќе докажеме дека $\measuredangle ENM = \measuredangle EPM$. Нека l е правата низ E паралелна со BC. Со B_1 и C_1 да ги означиме пресечните точки на l со AB и AC, соодветно. Јасно, E е средина на B_1C_1 и $EM \perp B_1C_1$. Според тоа, $\triangle B_1C_1M$ е рамнокрак, па затоа $\measuredangle MC_1B_1 = \measuredangle MB_1C_1$. Од друга страна $\measuredangle Mc_1B_1 = \measuredangle ENM$, бидејќи точките E, M, N, C_1 лежат на кружницата со дијаметар EM. Аналогно, $\measuredangle MB_1C_1 = \measuredangle EPM$, па затоа $\measuredangle ENM = \measuredangle EPM$.



Понатаму, $\measuredangle PMN$ и $\measuredangle PEN$ ќе ги поистоветуваме со соодветните внатрешни агли на четириаголникот $EPMN$ (може да е конкавен, па дури и дегенериран кога $E \in PN$).

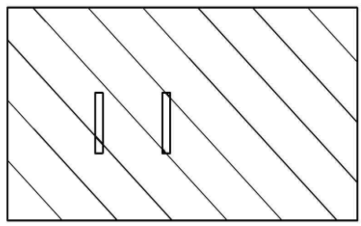
Без ограничување на општоста ќе сметаме дека симетралата на $\measuredangle PEN$ ја сече правата MP во точка Q. Тогаш

$$\measuredangle EQP = 180^\circ - \measuredangle PEQ - \measuredangle MPE = \tfrac{\measuredangle PMN}{2},$$

па затоа симетралите на $\measuredangle PEN$ и $\measuredangle PMN$ се паралелни. Останува да докажеме дека тие не се совпаѓаат. Имено, во спротивно симетралата на $\measuredangle PEN$ ќе минува низ M. Тогаш $\triangle EMN \cong \triangle EPN$, па затоа $\overline{MN} = \overline{MP}$. Сега $\triangle MNC_1 \cong \triangle MPB_1$, па затоа $\measuredangle MC_1N = \measuredangle MB_1P$. Бидејќи $\measuredangle MC_1B_1 = \measuredangle MB_1C_1$, следува дека $\measuredangle AC_1B_1 = \measuredangle AA_1C_1$. Тоа значи дека $\measuredangle ACB = \measuredangle ABC$, што противречи на условот дека триаголникот ABC е разностран.

3. Определи го најголемиот број правоаголници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$ кој може да се добие од правоаголник со димензии 50×90, ако е дозволено сечење по прави паралелни на страните на дадениот правоаголник.

Решение. Нека темињата на правоаголникот се $A(0,0), B(90,0), C(90,50)$ и $D(0,50)$. Да ги повлечеме правите



$$L_n:\ x + y = 10n\sqrt{2}\ ,$$

каде $n = 1,2,3,...,[\frac{90+50}{10\sqrt{2}}] = 9$ и да ги разгледуваме отсечките кои правоаголникот $ABCD$ ги отсекува од нив. Бидејќи горните прави зафаќаат агол од 45° со секоја од координатните оски, лесно се пресметува дека збирот на должините на отсечките од овие прави, кои лежат во произволен правоаголник со димензии $1\times 10\sqrt{2}$ и страни паралелни на координатните оски е $\sqrt{2}$. Со l_n да ја означиме должината на отсечката од правата L_n која лежи во внатрешноста на правоаголникот $ABCD$. Со едноставни пресметувања се добива дека

$$l_1 = 20,\quad l_2 = 40,\quad l_3 = 60,\quad l_4 = l_5 = l_6 = 50\sqrt{2},$$
$$l_7 = 140\sqrt{2} - 140,\ l_8 140\sqrt{2} - 160,\ l_9 = 140\sqrt{2} - 180.$$

Според тоа, вкупната должина на тие отсечки е еднаква на $570\sqrt{2} - 360$. Сега, ако вкупниот број на правоаголниоци со димензии е $1\times 10\sqrt{2}$, бидејќи секој ваков правоаголник покрива отсечка со должина $\sqrt{2}$, добиваме дека е сиполнето неравенството $t\sqrt{2} \le 570\sqrt{2} - 360$. Но, $316 > \frac{570\sqrt{2}-360}{\sqrt{2}} > 315$, па затоа $t \le [\frac{570\sqrt{2}-360}{\sqrt{2}}] = 315$.

Ќе покажеме како може да се отсечат 315 правоаголници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$.

Бидејќи $90 > 60\sqrt{2}$ дадениот правоаголник можеме да го поделиме на правоаголници со димензии $50\times 60\sqrt{2}$ и $50\times(90-60)\sqrt{2}$. Првиот правоаголник го делиме на 50 правоаголници со димензии $1\times 60\sqrt{2}$, а потоа секој од нив го делиме на 6 правоагиолници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$ и така првиот правоаголник може да подели на 300 правоаголници $1\times 10\sqrt{2}$. Бидејќи $(90-60)\sqrt{2} > 5$ и $50 > 30\sqrt{2}$ од вториот правоаголник може да се отсечат уште $3\cdot 5 = 15$ правоаголници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$, Според тоа, од дадениот правоаголник може да се добијат 315 правоаголници со димензии $1\times 10\sqrt{2}$.

4. Природниот број r го нарекуваме степен ако може да се прикаже во облик $r = t^s$, каде $t, s \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Докажи, дека за секој природен број n постои множество природни броеви A, кои ги задоволуваат условите
1) A има n елементи,
2) сите елементи на A се степени, и
3) за секои $r_i \in A, i = 1,2,...,k,\ 2 \le k \le n$ бројот $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} r_i$ е степен.

Решение. Ќе го користиме следново тврдење:
Лема. За секој $k \in \mathbb{N}$ постои $x \in \mathbb{N}$ таков што броевите $x, 2x, 3x, ..., kx$ се степени.
Доказ. Нека се $2 = p_1 < p_2 < ... < p_k$ првите k прости броеви. Броевите $i = 1,2,...,x$ ги запишуваме во видот $i = p_1^{r_{i,1}} p_2^{r_{i,2}} ... p_k^{r_{i,k}}$. Можеме да избереме x таков што ix е точен p_i − ти степен за $i = 1,2,...,k$. Навистина, доволно е да се најде x во видот $x = p_1^{s_1} p_2^{s_2} ... p_k^{s_k}$ таков што $s_j + r_{i,j}$ е делив со p_i за секои i, j, а такви степени $s_1, s_2, ..., s_k$ постојат според Кинеската теорема за остатоци. ■
Множеството A ќе го побараме во облик $\{m, 2m, 3m, ..., nm\}$. Ако ставиме $m = n!x$, тогаш сите броеви од видот $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} r_i$, за $r_i \in A, i = 1,2,...,k$ и $1 \le k \le n$ се цели и припаѓаат на множеството $B = \{x, 2x, ..., n\cdot n!x\}$. Сега е доволно да определиме x таков што сите елементи на множеството B се степени, а според лемата таков x постои.

БМО 2001

1. Нека n е природен број. Ако a и b се природни броеви поголеми од 1 и такви што $ab=2^n-1$, докажи дека бројот $ab-(a-b)-1$ е од видот $2^{2m}k$, каде k е непарен природен број, а m е природен број.

   Решение. *Прв начин*. Нека $a=2^r a_1-1$ и $b=2^s b_1+1$, каде a_1 и b_1 се непарни природни броеви и $r,s\geq 1$. Тогаш
   $$2^n-1=ab=(2^r a_1-1)(2^s b_1+1)=2^{r+s}a_1b_1+2^r a_1-2^s b_1-1,$$
   па затоа $2^r \mid 2^s b_1$ и $2^s \mid 2^r a_1$, што е можно ако и само ако $r=s$. Според тоа,
   $$ab-(a-b)-1=(a+1)(b-1)=2^{2r}a_1b_1,$$
   каде a_1b_1 е непарен природен број.

   Втор начин. За секој природен број c со $\deg_2(c)$ го означуваме најголемиот ненегативен цел број d за кој 2^d е делител на c. Бидејќи
   $$A=ab-a+b-1=(a+1)(b-1)>0$$
   и a е непарен број добиваме
   $$\deg_2(A)=\deg_2((a+1)(b-1)a)=\deg_2((a+1)(2^n-a-1)).$$
   Бидејќи $a+1\in(0,2^n)$ е парен, лесно се добива дека
   $$\deg_2(a+1)=\deg_2(2^n-(a+1))>0.$$
   Според тоа, $\deg_2(A)=2\deg_2(a+1)$ е парен број, со што задачата е решена.

2. Конвексниот петаголник ги задоволува условите
   1) сите внатрешни агли се еднакви, и
   2) должините на сите страни се рационални броеви.

   Докажи дека петаголникот е правилен.

   Решение. *Прв начин*. Нека $A_1A_2A_3A_4A_5$ е дадениот петаголник и нека $\overline{A_iA_{i+1}}=a_i$, $(A_6=A_1)$. Должините на проекцијата на петаголникот на правата нормална на страната A_1A_2 е еднаква на $a_2\sin 72^\circ+a_3\sin 36^\circ$, а исто така е еднаква и на $a_5\sin 72^\circ+a_4\sin 36^\circ$, па затоа
   $$a_4-a_3=2(a_2-a_5)\cos 36^\circ.$$
   Но, $\cos 36^\circ=\frac{1+\sqrt{5}}{4}$ е ирационален број, па затоа мора да важи $a_4=a_3$. Аналогно се добива дека $a_4=a_5=a_1=a_2$, што значи дека петаголникот е правилен.

   Втор начин. Нека петаголникот $A_1A_2A_3A_4A_5$ ги задоволува условите на задачата. Тогаш неговите агли се еднакви на 108°. Ако $C=A_1A_5\cap A_2A_3$ и $D=$

$A_1A_5 \cap A_3A_4$, тогаш

$$\overline{A_1C} = \overline{A_2C} = \frac{\overline{A_1A_2}}{2\sin 18^\circ} \text{ и } \overline{A_4D} = \overline{A_5D} = \frac{\overline{A_4A_5}}{2\sin 18^\circ}.$$

Тогаш равенствата

$$\overline{CA_2} + \overline{A_2A_3} = \overline{CA_3} = \overline{DA_3} = \overline{DA_4} + \overline{A_4A_3},$$

покажуваат дека

$$\overline{A_2A_3} - \overline{A_4A_5} = 2\sin 18^\circ (\overline{A_4A_3} - \overline{A_2A_3}).$$

Бидејќи $\sin 3\cdot 18^\circ = \cos 2\cdot 18^\circ$, важи $0 = \cos 18^\circ (4\sin^2 18^\circ + 2\sin 18^\circ - 1)$, па затоа $\sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ и тоа е ирационален број. Значи, $\overline{A_2A_3} = \overline{A_4A_5}$ и $\overline{A_4A_3} = \overline{A_2A_3}$. Аналогно се докажува дека сите страни на петаголникот се еднакви, па затоа тој е правилен.

Забелешка. Познато е дека тврдењето на задачата е точно за произволен $p-$ аголник, каде $p \geq 3$ е прост број. Со помош на комплексни броеви, доказот се сведува на познатиот факт дека полиномот $x^{p-1} + x^{p-2} + ... + x + 1$ не може да се претстави како производ на два неконстантни полиноми со целобројни коефициенти.

3. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $a + b + c \geq abc$. Докажи, дека $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc\sqrt{3}$.

Решение. *Прв начин*. Прво од неравенстото меѓу аритметичката и квадратната средина, а потоа од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина и условот на задачата следува

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 \geq \tfrac{1}{9}(a+b+c)^4 \geq 3(\tfrac{a+b+c}{3})^3(a+b+c) \geq 3abc(a+b+c) \geq 3(abc)^2,$$

т.е. $a^2 + b^2 + c^2 \geq abc\sqrt{3}$.

Втор начин. Нека претпоставиме дека $a^2 + b^2 + c^2 < abc\sqrt{3}$. Тогаш од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува

$$3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} \leq a^2 + b^2 + c^2 < abc\sqrt{3}.$$

Значи, $abc > 3\sqrt{3}$ и тогаш од неравенството меѓу аритметичката и квадратната средина следува

$$\frac{(abc)^2}{3} \leq \frac{(a+b+c)^2}{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 < abc\sqrt{3},$$

т.е. $abc < 3\sqrt{3}$, што е противречност.

4. Коцка со димензии $3\times 3\times 3$ е поделена на 27 складни единечни коцки (клетки). Една од добиените единечни клетки е празна, а во секоја од преостанатите се наоѓа единечна коцка означена со еден од броевите 1, 2, ..., 26 (секој од овие

броеви е доделен на точно една коцка). Дозволено е единечна коцка да се премести во соседна празна клетка (две клетки се соседни ако имаат заеднички ѕид). Дали може со помош на конечно многу дозволени потези единичните коцки да се распоредат така што коцките означени со броевите k и $27-k$ ги заменат местата, за секој $k \in \{1,2,...,13\}$?

Решение. Да ја означиме секоја непразна клетка со бројот на коцката која се наоѓа во неа, а празната клетка со 0. Така позицијата во секој чекор можеме да ја опишеме со некоја пермутација σ на множеството $\{0,1,2,...,26\}$, при што почетната позиција соодветствува на идентичната пермутација

$$\sigma\binom{0\ 1\ 2\ \cdots\ 25\ 26}{0\ 1\ 2\ \cdots\ 25\ 26}.$$

Во секој потез реализираме транспозиција $(0,x)$ за некој $x \neq 0$, т.е. елементите 0 и x ги менуваат местата. Секоја транспозиција ја менува парноста на пермутацијата (т.е. парноста на бројот парови (i,j) такви што $i<j$ и $\sigma(i)>\sigma(j)$). Бидејќи конечната пермутација $\sigma\binom{0\ 1\ \ 2\ \cdots\ 26\ 26}{0\ 26\ 25\ \cdots\ 2\ \ 1}$ е непарна (како производ на 13 транспозиции $(i,26-i)$), потребен е непарен број потези.

Од друга страна, ако клетките ги обоиме наизменично црно и бело, како кај шаховската табла, добиваме дека бојата на празната клетка се менува во секој потез. Така, таа по непарен број потези не може да биде во иста боја. Тоа значи, дека празната клетка не може да остане на истото место како во почетната позиција, со што добивме противречност.

БМО 2002

1. Некои парови на множество од n точки $A_1, A_2, ..., A_n$ ($n \geq 4$) се меѓусебно поврзани со отсечки, така што секоја точка е поврзана со барем три од дадените точки. Докажи дека постојат различни точки $X_1, X_2, ..., X_{2k} \in \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ за некој $k \geq 2$ така што точките X_i и X_{i+1} се поврзани за секој $i \, (1 \leq i \leq 2k)$ каде $X_{2k+1} = X_1$.

   Решение. Да го разгледаме најдолгиот пат $Y_1Y_2...Y_m$ со меѓусебно различни точки $Y_i \in \{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Заради максималноста на патот, точката Y_1 е поврзана само со точката Y_2 и некои Y_i, Y_j, каде $2 < i < j \leq n$. Меѓу индексите $2, i, j$, два се со иста парност: да ги означиме со $k, l \, (k < l)$. Тогаш $Y_1Y_kY_{k+1}...Y_lY_1$ е кружен пат со парен број точки.

2. Низата $\{a_n\}_{n\geq 1}$ е дефинирана со $a_1 = 20, a_2 = 30, a_{n+2} = 3a_{n+1} - a_n, n \geq 1$. Определи ги сите природни броеви n за кои $1 + 5a_na_{n+1}$ е точен квадрат.

   Решение. *Прв начин*. Од рекуреантната релација следува

$$5a_na_{n+1} - 5a_{n-1}a_n = 5a_n(3a_n - 2a_{n-1}) = (4a_n - a_{n-1})^2 - (a_{n-1} + a_n)^2$$
$$= (a_n + a_{n+1})^2 - (a_{n-1} + a_n)^2.$$

   Оттука следува

$$5a_na_{n+1} - (a_n + a_{n+1})^2 = 5a_{n-1}a_n - (a_{n-1} + a_n)^2 = ... = 5a_1a_2 - (a_1 + a_2)^2 = 500.$$

   Според тоа,

$$1 + 5a_na_{n+1} = (a_n + a_{n+1})^2 + 501$$

   е меѓу $(a_n + a_{n+1})^2$ и $(a_n + a_{n+1} + 1)^2$ ако $a_n + a_{n+1} > 250$, т.е. за $n \geq 4$, бидејќи $a_3 = 70, a_4 = 180, a_5 = 470$, па тогаш не е точен квадрат. Со проверка за $n = 1, 2, 3$ добиваме дека $1 + 5a_na_{n+1}$ е точен квадрат само за $n = 3$ и тогаш

$$1 + 5a_3a_4 = 1 + 5 \cdot 70 \cdot 180 = 250^2 + 501 = 251^2.$$

   Втор начин. Со индукција лесно се докажува дека за секој n исполнето равенството $a_{n+1}^2 - 3a_na_{n+1} + a_n^2 = -500$ т.е. равенството

$$1 + 5a_na_{n+1} = (a_n + a_{n+1})^2 + 501.$$

   Сега од претхопдното равенство следува дека ако $1 + 5a_na_{n+1} = t^2$, тогаш $t^2 - A^2 = 501$, каде $A = a_n + a_{n+1}$. Но, низата $\{a_n\}_{n\geq 1}$ строго монотоно расте (Докажи!), па затоа t и A се позитивни броеви. Според тоа, тие се решенија на системот $t - A = 1, t + A = 501$ или $t - A = 3, t + A = 167$, од каде добиваме

$t=251$ или $t=85$. Според тоа, треба да провериме за кое n важи

$$1+5a_na_{n+1}=251^2 \text{ или } 1+5a_na_{n+1}=85^2.$$

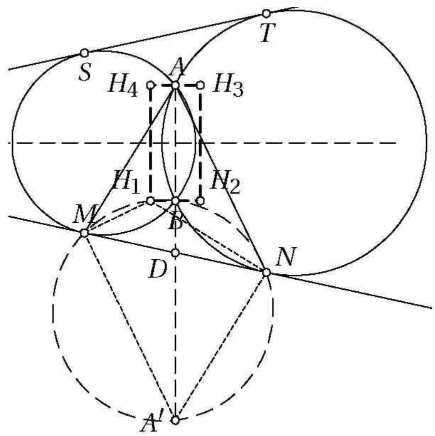
За $n=1$ и $n=2$ ниту едно од равенствата не е точно, а $1+5a_3a_4=251^2$ и како низата строго монотоно расте заклучуваме дека $n=3$ е единствено решение на задачата.

3. Кружниците C_1 и C_2 имаат различни радиуси и се сечат во точките A и B. Нека MN и ST, ($M,S\in C_1, N,T\in C_2$) се заедничките тангенти на C_1 и C_2. Докажи, дека ортоцентрите на триаголниците AMN, AST, BMN и BST се темиња на правоаголник.

Решение. *Прв начин.* Со H_1,H_2,H_3,H_4 соодветно да ги означиме центрите на триаголниците $AMN,\ AST, BMN, BST$. Точките H_3 и H_4 се соодветно симетрични на точките H_2 и H_1 во однос на правата l која минува низ центрите на кружниците C_1 и C_2. Затоа доволно е да се докаже дека $H_1H_2\perp AB$.

Точката $D=AB\cap MN$ е средина на отсечката MN бидејќи

$$\overline{DM}^2=\overline{DA}\cdot\overline{DB}=\overline{DN}^2$$



(степен на точка во однос на дадените кружници). Ако A' е точка таква што $AMA'N$ е паралелограм, тогаш $\measuredangle H_1MA'=\measuredangle H_1NA'=90^\circ$, т.е. точките M и N лежат на кружница γ со дијаметар H_1A'. Понатаму, и точката B лежи на γ бидејќи

$$\overline{DB}\cdot\overline{DA'}=\overline{DB}\cdot\overline{DA}=\overline{DM}\cdot\overline{DN}.$$

Оттука следува дека $\measuredangle H_1BA'=90^\circ$.

Аналогно, $\measuredangle H_2BA'=90^\circ$, па затоа $B\in H_1H_2\perp AB$.

Втор начин. Ќе го користиме следново тврдење: *Во секој остроаголен триаголник растојанието од дадено теме до ортоцентарот на триаголникот е еднакво на спротивната страна помножена со котангенсот на аголот при даденото теме.*

Нека H_1 и H_2 се ортоцентрите на триаголниците MNA и MNB, соодветно. Тогаш A е ортоцентар на триаголникот MNH_1 и затsoa

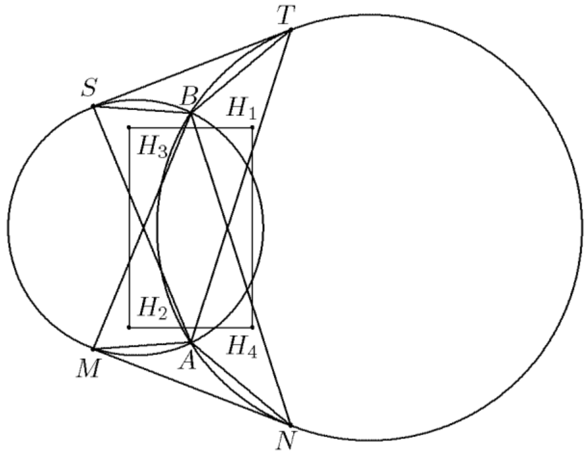
$$\overline{H_1A}=\overline{MN}\operatorname{ctg}\measuredangle MH_1N \text{ и } \overline{H_2B}=\overline{MN}\operatorname{ctg}\measuredangle MBN.$$

Бидејќи MN е тангента и на двете кружници, важи $\measuredangle NMA=\measuredangle MBA$ и $\measuredangle MNA$

$=\measuredangle NBA$. Тоа значи дека $\measuredangle MAN+\measuredangle MBN=180^\circ$. Но, $\measuredangle MAN+\measuredangle MH_1N=180^\circ$, па затоа $\measuredangle MBN=\measuredangle MH_1N$. Според тоа,

$$\overline{H_1A}=\overline{MN}\operatorname{ctg}\measuredangle MH_1N=\overline{MN}\operatorname{ctg}\measuredangle MBN=\overline{H_2B},$$

па како $H_1A \parallel BH_2$, заклучуваме дека H_1BH_2A е паралелограм.



Според тоа, средината на H_1H_2 се совпаѓа со средината на AB. Аналогно, ако H_3 и H_4 соодветно се ортоцентрите на $\triangle AST$ и $\triangle BST$, тогаш средината на H_3H_4 се совпаѓа со средината на AB. Од досега изнесеното следува дека отсечките H_1H_2 и H_3H_4 имаат заедничка средина, што значи дека четириаголникот $H_1H_3H_2H_4$ е паралелограм Останува да забележиме дека отсечките H_1H_2 и H_3H_4 се симетрични во однос на правата која минува низ центрите на двете кружници. Според тоа, четириаголникот $H_1H_3H_2H_4$ е паралелограм со еднакви дијагонали, па затоа тој е правоаголник.

4. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што за секој $n\in\mathbb{N}$ важи

$$2n+2001\le f(f(n))+f(n)\le 2n+2002.$$

Решение. *Прв начин*. Функцијата $f(n)=n+667$ ги задоволува условите на задачата.

За даден $n\in\mathbb{N}$, дефинираме низа $\{a_k\}$ со $a_0=n$ и $a_{k+1}=f(a_k), k\ge 0$. Ако означиме $b_k=a_{k+1}-a_k-667-\frac{1}{6}$, тогаш од условот на задачата следува

$$-\tfrac{1}{2}\le c_k=b_{k+1}+2b_k\le\tfrac{1}{2}.$$

Бидејќи

$$b_m=(-2)^m b_0+\sum_{k=0}^{m-1}(-2)^{m-1-k}c_k \text{ и}$$

$$a_n = a_0 + 667 + \sum_{m=0}^{n-1} b_m = a_0 + 667 + \sum_{m=0}^{n-1} (-2)^m b_0 + \sum_{k=0}^{n-2} \sum_{m=k+1}^{n-1} (-2)^{m-1-k} c_k$$
$$= a_0 + 667 + \tfrac{1-(-2)^n}{3} b_0 + \sum_{k=0}^{n-2} \tfrac{1-(-2)^{n-k-1}}{3} c_k$$
$$\leq a_0 + 667 + \tfrac{1-(-2)^n}{3} (b_0 + \tfrac{(-1)^{n-1}}{2}),$$

мора да важи $a_n < 0$ за некој n ако $|b_0| > \frac{1}{2}$. Но, според условот на задачата важи $a_n > 0$, за секој n, па затоа

$$-\tfrac{1}{2} \leq b_0 = f(n) - n - 667 - \tfrac{1}{6} \leq \tfrac{1}{2},$$

од каде заклучуваме дека $f(n) = n + 667$.

Втор начин. Нека функцијата f ги задоволува условите на задачата. Прво ќе докажеме дека $f(n) > n$ за секој $n \in \mathbb{N}$. Да го претпоставиме спротивното, т.е. дека постои m таков што $f(m) \leq m$ и нека $k = f(m)$ е возможно најмалиот. Очигледно $k < m$ и ако $l = f(k)$, тогаш

$$k + l \geq 2m + 2001 \text{ и } f(l) + l \leq 2k + 2002.$$

Според тоа,

$$2k + 2002 \geq f(l) + 2m + 2001 - k, \text{ т.е. } f(l) \leq 3k - 2m + 1 < k,$$

што е противречност. Според тоа, функцијата $g(n) = f(n) - n$ е позитивна. Ако $g(p)$ е нејзината најмала вредност и $q = g(p) + p$, од условот следува дека

$$2g(p) + g(q) \geq 2001 \text{ и } 2g(q) + g(g(q) + q) \leq 2002,$$

па затоа

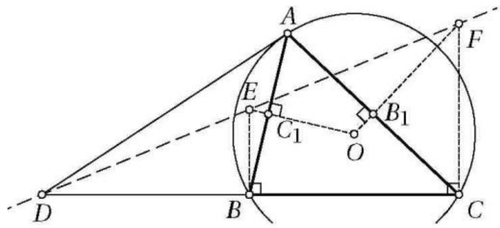
$$4g(p) \geq 4002 - 2g(q) \geq 2000 + g(g(q) + q) \geq 2000 + g(p), \text{ т.е. } g(p) \geq 667.$$

Сега, од неравенството $2g(n) + g(g(n) + n) \leq 2002$ скледува $g(n) = 667$, т.е. $f(n) = n + 667$, за секој $n \in \mathbb{N}$. Лесно се проверува дека оваа функција ги задоволува условите на задачата.

БМО 2003

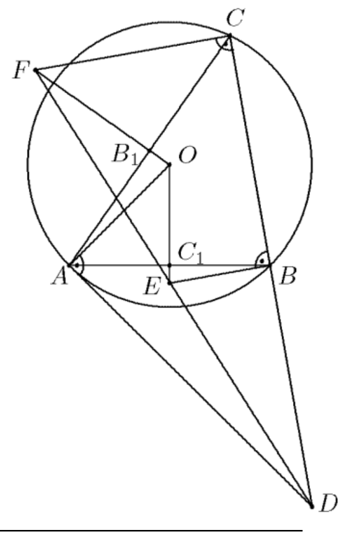
1. Дали постои множество B кое се состои од 4004 природни броеви такво што за секое негово подмножество A кое има 2003 елементи збирот на елементите на множеството A не е делив со 2003?
   Решение. Постои. Доволно е да земеме множество B кое се состои од 2002 броја од видот $2003k$ и 2002 броја од видот $2003k+1$. Навистина, ако 2003-елементно множество $A\subset B$ содржи m елементи од облик $2003k+1$ и $2003-m$ елементи од облик $2003k$ (каде $1\le m\le 2002$), тогаш збирот на неговите елементи е конгруентен со m по модул 2003.

2. Нека ABC е триаголник таков што $\overline{AB}\ne\overline{AC}$. Нека D е пресечната точка на тангентата на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката A и правата BC. Нека E и F се точки соодветно на симетралите на отсечките AB и AC такви што BE и CF се нормални на BC. Докажи дека точките D,E и F се колинеарни.
   Решение. *Прв начин*. Доволно е да се докаже дека $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{BE}}{\overline{CF}}$. Нека B_1 и C_1 се соодветно средините на страните AC и AB. Од сличноста на триаголниците DBA и DAC следува $\frac{\overline{DB}}{\overline{DA}}=\frac{\overline{DA}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, па



затоа $\frac{\overline{DB}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$. Од друга страна, имаме $\overline{BE}=\frac{\overline{BC_1}}{\cos\measuredangle ABE}=\frac{\overline{AB}}{2\sin\measuredangle ABC}$ и, слично, $\overline{CF}=\frac{\overline{AC}}{2\sin\measuredangle ACB}$. Според тоа, $\frac{\overline{BE}}{\overline{CF}}=\frac{\overline{AB}\sin\measuredangle ACB}{\overline{AC}\sin\measuredangle ABC}=\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2}$.

Втор начин. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $\measuredangle ABC>\measuredangle ACB$. АКо C_1 и B_1 се средините соодветно на AB и AC, тогаш $\measuredangle FCB_1=90^\circ-\gamma$ и $\measuredangle C_1BE=90^\circ-\beta$ (ако $90^\circ\ge\beta$) или $\measuredangle C_1BE=\beta-90^\circ$ (ако $90^\circ<\beta$). Тогаш $\overline{BE}=\frac{c}{2\sin\beta}$ и $\overline{CF}=\frac{b}{2\sin\gamma}$. Бидејќи $\measuredangle BAD=\gamma$, од синусната теорема за триаголниците ABD и ADC следува $\overline{DB}=\frac{c\sin\gamma}{\sin(\beta-\gamma)}$ и $\overline{DC}=\frac{b\sin(\gamma+\alpha)}{\sin(\beta-\gamma)}$. Според тоа,



$$\frac{\overline{DB}}{\overline{BE}} = \frac{2\sin\gamma\sin\beta}{\sin(\beta-\gamma)} = \frac{\overline{DC}}{\overline{CF}},$$

што значи дека $\triangle DBE \sim \triangle DCF$. Но, тоа значи дека $\measuredangle BDE = \measuredangle CDF$, т.е. точките D, E и F се колинеарни.

3. Определи ги сите функции $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ такви што
   1) $f(x+y)-yf(x)-xf(y)=f(x)f(y)-x-y+xy$, за секои $x,y\in\mathbb{Q}$,
   2) $f(x)=2f(x+1)+2+x$, за секој $x\in\mathbb{Q}$,
   3) $f(1)+1>0$.

Решение. Условот 1) е еквивалентен со условот

$$f(x+y)+x+y=(f(x)+x)(f(y)+y).$$

Воведуваме смена $g(x)=f(x)+x$ и условите 1) – 3) ги добиваат облиците

$$g(x+y)=g(x)g(y),\qquad g(x+1)=\tfrac{1}{2}g(x),\qquad g(1)>0. \tag{*}$$

Понатаму, од $g(1)=g(1)g(0)$ следува $g(0)=1$, а од $g(0)=g(x)g(-x)$ следува дека $g(x)\neq 0$. Од првиот услов во (*) следува $g(x)=g(\frac{x}{2})^2>0$ за секој $x\in\mathbb{Q}$. Ако ставиме $h(x)=\log_2 g(x)$, тогаш од условите (*) добиваме

$$h(x+y)=h(x)+h(y) \tag{**}$$

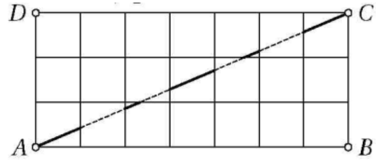
$$h(x+1)=h(x)-1 \tag{***}$$

Според (**) функцијата h ја задоволува Кошиевата равенка, па затоа $h(x)=h(1)x$, за $x\in\mathbb{Q}$, а од (***) добиваме $h(1)=h(0)-1=-1$. Според тоа, $h(x)=-x$, па затоа $g(x)=2^{-x}$ и $f(x)=2^{-x}-x$. Лесно се проверува дека оваа функција ги задоволува условите 1) – 3).

4. Нека m и n се заемно прости непарни природни броеви. Правоаголникот $ABCD$ е таков што $\overline{AB}=m, \overline{AD}=n$ и е поделен на mn единечни квадрати. Со $A_1, A_2, \dots, A_k$ да ги означиме последователните пресечни точки на дијагоналата AC со страните на делбените единечни квадрати ($A_1=A, A_k=C$). Докажи, дека

$$\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}\overline{A_jA_{j+1}}=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}. \tag{*}$$

Решение. *Прв начин.* Да поставиме координатни оски x и y соодветно на правите AB и AD. Со B_x да ја означиме точката $(\frac{x}{n},\frac{x}{m})$. Сите точки A_i припаѓаат на множеството



$$\{B_x \mid x=1,2,...,mn\}.$$

Притоа бројот на пресеците на полуотворените отсечки $(A,B_x]$ со страните на единичните квадратие еднаков на $i(x)=[\frac{x}{m}]+[\frac{x}{n}]$, па затоа отсечката B_xB_{x+1} лежи на отсечката $A_{i(x)+1}A_{i(x)+2}$. Според тоа,

$$\sum_{j=1}^{k-1}(-1)^{j+1}\overline{A_jA_{j+1}}=\sum_{x=0}^{mn-1}(-1)^{i(x)}\overline{B_xB_{x+1}}=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}\sum_{x=0}^{mn-1}(-1)^{[\frac{x}{m}]+[\frac{x}{n}]}. \qquad (1)$$

Нека r_x и s_x се соодветно остатоците од делењето на x со m и n. Тогаш $[\frac{x}{m}]+[\frac{x}{n}]$ има иста парност како и r_x+s_x, па како паровите (r_x,s_x), $x=0,1,...,mn-1$ всушност се паровите $(a,b),\ 0\le a<m,\ 0\le b<n$, добиваме

$$\sum_{x=0}^{mn-1}(-1)^{[\frac{x}{m}]+[\frac{x}{n}]}=\sum_{x=0}^{mn-1}(-1)^{r_x+s_x}=\sum_{a=0}^{m-1}(-1)^a\sum_{b=0}^{n-1}(-1)^b=1. \qquad (2)$$

Конечно, од равенствата (1) и (2) следува равенсвото (*).

Втор начин. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $m\ge n$. Ќе велиме дека отсечката A_pA_{p+1} е од прв вид, ако точките A_p и A_{p+1} се пресечни точки на AC со вертикални страни на единечните квадрати. Кога една од точките A_p или A_{p+1} е пресечна точка на AC со хоризонтална страна на единечен квадрат, ќе велиме дека отсечката A_pA_{p+1} е од втор вид.

Дијагоналата AC ги сече $m-1$ пати вертикалните страни и $n-1$ пати хоризонталните страни. Бидејќи $\mathrm{NZD}(m,n)=1$ сите пресечни точки се различни и затоа тие ја делат AC на $m+n-1$ отсечки. Бидејќи првиот собирок е со знак + и $m+n-1$ е непарен број, добиваме дека позитивните собироци се за еден повеќе од негативните. Да забележиме дека ако A_p е пресечна точка на AC со хоризонтална страна, тогаш $A_{p-1}A_p$ и A_pA_{p+1} се од втор вид и имаат спротивни знаци. Според тоа, отсечките од првиот вид со знак + се за една повеќе од отсечките од првиот вид со знак –, што значи дека отсечките од првиот вид во бараниот збир даваат допринос тоќно една таква отсечка, односно $\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}$.

Да поставиме координатни оски x и y соодветно на правите AB и AD. За фиксиран $k=1,2,...,n-1$ нека $km=t_kn+r_k$, каде $0<r_k<n$. Тогаш пресечната точка на AC со хоризонталната права k (не ја броиме AB) има координати $(t_k+\frac{r_k}{n},k)$ и тоа е точката со број $s=k+t_k+1$. Тоа значи дека кога $k+t_k$ е парен, тогаш $A_{s-1}A_s$ има знак – и A_sA_{s+1} има знак +. Аналогно, кога $k+t_k$ е непарен, тогаш $A_{s-1}A_s$ има знак + и A_sA_{s+1} има знак –.

Да забележиме дека r_k ја има истата парност како $k+t_k$. Навистина, ако k е парен број, тогаш $t_k n+r_k$ е парен број, што значи дека t_k и r_k имаат иста парност. Ако k е непарен број, тогаш $t_k n+r_k$ е непарен број, т.е. t_k и r_k се со различна парност. И во двата случаја r_k и $k+t_k$ имаат иста парност.

Од друга страна, бидејќи $pm \equiv qm (\bmod n)$ дава $p \equiv q (\bmod n)$, добиваме дека r_k ги прима сите остатоци по модул n. Според тоа, кога r_k е парен број имаме

$$-\overline{A_{s-1}A_s}+\overline{A_sA_{s+1}}=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\frac{-r_k+(n-r_k)}{n},$$

а кога r_k е непарен број имаме

$$+\overline{A_{s-1}A_s}-\overline{A_sA_{s+1}}=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m}\cdot\frac{-r_k-(n-r_k)}{n}.$$

$$\sum_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}\overline{A_iA_{i+1}}=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}\left(1+\sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{n-4s}{n}+\sum_{s=1}^{\frac{n-1}{2}}\frac{4s-2-n}{n}\right)=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}\left(1-\frac{n-1}{2}\right)=\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{mn}.$$

БМО 2004

1. Низата реални броеви $a_0, a_1, a_2, ...$ ја задоволува релацијата
$$a_{m+n} + a_{m-n} - m + n - 1 = \frac{a_{2m} + a_{2n}}{2}, \text{ за секои } m, n \in \mathbb{N}, m \geq n.$$
Ако $a_1 = 3$, пресметај го a_{2004}.

Решение. *Прв начин*. За $m = n = 0$ добиваме $a_0 = 1$. Понатаму, за $n = 0$ добиваме $a_{2m} = 4a_m - 2m - 3$. Сега релацијата од условот на задачата го добива видот
$$a_{m+n} + a_{m-n} = 2(a_m + a_n - n - 1).$$
Оттука за $n - 1$ добиваме $a_{m+1} - 2a_m + a_{m-1} = 2$, односно $b_m = b_{m-1} + 2$, за секој m, каде $b_m = a_{m+1} - a_m$. Од $b_0 = 2$, следува $b_m = 2m + 2$, па затоа
$$a_m = a_0 + b_0 + b_1 + ... + b_{m-1} = 1 + (2 + 4 + ... + 2m) = m^2 + m + 1,$$
т.е. $a_{2004} = 2004^2 + 2005$.

Втор начин. За $m = n = 0$ добиваме $a_0 = 1$. Понатаму, за $n = 0$ добиваме $a_{2m} = 4a_m - 2m - 3$. Понатаму, со индукција лесно се докажува дека $a_{2m} = (2m)^2 + 2m + 1$, па затоа $a_m = \frac{a_{2m} + 2m + 3}{4} = m^2 + m + 1$, за $m \in \mathbb{N}$. Непосредно се проверува дека оваа низа го задоволува словот на задачата. Затоа $a_{2004} = 2004^2 + 2005$

2. Во множеството прости броеви реши ја равенката
$$x^y - y^x = xy^2 - 19 .$$

Решение. Од малата теорема на Ферма следува $x^y \equiv x (\bmod y)$, па од дадената равенка добиваме $x \equiv -19 (\bmod y)$, т.е. $y \mid x + 19$. Слично, со сведување по модул x добиваме $x \mid y - 19$. Бидејќи равенката нема решение за $x = y$, од овде следува дека $xy \mid x - y + 19$. Притоа $x - y + 19 = 0$ не е можно, бидејќи тогаш x мора да биде парен, т.е. $x = 2$, но тогаш $y = 21$ не е прост број. Значи,
$$xy \leq |x - y + 19| < x + y + 19, \text{ т.е. } (x-1)(y-1) < 20.$$
Останува да испитаме неколку случаи:

1) $x = 2, y \leq 19$;

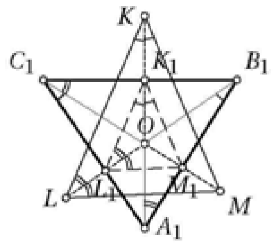
2) $x = 3, y \leq 7$;

3) $y = 3, 5 \leq x \leq 7$ или

4) $y = 2, 5 \leq x \leq 19$.

Со непосредна проверка наоѓаме дека $(2,3)$ и $(2,7)$ се единствени решенија на дадената равенка.

3. Нека O е внатрешна точка на остроаголниот триаголник ABC. Кружниците со центри во средините на страните на триаголникот ABC кои минуваат низ точката O меѓусебно се сечат во точките K, L и M различни од O. Докажи дека O е центар на впишаната кружница на триаголникот KLM ако и само ако O е центар на опишаната кружница околу триаголникот ABC.



Решение. *Прв начин*. Со A_1, B_1, C_1 соодветно да ги означиме средините на страните BC, CA, AB. Втората пресечна точка K на кружниците $(B_1, \overline{B_1O})$ и $(C_1, \overline{C_1O})$ е симетрична на точката O во однос на B_1C_1 бидејќи $\overline{B_1K} = \overline{B_1O}$ и $\overline{C_1K} = \overline{C_1O}$. Аналогно L и M соодветно се симетрични на O во однос на C_1A_1 и A_1B_1. Средините K_1, L_1, M_1 на отсечките OK, OL, OM соодветно лежат на правите B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1. Да забележиме дека, ако O е надвор од $\triangle A_1B_1C_1$, тогаш O е надвор од $\triangle KLM$, па затоа не е центар на впишаната кружница во $\triangle KLM$, а не е ниту центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Затоа во натамошните разгледувања ќе претпоставиме дека точката O е внатре во $\triangle A_1B_1C_1$.

Точката O е центар на впишаната кружница во $\triangle KLM$ ако и само ако

$$\measuredangle OB_1A_1 = \measuredangle OK_1M_1 = \measuredangle OKM = \measuredangle OKL = \measuredangle OK_1L_1 = \measuredangle OC_1A_1$$

и слично $\measuredangle OA_1B_1 = \measuredangle OC_1B_1$ и $\measuredangle OA_1C_1 = \measuredangle OB_1C_1$, т.е. ако и само ако важи

$$\measuredangle OA_1B_1 = \measuredangle OC_1B_1,\ \measuredangle OA_1C_1 = \measuredangle OB_1C_1,\ \measuredangle OB_1A_1 = \measuredangle OC_1A_1. \tag{1}$$

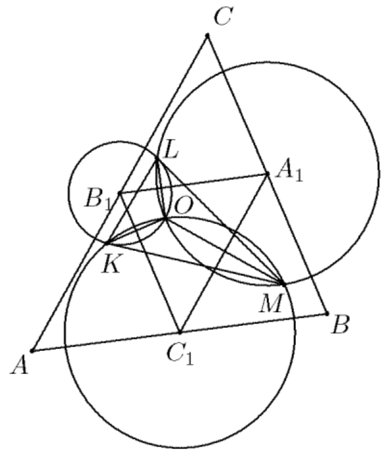
Ако O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$, т.е. ортоцентар на $\triangle A_1B_1C_1$, тогаш важи (1), бидејќи на пример

$$\measuredangle OA_1B_1 = \measuredangle OC_1B_1 = 90^\circ - \measuredangle A_1B_1C_1.$$

Од друга страна, ако важи (1), тогаш

$$\begin{aligned}\measuredangle B_1OC_1 &= 180^\circ - \measuredangle OB_1C_1 - \measuredangle OC_1B_1\\ &= 180^\circ - \measuredangle OA_1C_1 - \measuredangle OA_1B_1\\ &= 180^\circ - \measuredangle B_1A_1C_1\end{aligned}$$

и аналогно $\measuredangle C_1OA_1 = 180^\circ - \measuredangle C_1B_1A_1$, па затоа O е ортоцентар на $\triangle A_1B_1C_1$, т.е. O е центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$.

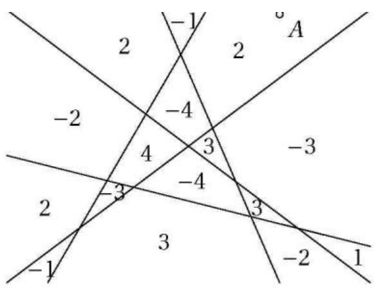


Втор начин. Со A_1, B_1, C_1 соодветно да ги означиме средините на страните BC, CA, AB. Бидејќи заедничката тетива на две кружници е нормална на отсечката која ги поврзува центрите на кружниците и оваа отсечка ја полови заедничката тетива, заклучуваме дека средините K_1, L_1, M_1 соодветно на отсечките Ok, OL, OM се ортогонални проекции на O врз страните на $\triangle A_1B_1C_1$. Како што е познато, оттука следува дека точката O е ортоцентар на остроаголниот $\triangle A_1B_1C_1$, т.е. центар на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ ако и само ако е центар на вписаната кружница на $\triangle K_1L_1M_1$ (Докажи!). Од друга страна, хомотетијата со центар O и коефициент 2 го пресликува $\triangle K_1L_1M_1$ во $\triangle KLM$, па затоа O е центар на впишаната кружница во $\triangle K_1L_1M_1$ ако и само ако е центар на впишаната кружница во $\triangle KLM$. Со тоа задачата е решена.

4. Рамнината е поделена на области со конечен број прави, такви што не постојат три прави кои минуваат низ иста точка. За две области ќе велиме дека се соседни ако нивната заедничка граница е отсечка, полуправа или права. Во секоја област е запишан цел број така што се исполенти следниве услови:
   1) производот на броевите во соседните области е помал од нивниот збир,
   2) збирот на сите броеви од секоја страна на произволна права е еднаков на нула.

   Докажи, дека тоа е можно ако и само ако сите прави не се паралелни.

   Решение. Ако сите прави се паралелни, тогаш од условот 2) следува дека сите броеви мора да бидат еднакви на нула, но тогаш не важи условот 1), па значи не е можно да се запишат цели броеви така што се исполенти условите 1) и 2).



Сега ќе го конструираме бараното запишување на броевите при кое се исполнети условите 1) и 2). На почетокот во рамнината да фиксираме точка A која не лежи ниту на една од дадените прави. За произволна област R земаме точка B внатре во областа. Јасно, бројот k_R на прави кои ја сечат отсечката AB не зависи од изборот на точката B. Освен тоа, за секои две соседни области R и S важи $k_R = k_S \pm 1$.

На областа R и го доделуваме бројот $u_R(-1)^{k_R}$, каде u_R е бројот на аглите на областа R (на пример, види цртеж). Ќе докажеме дека ова доделување на целите броеви ги задоволува условите на задачата.

1) По конструкција, броевите a и b доделени на две соседни области се со различен знак, да кажеме $a < 0 < b$, па затоа $ab \le a < a+b$.

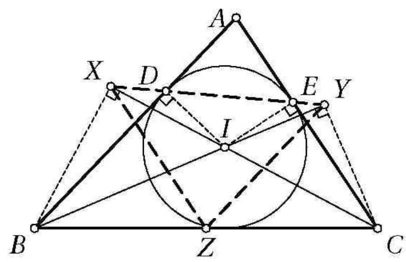
2) Во секој агол на секоја област R го запишуваме бројот $(-1)^{k_R}$. Збирот на броевите во областите од една страна на права p е еднаков на збирот на броевите во сите агли на таа страна на правата. Бидејќи во секоја пресечна точка збирот на броевите во аглите (имаме 2 или 4 броја) е еднаков на 0, добиваме дека вкупниот збир исто така е еднаков на 0.

БМО 2005

1. Впишаната кружница во триаголникот ABC ги допира страните AB и AC соодветно во точките D и E. Нека симетралите на аглите во темињата C и B ја сечат правата DE соодветно во точките X и Y и нека Z е средината на страната BC. Докажи, дека триаголникот XYZ е рамностран ако и само ако $\measuredangle A = 60^\circ$.

Решение. Нека I е центарот на впишаната кружница. Од

$$\measuredangle BIX = \tfrac{1}{2}(\measuredangle B + \measuredangle C)$$
$$= 90^\circ - \tfrac{1}{2}\measuredangle A = \measuredangle ADX$$



следува дека точките B, I, X, D лежат на иста кружница. Според тоа,

$$\measuredangle BXI = \measuredangle BDI = 90^\circ,$$

па затоа триаголникот BCX е правоаголен, што значи

$$\overline{ZX} = \overline{ZB} \text{ и } \measuredangle ZXC = \measuredangle ZCX = \measuredangle XCA,$$

т.е. $ZX \parallel AC$. Аналогно $\overline{ZY} = \overline{ZB}$ и $ZY \parallel AB$.

Конечно, $\overline{ZX} = \overline{ZY}$ и $\measuredangle XZY = \measuredangle A$, од што следува тврдењето.

2. Определи ги сите прости броеви p за кои бројот $p^2 - p + 1$ е точен куб.

Решение. *Прв начин*. Равенката $p^2 - p + 1 = b^3$ можеме да ја запишеме во видот

$$p(p-1) = (b-1)(b^2 + b + 1).$$

Од $b < p$ следува дека $p \mid b^2 + b + 1$, т.е. $b^2 + b + 1 = kp$ и $p - 1 = k(b-1)$, за некој цел број $k > 1$. Уште повеќе $k \geq 3$ бидејќи $b^2 + b + 1$ е непарен број. Сега $p = kb - k + 1$ и

$$b^2 + b + 1 - kp = b^2 - (k^2 - 1)b + (k^2 - k + 1) = 0 \qquad (1)$$

што е квадратна равенка по b. Нејзината дискриминаната

$$D = (k^2 - 1)^2 - 4(k^2 - k + 1) = k^4 - 6k^2 + 4k - 3$$

мора да биде точен квадрат. Сега од $(k^2 - 3)^2 \leq D < (k^2 - 2)^2$, следува $D = (k^2 - 3)^2$, па затоа $k = 3$. Конечно, од (1) следува $b = 7$ и $p = 19$ и тоа е единствено решение.

Втор начин. Равенката $p^2 - p + 1 = b^3$ можеме да ја запишеме во видот

$$p(p-1) = (b-1)(b^2 + b + 1).$$

Од $b<p$ следува дека $p\mid b^2+b+1$, т.е. $b^2+b+1=kp$ и $p-1=k(b-1)$, за некој цел број $k>1$. Оттука следува $b^2+b+1=k(k(b-1)+1)$. Лесно се проверува дека $k>2$ и тогаш

$$b+1<\frac{b^2+b+1}{b}<k^2<\frac{b^2+b-1}{b-1}\leq b+3.$$

Значи, $k^2=b+2$. Сега, последователно добиваме

$$b^2+b+1=k^2(b-1)+k,$$
$$b^2+b+1=(b+2)(b-1)+k,,$$
$$k=3,$$

па затоа, $b=3^2-2=7$ и $p=3\cdot(7-1)+1=19$.

3. Ако a,b,c се позитивни реални броеви докажи го неравенството

$$\frac{a^2}{b}+\frac{b^2}{c}+\frac{c^2}{a}\geq a+b+c+\frac{4(a-b)^2}{a+b+c}.$$

Кога важи знак за равенство?

Решение. Бидејќи $\frac{a^2}{b}=2a-b+\frac{(a-b)^2}{b}$, $\frac{b^2}{c}=2b-c+\frac{(b-c)^2}{c}$, $\frac{c^2}{a}=2c-a+\frac{(c-a)^2}{a}$, даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{|a-b|^2}{b}+\frac{|b-c|^2}{c}+\frac{|c-a|^2}{a}\geq\frac{4|a-b|^2}{a+b+c}$$

Последното неравенство непосредно следува од неравенството на Коши-Буњаковски- Шварц

$$(a+b+c)\left(\frac{|a-b|^2}{b}+\frac{|b-c|^2}{c}+\frac{|c-a|^2}{a}\right)\geq(|a-b|+|b-c|+|c-a|)^2\geq(2|a-b|)^2$$

бидејќи $|a-b|\leq|a-c|+|c-b|$. Знак за равенство важи ако и само ако $|a-b|=kb$, $|b-c|=kc$, $|c-a|=ka$, за некој k и $|a-b|=|a-c|+|c-b|$. Ако $k\neq 0$, од овие релации следува $b=c+a$, па затоа $a=kc=k^2b$ и $|\frac{1}{k}-1|a=|c-a|=ka$ и лесно се добива дека $k=\phi=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ако $k=0$, тогаш $a=b=c$. Според тоа, знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$ или $a:b:c=\phi^2:1:\phi$.

4. Нека $n\geq 2$ е природен број и нека S е подмножество на множеството $\{1,2,\ldots,n\}$ кое не содржи два заемно прости броја, ниту два броја од кои едниот е делител на другиот. Колку елементи може најмногу да има множеството S?

Решение. За секој $x\in S$ постои единствен $k_x\in\mathbb{N}_0$ таков што $\frac{n}{2}<2^{k_x}x\leq n$. Да означиме $f(x)=2^{k_x}x$. Пресликувањето f е инјекција. Навистина, ако за

$x, y \in S$ важи $f(x) = f(y)$, тогаш или $x \mid y$ или $y \mid x$, па според условот на задачата $x = y$. Според тоа, множеството $f(S) = \{f(x) \mid x \in S\}$ има ист број елементи како и множеството S. Притоа $f(S)$ не содржи два последователни броја (бидејќи тие се заемно прости), па затоа $|f(S)| \leq [\frac{n-[\frac{n}{2}]+1}{2}] = [\frac{n+2}{4}]$.

Од друга страна, множеството $S = \{2i \mid \frac{n}{4} < i \leq \frac{n}{2}\}$ има точно $[\frac{n+2}{4}]$ елементи и ги задоволува условите на задачата. Според тоа, одговорот е $[\frac{n+2}{4}]$.

БМО 2006

1. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи, дека

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geq\frac{3}{1+abc}.$$

Решение. *Прв начин*. Со смените $abc=k^3, a=\frac{ky}{x}, b=\frac{kz}{y}, c=\frac{kx}{z}$, за $k,x,y,z>0$ неравенството го добива видот

$$\frac{x}{ky+k^2z}+\frac{y}{kz+k^2x}+\frac{z}{kx+k^2y}\geq\frac{3}{k^3+1}.$$

Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\frac{x}{ky+k^2z}+\frac{y}{kz+k^2x}+\frac{z}{kx+k^2y}\geq\frac{(x+y+z)^2}{x(ky+k^2z)+y(kz+k^2x)+z(kx+k^2y)}$$

$$=\frac{(x+y+z)^2}{(k^2+k)(xy+yz+zx)}\geq\frac{3}{k^2+k}\geq\frac{3}{k^3+1},$$

бидејќи

$$(x+y+z)^3\geq 3(xy+yz+zx) \text{ и } k^2+k\leq k^3+1.$$

Знак за равенство важи ако и само ако $x=y=z$ и $k=1$, т.е. $a=b=c=1$.

Втор начин. Ако помножиме со $1+abc$ и земеме предвид дека

$$1+\frac{1+abc}{a(1+b)}=\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{b(1+c)}{1+b},$$

како и аналогните равенства даденото неравенство го добива видот

$$\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{b(1+c)}{1+b}+\frac{1+b}{b(1+c)}+\frac{c(1+a)}{1+c}+\frac{1+c}{c(1+a)}+\frac{a(1+b)}{1+a}\geq 6. \tag{1}$$

Сега неравенството (1) следува од нераveството меѓу аритметичката и геометриската средина, т.е. од неравенството

$$\frac{1+a}{a(1+b)}+\frac{a(1+b)}{1+a}\geq 2$$

и аналогните неравенства. Лесно се добива дека знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c=1$.

Трет начин. Ако даденото неравенство го сведеме под заеднички именител и се ослободиме од заградите го добиваме неравенството

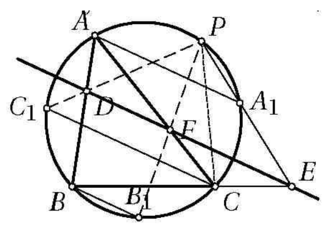
$$a^3b^2c^2+a^2b^3c^2+a^2b^2c^3+a^2b^3c+ab^2c^3+a^3bc^2-2a^2bc^2-2ab^2c^2-2a^2b^2c$$
$$-2a^2bc-2ab^2c-2abc^2+ab^2+bc^2+a^2c+ab+ac+bc\geq 0.$$

Забележуваме дека мономите кои на левата страна од неравенството се со коефициент -2 имаат степени 4 или 5, а останатите мономи имаат коефициенти 1. Последното укажува на можноста да се искористи неравенството $x^2-2x+1\geq 0$. За таа цел степенот на секој собирок со коефициент -2 треба да е аритметичка средина на степените на другите два собироци со коефициент 1. Последноито значи дека треба да ги фрупираме собироците со степени 3, 5, 7 и собироците со степени 2, 4, 6,. Така го добиваме очигледното неравенство

$bc^2(ab-1)^2 + ca^2(bc-1)^2 + ab^2(ca-1)^2 + bc(ab-1)^2 + ca(bc-1)^2 + ab(ca-1)^2 \geq 0$.

Јасно, знак за равенство важи ако и само ако $ab = bc = ca = 1$, т.е. $a = b = c = 1$.

2. Даден е триаголник ABC и права m која ги сече страните AB и AC соодветно во точките D и F, и продолжението на страната BC во точката E така што C е меѓу B и E. Трите прави кои минуваат низ точките A, B, C и се паралелни со m по вторпат ја сечат кружницата опишана околу триаголникот ABC соодветно во точките A_1, B_1, C_1. Докажи дека правите A_1E, B_1F, C_1D се сечат во една точка.



Решение. Нека правата A_1E по вторпат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката P. Тогаш

$$\measuredangle EPC = \measuredangle A_1PC = \measuredangle A_1AC = \measuredangle EFC,$$

па затоа четириаголникот $EPFC$ е тетивен. Сега

$$\measuredangle FPC = \measuredangle FEC = \measuredangle B_1BC = \measuredangle B_1PC,$$

па затоа точката P лежи на правата B_1F. Аналогно P лежи на правата C_1D.

3. Определи ги сите подредени тројки (m, n, p) позитивни рационални броеви такви што броевите $m + \frac{1}{np}$, $n + \frac{1}{pm}$, $p + \frac{1}{mn}$ се цели.

Решение. Да означиме $a = mnp$. Броевите $\frac{a+1}{mn}, \frac{a+1}{np}, \frac{a+1}{pm}$ се цели, па затоа и нивниот производ $\frac{(a+1)^3}{a^2} = k$ е цел број. Значи, a е решение на равенката

$$x^3 + (3-k)x^2 + 3x + 1 = 0.$$

Оттука следува дека ако $a = \frac{q}{r}, (q, r \in \mathbb{N}, \text{NZD}(q, r) = 1)$, тогаш $q, r \mid 1$, па затоа $a = 1$. Според тоа, $a + 1 = 2a = 2mnp$, па затоа $2p = \frac{a+1}{mn}$ е цел број. Аналогно $2m$ и $2n$ се цели броеви, па бидејќи $2m \cdot 2n \cdot 2p = 8$, единствени решенија (m, n, p) се тројките $(1,1,1), (1, 2, \frac{1}{2})$ и $(4, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ со нивните пермутации.

4. Нека m е природен број. Определи ги сите природни броеви a за кои низата дефинирана со $a_0 = a$ и

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{a_n}{2}, & \text{ако } a_n \text{ е парен,} \\ a_n + m, & \text{ако } a_n \text{ е непарен,} \end{cases}$$

за $n = 1, 2, 3, ..$ е периодична, со период (сегмент кој периодично се повторува) од видот $a_0, a_1, ..., a_k$, за некој k .

Решение. Ако m е парен број, тогаш низата не е периодична. Навистина, за $a = 2^r k, 2 \nmid k$ имаме $a_r = k$ и $a_{r+i} = k + im,$ за $i > 0$.

Нека m е непарен и нека a_k е најмалиот член на низата. Јасно, $2 \nmid a_k$, па затоа $a_{k+1} = a_k + m$ и $a_{k+2} = \frac{a_k + m}{2} \geq a_k$, што значи $a_k \leq m$. Со едноставна индукција се покажува дека по a_k нема непарни членови на низата поголеми од m и парни членови на низата поголеми од $2m$. Според тоа, ако низата $\{a_n\}$ е чисто периодична, тогаш $a \in S = \{1, 2, ..., m, m+1, m+3, ..., 2m\}$.

Од друга страна, за $a \in S$ сите членови на низата припаѓаат на множеството S , па затоа низата е периодична почнувајќи од некоја точка. Уште повеќе, ако $a_k = a_l$ за $l < k$, тогаш лесно се докажува дека мора да важи $a_{k-1} = a_{l-1}$ итн., па затоа низата е периодична почнувајќи од a_0 .

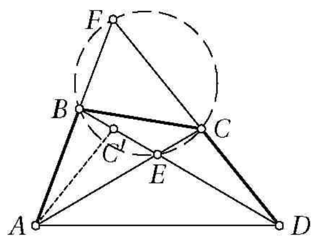
БМО 2007

1. Во конвексен четириаголник $ABCD$ важи $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}$, дијагоналите AC и BD се со различни должини и се сечат во точката E. Докажи дека $\overline{AE}=\overline{DE}$ ако и само ако $\measuredangle BAD+\measuredangle ADC=120^\circ$.

Решение. *Прв начин.* Нека $\overline{AE}=\overline{DE}$ и C' е точка на полуправата EB таква што $\overline{EC'}=\overline{EC}$. Од складноста на триаголниците AEC' и DEC следува

$$\overline{AC'}=\overline{DC}=\overline{AB},$$

но $C'\not\equiv B$, па затоа



$$180^\circ=\measuredangle ABD+\measuredangle AC'D=\measuredangle ABD+\measuredangle ACD.$$

Тоа значи дека полуправите AB и DC се сечат во некоја точка F (бидејќи $\measuredangle ABC+\measuredangle BCD>180^\circ$) и дека четириаголникот $BEFC$ е тетивен. Сега

$$\measuredangle EFA=\measuredangle ECB=\measuredangle EAF,$$

па затоа $\overline{EF}=\overline{EA}=\overline{ED}$, т.е. E е центар на опишаната кружница околу $\triangle ADF$. Конечно,

$$2\measuredangle AFD=\measuredangle AED=\measuredangle BEC=180^\circ-\measuredangle AFD,$$

па значи

$$\measuredangle AFD=60^\circ \text{ и } \measuredangle BAD+\measuredangle ADC=120^\circ.$$

Нека $\measuredangle BAD+\measuredangle ADC=120^\circ$, F е пресечната точка на правите AB и CD. Тогаш $\measuredangle AEB=\measuredangle ACB+\measuredangle DBC$ и $\measuredangle AEB=\measuredangle DAE+\measuredangle ADE$, па затоа важи

$$\begin{aligned}\measuredangle AEB&=\tfrac{1}{2}(\measuredangle ACB+\measuredangle DBC+\measuredangle DAE+\measuredangle ADE)\\&=\tfrac{1}{2}(\measuredangle CAB+\measuredangle BDC+\measuredangle DAE+\measuredangle ADE)\\&=\tfrac{1}{2}(\measuredangle BAD+\measuredangle ADC)=60^\circ.\end{aligned}$$

Бидејќи и $\measuredangle DFA=180^\circ-(\measuredangle BAD+\measuredangle ADC)=60^\circ$, следува дека четириаголникот $BECF$ е тетивен, па затоа $\measuredangle EFB=\measuredangle ECB$, т.е. $\measuredangle EFA=\measuredangle CAF$ (бидејќи $\overline{AB}=\overline{BC}$, па е $\measuredangle ECB=\measuredangle CAB$). Според тоа, $\triangle AEF$ е рамнокрак и затоа важи $\overline{AE}=\overline{FE}$. Аналогно $\measuredangle DFE=\measuredangle CBD=\measuredangle BDC$, па затоа $\overline{DE}=\overline{FE}$. Конечно, имаме $\overline{AE}=\overline{FE}=\overline{DE}$.

Втор начин. Нека $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=1$, $\measuredangle ACB=x$ и $\measuredangle DBC=y$. Од синусната теорема применета на $\triangle BCE$ имаме $\overline{AC}=2\cos x$ и $\overline{CE}=\frac{\sin y}{\sin(x+y)}$, па затоа $\overline{AE}=\overline{AC}-\overline{CE}=2\cos x-\frac{\sin y}{\sin(x+y)}=\frac{2\sin(x+y)\cos x-\sin y}{\sin(x+y)}=\frac{\sin(2x+y)}{\sin(x+y)}$. Аналогно се добива $\overline{DE} = \frac{\sin(x+2y)}{\sin(x+y)}$. Сега, од $\overline{AE} = \overline{DE}$ следува $\frac{\sin(2x+y)}{\sin(x+y)} = \frac{\sin(x+2y)}{\sin(x+y)}$, односно $0 = \sin(2x+y) - \sin(x+2y) = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{3x+3y}{2}$. Но, $x \neq y$ и $x, y < 90^\circ$, па затоа $\frac{3x+3y}{2} = 90^\circ$, т.е. $x + y = 60^\circ$. Сега $\measuredangle ABC + \measuredangle BCD = 360^\circ - 2x - 2y = 240^\circ$, од каде $\measuredangle BAD + \measuredangle ADC = 120^\circ$.

Доказот на обратната импликација е како во првиот начин на решавање.

2. Определи ги сите функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такви што за секои $x, y \in \mathbb{R}$ важи
$$f(f(x)+y) = f(f(x)-y) + 4f(x)y .$$

Решение. Ако во дадената равенка наместо (x, y) последователно замениме $(x, f(x))$ и $(z, 2f(x) - f(z))$ добиваме
$$f(2f(x)) = f(0) + 4f(x)^2 \quad \text{и} \quad f(2f(x)) = f(2f(z) - 2f(x)) + 8f(x)f(z) - 4f(z)^2 .$$
Ако од првата равенка ја одземеме втората добиваме
$$f(2f(x) - 2f(z)) - (2f(x) - 2f(z))^2 = f(0) . \qquad (1)$$
Јасно, $f \equiv 0$ е едно решение. Да забележиме дека ако $f \not\equiv 0$, тогаш секој реален број t може да се запише како $2f(x) - 2f(z)$. Навистина, од почетната равенка имаме $2(f(f(u)+y) - f(f(u)-y)) = 8f(u)y = t$, за $y = \frac{t}{8f(u)}$, каде $f(u) \neq 0$. Затоа од (1) следува дека $f(t) - t^2 = f(0) = c$, т.е. $f(t) = t^2 + c$. Лесно се проверува дека последната функција е решение на почетната равенка.

3. Определи ги сите природни броеви n за кои постои пермутација σ на броевите $1, 2, ..., n$ таква што $\sqrt{\sigma(1) + \sqrt{\sigma(2) + \sqrt{... + \sqrt{\sigma(n)}}}}$ е рационален број.

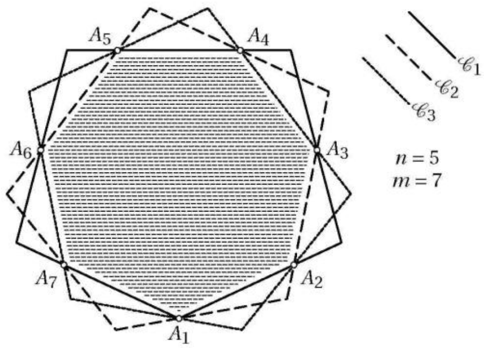
Решение. Да означиме $a_i = \sqrt{\sigma(i) + \sqrt{\sigma(i+1) + \sqrt{... + \sqrt{\sigma(n)}}}}$, за $1 \leq i \leq n$ и $a_{n+1} = 0$. Ако a_1 е рационален, со повеќекратно квадрирање добиваме дека и $a_2, ..., a_n$ се рационални. Уште повеќе, a_n мора да биде цел број, па затоа и $a_{n-1}, ..., a_1$ се цели броеви.

Понатаму, од $a_n < \sqrt{n} + 1$ следува дека $a_{n-1} < \sqrt{n + \sqrt{n} + 1} < \sqrt{n} + 1$, а потоа дека $a_{n-2} < \sqrt{n} + 1$ итн. па затоа $a_i < \sqrt{n} + 1$, за секој i. Нека $k^2 < n \leq (k+1)^2$. За некој j важи $\sigma(j) = k^2 + 1$. Бидејќи $a_j > k$ имаме $a_j = \sqrt{k^2 + 1 + a_{j+1}} \geq k + 1$, т.е. $a_{j+1} \geq 2k$. Меѓутоа, $a_{j+1} < \sqrt{n} + 1$, па затоа $2k < \sqrt{(k+1)^2} + 1$, од што следува $3k^2 < 2k + 2$, па затоа $k \leq 1$, т.е. $n \leq 4$.

Ако $n=4$, тогаш $\sigma(4)=1$ или $\sigma(4)=4$. Во првиот случај мора да биде $\sigma(3)=3$ и $\sigma(2)=2$, па останува $\sigma(4)=1$, што не е решение. Во вториот случај се добива $\sigma(3)=\sigma(2)=2$, што не е можно. Слично и за $n=2$ немаме решение. За $n=1$ и $n=3$ решенија се $\sqrt{1}=1$ и $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{1}}}=2$. Значи, $n\in\{1,3\}$.

4. Даден е цел број $n\geq 3$. Нека ℓ_1,ℓ_2 и ℓ_3 се границите на три конвексни $n-$аголници во рамнината такви да пресекот на секои две од нив е конечно множество точки. Определи го најголемиот можен број точки на $\ell_1\cap\ell_2\cap\ell_3$.

Решение. Точките во $\ell_1\cap\ell_2\cap\ell_3$ се темиња на конвексен многуаголник $\mathcal{P}$. Да разгледаме една негова страна AB. Таа припаѓа најмногу на една од границите на $n-$аголниците ℓ_1,ℓ_2 и ℓ_3 (пресекот на било кои две граници не содржи отсечка), што значи дека правата AB отсекува од останатите два $n-$аголници барем по едно теме. Така секоја страна на $\mathcal{P}$ отсекува барем две од вкупно $3n$ темиња на ℓ_1,ℓ_2 и ℓ_3, па затоа $\mathcal{P}$ не може да има повеќе од $\frac{3n}{2}$ страни.



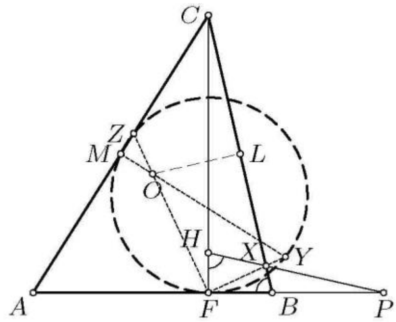
Бројот $m=[\frac{3n}{2}]$ може да се достигне. Нека $A_1A_2...A_m$ е конвексен $m-$аголник, a_k $(1\leq k\leq m)$ права низ темињата A_k,A_{k+1} и b_k $(1\leq k\leq 3n-m)$ произволна права низ A_k која со $m-$аголникот нема други заеднички точки ($A_{n+1}=A_1$, $b_{n+1}\neq b_1$). Доволно е да се дефинира $\ell_i,(i=1,2,3)$ како многуаголник определен со сите прави a_k и b_q, каде $k\equiv q+1\equiv i(\bmod 3)$. Лесно се проверува дека ℓ_1,ℓ_2 и ℓ_3 се конвексни $n-$аголници.

БМО 2008

1. Даден е разностран остроаголен триаголник ABC во кој $\overline{AC} > \overline{BC}$. Нека O е центарот на опишаната кружница и H е ортоцентарот на $\triangle ABC$ и нека F е подножјето на висината повлечена од темето C. На правата AB е избрана точка P, различна од A, таква што $\overline{AF} = \overline{PF}$, а M е средината на страната AC. Нека X е пресекот на правите PH и BC, Y е пресекот на правите OM и FX, а Z е пресекот на правите OF и AC. Докажи, дека точките F, M, Y и Z лежат на иста кружница.

Решение. *Прв начин*. Бидејќи $\measuredangle ZMY = 90^\circ$, доволно е да докажеме дека

$$\measuredangle ZFY = \measuredangle OFX = 90^\circ .$$



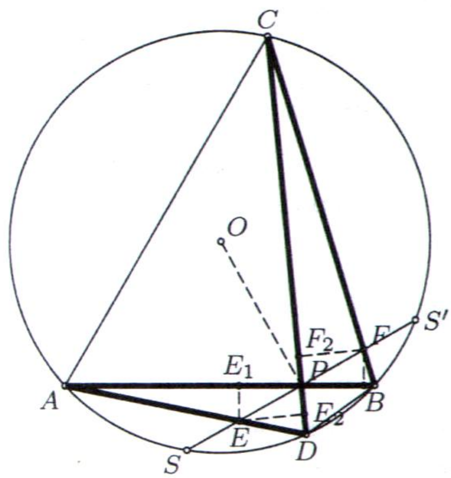
Нека X' е точка на страната BC таква што $\measuredangle OFX' = 90^\circ$ и нека L е средина на страната BC. Точките F и L се наоѓаат на кружницата k над дијаметар OX', а исто така и двете лежат на Ојлеровата кружница ω на триаголникот ABC, чиј центар K е средина на отсечката OH. Затоа FL како заедничка тетива на кружниците k и ω е нормална на JK, каде J е средината на OX'. Од $JK \parallel HX'$ следува дека $FL \perp HX'$. Оттука следува

$$\measuredangle FHX' = 90^\circ - \measuredangle CFL = 90^\circ - \measuredangle FCL = \measuredangle ABC = \measuredangle AHF = \measuredangle FHX ,$$

па затоа $X \equiv X'$.

Втор начин. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Низ средината T на тетивата SS' на кружницата k се конструирани тетиви AB и CD, така што точките A и C се на иста страна на правата SS'. Нека AD и BC ја сечат SS' во точките E и F, соодветно. Тогаш $\overline{EP} = \overline{PF}$.

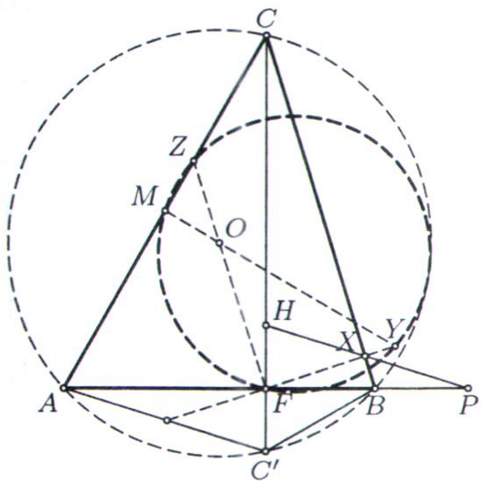


Доказ. Нека E_1 и E_2 се подножјата на нормалите од E на AB и CD, соодветно, а F_1 и F_2 се подножјата на нормалите од F на AB и CD, соодветно. Од $\triangle EPE_1 \sim \triangle FPF_1$

и $\triangle EPE_2 \sim \triangle FPF_2$ следува $\frac{\overline{EP}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{EE_1}}{\overline{FF_1}}$ И $\frac{\overline{EP}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{EE_2}}{\overline{FF_2}}$. Од $\triangle AEE_1 \sim \triangle CFF_2$ ($\measuredangle BAD = \measuredangle BCD$) и $\triangle DEE_2 \sim \triangle BFF_1$ ($\measuredangle ADC = \measuredangle ABC$) следува $\frac{\overline{AE}}{\overline{CF}} = \frac{\overline{EE_1}}{\overline{FF_2}}$ и $\frac{\overline{DE}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{EE_2}}{\overline{FF_1}}$.

Бидејќи $\overline{SP} = \overline{SP'}$, користејќи го степенот на точките E и F добиваме

$$\left(\frac{\overline{EP}}{\overline{PF}}\right)^2 = \frac{\overline{EE_1}}{\overline{FF_1}} \cdot \frac{\overline{EE_2}}{\overline{FF_2}} = \frac{\overline{EE_1}}{\overline{FF_2}} \cdot \frac{\overline{EE_2}}{\overline{FF_1}} = \frac{\overline{AE} \cdot \overline{DE}}{\overline{CF} \cdot \overline{BF}} = \frac{\overline{SE} \cdot \overline{S'E}}{\overline{SF} \cdot \overline{SF}} = \frac{\overline{SP}^2 - \overline{EP}^2}{\overline{SP}^2 - \overline{FP}^2} = 1, \text{ т.е. } \overline{EP} = \overline{PF}\,. \blacksquare$$



Бидејќи $\measuredangle YMZ = \measuredangle OMC = 90^\circ$, доволно е да се докаже дека $\measuredangle YFZ = 90^\circ$, т.е. дека $OF \perp FX$.

Нека C' е втората пресечна точка на правата CF и кружницата опишана околу $\triangle ABC$. Тогаш C' и H се симетрични во однос на F. Нека правата нормална на OF во точката F ги сече AC' и BC во точките T' и T, соодветно. Според лемата $\overline{FT'} = \overline{FT}$. Бидејќи A, T', C' се колинеарни, колинеарни се и точките P, T, H симетрични на овие точки во однос на точката F, односно точката T е пресечната точка на правите BC и PH. Според тоа, $T \equiv X$, па затоа $OF \perp FX$.

Трет начин. Нека ознаките се исти како во вториот начин на решавање. Нека α, β, γ се аглите на триаголникот во темињата A, B, C, соодветно, а R е радиусот на опишаната кружница. Доволно е да се докаже дека $OF \perp FX$, што следува од $\measuredangle OFA + \measuredangle XFP = 90^\circ$.

Навистина, ако C_1 е средина на страната AB, од $\triangle OFC_1$ (бидејќи $\overline{AC} > \overline{BC}$ важи $F - C_1 - A$) следува

$$\operatorname{tg} \measuredangle OFA = \operatorname{tg} \measuredangle OFC_1 = \frac{\overline{OC_1}}{\overline{FC_1}} = \frac{R\cos\gamma}{\frac{c}{2} - a\cos\beta} = \frac{R\cos\gamma}{R\sin\gamma - 2R\sin\alpha\cos\beta}$$

$$= \frac{\cos\gamma}{\sin(\alpha+\beta) - 2\sin\alpha\cos\beta} = \frac{\cos\gamma}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Исто така

$$1 = \frac{\overline{XP}}{\overline{XF}} \cdot \frac{\overline{XF}}{\overline{XC}} \cdot \frac{\overline{XC}}{\overline{XP}} = \frac{\sin \measuredangle XFP}{\sin \measuredangle FPX} \cdot \frac{\sin \measuredangle XCF}{\sin \measuredangle XFC} \cdot \frac{\sin \measuredangle XPC}{\sin \measuredangle PCX}$$

(теорема на Чева во тригонометриски облик за $\triangle CFP$ во точката X) и бидејќи

$\measuredangle XFC = 90^\circ - \measuredangle XFP$, $\measuredangle FPX = \measuredangle HAB = 90^\circ - \beta$ ($\triangle APH$ е рамнокрак),

$\measuredangle XCF = 90^\circ - \beta$, $\measuredangle PCX = 2\measuredangle FCA - \measuredangle BCA = 2(90^\circ - \alpha) - \gamma = \beta - \alpha$,

$\measuredangle XPC = \measuredangle ABC - \measuredangle XCF = \measuredangle HAC = 90^\circ - \gamma$ ($\triangle APC$ е рамнокрак),

следува дека

$$\operatorname{ctg}\measuredangle XFP = \frac{\sin\measuredangle XPC}{\sin\measuredangle PCX} = \frac{\cos\gamma}{\sin(\beta-\alpha)}.$$

Според тоа, $\operatorname{tg}\measuredangle OFA = \operatorname{ctg}\measuredangle XFP$, па затоа $\measuredangle OFA + \measuredangle XFP = 90^\circ$.

Четврт начин. Нека ознаките се како во вториот начин. Нека конфигурацијата од условот на задачата е сместена во комплексната рамнина така што точката O е во координатниот почеток и кружницата опишана околу $\triangle ABC$ е единечна. Нека точките A,B,C,H,F,P,X имаат афикси a,b,c,h,f,p,x. Важи $|a|=|b|=|c|=1$ и $h=a+b+c$.

Бидејќи F припаѓа на AB, а CF е нормална на AB, важи

$$\frac{f-a}{\overline{f}-\overline{a}} = \frac{b-a}{\overline{b}-\overline{a}} = -ab = \frac{f-c}{\overline{f}-\overline{c}},$$

па затоа $f + ab\overline{f} = a+b$ и $f - ab\overline{f} = c - ab\overline{c}$, т.е. $f = \frac{1}{2}(a+b+c-ab\overline{c})$. Бидејќи $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FP}$ следува $p = 2f - a = b + c - ab\overline{c}$. Точката X припаѓа на BC, па затоа $\frac{x-b}{\overline{x}-\overline{b}} = \frac{b-c}{\overline{b}-\overline{c}} = -b$, т.е. $\overline{x} = \frac{b+c-x}{bc}$. Точката X припаѓа на PH, па затоа

$$\frac{p-x}{\overline{p}-\overline{x}} = \frac{p-h}{\overline{p}-\overline{h}} = \frac{b+c-ab\overline{c}-a-b-c}{\overline{b}+\overline{c}-\overline{a}\overline{b}c-\overline{a}-\overline{b}-\overline{c}} = \frac{-a\overline{c}(b+c)}{-\overline{a}\overline{b}(c+b)} = \frac{a^2b}{c},$$

од каде следува

$$\begin{aligned} p-x &= \frac{a^2b}{c}(\overline{b}+\overline{c}-\overline{a}\overline{b}c - \frac{b+c-x}{bc}) \\ &= \frac{1}{c^2}(a^2c + a^2b - ac^2 - a^2b - a^2c + a^2x) \\ &= \frac{1}{c^2}(-ac^2 + a^2x), \end{aligned}$$

односно $x = \frac{1}{a^2+c^2}(c^2p + ac^2) = \frac{2fc^2}{a^2+c^2}$. Доволно е да се докаже дека $OF \perp FX$, што е еквивалентно со $\frac{f-0}{\overline{f}-0} = -\frac{f-x}{\overline{f}-\overline{x}}$, т.е. $x\overline{f} + \overline{x}f = 2|f|^2$. Последното равенство е точно бидејќи

$$x\overline{f} + \overline{x}f = \frac{2fc^2}{a^2+c^2}\overline{f} + \frac{2\overline{f}\,\overline{c}^2}{\overline{a}^2+\overline{c}^2}f = 2|f|^2\left(\frac{c^2}{a^2+c^2} + \frac{a^2}{a^2+c^2}\right) = 2|f|^2.$$

Петти начин. Нека ознаките се како во вториот начин на решавање. Земаме правоаголен координатен систем со координатен почеток во точката F, а правите AB и FC се оските x и y, соодветно. Нека $A(-a,0)$, $B(b,0)$, $C(0,c)$ ($a,b,c>0$ и како $\overline{AC} > \overline{BC}$, добиваме $a>b$). Равенката на правата BC е $y = -\frac{c}{b}(x-b)$, а нормалата на оваа права која ја содржи точката A е

$y=\frac{c}{b}(x+a)$. Пресекот на оваа нормала со $y-$оската е $H(0,\frac{ab}{c})$. Бидејќи во остроаголен триаголник растојанието од точката O до страната AB е двапати помало од растојанието меѓу точките C и H, следува дека $O(\frac{b-a}{2},\frac{c^2-ab}{2c})$.

Понатаму, $P(a,0)$, равенката на правата PH е $y=-\frac{b}{c}(x-a)$, па пресекот на правите BC и PH е $X(\frac{b(ab-c^2)}{b^2-c^2},\frac{bc(b-a)}{b^2-c^2})$. Конечно, доволно е да се докаже дека $OF\perp FX$, што следува од

$$\begin{aligned}\overrightarrow{FO}\cdot\overrightarrow{FX}&=(\frac{b-a}{2},\frac{c^2-ab}{2c})\cdot(\frac{b(ab-c^2)}{b^2-c^2},\frac{bc(b-a)}{b^2-c^2})\\&=\frac{b-a}{2}\cdot\frac{b(ab-c^2)}{b^2-c^2}+\frac{c^2-ab}{2c}\cdot\frac{bc(b-a)}{b^2-c^2}=0.\end{aligned}$$

2. Дали постои низа позитивни броеви $a_1,a_2,...$ кои ги задоволуваат условите

1) $\sum\limits_{i=1}^{n}a_i\le n^2$, за секој $n\in\mathbb{N}$ и

2) $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\le 2008$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Решение. *Прв начин*. Нека претпоставиме дека таква низа постои. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува

$$\frac{1}{a_{n+1}}+...+\frac{1}{a_{2n}}\ge\frac{n^2}{a_{n+1}+...+a_{2n}}\ge\frac{n^2}{a_1+...+a_{2n}}\ge\frac{n^2}{4n^2}=\frac{1}{4},$$

за секој $n\in\mathbb{N}$. Меѓутоа, од тука следува $\sum\limits_{i=1}^{2^k}\frac{1}{a_i}\ge\frac{k}{4}$, за $k=1,2,...$, што противречи на условот 2).

Втор начин. Нека $x_n=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}$, за $n\in\mathbb{N}$. Низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ е монотона, па ако е ограничена таа е конвергентна. Но конвергентна низа реални броеви е Кошиева, па затоа постои $n_0\in\mathbb{N}$ таков што $0<x_n-x_m<\frac{1}{4}$, кога $n>m\ge n_0$. Сега, од неравенството меѓу аритметичката и хармониската средина следува

$$\sum_{i=n_0+1}^{2n_0}a_i\ge\frac{n_0^2}{\sum\limits_{i=n_0+1}^{2n_0}\frac{1}{a_i}}=\frac{n_0^2}{x_{2n_0}-x_{n_0}}>4n_0^2=(2n_0)^2\ge\sum_{i=1}^{2n_0}a_i>\sum_{i=n_0+1}^{2n_0}a_i,$$

што не е можно. Според тоа, низата $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ не е ограничена.

3. Нека n е природен број. Правоаголник со должини на страни $90n+1$ и $90n+5$ е поделен на единечни квадрати со страни паралелни на страните на правоаголникот. Нека S е множеството од сите темиња на овие единечни квадрати.

Докажи, дека бројот на правите кои содржат барем две точки од множеството S е делив со 4.

Решение. Нека поставиме координатен систем со координатен почеток во центарот O на правоаголникот и x оска паралелна на подолгата страна на правоаголникот. Множеството P од разгледуваните прави да го поделиме на две групи.

1) Прави кои не минуваат низ точката O. Има $(90n+2)+(90n+6)$ прави паралелни на една од координатните оски и овој број е делив со 4. За секоја од останатите прави кои минуваат низ точката O, правите кои се симетрични на неа во однос на координатните оски и во однос на точката O исто така припаѓаат на множеството P, па затоа множеството од овие прави е унија на дисјунктни четириелементни множества. Затоа, бројот на правите кои не минуваат низ точката O е делив со 4.
2) Прави кои минуваат низ точката O. Секоја права низ O која содржи некоја точка од S ја содржи и нејзината симетрична точка, па затоа припаѓа на P, а нејзиниот коефициент на правец е рационален број $\frac{p}{q}$, каде p и q се непарни цели броеви такви што $|p|\leq 90n+1,\ \ 0<q\leq 90n+5$ и притоа $\mathrm{NZD}(p,q)=1$. Правите од оваа група ги делиме на три подгрупи:

   а) Две прави $l_1(x=y), l_2(x=-y)$.

   б) За секоја права која минува низ O со коефициент на правец $\frac{p}{q}$ за $|p|\leq 90n+1$ и $0<q\leq 90n+1$, различна од l_1 и l_2, правите симетрични на неа во однос на правите x, l_1 и l_2 припаѓаат на множеството P, па затоа множеството од овие прави е унија на дисјунктни четириелементни множества.

   в) Остануваат правите кои минуваат низ O и имаат коефициент на правец $\frac{p}{q}$ за кој $q\in\{90n+3, 90n+5\}$. Бидејќи $\mathrm{NZD}(x,q)=1$ и $2\nmid x$ ако и само ако $\mathrm{NZD}(q,q-x)=1$ и $2\mid q-x$, заклучуваме дека непарни природни броеви кои се помали или еднакви на q и се заемно прости со q има исто колку што има и парни, па затоа нивниот број е $\frac{1}{2}\varphi(q)$. Според тоа, за $q=90n+3$ бројот на овие прави е $\varphi(90n+3)$, додека за $q=90n+5$ нивниот број е $\varphi(90n+4)-2$, бидејќи треба да се исклучат правите со коефициент на агол $\pm\frac{90n+3}{90n+5}$. Бидејќи $4\mid\varphi(3)\varphi(30n+1)=\varphi(90n+3)$ и $4=\varphi(5)\mid\varphi(90n+5)$, добиваме дека бројот на овие прави е од облик $4k-2$.

   Од а), б) и в) следува дека бројот на правите кои минуваат низ точката O е делив со 4.

Конечно, од 1) и 2) следува дека бројот на правите кои содржат барем две точки од множеството S е делив со 4.

4. Нека c е природен број. Низата $a_1, a_2, ...$ е дефинирана со

$$a_1 = c, a_{n+1} = a_n^2 + a_n + c^3,$$

за секој природен број n. Определи ги сите вредности на c за кои постојат природни броеви $k \geq 1$ и $m \geq 2$ такви што бројот $a_k^2 + c^3$ е еднаков на $m-$тиот степен на некој природен број.

Решение. За $k > 1$ од рекурентната врска добиваме

$$a_k^2 + c^3 = a_{k+1} - a_k = a_k^2 + a_k - a_{k-1}^2 - a_{k-1} = (a_k - a_{k-1})(a_k + a_{k-1} + 1) . \qquad (1)$$

Нека претпоставиме дека $d \mid a_k - a_{k-1}$ и $d \mid a_k + a_{k-1} + 1$. Тогаш $d \mid 2a_k + 1$ и $d \mid 2a_{k-1} + 1$. Но, од рекурентната релација следува

$$2(2a_k + 1) = (2a_{k-1} + 1)^2 + 4c^3 + 1,$$

па затоа $d \mid 4c^3 + 1$, а оттука следува дека $d \mid 2a_n + 1$, за секој $n < k$. Според тоа, $d \mid 2a_1 + 1 = 2c + 1$. Меѓутоа, тогаш $d \mid 2(4c^3 + 1) - (2c + 1)(4c^2 - 2c + 1) = 1$, т.е. $d = 1$.

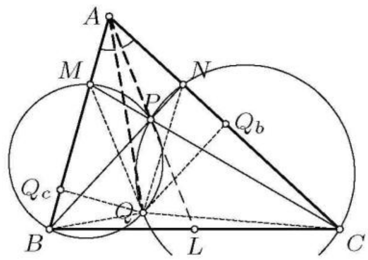
Сега, ако $a_{k+1} - a_k$ е $m-$ти степен, од (1) следува дека и $a_k - a_{k-1}$ е $m-$ти степен. Постапката ја продолжуваме е заклучуваме дека $a_2 - a_1 = c^2(c+1)$ е $m-$ти степен, па од $\mathrm{NZD}(c^2, c+1) = 1$ следува дека c^2 и $c+1$ се $m-$ти степени. Меѓутоа, c не може да биде $m-$ти степен, па затоа m мора да биде парен број и уште повеќе $m = 2$. Значи, $c+1$ е точен квадрат. Конечно, ако $c+1$ е точен квадрат, тогаш и $c^2(c+1) = a_1^2 + c^3$ е точен квадрат.

БМО 2009

1. Во множеството природни броеви реши ја равенката
$$3^x - 5^y = z^2.$$
Решение. Прво да забележиме дека $2 \mid z$, па затоа
$$4 \mid z^2 = 3^x - 5^y \equiv (-1)^x - 1 (\operatorname{mod} 4),$$
од каде следува дека x е парен број, т.е. $x = 2k$. Сега равенката го добива видот
$$(3^k - z)(3^k + z) = 5^y,$$
па затоа $3^k - z = 5^n$ и $3^k + z = 5^{y-n}$, за некој цел број $n \geq 0$. Ако ги собереме последните две равенства добиваме $5^n + 5^{y-n} = 2 \cdot 3^k$ и бидејќи $2 \cdot 3^k$ не е делив со 5, следува дека $n = 0$, односно
$$1 + 5^y = 2 \cdot 3^k.$$
Нека претпоставиме дека $k \geq 2$. Тогаш $9 \mid 5^y + 1$, т.е. $5^y \equiv -1 (\operatorname{mod} 9)$. Бидејќи степенот на 5 по модул 9 е еднаков на 6 (Провери!) и $5^3 \equiv -1 (\operatorname{mod} 9)$, од последната конгруенција следува дека $y \equiv 3 (\operatorname{mod} 6)$. Но, тогаш
$$2 \cdot 3^k = 5^y + 1 \equiv 5^3 + 1 \equiv 0 (\operatorname{mod} 7),$$
што не е можно.
Според тоа, $k \leq 1$, од каде следува дека единствено решение на дадената равенка е $(x, y, z) = (2, 1, 2)$.

2. Во триаголникот ABC точките M и N се соодветно на страните AB и AC и се такви што правата MN е паралелна со страната BC. Нека P е пресекот на правите BN и CM. Кружниците опишани околу $\triangle BMP$ и $\triangle CNP$ се сечат во две различни точки P и Q. Докажи дека $\measuredangle BAQ = \measuredangle CAP$.

Решение. *Прв начин.* Нека правата AP ја сече BC во точка L. Од теоремата на Чева следува
$$\frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} = \frac{\overline{BM}}{\overline{MA}} \cdot \frac{\overline{AN}}{\overline{AC}} = 1,$$
т.е. L е средина на страната BC. Нека L_b и Q_b (односно L_c и Q_c) се соодветно подножните точки на нормалите повлечени од L и Q на AC (односно на AB).



Бидејќи $\measuredangle QBN = \measuredangle QPC = \measuredangle QNC$ и аналогно $\measuredangle QMB = \measuredangle QCN$, триаголниците BQM и NQC се слични. Од оваа сличност следува

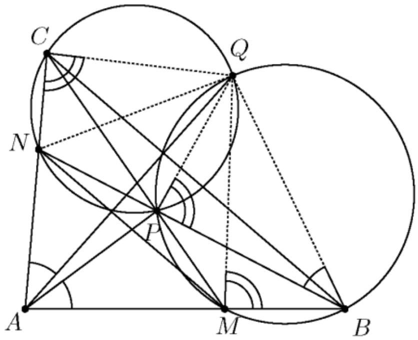
$$\frac{\overline{QQ_b}}{\overline{QQ_c}}=\frac{\overline{NC}}{\overline{MB}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{LL_c}}{\overline{LL_b}},$$

па затоа $\triangle Q_bQQ_c \sim \triangle L_cLL_b$ и притоа важи

$$\measuredangle BAQ=\measuredangle Q_cAQ=\measuredangle Q_cQ_bQ=\measuredangle L_bL_cL=\measuredangle CAL=\measuredangle CAP.$$

Втор начин. Четириаголниците $MBQP$ и $NCQP$ се тетивни, што значи

$$\measuredangle NCQ=\measuredangle BPQ=\measuredangle BMQ,$$



па затоа четириаголникот $AMQC$ е тетивен. Аналогно и четириаголникот $ABQN$ е тетивен. Ќе докажеме дека $\triangle ANQ \sim \Delta APB$. Од сличноста $\triangle PBQ \sim \triangle CAQ$ следува $\frac{\overline{AQ}}{\overline{BQ}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{PB}}$, а од $\triangle CNQ \sim \triangle MBP$ следува $\frac{\overline{NQ}}{\overline{BQ}}=\frac{\overline{CN}}{\overline{MB}}$. Според тоа, $\frac{\overline{AQ}}{\overline{NQ}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{CN}}\cdot\frac{\overline{BM}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{BM}}\cdot\frac{\overline{BM}}{\overline{PB}}=\frac{\overline{AB}}{\overline{PB}}$, што заедно со $\measuredangle AQN=\measuredangle ABN$ дава $\triangle ANQ \sim \triangle CAQ$, па затоа $\measuredangle BAQ=\measuredangle CAP$.

Трет начин. Нека Ψ е композиција на симетријата во однос на симетралата на $\measuredangle CAB$ и инверзијата во однос на точката A, со радиус $\sqrt{\overline{AB}\cdot\overline{AN}}$. Бидејќи $MN \parallel BC$, следува дека $\triangle AMN \sim \triangle ABC$, па затоа $\sqrt{\overline{AB}\cdot\overline{AN}}=\sqrt{\overline{AC}\cdot\overline{AM}}$. Нека $X'=\Psi(X)$ за произволна точка X. Инверзијата ја пресликува полуправата која го содржи центарот на инверзијата во самата себе. Претходно споменатата симетрија ги пресликува полуправите AB и AC една во друга. Бидејќи $\overline{AC'}=\frac{\sqrt{\overline{AB}\cdot\overline{AN}}^2}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AM}}{\overline{AC}}=\overline{AM}$, $\overline{AB'}=\frac{\sqrt{\overline{AB}\cdot\overline{AN}}^2}{\overline{AB}}=\overline{AN}$, $\overline{AN'}=\frac{\sqrt{\overline{AB}\cdot\overline{AN}}^2}{\overline{AN}}=\overline{AB}$, $\overline{AM'}=\frac{\sqrt{\overline{AB}\cdot\overline{AN}}^2}{\overline{AM}}=\frac{\overline{AC}\cdot\overline{AM}}{\overline{AM}}=\overline{AC}$ и бидејќи точките C' и N' припаѓаат на полуправата AB, а точките B' и M' на полуправата AC, следува дека $\Psi(C)=M$, $\Psi(B)=N$, $\Psi(N)=B$ и $\Psi(M)=C$. Како и во вториот начин ан решавање докажуваме дека четириаголниците $ABDN$ и $AMQC$ се тетивни. Бидејќи A е центар на гореспоменатата инверзија, со пресликувањето Ψ кружниците опишани околу овие четириаголници се пресликуваат во прави и тоа кружницата опишана околу четириаголникот $ABQN$ се пресликува во правата $B'N'\equiv BN$, а кружницата опишана околу четириаголникот $AMQC$ во правата $M'C'\equiv MC$. Пресечните точки на овие кружници се A (центарот на инверзија) и Q, што значи дека точката Q со пресликувањето Ψ се пресликува во пресекот на правите NB и CM, т.е. $\Psi(Q)=P$.

Бидејќи симетријата ги запазува аглите и како при инверзијата правите кои минуваат низ центарот на инверзијата се пресликуваат во самите себе (па не се менува аголот меѓу нив), следува дека

$$\measuredangle BAQ=\measuredangle B'AQ'=\measuredangle NAP=\measuredangle CAP.$$

Четврт начин. Нека конфигурацијата од задачата е сместена во комплексна рамнина, така што на темето A му соодветствува бројот 0. Нека на точките означени со големите букви на латиницата им соодветствуваат афикси означени со истите мали букви на латиницата.

Нека $k\in(0,1)$ е коефициентот на сличност на триаголниците AMN и ABC. Тогаш $a=0, m=kb, n=kc$. Ако точката z припаѓа на MC, тогаш важи $\frac{z-c}{\overline{z}-\overline{c}}=\frac{m-c}{\overline{m}-\overline{c}}=\frac{kb-c}{k\overline{b}-\overline{c}}$, т.е. $z(k\overline{b}-\overline{c})-\overline{z}(kb-c)=k(\overline{b}c-b\overline{c})$. Аналогно, точката z припаѓа на NB ако и само ако важи $z(k\overline{c}-\overline{b})-\overline{z}(kc-b)=k(\overline{c}b-c\overline{b})$. Бидејќи $P=MC\cap BN$ добиваме

$$p=\frac{k(b\overline{c}-\overline{b}c)(kb-c+kc-b)}{(k\overline{c}-\overline{b})(kb-c)-(k\overline{b}-\overline{c})(kc-b)}=\frac{k(k-1)(b\overline{c}-\overline{b}c)(b+c)}{(k^2-1)(b\overline{c}-\overline{b}c)}=\frac{k}{k+1}(b+c).$$

Како и во првиот начин на решавање докуваме дека $\triangle MBQ\sim\triangle NQC$, па затоа $\frac{\overline{BQ}}{\overline{BM}}=\frac{\overline{NQ}}{\overline{NC}}$, од каде добиваме $\frac{q-b}{m-b}=\frac{q-n}{c-n}$, па затоа важи

$$q=\frac{bc-mn}{b+c-m-n}=\frac{bc(1-k^2)}{(b+c)(1-k)}=(k+1)\frac{bc}{b+c}.$$

Бидејќи $\frac{c-a}{p-a}=\frac{c}{p}=\frac{k+1}{k}\cdot\frac{c}{b+c}$ следува

$$U=\frac{c-a}{p-a}:\overline{\left(\frac{c-a}{p-a}\right)}=\frac{c(\overline{b}+\overline{c})}{\overline{c}(b+c)},$$

а бидејќи $\frac{q-a}{b-a}=\frac{q}{b}=(k+1)\cdot\frac{c}{b+c}$ следува

$$V=\frac{q-a}{b-a}:\overline{\left(\frac{q-a}{b-a}\right)}=\frac{c(\overline{b}+\overline{c})}{\overline{c}(b+c)}.$$

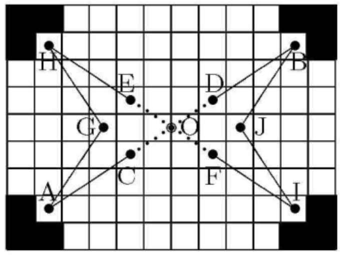
Според тоа, $U=V$, а оттука следува дека $\measuredangle BAQ=\measuredangle CAP$.

3. Правоаголник со димензии 9×12 е поделен на единични квадрати. Со црвена боја се обоени центрите на сите единични квадрати, освен на четирите аголни и осумте квадрати кои имаат заедничка страна со некој од аголните квадрати. Дали е можно црвените центри да се означат со $C_1, C_2, ..., C_{96}$, но така да се исполнети следниве услови:

1) $\overline{C_1C_2}=\overline{C_2C_3}=...=\overline{C_{95}C_{96}}=\overline{C_{96}C_1}=\sqrt{13}$, и

2) затворената искршена линија $C_1C_2...C_{96}C_1$ е централно симетрична.

Решение. Правоаголникот да го поставиме во координатна рамнина така што центарот на полето во $i-$тата колона и $j-$тата редица има координати (i,j). Точките (i,j) и (i',j') се соседни на патеката



$$\mathbf{C}=C_1C_2...C_{96}C_1$$

ако и само ако $\{|i-i'|,|j-j'|\}=\{2,3\}$.
Центарот на симетрија на патеката $\mathbf{C}$ е точката $O(6\frac{1}{2},5)$. Точките $A(2,2)$ и $B(11,8)$ се симетрични во однос на O и ја делат $\mathbf{C}$ на два дела $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$. Единичните квадрати ќе ги обоиме стандардно како шаховска табла. Тогаш точките A и B се различно обоени, па како секои две соседни точки се различно обоени, секој од деловите $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ се состои од непарен број отсечки. Затоа овие делови се со различни должини, па затоа не се симетрични еден на друг. Според тоа, секој од деловите $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ мора да биде централно симетричен.
Деловите $\mathbf{C}_1$ и $\mathbf{C}_2$ се со непарна должина, па затоа секој од нив треба да содржи отсечка која е централно симетрична во однос на O. Единствени такви отсечки се отсечките кои ги поврзуваат точките $C(5,4)$ и $D(8,6)$, односно $E(5,6)$ и $F(8,4)$, што значи дека отсечките CD и EF се содржани во $\mathbf{C}$. Понатаму, точката A може да се поврзи само со точките C и $G(4,5)$, па затоа отсечките CA и AG се содржани во $\mathbf{C}$. Аналогно, разгледувајќи ги точките B, $H(2,8)$, $I(11,2)$ и $J(9,5)$, добиваме дека патеката $AGHEFIJBDCA$ целосно се содржи во $\mathbf{C}$, што е противречност.

4. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што

$$f(f(m)^2+2f(n)^2)=m^2+2n^2\text{, за секои } m,n\in\mathbb{N}. \qquad (*)$$

Решение. *Прв начин*. Нека n е фиксиран број и да претпоставиме дека $f(m_1)=f(m_2)$. Тогаш од (*) добиваме

$$m_1^2+2n^2=f(f(m_1)^2+2f(n)^2)=f(f(m_2)^2+2f(n)^2)=m_2^2+2n^2,$$

т.е. $m_1=m_2$, што значи дека f е инјекција. Воведуваме смена $g(n)=f(n)^2$ и ја добиваме равенката

$$g(g(m)+2g(n))=(m^2+2n^2)^2. \qquad (1)$$

Од равенството

$$(n+2)^2+2(n-1)^2=(n-2)^2+2(n+1)^2$$

следува дека

$$g(n+2)-2g(n+1)+2g(n-1)-g(n-2)=0\,,$$

т.е. низата $\{g(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ задоволува линеарна диференцна равенка чие општо решение е

$$g(n)=an^2+bn+c+d(-1)^n\,. \qquad (2)$$

Ако (2) го замениме во (1), тогаш за $m=1$ по средувањето добиваме

$$An^4+Bn^3+Cn^2+Dn+E\pm F=4n^4+4n^2+1, \text{ за секој } n\in\mathbb{N}\,,$$

каде $A=4a^3$ и $B=8a^2b$, па затоа $a=1$ и $b=0$. Сега, од (2) имаме

$$f(n)^2=n^2+c+d(-1)^n\,.$$

Понатаму, за $n>|c|+|d|$ имаме $n^2-n<f(n)^2<n^2+n$, па затоа мора да важи $f(n)=n$, т.е. $c+d(-1)^n=0$, од каде следува $c=d=0$. Според тоа, $f(n)=n$, за секој $n\in\mathbb{N}$.

Лесно се проверува дека функцијата $f(n)=n$ е решение на задачата.

Втор начин. Како и во првиот начин докажуваме дека f е инјекција. Затоа важи

$$f(m)^2+2f(n)^2=f(p)^2+2f(q)^2 \quad\Leftrightarrow\quad m^2+2n^2=p^2+2q^2\,. \qquad (3)$$

Ставаме $f(1)=a$. Ако во (*) ставиме $m=n=1$ добиваме $f(3a^2)=3$. За $m=a^2, n=5a^2$ и $p=q=3a^2$ од (3) добиваме

$$f^2(5a^2)+2f^2(a^2)=3f^2(3a^2)=27\,.$$

Бидејќи решенија на равенката $x^2+2y^2=27$ во множеството природни броеви се $(x,y)=(3,3)$ и $(x,y)=(5,1)$, заклучуваме дека $f(a^2)=1$ и $f(5a^2)=5$. Оттука и од (3) за $m=5a^2, n=2a^2$, $p=a^2$ и $q=4a^2$ добиваме

$$2f^2(4a^2)-2f^2(2a^2)=f^2(5a^2)-f^2(a^2)=24\,,$$

од каде наоѓаме $f(4a^2)=4$ и $f(2a^2)=2$. Повторно од (3) следува дека за $m=(k+4)a^2, n=(k+1)a^2$, $p=ka^2$ и $q=(k+3)a^2$ важи

$$f^2((k+4)a^2)=2f^2((k+3)a^2)-2f^2((k+1)a^2)+f^2(ka^2)\,.$$

Од последното равенство со индукција следува дека $f(ka^2)=k$. Затоа $f(a^3)=a=f(1)$, и како f е инјекција добиваме $a^3=1$, т.е. $a=1$. Според тоа, $f(k)=k$, за секој $k\in\mathbb{N}$. Лесно се проверува дека оваа функција го задоволува условот на задачата.

БМО 2010

1. Нека a,b,c се позитивни реални броеви. Докажи дека

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}\geq 0\,.$$

Решение. *Прв начин*. Неравенството е еквивалентно со неравенството

$$\frac{a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3-a^3b^2c-b^3c^2a-c^3a^2b}{(a+b)(b+c)(c+a)}\geq 0\,,$$

па затоа доволно е да докажеме дека

$$a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3\geq a^3b^2c+b^3c^2a+c^3a^2b\,. \tag{1}$$

Од неравенството меѓу средините следува

$$a^3b^3+a^3b^3+a^3c^3\geq 3\sqrt[3]{a^3b^3\cdot a^3b^3\cdot a^3c^3}=3a^3b^2c\,.$$

Конечно, ако ги собереме аналогните циклични неравенства го добиваме неравенството (1). Знак за равенство важи ако и само ако $a=b=c$.

Втор начин. Ако двете страни на неравенството ги поделиме со $abc>0$ и додадеме на 3 го добиваме неравенството

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b}+1+\frac{b^2c(c-a)}{b+c}+1+\frac{c^2a(a-b)}{c+a}+1\geq 3\,,$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$\frac{b(c+a)}{a+b}+\frac{c(a+b)}{b+c}+\frac{a(b+c)}{c+a}\geq 3\,. \tag{2}$$

Неравенството (2) следува од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина. Навистина

$$\frac{b(c+a)}{a+b}+\frac{c(a+b)}{b+c}+\frac{a(b+c)}{c+a}\geq 3\sqrt[3]{\frac{b(c+a)}{a+b}\cdot\frac{c(a+b)}{b+c}\cdot\frac{a(b+c)}{c+a}}=3\,,$$

при што зна за равенство важи ако и само ако

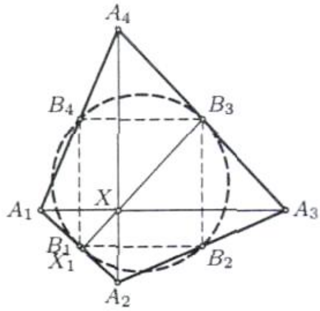
$$\frac{b(c+a)}{a+b}=\frac{c(a+b)}{b+c}=\frac{a(b+c)}{c+a}\,,$$

т.е. ако и само ако $ab=bc=ca$, што значи ако и само ако $a=b=c$.

2. Нека H е ортоцентар на остроаголниот триаголник ABC, а M средината на AC. Нека C_1 е подножјето на нормалата повлечена од C на AB, а H_1 е симетричната точка на H во однос на AB. Нека P,Q и R соодветно се подножјата на нормалите повлечени од точката C_1 на правите AH_1, AC и CB, а M_1 е центарот на опишаната кружница околу триаголникот PQR. Докажи дека симетричната точка на M во однос на точката M_1 лежи на отсечката BH_1.

Решение. Ќе го користиме следново едноставно тврдење.

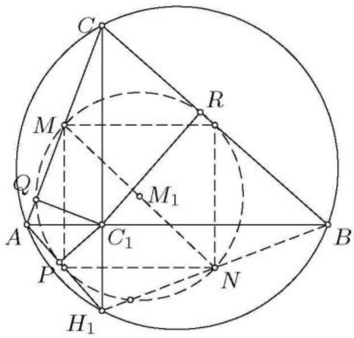
Лема. Нека во конвексен тетивен четириаголник $A_1A_2A_3A_4$ дијагоналите се сечат по прав агол во точката X. Ако B_i е средина на страната A_iA_{i+1}, а X_i е подножјето на нормалата повлечена од X кон таа страна ($A_5 = A_1$), тогаш точките $B_i, X_i, i = 1,2,3,4$ лежат на иста кружница.



Доказ. Четириаголникот $B_1B_2B_3B_4$ е правоаголник бидејќи $B_1B_2 \parallel B_3B_4 \parallel A_1A_3$ и $B_2B_3 \parallel B_4B_1 \parallel A_2A_4$. Понатаму,

$\measuredangle B_3XA_3 = \measuredangle A_4A_3A_1 = \measuredangle A_4A_2A_1 = \measuredangle A_1XX_1$,

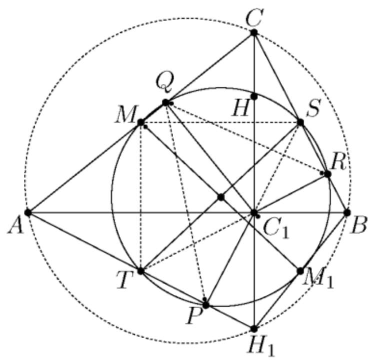
па затоа точките B_3, X, X_1 се колинеарни, што значи дека точката X_1 лежи на кружницата над дијаметарот B_1B_3, т.е. на опишаната кружница k околу правоаголникот $B_1B_2B_3B_4$. Аналогно се докажува дека $X_i, i = 2,3,4$ лежат на k. ■



Познато е дека точката H_1 лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Според претходната лема точките P, Q, R лежат на кружницата над дијаметарот MN, каде N е средина на отсечката BH_1. Според тоа, точката N е симетрична на точката M во однос на точката M_1, па затоа лежи на BH_1.

Втор начин. Бидејќи H е ортоцентар на $\triangle ABC$, а точката H_1 е симетрична на точката H во однос на AB, добиваме

$$\measuredangle AH_1B = \measuredangle AHB = 180^\circ - \measuredangle ACB,$$



и затоа H_1 лежи на опишаната кружница околу $\triangle ABC$. Нека правата C_1P ја сече BC во точката S, а правата C_1R ја сече AH_1 во точката T (цртеж десно). Имаме:

$$\measuredangle TC_1A = \measuredangle BC_1R = \measuredangle BCC_1 = \measuredangle TAC_1,$$

и затоа T е средина на AH_1, а TM како средна линија е паралелна на CH_1. Аналогно S е средина на BC и SM е паралелна на AB.

Од досега изнесеното следува дека $\measuredangle TMS = \measuredangle(AB, CH_1) = 90^\circ$, т.е. точките T, P, R, S, M припаѓаат на кружница ω со дијаметар ST. Од друга страна, $\measuredangle PQR = \measuredangle PQC_1 + \measuredangle RQC_1 = \measuredangle PAC_1 + \measuredangle RCC_1 = BH_1 = \measuredangle PTR$, т.е. точката Q припаѓа на ω и M_1 е дијаметрално спротивната точка на M во ω. Според тоа, четириаголникот MSM_1T е правоаголник, $SM_1 \parallel CH_1, TM_1 \parallel AB$, т.е. M_1 се совпаѓа со средината на отсечката BH_1 и во случајов лежи на неа.

Забелешка. И двета начини на решавање всушност се засноваат на иста идеја, само начинот на испишување е различен.

3. Трака со ширина w го нарекуваме множеството точки во рамнината кои се наоѓаат на или меѓу две паралелни прави кои се на растојание w една од друга. Нека S е множество од n точки во рамнината такво што било кои три точки од множеството S може да се покријат со трака со ширина 1. Докажи, дека S може да се покрие со трака со ширина 2.

   Решение. Меѓу сите триаголници со темиња во S, го разгледуваме триаголникот кој има најголема плоштина, и нека тоа е $\triangle ABC$. Нека A', B', C' се симетричните точки на точките A, B, C во однос на средините на страните BC, CA, AB, соодветно. Тврдиме дека сите точки на множеството S лежат внатре или на страните на $\triangle A'B'C'$. Навистина, ако $X \in S$ е надвор од $\triangle A'B'C'$, тогаш без ограничување на општоста можеме да земеме дека X и BC се на различни страни од правата $B'C'$, па затоа $\triangle BCX$ има поголема плоштина од $\triangle ABC$, што е противречност.
   Триаголникот ABC може да се покрие со трака со ширина 1, па затоа триаголникот $A'B'C'$ може да се покрие со трака со ширина 2, бидејќи е хомотетична слика на $\triangle ABC$ со коефициент на хомотетија 2. Оваа трака го покрива множеството S.

4. Нека $n \geq 2$ е природен број. Со $f(n)$ да го означиме збирот на сите природни броеви кои се помали или еднакви на n и кои не се заемно прости со n. Докажи, дека $f(n+p) \neq f(n)$, за секој $n \geq 2$ и за секој прост број p.

   Решение. Ненегативни цели броеви кои не се заемно прости со n и кои се помали или еднакви на n има $n+1-\varphi(n)$. Понатаму, ако r е таков број, тогаш и $n-r$ е таков број, па затоа важи $f(n) = \frac{1}{2}n(n+1-\varphi(n))$.
   Нека претпоставиме дека $f(n+p) = f(n)$ за некој природен број n и прост број p. Тогаш го добиваме равенството

$$n(n+1-\varphi(n))=(n+p)(n+p+1-\varphi(n+p)). \qquad (1)$$

Ако $\mathrm{NZD}(n,p)=1$, тогаш $n+p$ е делител на $n+1-\varphi(n)<n$, што не е можно. Нека $n=pt, t\in\mathbb{N}$ и (1) да го запишеме во видот

$$t(tp+1-\varphi(tp))=(t+1)(tp+p+1-\varphi(tp+p)). \qquad (2)$$

Да допуштиме дека p е делител на t и нека $t=ps, s\in\mathbb{N}$. Бидејќи $\mathrm{NZD}(t,t+1)=\mathrm{NZD}(p,t+1)=1$, имаме

$$t+1\,|\,pt+1-\varphi(pt)=(p+1)(t+1)-p-t-p\varphi(t),$$

од каде следува дека $t+1\,|\,p(1+s+\varphi(t))$, па затоа $t+1\,|\,1+s+\varphi(t)$. Но,

$$1+s+\varphi(t)<1+t+t<2(t+1)$$

и затоа $t+1=1+s+\varphi(t)$. Тогаш $t+1=pt+1-\varphi(pt)$ и од (2) добиваме

$$t=pt+p+1-\varphi(p(t+1))=pt+p+1-(p-1)\varphi(t+1).$$

Последното равенство, разгледано по модул $p-1$ дава $p-1\,|\,2$, па затоа $p=2$ или $p=3$. Ако $p=2$, тогаш $t=2t+3-\varphi(t+1)>t+2$, а ако $p=3$, добиваме $t=3t+4-2\varphi(t+1)>t+2$, што и во двата случаја е противречност. Според тоа, $\mathrm{NZD}(p,t)=1$.

Ако $p\,|\,t+1$, т.е. $t+1=pq, q\in\mathbb{N}$, тогаш аналогно како погоре добиваме $t+1\,|\,(p-1)(\varphi(t)+1))$. Заменуваме $(p-1)(\varphi(t)+1)=(t+1)u, u\in\mathbb{N}$ и добиваме $t(p-u)=pt+p+1-p\varphi(t+1)$. Според тоа, $p\,|\,1+tu=1-u+pqu$, т.е. $p\,|\,u-1$. Меѓутоа, $u=\frac{(p-1)(\varphi(t)+1)}{t+1}<p-1$, па затоа важи $u=1$. Тогаш $t+1=(p-1)(\varphi(t)+1)$ е непарен, а од друга страна од $1+q=\varphi(t+1)$ следува дека q е непарен, што значи дека $t+1=pq$ е непарен. Последното противречи на фактот дека $t+1$ не може да има два непарни делители од видот p и $p-1$, а во случајот $p=2$ би добиле $t+1\,|\,\varphi(t)+1<t+1$, што не е можно.

Сега, бидејќи $\mathrm{NZD}(p,t)=\mathrm{NZD}(p,t+1)=1$ од (2) следува

$$t(tp+1-(p-1)\varphi(t))=(t+1)(tp+p+1-(p-1)\varphi(t+1)),$$

односно

$$\varphi(t+1)-\varphi(t)=\frac{2pt+p+1}{t(p-1)}-\frac{\varphi(t+1)}{t}. \qquad (3)$$

Бидејќи

$$\frac{2pt+p+1}{t(p-1)}-\frac{\varphi(t+1)}{t}>\frac{2(p-1)t}{t(p-1)}-1=1$$

имаме $t\geq 4$ и бројот $\varphi(t+1)-\varphi(t)$ е парен (како разлика на два парни броја). Освен тоа $\frac{2pt+p+1}{t(p-1)}-\frac{\varphi(t+1)}{t}<\frac{2p+1}{p-1}<4$ кога $p\geq 3$, а за $p=2$ добиваме $\frac{5t+1-\varphi(t)}{t}<4$. Според тоа, $\varphi(t+1)-\varphi(t)=2$. Од последното равенство и од $t\geq 4$ следува дека точно еден од броевите $\varphi(t+1)$ и $\varphi(t)$ не е делив со 4 (т.е. дава остаток 2 при делење со 4). Тоа е можно ако и само ако точно еден од броевите t и $t+1$ е еднаков на 4, q^k или $2q^k$, каде q е непарен прост број (конгруентен со 3 по модул 4) и $k\in\mathbb{N}$.

Освен тоа со помош на $\varphi(t+1)-\varphi(t)=2$ од (3) ги добиваме равенствата

$$\varphi(t+1)=\frac{2pt+p+1}{p-1}-2t=\frac{2t+p+1}{p-1} \text{ и } \varphi(t)=\varphi(t+1)-2=\frac{2t-p+3}{p-1}. \tag{4}$$

Да забележиме дека, $\varphi(q^k)=(q-1)q^{k-1}\geq\frac{2}{3}q^k$. Имаме и $p\geq 7$, бидејќи во спротивно добиваме $t>\varphi(t)=2t+1$ за $p=2$, $t>\varphi(t)=t$ за $p=3$, а за $p=5$ добиваме дека $2\varphi(t)=t-1$ и $2\varphi(t+1)=t+3$, што лесно доведува до противречност. Со помош на овие оценки добиваме противречност во секој одделен случај.

Случај 1. Ако $t=q^k$ или $t=2q^k$, тогаш

$$4q^k\leq(p-1)q^{k-1}(q-1)\leq 4q^k-p+3\leq 4q^k-2,$$

што не е можно.

Случај 2. Ако $t+1=q^k$ или $t+1=2q^k$, тогаш за $p=7$ добиваме

$$3q^{k-1}(q-1)=q^k+4 \text{ или } 2q^k+4.$$

Сега од $\mathrm{NZD}(q,4)=1$ следува $k=1$ и лесно се гледа дека единствена можност е $q=7$ и соодветно $t+1=14$. Но последното противречни на второто равенство во (4). Конечно, ако $p\geq 11$ имаме

$$(p-1)(q^k-q^{k-1}-1)=2q^k \text{ или } 4q^k,$$

од каде следува

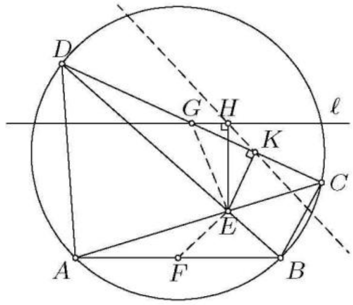
$$\frac{20q^k}{3}-10\leq(p-1)(q^k-q^{k-1}-1)\leq 4q^k, \text{ т.е. } 4q^k\leq 15,$$

што е можно само за $q=3, k=1$ и соодветно $t+1=6$, а тоа противречи на второто равенство во (4).

БМО 2011

1. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник кој не е трапез и чии дијагонали се сечат во точката E. Нека средините на отсечките AB и CD соодветно се точките F и G, а l е права која минува низ G и е паралелна со AB. Подножјата на нормалите повлечени од точката E кон правите l и CD соодветно се H и K. Докажи дека правите EF и HK за заемно нормални.

   Решение. Нека претпоставиме дека точката K е меѓу точките G и C. Точките E, G, H и K лежат на кружницата со дијаметар EG, па затоа $\measuredangle EHK = \measuredangle EGK$. Бидејќи триаголниците EAB и EDC се слични: $\measuredangle AEB = \measuredangle DEC$ и $\measuredangle EAB = \measuredangle EDC$, заклучуваме дека триаголниците EFB и EGC исто така се слични. Следува дека



$$\measuredangle EFB = \measuredangle CGE = \measuredangle KHE,$$

   што заедно со $FB \perp HE$ дава $EF \perp KH$.

2. Нека x, y, z се реални броеви такви што $x + y + z = 0$. Докажи, дека

$$\frac{x(x+2)}{2x^2+1} + \frac{y(y+2)}{2y^2+1} + \frac{z(z+2)}{2z^2+1} \geq 0.$$

   Кога важи знак за равенство?

   Решение. Даденото неравенство е еквивалентно со неравенството

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1} + \frac{(2y+1)^2}{2y^2+1} + \frac{(2z+1)^2}{2z^2+1} \geq 3.$$

   Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека

$$|z| = \max\{|x|, |y|, |z|\}.$$

   Тогаш, од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува дека

$$\frac{(2x+1)^2}{2x^2+1} + \frac{(2y+1)^2}{2y^2+1} \geq \frac{2(x+y+1)^2}{x^2+y^2+1} = \frac{2(1-z)^2}{x^2+y^2+1} \geq \frac{2(1-z)^2}{2z^2+1} = 3 - \frac{(2z+1)^2}{2z^2+1} \geq 3,$$

   што и требаше да се докаже. Знак за равенство важи ако и само ако $x = y = z = 0$ или $(x, y, z) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1)$, до пермутации.

3. Нека S е конечно множество природни броеви со следново својство: ако S го содржи бројот x, тогаш S ги содржи и сите делители на бројот x. Непразното подмножество T на множеството S го нарекуваме *добро* ако за секои $x, y \in T$, $x < y$, количникот $\frac{y}{x}$ е степен на прост број. Непразното подмножество T на множеството S го нарекуваме *лошо* ако за секои $x, y \in T$, $x < y$,

количникот $\frac{y}{x}$ не е степен на прост број. Едноелементните множества ги сметаме и добри и лоши. Нека k е најголемиот можен број елементи на добро подмножество на S. Докажи, дека k е најмалиот можен број на меѓусебно дисјунктни лоши подмножества чија унија е еднаква на S.

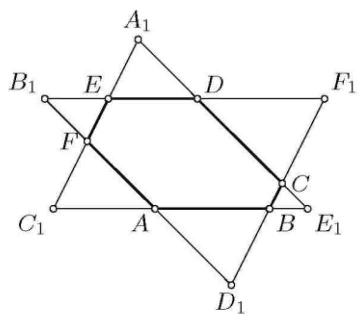
Решение. Јасно, не постојат два елементи на добро множество со k елементи кои припаѓаат на исто лошо множество. Затоа ни требаат барем k лоши множества за да го покриеме S.

Ќе конструираме k лоши множества кои го покриваат S. Нека $p_1, p_2, ..., p_n$ се сите прости броеви во S. Бидејќи S ги содржи сите делители на своите елементи, секој елемент на S е од облик $x = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_n^{r_n}$, каде $r_i \leq k-1$ за секој i (броевите $\frac{x}{p_i^j}$, $j = 0,1,2,...,r_i$, формираат добро подмножество на множеството S со $r_i + 1$ елементи).

За секој таков $x \in S$ дефинираме $h(x) = r_1 + r_2 + ... + r_n$. Ако $x, y \in S, x < y$ припаѓаат на некое добро множество, тогаш важи $1 \leq h(y) - h(x) \leq k-1$. Да ги разгледаме множествата $S_m = \{x \in S \mid h(x) \equiv m (\operatorname{mod} k)\}$, $m = 1,2,...,k$. Овие множества се дисјунктни и нивната унија е еднаква на множеството S. Од претходно изнесеното следува дека секое множество S_m е лошо, што значи дека тоа е бараната конструкција.

4. Нека $ABCDEF$ е конвексен шестаголник со плоштина 1 и таков што секои две спротивни страни му се паралелни. Правите AB, CD и EF се сечат по парови, при што определуваат триаголник. Слично правите BC, DE и FA определуваат друг триаголник. Докажи дека барем еден од овие два триаголници има плоштина поголема или еднаква на $\frac{3}{2}$.

Решение. Нека правите AB, CD и EF го определуваат триаголникот $A_1C_1E_1$, а правите BC, DE и FA го определуваат триаголникот $B_1D_1F_1$ (види цртеж). Да означиме



$$\frac{\overline{AB}}{\overline{F_1B_1}} = a, \frac{\overline{BC}}{\overline{A_1C_1}} = b, \frac{\overline{CD}}{\overline{B_1D_1}} = c,$$
$$\frac{\overline{DE}}{\overline{C_1E_1}} = d, \frac{\overline{EF}}{\overline{D_1F_1}} = e, \frac{\overline{FA}}{\overline{E_1A_1}} = f.$$

Од $P_{ABD_1} = a^2 P_{B_1D_1F_1}$ итн. следува

$$P_{ABCDEF} = (1 - a^2 - c^2 - e^2) P_{B_1D_1F_1} \text{ и}$$

$$P_{ABCDEF} = (1-b^2-d^2-f^2)P_{A_1C_1E_1}.$$

Коефициентите b, d, f може да се изразат преку a, c, e. Од

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{D_1F_1} - \overline{D_1B} - \overline{CF_1}}{\overline{EF}} = 1-a-c \text{ и } \frac{\overline{A_1C_1}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{A_1E} + \overline{EF} + \overline{FC_1}}{\overline{EF}} = 2-a-c-e$$

следува $b = \frac{1-a-c}{2-a-c-e}$. Аналогно се добива $d = \frac{1-c-e}{2-a-c-e}$ и $f = \frac{1-e-a}{2-a-c-e}$. Сега за $a+c+e = p$ имаме

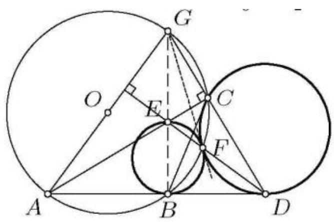
$$a^2+c^2+e^2 \geq \frac{1}{3}p^2 \text{ и } b^2+d^2+f^2 = \frac{3-4p+p^2+a^2+c^2+e^2}{(2-p)^2} \geq \frac{1}{3}(\frac{3-2p}{2-p})^2.$$

Нека претпоставиме дека $P_{B_1D_1F_1} < \frac{3}{2}$ и $P_{A_1C_1E_1} < \frac{3}{2}$. Од претходно изнесеното следува дека тоа е еквивалентно со $a^2+c^2+e^2 < \frac{1}{3}$ и $b^2+d^2+f^2 < \frac{1}{3}$. Но, тогаш од првото неравенство следува $p < 1$, а од второто $\frac{3-2p}{2-p} < 1$, што не е можно.

БМО 2012

1. Нека A, B и C се точки на кружница Γ со центар O такви што $\measuredangle ABC > 90^\circ$. Нека D е пресечната точка на правата AB и нормалата на правата AC во точката C. Нека l е нормалата повлечена од точката D на правата AO, E е пресечната точка на правите l и AC, а F е онаа точка на пресекот на кружницата Γ и правата l која се наоѓа меѓу точките D и E. Докажи, дека кружниците опишани околу триаголниците BFE и CFD се допираат во точката F.

Решение. Нека G е точката на Γ дијаметрално спротивна на A. Точката E е ортоцентар на триаголникот DAG, па затоа G лежи на правата BE. Бидејќи $\measuredangle CDF = \measuredangle GAC = \measuredangle GFC$ и $\measuredangle FBE = \measuredangle FAG = \measuredangle GFE$, правата FG е заедничка тангента на кружниците CFD и BFE, па затоа овие кружници се допираат во точката F.



2. Нека x, y, z се позитивни реални броеви. Докажи, дека
$$\sum_{cyc}(x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)} \geq 4(xy+yz+zx).$$

Збирот на левата страна на горното неравенство е еднаков на
$$(x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)}+(y+z)\sqrt{(z+x)(x+y)}+(z+x)\sqrt{(x+y)(y+z)}.$$

Решение. *Прв начин*. Од неравенството на Коши-Буњаковски-Шварц следува
$$(z+x)(z+y) \geq (z+\sqrt{xy})^2,$$
од каде добиваме
$$\begin{aligned}\sum_{cyc}(x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)} &\geq \sum_{cyc}[(x+y)z+(x+y)\sqrt{xy}]\\ &\geq \sum_{cyc}[(x+y)z+2xy]\\ &= 4(xy+yz+zx).\end{aligned}$$

Втор начин. Ако го квадрираме неравенството
$$(x+y)\sqrt{(y+z)(z+x)} \geq 2xy+yz+zx, \qquad (1)$$
Со елементарни трансформации добиваме дека тоа е еквивалентно со очигледното неравенство
$$(xy+yz+zx)(x-y)^2 \geq 0.$$
Аналогно добиваме дека се точно неравенствата
$$(y+z)\sqrt{(z+x)(x+y)} \geq 2yz+zx+xy \qquad (2)$$
$$(z+x)\sqrt{(x+y)(y+z)} \geq 2zx+zy+yz. \qquad (3)$$

Конечно, ако ги собереме неравенствата (1), (2) и (3) го добиваме бараното неравенство.

3. Нека n е природен број и нека

$$P_n = \{2^n, 2^{n-1}\cdot 3, 2^{n-2}\cdot 3^2, ..., 2\cdot 3^{n-1}, 3^n\}.$$

За секое подмножество X од множеството P_n со S_X да го означиме збирот на сите елементи од множеството X, при што $S_\emptyset = 0$, каде $\emptyset$ е празното множество. Нека y е реален број таков што $0 \le y \le 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Докажи, дека постои подмножество Y на множеството P_n такво што $0 \le y - S_Y < 2^n$.

Решение. *Прв начин.* Тврдењето ќе го докажеме со индукција по N. Очигледно тврдењето важи за $n=1$. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n-1$. Нека е даден y таков што $0 \le y \le 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Можни се следниве случаи:

1) $0 \le y \le 2\cdot 3^n - 2^{n+1}$. Од индуктивната претпоставка следува дека постои множество $Y' \subseteq P_{n-1}$ такво што $0 \le \frac{y}{2} - S_{Y'} < 2^{n-1}$. Тогаш можеме да земеме $Y = 2Y' = \{2t \mid t \in Y'\}$.

2) $2\cdot 3^n - 2^{n+1} \le y \le 3^{n+1} - 2^{n+1}$. Тогаш $0 < 3^n - 2^{n+1} \le y - 3^n \le 2\cdot 3^n - 2^{n+1}$, па од индуктивната претпоставка следува дека постои множество $Y' \subseteq P_{n-1}$ такво што $0 \le \frac{y-3^n}{2} - S_{Y'} < 2^{n-1}$. Тогаш можеме да земеме $Y = 2Y' \cup \{3^n\}$.

Според тоа, тврдењето важи и за n. Конечно, од принципот на математичка индукција следува дека тврдењето важи за секој природен број.

Втор начин. Имаме $S_{P_n} = 3^{n+1} - 2^{n+1}$, па ако сите елементи на P_n ги поделиме со 2^n задачата се сведува на следнава еквивалентна задача:

Нека n е природен број, $a = \frac{3}{2}$ и $Q_n = \{1, a, a^2, ..., a^n\}$. Докажи дека за секој реален број $x \in [0, 1 + a + a^2 + ... + a^n]$ постои подмножество X на Q_n за кое $0 < x - S_X < 1$.

Тврдењето ќе го докажеме со индукција по n. За $n=1$ имаме $S_\emptyset = 0$, $S_{\{1\}} = 1$, $S_{\{a\}} = \frac{3}{2}$ и $S_{\{1,a\}} = \frac{5}{2}$, т.е. тврдењето очигледно е точно.

Нека тврдењето е точно за n и нека $x \in [0, 1 + a + a^2 + ... + a^n + a^{n+1}]$ е произволен. Ако $x \in [0, 1 + a + a^2 + ... + a^n]$, од индуктивната претспоставка имаме дека постои множество $X \subset Q_n \subset Q_{n+1}$ за кое $0 < x - S_X < 1$.

Нека $x > 1 + a + a^2 + ... + a^n = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$. Бидејќи $\frac{a^{n+1}-1}{a-1} > a^{n+1}$, заклучуваме дека $x_1 = x - a^{n+1} \in [0, 1 + a + a^2 + ... + a^n]$. Сега, од индуктивната пшретпоставка следува дека постои $X_1 \subset Q_n$ таков што $0 < x_1 - S_{X_1} < 1$, па затоа доволно е да земеме $X = X_1 \cup \{a^{n+1}\}$.

4. Определи ги сите функции $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ кои ги задоволуваат условите
   1) $f(n!) = f(n)!$, за секој $n \in \mathbb{N}$,
   2) $m - n$ е делител на $f(m) - f(n)$, за секои $m, n \in \mathbb{N}, m \neq n$.

   Решение. Од $f(1) = f(1)!$ и $f(2) = f(2)!$ следува $f(1), f(2) \in \{1, 2\}$.

   Нека претпоставиме дека $f(3) = 3$. Ако индуктивно дефинираме $n_0 = 3$ и $n_{i+1} = n_i!$, за $i \geq 0$, добиваме дека $f(n_i) = n_i$, за секој i. Нека m е произволен природен број. Бидејќи разликата $m - n_i$ е делител на $f(m) - f(n_i)$, добиваме дека $m - n_i$ е делител на
   $$f(m) - m = f(m) - f(n_i) + f(n_i) - m = f(m) - f(n_i) + n_i - m,$$
   за секој i. Според тоа, $f(m) - m$ има бесконечно многу делители, што значи дека $f(m) = m$, за секој m.

   Сега нека $f(3) \neq 3$. Од $4 = 3! - 2 \mid f(3)! - f(2)$ следува дека $4 \nmid f(3)!$, па затоа $f(3) \in \{1, 2\}$. Освен тоа, $n! - 3$ е делител на $f(n)! - f(3)$ за секој $n \geq 4$, па затоа $3 \nmid f(n)!$, од што следува дела $f(n) \in \{1, 2\}$, за секој n. Сега лесно се докажува дека во случајов $f(n)$ мора да е константа.

   Конечно, единствени решенија се функциите $f \equiv 1$, $f \equiv 2$ и $f(x) = x$, за секој $x \in \mathbb{N}$.

БМО 2013

1. Во триаголник ABC припашаната кружница наспроти темето A ги допира правата AB во точката P и правата AC во точката Q, а припишаната кружница наспроти темето B ги допира правата AB во точката M и правата BC во точката N. Нека K и L соодветно се подножјата на нормалите повлечени од C кон правите MN и PQ. Докажи, дека четириаголникот $MKLP$ е тетивен.

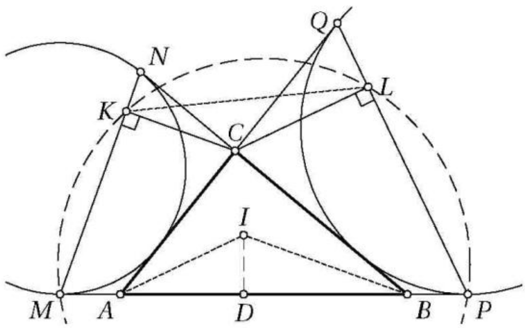
Решение. *Прв начин.* Аглите на триаголникот да ги означиме со α, β, γ. Бидејќи

$$\measuredangle KMP = 90^\circ - \frac{\beta}{2},$$

доволно е да докажеме дека

$$\measuredangle KLP = 90^\circ + \frac{\beta}{2},$$

т.е. дека $\measuredangle KLC = \frac{\beta}{2}$.

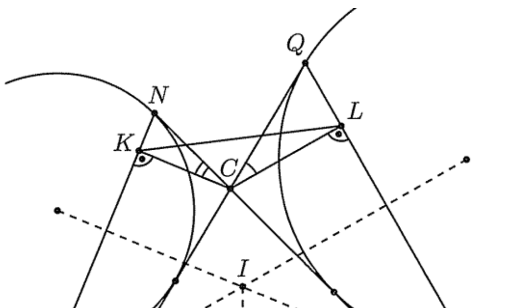


Нека I е центарот на впишаната кружница во триаголникот ABC и D е допирната точка на впишаната кружница со AB. Од $CK \parallel IB$ и $CL \parallel IA$ следува $\measuredangle KCL = \measuredangle AIB$. Понатаму, од $\overline{CN} = \overline{AD} = \frac{b+c-a}{2}$ и $\measuredangle KCN = \frac{\beta}{2}$ следува

$$\overline{CK} = \overline{CN}\cos\frac{\beta}{2} = \overline{AD}\cos\frac{\beta}{2} = \overline{AI}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}.$$

Аналогно $\overline{CL} = \overline{BI}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$, па затоа $\frac{\overline{CK}}{\overline{CL}} = \frac{\overline{AI}}{\overline{BI}}$. Според тоа, триаголниците KCL и AIB имаат по две пропорционални страни и еднаков агол меѓу нив, па затоа тие се слични. Од сличноста на овие триаголници следува $\measuredangle KLC = \measuredangle ABI = \frac{\beta}{2}$, па затоа $\measuredangle KLP = \measuredangle KLC + \measuredangle CLP = 90^\circ + \frac{\beta}{2}$.

Втор начин. Нека I е центарот на опишаната кружница во $\triangle ABC$, а T е проекцијата на I на страната AB. Ќе докажеме дека $\triangle KCL \sim \triangle AIB$. Од $AI \perp PQ$ и $BI \perp MN$ добиваме $AI \parallel CL$ и $BI \parallel CK$. Тогаш



$$\measuredangle KCL = \measuredangle AIB,$$
$$\measuredangle QCL = \measuredangle QZI = \measuredangle IAT,$$
$$\measuredangle NCK = \measuredangle NBI = \measuredangle IBT.$$

Од последните две равенства следува дека $\triangle QCL \sim \triangle IAT$ и $\triangle NCK \sim \triangle IBT$, па затоа $\frac{\overline{CL}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{AT}}{\overline{AI}}$ и $\frac{\overline{CK}}{\overline{CN}} = \frac{\overline{BT}}{\overline{BI}}$. Но, $\overline{CQ} = \overline{BT} = p-b, \overline{CN} = \overline{AT} = p-a$ и така добиваме $\overline{CL} \cdot \overline{AI} = (p-a)(p-b) = \overline{CK} \cdot \overline{BI}$, што значи $\frac{\overline{CL}}{\overline{CK}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IA}}$. Од друга страна, $\measuredangle KCL = \measuredangle AIB$, па затоа $\triangle KCL \sim \triangle AIB$. Тогаш

$$\measuredangle KLP + \measuredangle PMK = (90^\circ + \measuredangle ABI) + (90^\circ - \measuredangle ABI) = 180^\circ,$$

со што доказот е завршен.

2. Во множеството природни броеви реши ја равенката

$$x^5 + 4^y = 2013^z.$$

Решение. *Прв начин*. Сведуваме по модул 11 и добиваме $x^5 + 4^y \equiv 0(\text{mod}11)$, при што важи $x^5 \equiv \pm 1(\text{mod}11)$, па мора да важи $4^y \equiv \pm 1(\text{mod}11)$. Конгруенцијата $4^y \equiv -1(\text{mod}11)$ не важи за ниту еден y, а додека конгруенцијата $4^y \equiv 1(\text{mod}11)$ важи ако и само ако $5 \mid y$.

Воведуваме смена $t = 4^{\frac{y}{5}}$ и ја добиваме равенката

$$x^5 + t^5 = A \cdot B = 2013^z,$$

каде $\text{NZD}(x,t) = 1$, $A = x + t$ и $B = x^4 - x^3t + x^2t^2 - xt^3 + t^4$. Понатаму, од

$$B = A(x^3 - 2x^2t + 3xt^2 - 4t^3) + 5t^4$$

следува дека $\text{NZD}(A,B) = \text{NZD}(A,5t^4) \mid 5$, но $5 \nmid 2013^z$, па мора да важи $\text{NZD}(A,B) = 1$. Според тоа, $A = a^z$ и $B = b^z$, за некои природни бореви a и b такви што $ab = 2013$.

Меѓутоа, од неравенството $\frac{1}{16}A^4 \le B \le A^4$, кое се докажува со едноставна примена на неравенствата меѓу средините, добиваме

$$\tfrac{1}{16}a^4 \le b \le a^4, \text{ т.е. } \tfrac{1}{16}a^5 \le ab = 2013 \le a^5.$$

Оттука следува $5 \le a \le 8$, што не е можно бидејќи 2013 нема делители меѓу броевите 5, 6, 7 и 8.

Втор начин. Имаме $4^y \equiv 4,5,9,3,1(\text{mod}11)$, $x^5 \equiv 0,1,10(\text{mod}11)$, па затоа $2013^z \equiv 0O\text{mod}11)$, па затоа мора да е $4^y \equiv 0(\text{mod}11)$, од каде добиваме $5 \mid y$. Нека $y = 5t, t \in \mathbb{N}$ и равенката да ја запишеме во видот

$$(x + 4^t)(x^4 - 4^t x^3 + 4^{2t} x^2 - 4^{3t} x + 4^{4t}) = (3 \cdot 11 \cdot 61)^z.$$

Како и при првиот начин на решавање заклучуваме дека множителите на левата страна на последната равенка се заемно прости и бидејќи 3 не е делител на вториот множител (Докаќи!), заклучуваме дека $3^z \mid x+4^t$. Ќе разгледаме два случаја. Ако $\mathrm{NZD}(x+4^t, 11\cdot 61)=1$, тогаш

$$3^z = x+4^t \text{ и } 2013^z = x^5+4^{5t} < (x+4^t)^5 = 243^z,$$

што е противречност. Ако пак $\mathrm{NZD}(x+4^t, 11\cdot 61)>1$, тогаш

$$x+4^t \geq 33^z \text{ и } 2013^z = x^5+4^{5t} \geq \tfrac{(x+4^t)^5}{15} \geq \tfrac{33^{5z}}{16} > 2\cdot(33^4)^z > 2013^z,$$

што е противречност.

3. Со $\mathbb{R}_+$ да го означиме множеството позитивни реални броеви. Определи ги сите функции $f:\mathbb{R}_+^3 \to \mathbb{R}_+$ такви што за секои $x,y,z,k \in \mathbb{R}_+$ важи

1) $xf(x,y,z) = zf(z,y,x)$,

2) $f(x,ky,k^2z) = kf(x,y,z)$ и

3) $f(1,k,k+1) = k+1$.

Решение. *Прв начин*. Од својствата на функцијата f следува дека за секои $x,y,z,a,b>0$ важи

$$f(a^2x,aby,b^2z) = bf(a^2x,ay,z) = b\tfrac{z}{a^2x}f(z,ay,a^2x) = \tfrac{bz}{ax}f(z,y,x) = \tfrac{b}{a}f(x,y,z).$$

Броевите a и b ќе ги избереме така што тројката (a^2x,aby,b^2z) и од облик $(1,k,k+1)$, за некој k. Нека земеме $a=\frac{1}{\sqrt{x}}$ и b така да важи $b^2z-aby=1$. Последната равенка ја решаваме по b и добиваме $b=\frac{y+\sqrt{y^2+4xz}}{2z\sqrt{x}}$ и $k=\frac{y(y+\sqrt{y^2+4xz})}{2xz}$. Сега лесно следува дека

$$f(x,y,z) = \tfrac{a}{b}f(a^2x,aby,b^2z) = \tfrac{a}{b}f(1,k,k+1) = \tfrac{a}{b}(k+1) = \tfrac{y+\sqrt{y^2+4xz}}{2x}.$$

Непосредно се проверува дека функцијата f ги задоволува условите на задачата.

Втор начин. Од 2) и 3) следува

$$f(1,tk,t^2(k+1)) = tf(1,k,k+1) = t(k+1).$$

Да ставиме $tk=a$ и $t^2(k+1)=b$. Јасно променливите a и b може да ги примат сите вредности на $\mathbb{R}_+$. Тогаш $t=\frac{-a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ и

$$f(1,a,b) = a+t = \tfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}.$$

Сега од 1 добиваме $f(b,a,1)=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2b}$. Според тоа,

$$f(b,c,a) = f(b,\tfrac{a}{\sqrt{c}}\sqrt{c},1\cdot\sqrt{c^2}) = \sqrt{c}\,f(b,\tfrac{a}{\sqrt{c}},1) = \sqrt{c}\,\frac{\frac{a}{\sqrt{c}}+\sqrt{\frac{a^2}{c}+4b}}{2b} = \frac{a+\sqrt{a^2+4bc}}{2b},$$

каде c е произволен број од $\mathbb{R}_+$. Непосредно се проверува дека функцијата $f(x,y,z) = \frac{y+\sqrt{y^2+4xz}}{2x}$ ги задоволува условите на задачата.

4. На математички натпревар некои учесници се пријатели (пријателството е симетрична релација, т.е. ако A е пријател на B, тогаш и B е пријател на A. За различните натпреварувачи $A_1, A_2, ..., A_n$, каде $n \geq 3$, велиме дека формираат *скоро пријателски циклус* ако A_i не е пријател со A_{i+1} за $1 \leq i \leq n$ ($A_{n+1} = A_1$), додека сите останати парови натпреварувачи од овој циклус пријатели.
Притоа, на овој натпревар важи:
За секој натпреварувач C и секој скоро пријателски циклус $\mathbb{S}$ кој не го содржи C, множеството натпреварувачи D од $\mathbb{S}$ кои не се пријатели со C има најмногу еден елемент.
Докажи дека сите натпреварувачи може да се распоредат во три соби така што секои два натпреварувачи кои се наоѓаат во иста соба се пријатели.
Решение. Разгледуваме граф $\mathbb{G}$ чии темиња соодветствуваат на натпреварувачите при што две темиња се поврзани со ребро ако и само ако соодветните натпреварувачи не се пријатели.
Лема. Графот $\mathbb{G}$ содржи теме со степен помал или еднаков на 2.
Доказ. Нека претпоставиме дека секое теме има степен поголем или еднаков на три. Да го разгледаме најдолгиот индуциран пат во графот $P = u_0u_1...u_k$ (пат во кој никои две несоседни темиња не се поврзани). Темето u_0 е поврзано најмалку со уште две темиња v и w и тие се надвор од патот P. Бидејќи P е најдолгиот индуциран пат, темињата v и w мора да имаат соседи во тој пат. Нека u_i и u_j се по ред соседите на v и w со најмали индекси i, j и нека без ограничување на општоста $i \geq j$. Тогаш $u_0, u_1, ..., u_i, v$ формираат скоро пријателски циклус, а на него w има два соседи u_0 и u_j, што е противречност. ■

Да се вратиме на тврдењето на задачата кое ќе го докажеме со индукција по бројот на темињата n на $\mathbb{G}$. За $n \leq 3$ тврдењето е тривијално. Нека претпоставиме дека тврдењето важи за $n-1$ и ќе го докажеме за n. Според лемата, во $\mathbb{G}$ постои теме v чиј степен е помал или еднаков на два. Графот $\mathbb{G}'$ добиен со бришење на темето v и сите ребра кои излегуваат од него, очигледно ги задоволува условите на задачата, па неговите темиња може да се поделат во три соби на саканиот начин. Притоа v нема соседи барем во една соба, па може да се стави во таа соба. Со ова доказот е завршен.

БМО 2014

1. Нека x, y, z се позитивни реални броеви такви што $xy + yz + zx = 3xyz$. Докажи, дека
$$x^2y + y^2z + z^2x \geq 2(x + y + z) - 3.$$
Кога важи знак за равенство?
Решение. *Прв начин*. Равенството од условот е еквивалентно со равенството
$$\tfrac{1}{x} + \tfrac{1}{y} + \tfrac{1}{z} = 3. \tag{1}$$
Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина следува $x^2y + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{x^2y \cdot \frac{1}{y}} = 2x$ и аналогно добиваме $y^2z + \frac{1}{z} \geq 2y$ и $z^2x + \frac{1}{x} \geq 2x$.
Ако ги собереме последните три неравенства и го искористиме равенството (1) го добиваме бараното неравенство.
Знак за равенство важи ако и само ако $x^2y = \frac{1}{y}$, $y^2z = \frac{1}{z}$ и $z^2x = \frac{1}{x}$, од каде лесно следува $x = y = z = 1$.
Втор начин. Равенството од условот е еквивалентно со равенството (1). Затоа
$$\begin{aligned} x^2y + y^2z + z^2x - 2(x + y + z) + 3 &= x^2y - 2x + \tfrac{1}{y} + y^2z - 2y + \tfrac{1}{z} + z^2x - 2x + \tfrac{1}{x} \\ &= y(x - \tfrac{1}{y})^2 + z(y - \tfrac{1}{z})^2 + x(z - \tfrac{1}{x})^2 \geq 0. \end{aligned}$$
Знак за равенство важи ако и само ако $x - \frac{1}{y} = y - \frac{1}{z} = z - \frac{1}{x} = 0$, од каде лесно следува $x = y = z = 1$.

2. За природниот број n ќе велиме дека е специјален ако постојат природни броеви a, b, c и d такви што $n = \frac{a^3+2b^3}{c^3+2d^3}$.
а) Докажи, дека постојат бесконечно многу специјални броеви.
б) Докажи, дека бројот 2014 не е специјален.
Решение. а) Ако земеме $a = nc, b = nd$ добиваме дека $\frac{a^3+2b^3}{c^3+2d^3} = n^3 \frac{c^3+2d^3}{c^3+2d^3} = n^3$, што значи дека за секој $n \in \mathbb{N}$ бројот n^3 е специјален.
б) *Прв начин*. Да забележиме дека $2014 = 2 \cdot 19 \cdot 53$. Ако 2014 е специјален број, тогаш
$$x^3 + 2y^3 = 2014(u^3 + 2v^3) \tag{1}$$
за некои природни броеви x, y, u, v. Без ограничување на општоста можеме да претпоставиме дека за така избраните вредности x, y, u, v вредноста на изразот $x^3 + 2y^3$ е најмала. Сега $19 \mid x^3 + 2y^3$. Ќе докажеме дека $19 \mid x$ и $19 \mid y$. Ако претпоставиме дека $19 \mid x$, тогаш очигледно $19 \mid y$ и обратно. Затоа нека

претпоставиме дека $19 \nmid x$ и $19 \nmid y$. Тогаш од $x^3 \equiv -2y^3 (\mathrm{mod}\, 19)$ следува дека $(x^3)^6 \equiv (-2y^3)^6 (\mathrm{mod}\, 19)$, т.е. $x^{18} \equiv 2^6 y^{18} (\mathrm{mod}\, 19)$ и од малата теорема на Ферма следува дека $1 \equiv 2^6 (\mathrm{mod}\, 19)$ што е противречност.

Според тоа, $x = 19x_1, y = 19y_1$ за некои природни броеви x_1, y_1. Заменуваме во (1) и добиваме

$$19^2(x_1^3 + 2y_1^3) = 2 \cdot 53(u^3 + 2v^3)\,, \tag{2}$$

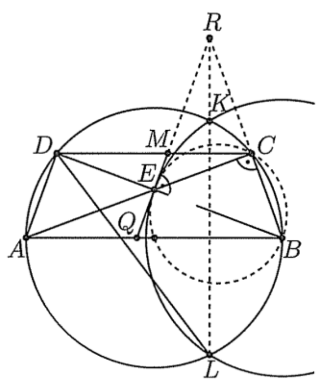
т.е. $19 \mid u^3 + 2v^3$, од каде следува дека $u = 19u_1, v = 19v_1$ за некои природни броеви u_1, v_1. Заменуваме во (2) и добиваме

$$(x_1^3 + 2y_1^3) = 2014(u_1^3 + 2v_1^3)\,.$$

Бидејќи $x_1^3 + 2y_1^3 < x^3 + 2y^3$, последното противречи со минималноста на $x^3 + 2y^3$. Затоа 2014 не е специјален број.

Втор начин. Нека претпоставиме дека $2014 = \frac{a^3+2b^3}{c^3+2d^3}$, за некои природни броеви a, b, c и d, т.е. дека $a^3 + 2b^3 = 2 \cdot 19 \cdot 53(c^3 + 2d^3)$. Без ограничување на општоста можеме да земеме $\mathrm{NZD}(a,b,c,d) = 1$. Имаме $x^3 \equiv 0, \pm 1, \pm 7, \pm 8 (\mathrm{mod}\, 19)$, па затоа $a^3 + 2b^3 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 19)$ ако и само ако $19 \mid a, b$. Но, тогаш од $19^3 \mid a^3 + 2b^3$ следува дека $19^2 \mid c^3 + 2d^3$, од каде следува $19 \mid c, d$, што противречи на $\mathrm{NZD}(a,b,c,d) = 1$.

3. Нека $ABCD$ е трапез впишан во кружница $\mathit{\Gamma}$ со дијаметар AB и нека E е пресечната точка на дијагоналите AC и BD на трапезот. Кружницата со центар во точката B и радиус BE ја сече кружницата $\mathit{\Gamma}$ во точките K и L, при што точката K е од иста страна на правата AB како и точката C. Ако нормалата повлечена од точката E на правата BD ја сече правата CD во точката M, докажи дека правите KM и DL се заемно нормални.



Решение. Бидејќи $ABCD$ е тетивен трапез, тој е рамнокрак. Нека EM ја сече AB во точката Q. Од $\measuredangle ADB = \measuredangle QEB = 90^\circ$ следува дека $MQ \parallel AD$, т.е. $QBCM$ исто така е рамнокрак трапез. Ќе докажеме дека Kl е симетрала на MC (и QB соодветно). Точките B, C и E лежат на кружницата ω со дијаметар BE, која ги допира правата EM и кружницата $\gamma(B, \overline{BE})$. Радикалните оски на паровите кружници $(\mathit{\Gamma}, \gamma)$, $(\mathit{\Gamma}, \omega)$,

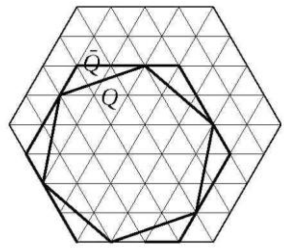
(γ,ω) се правите KL, BC и EM, соодветно, па затоа овие прави се сечат во нивниот радикален центар R. Но R лежи на симетралата на MC и $KL \perp QB$, па затоа KL е симетрала на MC (и QB соодветно). Сега

$$\measuredangle MKL = \measuredangle CKL = \measuredangle CDL = 90^\circ - \measuredangle DLK,$$

па затоа $KM \perp DL$.

4. Нека n е природен број. Правилен шестаголник со должина на страна еднаква на n е поделен со прави, кои се паралелни на неговите страни, на рамнострани триаголници чии страни се со должина 1. Определи го вкупниот број правилни шестаголници чии темиња воедно се и темиња на делбените рамнострани триаголници.

Решение. Нека P е дадениот шестаголник. Темињата на разгледуваните рамнострани триаголници ќе ги нарекуваме *јазли*. За секој шестаголник Q со темиња во јазлите го разгледуваме шестаголникот $\overline{Q}$ опишан околу Q со страни паралелни на страните на P (види цртеж десно). Темињата на $\overline{Q}$ се исто така јазли.



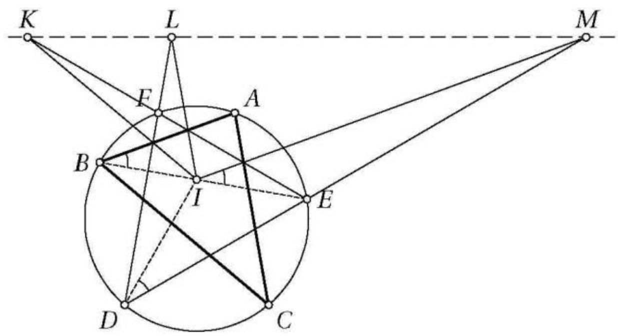
За $0 \le m < n$ шестаголникот $\overline{Q}$ со должина на страна $n-m$ може да се избере на $3m^2+3m+1=(m+1)^3-m^3$ начини. За дадениот шестаголник $\overline{Q}$, шестаголникот Q може да се избере на $n-m$ начини. Според тоа, вкупниот број можни шестаголници Q е еднаков на

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{n-1}(n-m)((m+1)^3-m^3) &= \sum_{m=0}^{n-1}(n-m)(m+1)^3 - \sum_{m=0}^{n-1}(n-m)m^3\\ &= \sum_{m=1}^{n}(n-m+1)m^3 - \sum_{m=0}^{n-1}(n-m)m^3\\ &= \sum_{m=1}^{n} m^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.\end{aligned}$$

БМО 2015

1. Нека a,b и c се позитивни реални броеви. Докажи, дека
$$a^3b^6+b^3c^6+c^3a^6+3a^3b^3c^3 \geq abc(a^3b^3+b^3c^3+c^3a^3)+a^2b^2c^2(a^3+b^3+c^3)\,.$$
Решение. Со смената $x=ab^2$, $y=bc^2$ и $z=ca^2$ бараното неравенство се сведува на неравенството на Шур
$$x^3+y^3+z^3+3xyz \geq xy^2+yz^2+zx^2+x^2y+y^2z+z^2x\,.$$

2. Даден е разностран триаголник ABC, со опишана околу него кружница ω со центар I. Правите AI, BI и CI ја сечат соодветно ω во точките D,E и F, различни од A,B и C. Правите низ точката I паралелни со правите BC,CA и AB соодветно ги сечат правите EF,FD и DE во точките K,L и M. Докажи, дека точките K,L и M се колинеарни.
Решение. *Прв начин*. Ако го разгледаме распоредот $D-E-M$ забележуваме дека $\measuredangle EIM=\measuredangle EBA=\measuredangle EDI$, па затоа правата IM е тангента на кружницата DEI и $\overline{MI}^2=\overline{MD}\cdot\overline{ME}$. Тоа значи дека точката M припаѓа на радикалната оска s на опишаната кружница околу $\triangle ABC$ и дегенираната кружница $(I,0)$. Аналогно и точките K и L припаѓаат на s, т.е. точките K,L и M се колинеарни



Втор начин. Од теоремата на Дезарг следува дека точките $K'=BC\cap EF$, $L'=CA\cap FD$ и $M'=AB\cap DE$ се колинеарни. Последното запишано со ориентирани отсечки значи дека
$$\frac{\overrightarrow{EK'}}{\overrightarrow{K'F}}\cdot\frac{\overrightarrow{FL'}}{\overrightarrow{L'D}}\cdot\frac{\overrightarrow{DM'}}{\overrightarrow{M'E}}=-1\,.$$
Но,
$$\frac{\overrightarrow{EK'}}{\overrightarrow{K'F}}=\frac{\overrightarrow{EK}}{\overrightarrow{KF}}\cdot\frac{\overrightarrow{EK'}}{\overrightarrow{EK}}\cdot\frac{\overrightarrow{KF}}{\overrightarrow{K'F}}=\frac{\overrightarrow{EK}}{\overrightarrow{KF}}\cdot\frac{\overrightarrow{BE}}{\overrightarrow{IE}}\cdot\frac{\overrightarrow{IF}}{\overrightarrow{CF}}\,,$$
со замена на оваа и аналогните релации добиваме
$$\frac{\overrightarrow{EK}}{\overrightarrow{KF}}\cdot\frac{\overrightarrow{FL}}{\overrightarrow{LD}}\cdot\frac{\overrightarrow{DM}}{\overrightarrow{ME}}=-1\,,$$

па од теоремата на Менелај заклучуваме дека точките K, L и M се колинеарни.

Забелешка. Во ниту едно од понудените два начини на решавање не се користи дека I е центар на впишаната кружница, што значи дека задачата е предефинирана.

3. Комисија составена од 3366 филмски критичари гласа за Оскар. Секој критичар гласа за еден глумец и една глумица. По гласањето се констатирало дека за секој природен број n помал или еднаков на 100 постои глумец или глумица кој добил/ла точно n гласови. Докажи, дека постојат двајца критичари кои гласале за ист глумец или глумица.

Решение. Нека го претпоставиме спротивното. За секој $i = 1, 2, ..., 100$ да фиксираме еден кандидат A_i кој добил i гласови.

Бројот на критичарите кои двата пати гласале за некој од кандидатите од множеството од множеството $A = \{A_{34}, A_{35}, ..., A_{100}\}$ е помал или еднаков на бројот парови глумец-глумица меѓу овие кандидати, а овој број е помал или еднаков на $33 \cdot 34 = 1122$.

Од друга страна, вкупно има $2 \cdot 3366 = 6732$ гласови кои критичарите ги доделиле. Од овие гласови кандидатите од множеството A добиле

$$34 + 35 + ... + 100 = 4489$$

гласови. Затоа има најмногу $6732 - 4489 = 2243$ критичари кои двата пати не гласале за кандидатите од множеството A.

Според тоа, вкупниот број критичари е помал или еднаков на

$$1122 + 2243 = 3365,$$

што е противречност.

4. Докажи, дека меѓу произволни 20 последователни природни броеви постои број d таков што неравенството

$$n\sqrt{d} \cdot \{n\sqrt{d}\} > \tfrac{5}{2}$$

важи за секој природен број n. (Со $\{x\}$ е означена функцијата дробен дел од x.)

Решение. Бидејќи за $m = [n\sqrt{d}]$ важи

$$n\sqrt{d} \cdot \{n\sqrt{d}\} = n\sqrt{d}(n\sqrt{d} - m) = n\sqrt{d}\, \tfrac{dn^2 - m^2}{n\sqrt{d} + m}$$
$$> n\sqrt{d}\, \tfrac{dn^2 - m^2}{2n\sqrt{d}} = \tfrac{dn^2 - m^2}{2},$$

доволно е да се избере d таков што за секои $m, n \in \mathbb{N}$ важи $dn^2 - m^2 \notin \{1, 2, 3, 4\}$, (од горното неравенство е јасно дека $dn^2 - m^2 > 0$). Последното може да се постигне ако земеме

$$d = 20k + 15 = 5(4k + 3)\text{, за } k \in \mathbb{N}_0 .$$

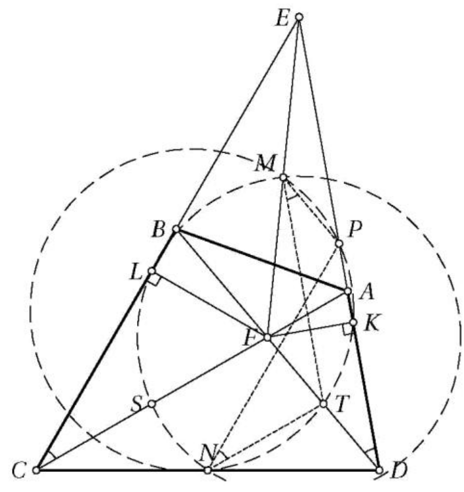
Навистина, тогаш $m^2 + 2$ и $m \ \ + 3$ не се деливи со 5, додека $m^2 + 1$ и $m^2 + 4$ немаат делители од облик $4k + 3$, па затоа ниту еден од броевите $m^2 + 1$, $m^2 + 2$, $m^2 + 3$ и $m^2 + 4$ не може да е делив со d .

БМО2016

1. Определи ги сите инјективни функции $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ такви што за секој реален број x и секој природен број n важи
$$|\sum_{i=1}^{n} i(f(x+i+1)-f(f(x+i)))|<2016\,.$$
Решение. Да означиме
$$S(x,n)=\sum_{i=1}^{n} i(f(x+i+1)-f(f(x+i)))\,.$$
Да фиксираме $x\in\mathbb{R}$. Од неравенствата
$$|S(x-n,n)|<2016 \text{ и } |S(x-n,n-1)|<2016$$
добиваме
$$n\cdot|f(x+1)-f(f(x))|=|S(x-n,n)-S(x-n,n-1))|<4032\,,$$
за секој $n\in\mathbb{N}$. Последното е можно само ако $f(f(x))=f(x+1)$, за секој $x\in\mathbb{R}$. Но функцијата f е инјективна, па затоа $f(x)=x+1$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

2. Нека $ABCD$ е тетивен четириаголник за кој $\overline{AB}<\overline{CD}$. Дијагоналите AC и BD се сечат во точката F, а правите AD и BC се сечат во точката E. Нека K и L се соодветно подножјата на нормалите повлечени од точката F на правите AD и BC, а M,S и T се средините на отсечките EF,CF и DF, соодветно. Докажи дека втората пресечна точка на кружниците опишани околу триаголниците MKT и MLS припаѓа на отсечката CD.

Решение. Ќе докажеме дека кружниците опишани околу триаголниците MKT и MLS минуваат низ средината на отсечката CD.



Кружницата MKT е Ојлеровата кружница за триаголникот DEF, па затоа таа минува низ средината P на отсечката DE. Бидејќи $PN\parallel EC$, $MT\parallel ED$, $MP\parallel BD$ и $TN\parallel AC$, во ориентирани агли важи
$$\measuredangle PMT=\measuredangle BDA=\measuredangle BCF=\measuredangle PNT\,,$$
па затоа N припаѓа на кружницата $MKPT$. Аналогно, N припаѓа на кружницата MLS.

Забелешка. Во случај кога CD е дијаметар на опишаната кружница околу четириаголникот $ABCD$ кружниците MKT и MLS се совпаѓаат.

3. Определи ги сите монични полиноми f со целобројни коефициенти кои го имаат следново својство: постои природен број N таков што $2(f(p)!)+1$ е делив со p за секој прост број $p>N$ за кој $f(p)$ е природен број.

Напомена. Моничен полином е полином со водечки коефициент 1.

Решение. Јасно е дека полиномот f не е константен. Од друга страна, од условот на задачата следува дека $p \nmid f(p)!$, т.е. $f(p)<p$ за секој $p>N$, па затоа мора да важи $\deg f=1$. Според тоа, $f(x)=x-c$, за некој $c\in\mathbb{N}$. Бидејќи според теоремата на Вилсон

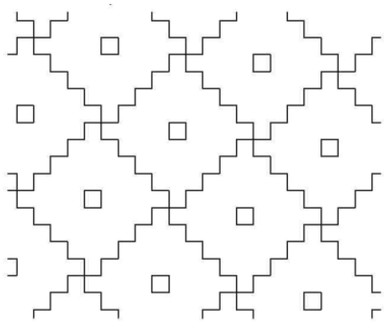
$$2(p-c)!\equiv -1\equiv (p-1)!\equiv (-1)^{c-1}(c-1)!(p-c)!\,(\mathrm{mod}\,p)$$

за секој прост број $p>N$, следува дека $(-1)^{c-1}(c-1)!\equiv 2\,(\mathrm{mod}\,p)$, односно $(-1)^{c-1}(c-1)!=2$. Од последното равенство добиваме $c=3$, па затоа $f(x)=x-3$.

4. Рамнината е поделена на единечни квадрати со помош на две множества паралелни прави кои формираат бесконечна решетка. Секој единечен квадрат е обоен во една од 1201 боја така што ниту еден правоаголник со периметар 100 не содржи два единечни квадрати обоени со иста боја. Докажи дека ниту еден правоаголник со димензии 1×1201 (или 1201×1) не содржи два квадрата обоени со иста боја.

Напомена. Се претпоставува дека страните на сите разгледувани правоаголници припаѓаат на решетката.

Решение. Ќе сметаме дека центрите на полињата (т.е. единичните квадрати) се точки со целобројни координати. Дијамант со центар (a,b) го нарекуваме множеството од сите полиња со центри (x, y) за кои важи $|x-a|+|y-b|<24$. Секои две полиња од еден ист дијамант припаѓаат на еден правоаголник со периметар 100. Бидејќи дијамантот се состои од $24^2+25^2=1201$ полиња, меѓу нив мора да се појават сите 1201 бои.



Да фиксираме една боја, да кажеме сина. Секое поле A припаѓа барем на еден дијамант со центар во сино поле. Навистина, дијамант со центар A содржи едно сино поле, да кажеме B, а тогаш A припаѓа на дијамантот со центар B. Од друга страна, ако некои два дијаманти со центри во сини полиња B и C имаат заедничко поле A, тогаш двете полиња B и C припаѓаат на дијамантот со центар A, што не е можно. Според тоа, дијамантите со сини центри го покриваат секое поле точно еднаш.

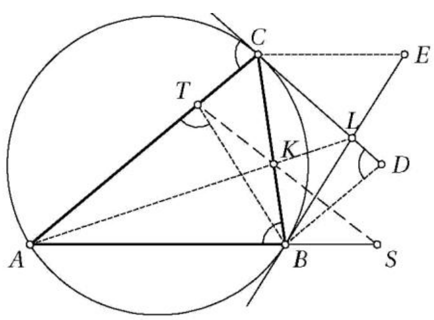
Лесно се гледа дека поплочувањето со дијаманти е единствено до симетрија (на цртежот е прикажано аналогно поплочување со помали дијаманти). Без ограничување на општоста, центрите на тие дијаманти се точки (x, y) за кои $1201 \mid 24x - 25y$. Бидејќи за секој $x \in \mathbb{Z}$ постои точно еден ваков y по модул 1201, добиваме дека тврдењето на задачата е точно.

БМО 2017

1. Определи ги сите подредени парови природни броеви (x, y) за кои важи
$$x^3 + y^3 = x^2 + 42xy + y^2 .$$
Решение. Нека $x = da,\ y = db,\ d = \mathrm{NZD}(x, y)$. Дадената равенка може да се запише во видот
$$d(a+b)(a^2 - ab + b^2) = a^2 - ab + b^2 + 43ab . \qquad (1)$$
од каде следува дека $a^2 - ab + b^2 \mid 43ab$. Бидејќи
$$\mathrm{NZD}(a, a^2 - ab + b^2) = \mathrm{NZD}(b, a^2 - ab + b^2) = \mathrm{NZD}(a, b) = 1,$$
од (1) следува дека $a^2 - ab + b^2 \mid 43$. Притоа $a^2 - ab + b^2 > 0$.
Ако $a^2 - ab + b^2 = 1$, тогаш мора да е $a = b = 1$ и од (1) следува $x = y = d = 22$.
Нека $a^2 - ab + b^2 = 43$, т.е. $(2a - b)^2 + 3b^2 = 172$ и нека без ограничување на општоста земеме $a \le b$. Тогаш $3b^2 \le 172 \le 4b^2$, што важи само за $b = 7$. Оттука $a = 1, d = 1$ или $a = 6, d = \frac{43}{13}$. Само првата можност има смисол и за истата се добива решението $(x, y) = (1, 7)$.
Конечно, сите решенија (x, y) се дадени со паровите $(1,7), (7,1), (22,22)$.

2. Нека Γ е опишаната кружница околу остроаголниот триаголник ABC во кој $\overline{AB} < \overline{AC}$. Со t_B и t_C да ги означиме соодветно тангентите на кружницата Γ во точките B и C, а со L нивната пресечна точка. Правата низ B паралелна со правата AC ја сече t_C во точката D, а правата низ C паралелна со AB ја сече t_B во точката E. Опишаната кружница околу триаголникот BDC ја сече правата AC во точка T која е меѓу A и C. Опишаната кружница околу триаголникот BEC ја сече правата AB во точка S така што B е меѓу A и S. Докажи дека правите ST, BC и AL се сечат во една точка.

Решение. Да означиме $\overline{AC} = b$ и $\overline{AB} = c$. Од $\measuredangle BTA = \measuredangle BDC = 180^\circ - \measuredangle DCA = \measuredangle ABC$, следува дека триаголниците ATB и ABC се слични, па затоа $\frac{\overline{AT}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$, т.е. $\overline{AT} = \frac{c^2}{b}$ и оттука $\overline{TC} = \frac{b^2 - c^2}{b}$. Слично е $\overline{AS} = \frac{b^2}{c}$ и $\overline{CB} = \frac{b^2 - c^2}{c}$.



Од друга страна, правата AL е симедијана во триаголникот ABC и ја сече страната BC во точка K таква што $\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}=\frac{c^2}{b^2}$. Според тоа,

$$\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}}\cdot\frac{\overrightarrow{BK}}{\overrightarrow{KC}}\cdot\frac{\overrightarrow{CT}}{\overrightarrow{TA}}=\frac{b^2}{c^2-b^2}\cdot\frac{c^2}{b^2}\cdot\frac{b^2-c^2}{c^2}=-1,$$

па од теоремата на Менелај следува дека точката K припаѓа на поравата ST.

Забелешка. Равенството $\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}=\frac{c^2}{b^2}$ може да се добие и од синусната теорема. Имаме:

$$\begin{aligned}\frac{\overline{BK}}{\overline{KC}}&=\frac{\overline{BK}}{\overline{AK}}\cdot\frac{\overline{AK}}{\overline{KC}}=\frac{\sin\measuredangle BAK}{\sin\measuredangle ABK}\cdot\frac{\sin\measuredangle ACk}{\sin\measuredangle CAk}=\frac{c}{b}\cdot\frac{\sin\measuredangle BAL}{\sin\measuredangle CAL}\\&=\frac{c}{b}\cdot\frac{\sin\measuredangle BAL}{\sin\measuredangle ABL}\cdot\frac{\sin\measuredangle ACL}{\sin\measuredangle CAL}\cdot\frac{\sin\measuredangle ABL}{\sin\measuredangle ACL}\\&=\frac{c}{b}\cdot\frac{\overline{BL}}{\overline{AL}}\cdot\frac{\overline{AL}}{\overline{CL}}\cdot\frac{\sin\measuredangle ACB}{\sin\measuredangle ABC}=\frac{c^2}{b^2}.\end{aligned}$$

3. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што

$$n+f(m) \text{ е делител на } f(n)+nf(m)$$

за секои $m,n\in\mathbb{N}$.

Решение. Од условот на задачата следува

$$n+f(m)\mid f(n)+nf(m)-n(n+f(m)=f(n)-n^2.$$

За $m=n=1$ добиваме $f(1)+1\mid f(1)-1$, па затоа $f(1)=1$.

Функцијата $f(x)=x^2$ ги задоволува условите на задачата. Нека претпоставиме дека за некој a важи $f(a)\neq a^2$. Од $a+f(m)\,||\,f(a)-a^2\,|$ следува $f(m)\leq A=|\,f(a)-a^2\,|-a$. Од друга страна, за $m=1$ имаме $n+1\mid f(n)+n$, односно $f(n)\equiv 1(\operatorname{mod} n)$, но $f(n)<A+1$, па мора да е $f(n)=1$ за секој $n\geq A$. Конечно, за секој $n>A$ важи

$$n+f(m)\mid f(m)(n+f(m))-(f(n)+nf(m))=f(m)^2-1,$$

па затоа $f(m)=1$, за секој $m\in\mathbb{N}$, што исто така е решение на задачата.

Според тоа, сите решенија се функциите $f(x)=x^2$ и $f(x)=1$.

4. Околу тркалезна маса седат $n>2$ ученици. На почетокот секој ученик има точно по една бонбона. Во секој чекор секој ученик избира една од следниве две операции:
   1) му дава една своја бонбона или на ученикот лево од себе или на ученикот десно од себе,
   2) ги дели сите свои бонбони на две множества (не задолжително непразни) и едно множество му дава на ученикот лево, а друго на ученикот десно од себе.

Сите операции во еден чекор се извршуваат истовремено. За распоредот на бонбоните ќе велиме дека е *достижен* ако може да се добие во конечно многу чекори. Определи го бројот на достижните распореди.
(Два распореди се различни ако барем еден ученик во нив има различен број бонбони.)

Решение. Вкупниот број распореди (достижни и недостижни) е $\binom{2n-1}{n}$.

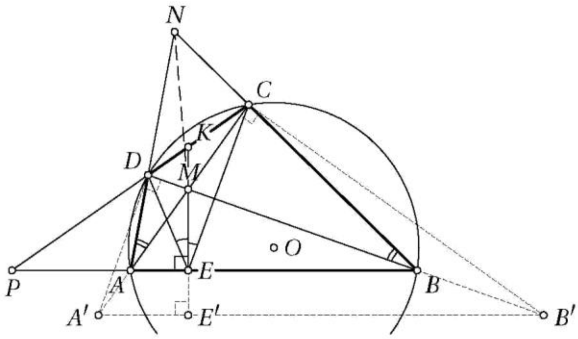
Лема. Во два чекори, секој ученик може да додаде бонбона (ако ја има) на ученик на две места лево или десно од себе, така што состојбата кај останатите ученици ќе остане непроменета.
Доказ. Да разгледаме три последователни ученици A, B и C одлево надесно, при што A има барем една бонбона. Нека сите ученици ја извршуваат операцијата 2). Тогаш секоја бонбона произволно се поместува за едно место налево или надесно. Првиот чекор може да се реализира така што сите бонбони ќе се поместат надесно, а вториот чекор може да се реализира така што сите бонбони ќе се вратат налево, освен една кај ученикот B која ќе се помести надесно кај ученикот C. Така една бонбона на ученикот A завршила кај ученикот C. Другата насока е аналогна. ■
Нека n е непарен број. Бидејќи растојанието меѓу секои два ученика во една од насоките е парно, со користење на лемата, секој ученик може да му додаде бонбона на произволен ученик во парен број чекори. Според тоа, сите распореди се достижни.
Нека сега n е парен број. Со едноставна индукција се покажува дека по секој чекор кај учениците на парни, односно непарни позиции се наоѓа барем по една бонбона. Распоредите во кои сите бонбони се кај $\frac{n}{2}$ ученици на парни или $\frac{n}{2}$ ученици на непарни позиции се недостижни, а нив ги има $2\binom{\frac{3n}{2}-1}{n}$.
Останува да докажеме дека сите останати распореди се достижни.
Според лемата, доволно е да докажеме дека за секој $a = 1, 2, ..., n-1$ може да се добие барем еден распоред во кој точно a бонбони се наоѓаат на парни позиции. За почеток, според лемата, сите бонбони може да се проследат на два соседни ученици A и B, каде A е на парна позиција. Нека во тој момент, без ограничување на општостша, A има $a' > a$ бонбони. Во првиот потез, A ќе додаде една бонбона на ученикот B, а B една бонбона на својот втор сосед C. Во вториот потез, A и B ќе разменат по една бонбона, а C ќе ја врати бонбоната на ученикот B. Сега A има $a'-1$ бонбона, а B ги има преостанатите $n-a'+1$ бонбони. Повторувајќи ја оваа постапка $a'-a$ пати ја постигнуваме целта.

Значи, достижни распореди има $\binom{2n-1}{n}$ ако n е непарен, и $\binom{2n-1}{n} - 2\binom{\frac{3n}{2}-1}{n}$ ако n е парен.

БМО 2018

1. Четириаголникот $ABCD$ е впишан во кружница k, при што $\overline{AB} > \overline{CD}$ и правата AB не е паралелна со правата CD. Точката M е пресек на дијагоналите AC и BD, а подножјето на нормалата од M на AB е точката E. Ако EM е симетрала на $\measuredangle CED$, докажи дека AB е дијаметар на кружницата k.

   Решение. *Прв начин*. Нека претпоставиме дека AB не е дијаметар на кружницата и да избереме точка A' на полуправата CA и точка B' на полуправата DB такви што $\measuredangle A'DB = \measuredangle B'CA = 90^\circ$.



   Четириаголникот $A'B'CD$ е тетивен, па затоа $\measuredangle B'A'C = \measuredangle B'DC = \measuredangle BAC$, а оттука следува $A'B' \| AB$ и $ME \perp A'B'$. Нека правата ME ја сече $A'B'$ во точката E'. Од тетивните четириагоници $A'E'MD$ и $B'E'MC$ следува $\measuredangle DE'E = \measuredangle DA'M = \measuredangle CB'M = \measuredangle CE'E$, па како $\measuredangle DEE' = \measuredangle CEE'$, заклучуваме дека триаголниците CEE' и DEE' се складни. Затоа $\overline{CE} = \overline{DE}$. Конечно, симетралата EM на $\measuredangle CED$ е нормална на CD, па затоа $AB \| CD$, што противречи на условот на задачата.

   Втор начин. Нека правите AD и BC се сечат во точката N, а правите AB и CD се сечат во точката P. Правата MN е полара на точката P во однос на кружницата k, па затоа $MN \perp OP$, каде O е центар на кружницата k. Со K да го означиме пресекот на правите MN и CD, а со E' пресекот на правите MN и AB. Бидејќи EK и EP се соодветно внатрешната и надворешната симетрала на $\measuredangle CED$, заклучуваме дека четворката $(C, D; P, K)$ е хармониска. Со проектирање од M следува дека четворката $(A, B; P, E)$ е хармониска. Од друга страна, од четириаголникот $ABCD$ следува дека четворката $(A, B; P, E')$ е хармониска, па затоа $E' \equiv E$ и оттука $MN \perp AB$. Според тоа, O припаѓа на правата AB, т.е. AB е дијаметар на кружницата k.

2. Нека q е позитивен рационален број. Две мравки на почетокот се наоѓаат во иста точка X во рамнината. Во $n-$тата минута $(n = 1, 2, ...)$ секоја од нив из-

бира дали ќе се движи на север, исток, југ или запад, и притоа минува растојание од q^n метри. По цел број минути тие повторно се наоѓаат во иста точка во рамнината (не задолжително во точката X), а дотогаш изминатите патеки не им се потполно идентични. Определи ги сите можни вредности на бројот q.

Решение. Со a_n да го означиме збирот на x и y координатата на првата мравка, а со b_n збирот на координатите на втората мравка по n минути. Од условот на задачата следува $|a_n - a_{n-1}| = |b_n - b_{n-1}| = q^n$, па затоа

$$a_n = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i q^i \text{ и } b_n = \sum_{i=1}^{n} \eta_i q^i$$

за некои коефициенти $\varepsilon_i, \eta_i \in \{-1,1\}$. Ако мравките се сретнале по n минути, тогаш

$$0 = \tfrac{a_n - b_n}{2} = \sum_{i=1}^{n} \tfrac{\varepsilon_i - \eta_i}{2} q^i = P(q)$$

при што коефициентите $\frac{\varepsilon_i - \eta_i}{2}$ на поиномот $P(q)$ се целобројни и припаѓаат на множеството $\{-1,0,1\}$. Според тоа, ако $q = \frac{a}{b}, a,b \in \mathbb{N}$, тогаш $a\,|\,1, b\,|\,1$ и затоа $q=1$. Вредноста $q=1$ очигледно е можна, на пример, ако првата мравка оди на исток па на запад, а втората на север па на југ.

Втор начин. Ги разгледуваме позициите на мравките α_k и β_k по k чекори во комплексната рамнина, сметајќи дека појдовната точка е координатниот почеток и дека чекорите се паралелни на координатните оски. Знаеме дека $\alpha_k - \alpha_{k-1} = a_k q^k$ и $\beta_k - \beta_{k-1} = b_k q^k$, каде $a_k, b_k \in \{1,-1,i,-i\}$. АКо $\alpha_n = \beta n$ за некој $n > 0$, тогаш

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k - b_k) q^k = 0 \text{, каде } a_k - b_k \in \{0, \pm 1 \pm i, \pm 2 \pm 2i\}.$$

Да забележиме дека коефициентот $a_k - b_k$ секогаш е делив со $1+i$ во прстенот $\mathbb{Z}[i]$. Навистина

$$c_k = \tfrac{a_k - b_k}{1+i} \in \{0, \pm 1, \pm i, \pm 1 \pm i\}.$$

Со скратување со $1+i$ добиваме $\sum_{k=1}^{n} c_k q^k = 0$. Без ограничување на општоста можеме да сметаме дека $c_1, c_n \neq 0$. Ако сега $q = \frac{a}{b}, (a,b \in \mathbb{N})$, тогаш $a\,|\,c_1$ и $b\,|\,c_n$ во $\mathbb{Z}[i]$, што е можно само за $a = b = 1$. Според тоа, $q = 1$.

3. Ана и Бојан ја играат следнава игра. Пред нив се наоѓаат две непразни купчиња монети. Наизменично, прва почнува Ана, секој избира купче во кое има

парен број монети и половина од монетите ги преместува од тоа купче во другото купче. Играта завршува ако играчот кој е на потез не може да одигра потез, во кој случај победува другиот играч. Определи ги сите парови (a,b) природни броеви такви што ако купчињата на почетокот имаат a и b монети, тогаш Бојан има победничка стратегија.

Решение. Со $v_2(n)$ да го означиме најголемиот ненегативен цел број r таков што $2^r \mid n$. За позицијата (a,b), т.е. две купчиња со a и b монети, ќе велиме дека е $k-$среќна ако $v_2(a)=v_2(b)=k$ за некој цел број $k \geq 0$, и $k-$несреќна ако $\min\{v_2(a),v_2(b)\}=k<\max\{v_2(a),v_2(b)\}$. Ќе докажеме дека Бојан има победничка стратегија ако и само ако почетната позиција е $k-$среќна за некој парен број k.

- Во случај на 0-среќна позиција играчот кој е на потез одма губи.
- Ако е дадена $k-$среќна позиција (a,b) со $k \geq 1$, играчот кој е на потез ја менува во една од позициите $(a+\frac{1}{2}b,\frac{1}{2}b)$ и $(b+\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a)$, при што и двете се $(k-1)$-среќни бидејќи $v_2(a+\frac{1}{2}b)=v_2(\frac{1}{2}b)=v_2(b+\frac{1}{2}a)=v_2(\frac{1}{2}a)=k-1$.

Според тоа, ако почетната позиција е $k-$среќна, по k потези се доаѓа до конечна 0-среќна позиција, при што Бојан ќе победи ако и само ако k е парен број.

- Ако е дадена $k-$несреќна позиција (a,b) со непарен k и $v_2(a)=k<v_2(b)=l$, Ана може да ја промени во позиција $(b+\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a)$. Бидејќи $v_2(b+\frac{1}{2}a)=v_2(\frac{1}{2}a)=k-1$, новата позиција е $(k-1)-$среќна и $2\mid k-1$, па така Ана ќе победи.
- Ако е дадена $k-$несреќна позиција (a,b) со парен k и $v_2(a)=k<v_2(b)=l$, Ана не смее да одигра во позиција $(b+\frac{1}{2}a,\frac{1}{2}a)$, бидејќи таа е $(k-1)-$среќна и Бојан ќе победи. На Ана и останува потез за позицијата $(a+\frac{1}{2}b,\frac{1}{2}b)$. Добиената позиција е исто така $k-$несреќна, бидејќи за $l>k+1$ имаме $v_2(a+\frac{1}{2}b)=k<v_2(\frac{1}{2}b)=l-1$, а додека за $l=k+1$ имаме $v_2(a+\frac{1}{2}b)>v_2(\frac{1}{2}b)=k$.

Според тоа, ако почетната позиција е $k-$ несреќна, тогаш Ана победува ако е k непарен, а нема победник ако е k парен број.

4. Определи ги сите прости броеви p такви што $3p^{q-1}+1$ е делител на 11^p+17^p.

Решение. За $p=2$ непосредно се проверува дека задачата нема решение. Понатаму, нека $p>2$.

Бидејќи $N=11^p+17^p\equiv 4(\mathrm{mod}\,8)$, следува дека $8\nmid 3p^{q-1}+1>4$. Да разгледаме некој непарен прост делител r на бројот $3p^{q-1}+1$. Јасно, $r\notin\{3,11,17\}$. Ако $n\in\mathbb{Z}$ е таков што $17n\equiv -1(\mathrm{mod}\,r)$, тогаш $r\,|\,n^pN\equiv m^p-1(\mathrm{mod}\,r)$, каде $m=11n$. Значи, редот на бројот m по модул r е делител на p, т.е. $\mathrm{ord}_r(m)\in\{1,p\}$. Притоа, ако $\mathrm{ord}_r(m)=1$, имаме $r\,|\,m-1\equiv(11+17)n(\mathrm{mod}\,r)$, што како единствена можност дава $r=7$. Од друга страна, ако $\mathrm{ord}_r(m)=p$, тогаш $p\,|\,r-1$. Според тоа, канонисканата факторизација на бројот $3p^{q-1}+1$ има облик

$$3p^{q-1}+1=2^a7^b p_1^{c_1}p_2^{c_2}...p_k^{c_k}\,, \qquad (*)$$

каде $p_i\notin\{2,7\}$ се прости броеви такви што $p_i\equiv 1(\mathrm{mod}\,p)$.

Видовме дека $a\le 2$. Според тоа, ако $p=7$, тогаш $b=0$, а во спротивно

$$\tfrac{11^p+17^p}{28}=11^{p-1}-11^{p-2}17+11^{p-3}17^2-...+17^{p-1}\equiv 4^{p-1}p(\mathrm{mod}\,7)\,,$$

па 11^p+17^p не е делив со 7^2. Во двата случаја е $b\le 1$.

За $q=2$ од (*) добиваме

$$3p+1=2^a7^b p_1^{c_1}p_2^{c_2}...p_k^{c_k}\,,$$

па како важи $p_i\ge 2p+1$ ова е можно само ако $c_i=0$ за секој i, т.е. $3p+1=2^a7^b\in\{2,4,14,28\}$. Од овде не добиваме ниту едно решение.

Останува случајот $q>2$, а тогаш имаме $4\,|\,3p^{q-1}+1$, т.е. $a=2$. Сега во (*) десната страна е конгруентна со 4 или 28 по модул p, од каде што следува $p=3$. Во овој случај $3^q+1\,|\,6244$, што важи само за $q=3$. Навистина, парот $(p,q)=(3,3)$ е решение на задачата.

БМО 2019

1. Со $\mathbb{P}$ да го означиме множеството од сите прости броеви. Определи ги сите функции $f:\mathbb{P}\to\mathbb{P}$ такви што важи
$$f(p)^{f(q)}+q^p=f(q)^{f(p)}+p^q, \tag{1}$$
за секои $p,q\in\mathbb{P}$.

Решение. Да претпоставиме дека $f(2)>2$. Тогаш (1) следува дека
$$f(p)^{f(2)}=f(2)^{f(p)}+p^2-2^p,$$
е парно за секој $p\in\mathbb{P}$, $p>2$, па мора да важи $f(p)=2$, за секој $p>2$. Последното не е можно бидејќи тогаш за $(p,q)=(3,5)$ од (1) следува $3^5=5^3$, што не е точно. Според тоа, $f(2)=2$ и сега за $q=2$ добиваме
$$f(p)^2+2^p=2^{f(p)}+p^2. \tag{2}$$
Од (2) следува дека $f(p)\neq 2$ за $p>2$. Од друга страна, за секои природни броеви $x>y>2$ важи
$$2^x-x^2>2^y-y^2.$$
Последното неравенство се добива со индукција од неравенството
$$2^{y+1}-(y+1)^2-(2^y-y^2)=2^y-2y-1>0$$
за $y\geq 3$. Сега од (2) непосредно следува дека $f(p)=p$, за секој $p\in\mathbb{P}$. Јамо, оваа функција ја задоволува равенката (1).

2. Реалните броеви a,b,c се такви што $0\leq a\leq b\leq c$ и $a+b+c=ab+bc+ca>0$. Докажи дека
$$(a+1)\sqrt{bc}\geq 2.$$
Определи ги сите тројки (a,b,c) за кои важи знак на равенство.

Решение. *Прв начин*. Од условот на задачата следува
$$3(ab+bc+ca)\leq(a+b+c)^2=(ab+bc+ca)^2,$$
односно $ab+bc+ca\geq 3$. Понатаму, бидејќи $bc\geq ca\geq ab$, од последното неравенство следува $bc\geq 1$. Да означиме $\sqrt{bc}=x\geq 1$. Тогаш $b+c\geq 2\sqrt{bc}=2x$, па од условот на задачата следува
$$a=\tfrac{b+c-bc}{b+c-1}=1-\tfrac{bc-1}{b+c-1}\geq 1-\tfrac{x^2-1}{2x-1}=\tfrac{x(2-x)}{2x-1}, \tag{1}$$
при што знач за равенство важи ако и само ако $b=c=x$.

1) Ако $\sqrt{bc}=x\geq 2$, тогаш очигледно
$$(a+1)\sqrt{bc}\geq 2(a+1)\geq 2.$$
Знак за равенство важи ако и само ако

$$a=0 \text{ и } b=c=x=2 \text{, т.е. } (a,b,c)=(0,2,2).$$

2) Ако $\sqrt{bc}=x<2$, тогаш од (1) следува

$$(a+1)\sqrt{bc}=ax+x\geq \tfrac{x^2}{2x-1}(2-x)+x\geq (2-x)+x=2,$$

бидејќи

$$\tfrac{x^2}{2x-1}=1+\tfrac{(x-1)^2}{2x-1}\geq 1.$$

Знак за равенство важи ако и само ако

$$b=c=x=1 \text{ и } a=\tfrac{x(2-x)}{2x-1}=1 \text{, т.е. } (a,b,c)=1.$$

Втор начин. Да означиме $a+b+c=k$. Сега од

$$k=ab+bc+ca\geq a(a+b+c)=ka$$

следува $a\leq 1$. Имаме,

$$b+c=k-a \text{ и } bc=k-a(b+c)=k-a(k-a)=(1-a)k+a^2. \qquad (2)$$

Од неравенството меѓу средините имаме $(b+c)^2\geq 4bc$, па ако ги искористиме равенствата (2) имаме

$$k^2+(2a-4)k-3a^2\geq 0$$

и како $k>0$ добиваме

$$k\geq 2-a+2\sqrt{a^2-a+1}.$$

Оттука следува

$$\begin{aligned}(a+1)\sqrt{bc}&=(a+1)\sqrt{(1-a)k+a^2}\\ &\geq (a+1)\sqrt{(1-a)(2-a+2\sqrt{a^2-a+1})+a^2}\\ &=(a+1)(1-a+\sqrt{a^2-a+1})=F.\end{aligned}$$

Сега неравенството $F\geq 2$ е еквивалентен на неравенството

$$(a+1)\sqrt{a^2-a+1}\geq a^2+1,$$

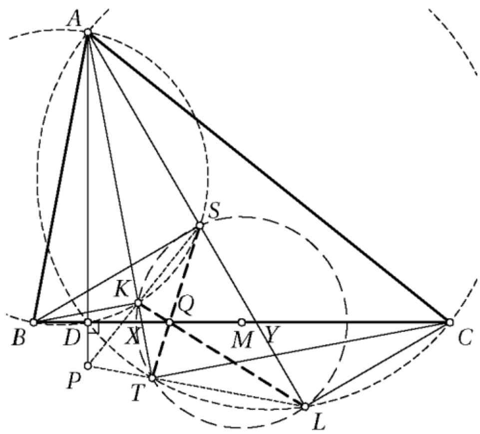
што со квадрирање се сведува на очигледното неравенство $a^3+a\geq 2a^2$. Знак за равенство важи ако и само ако $a=0$ или $a=1$, при услов $b=c$, односно ако и само ако $(a,b,c)=(0,2,2)$ или $(a,b,c)=(1,1,1)$.

3. Даден е остроаголен разностран триаголник ABC. Нека X и Y се различни внатрешни точки на отсечката BC такви што $\measuredangle CAX=\measuredangle YAB$. Да ги означиме со:
   1) K и S соодветно подножјата на нормалите повлечени од темето B на правите AX и AY,
   2) T и L соодветно подножјата на нормалите повлечени од темето C на правите AX и AY.

Докажи дека правите Kl и ST се сечат на правата BC .

Решение. *Прв начин*. Од условот на задачата следува $\triangle ABK \sim \triangle ACL$ и $\triangle ABS \sim \triangle ACT$, па затоа $\frac{\overline{AK}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{AS}}{\overline{AT}}$, односно $\overline{AK} \cdot \overline{AT} = \overline{AL} \cdot \overline{AS}$. Според тоа, точките K, L, S, T лежат на иста кружница k . Средината M на страната BC лежи на симетралите на отсечките KT и LS , па затоа таа е центар на кружницата k . Нека D е подножјето на висината повлечена од темето A . Кружницата k_1 со дијаметар AB минува низ точките D, K и S , а кружницата k_2 со дијаметар AC минува низ точките D, L и T .

Радикалните оски на паровите кружници $(k, k_1), (k, k_2)$ и (k_1, k_2) се соодветно правите KS, LT и AB и тие се сечат во радикалниот центар P на овие три кружници.



Сега, ако правите KL и ST се сечат во точката Q , од теоремата на Брокар за четириаголникот $KSLT$ следува дека правата AP е полара на точката Q во однос на кружницата k , па затоа $MQ \perp AP$, односно $MQ \| BC$, од каде што следува дека Q припаѓа на правата BC .

Втор начин. Нека правите KL и ST ја сечат правата BC во точките Q_1 и Q_2 , соодветно. Од теоремата на Менелај следува

$$\frac{\overline{XQ_1}}{\overline{Q_1Y}} = \frac{\overline{XK}}{\overline{KA}} \cdot \frac{\overline{AL}}{\overline{LY}} \text{ и } \frac{\overline{XQ_2}}{\overline{Q_2Y}} = \frac{\overline{XT}}{\overline{TA}} \cdot \frac{\overline{AS}}{\overline{SY}},$$

па како или двете прави KL и ST ја сечат отсечката XY или ниту една од нив не ја сече отсечката XY доволно е да докажеме дека $\frac{\overline{XQ_1}}{\overline{Q_1Y}} = \frac{\overline{XQ_2}}{\overline{Q_2Y}}$, т.е.

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AL}} \cdot \frac{\overline{AS}}{\overline{AT}} \cdot \frac{\overline{XT}}{\overline{XK}} \cdot \frac{\overline{YL}}{\overline{YS}} = 1. \tag{1}$$

Сега од сличностите $\triangle ABK \sim \triangle ACL, \triangle ABS \sim \triangle ACT, \triangle BXK \sim \triangle CXT, \triangle CYL \sim \triangle BYS$ следува

$$\frac{\overline{AK}}{\overline{AL}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}, \frac{\overline{AS}}{\overline{AT}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}, \frac{\overline{XT}}{\overline{XK}} \cdot \frac{\overline{YL}}{\overline{YS}} = \frac{\overline{CT}}{\overline{BK}} \cdot \frac{\overline{CL}}{\overline{BS}} = \frac{\overline{CT}}{\overline{BS}} \cdot \frac{\overline{CL}}{\overline{BK}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \cdot \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}. \tag{2}$$

Ако ги помножиме равенствата (2) го добиваме равенството (1).

4. Решетка е множеството од сите точки од видот (m, n) , каде m и n се цели броеви за кои важи $|m| \leq 2019, |n| \leq 2019$ и $|m| + |n| < 4038$. Точките (m, n) од

решетката за кои $|m|=2019$ или $|n|=2019$ ги нарекуваме *рабни*. Четирите прави $x=\pm 2019$ и $y=\pm 2019$ ги нарекуваме *рабови*. Две точки на решетката се соседни ако растојанието меѓу нив е еднакво на 1.
Зоран и Марко играат игра на решетката. Тие играат наизменично при што Зоран ја почнува играта со поставување на жетон на точката $(0,0)$, а Марко прв повлекува потез.

1) Во секој свој потез Марко отстранува најмногу по две рабни точки од секој раб.
2) Во секој свој потез Зоран прави точно три *чекори*. Чекорот се состои во поместување на жетонот на една од соседните точки кои не се отстранети.

Играта завршува со победа на Зоран во моментот кога тој ќе го постави жетонот на некоја гранична точка која сè уште не е отстранета. Дали Зоран има победничка стратегија?
Решение. *Прв начин*. Марко може да го оневозможи Зоран да победи. Стратегијата на Марко ќе ја опишеме на работ $y=2019$. На останатите рабови тој игра аналогно.
Во првиот потез Марко ги отстранува точките $(-1,2019)$ и $(0,2019)$. Потоа:

i) Ако Зоран со својот потез ја намали $x-$координатата, тогаш Марко ги отстранува првите две достапни точки лево од точката $(0,2019)$,

ii) Ако Зоран не ја промени $x-$координатата, тогаш Марко ја отстранува првата достапна точка лево и првата достапна точка десно од точката $(0,2019)$.

iii) Ако Зоран ја зголеми $x-$координатата, тогаш Марко ги отстранува првите две достапни точки десно од точката $(0,2019)$.

iv) Единствено отстапување е кога Зоран прв пат ја намали $x-$координатата за точно 1, тогаш Марко ја отстранува првата достапна точка лево и првата достапна точка десно од $(0,2019)$.

Да претпоставиме дека Зоран ќе победи со доаѓање до некоја точка $(a,2019)$. Можеме да сметаме дека $a>0$. Навистина, ако Зоран се движел по симетрична патека до точката $(-a,2019)$, тогаш Марко ќе стигнел да отстрани онолку точки лево од нулата колку што во овој случај отстранил десно од нулата.
Ја разгледуваме големината

$$\Delta=2x+y-3k,$$

каде (x,y) е моменталната позиција на жетонот, а k е најдесната отстранета точка. Имаме:

- Ако Зоран го помести жетонот за вектор $(-1,2),(0,3)$ или $(3,0)$, по неговиот и потезот на Марко Δ не се менува. Сепак, заради $iv)$, кога Зоран прв пат го поместува жетонот за вектор $(-1,2)$, по неговиот и потезот на Марко Δ се намалува за 1.

- Ако Зоран го помести жетонот за вектор $(2,1)$, по неговиот потез и потезот на Марко Δ се намалува за 1.
- Во секој друг случај Δ се намалува за најмалку 2.

По првиот потез на Марко важи $\Delta = 0$, па пред последниот потез на Зоран мора да биде $\Delta \leq 0$. Меѓутоа во тој момент е

$$\Delta = 2x + y - 3k \geq 2(a-2) + 2018 - 3(a-1) = 2017 - a \geq -1,$$

па е $a \leq 2018$ и Δ никогаш не се намалила за повеќе од 1. Оттука следува дека сите дотогашни потези на Зоран биле за вектор $(0,3)$ или $(3,0)$, освен можда еден за вектор $(2,1)$, па во тој момент

$$(x,y) \equiv (0,0)(\bmod 3) \text{ или } (x,y) \equiv (2,1)(\bmod 3).$$

Бидејќи Зоран има победа во најмногу три чекори, единствена можност е $(x,y) = (2018,2017)$. Но, тогаш

$$\Delta = 2 \cdot 2018 + 2017 - 3k = 6053 - 3k > 0,$$

што е противречност.

Втор начин. Ќе дадеме друга стратегија на Марко на работ $y = 2019$. Достапните точки на овој раб ќе ги наречеме *излезни*.

Во првите 672 чекори, што и да игра Зоран, Марко ги затвора сите 1345 излези од видот $(x,2019)$ за $3 \mid x$, а во 673 потез го затвора излезот кој е најблизок до Зоран (било кој, ако ги има два). Понатаму, по секој потез на Зоран, Марко затвора два излези кои се најблиски до Зоран (било кои ако ги има повеќе).

Со индукција по $n \geq 673$ ќе докажеме дека Зоран пред својот $n-$ти потез се наоѓа на растојание најмалку 4 (по координати) од најблискиот излез.

Нека $n = 673$. Зоран е или во точката $(0,2016)$ или под правата $y = 2016$, а излезот $(0,2019)$ Марко веќе го затворил, па затоа тврдењето важи.

Нека $n = 674$. Моменталната позиција на Зоран да ја означиме со (x_0, y_0). Ако $y_0 < 2018$, единствени три излези на растојание помало или еднакво на 3 од Зоран се $(x_0 \pm 1, 2019)$ и $(x_0, 2019)$, од кои едниот е веќе затворен, а Марко во својот $n-$ти потез ги затвора преостанатите два. Ако $y_0 = 2018$, тогаш $x_0 = \pm 1$ и без ограничување на општоста можеме да земеме дека $x_0 = 1$. Меѓу излезите $(a,2019)$ за $-1 \leq a \leq 3$ три се веќе затворени, а Марко сега ги затвора преостанатите два.

Нека $n > 674$ и нека (x, y_1) е позицијата на Зоран по $n-2$ потези. Сите излези се на растојание поголемо или еднакво на 4 од Зоран. Од трите излези $(x_1 \pm 1, 2019)$ и $(x_1, 2019)$ еден е веќе затворен, а Марко во $(n-1)-$от потез ги затвора преостанатите два (ако се отворени). Го разгледуваме $(n-1)-$от потез на Зоран.

i) Да претпоставиме дека Зоран свртува десно (случајот кога свртува лево е аналоген). Најблискиот излез лево од правата $x = x_1$ има x координата која не е поголема од $x_1 - 2$ и таа му е на растојание најмалку 4. Од друга страна, десно од правата $x = x_1$ на растојание помало или еднакво на 3 има најмногу два отворени излези, а Марко во својот $n-$ти потез ги затвора.

ii) Ако Зоран не ја менува $x-$координатата, тогаш Марко во својот $n-$ти потез ги затвора излезите $(x_1 \pm 2, 2019)$ (ако се отворени), па затоа најблискиот излез на Зоран ќе му биде на растојание поголемо или еднакво на 4.

Од претходните разгледувања следува дека Марко има стратегија со која Зоран не може да победи.

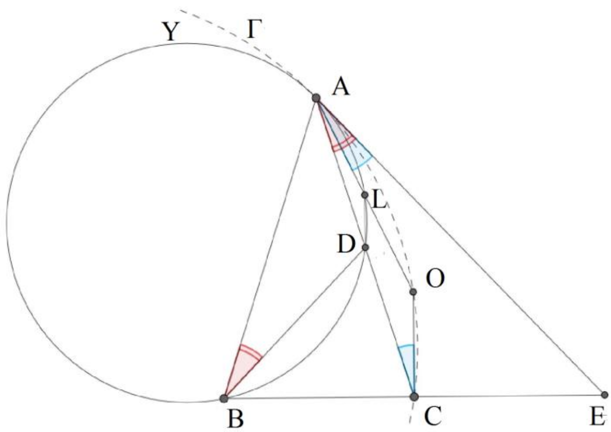
БМО 2020

1. Даден е остроаголен триаголник ABC таков што $\overline{AB} = \overline{AC}$. Точката D е средина на страната AC, а Y е опишаната кружница околу триаголникот ABD. Тангентата на кружницата Y во точката A ја сече страната BC во точката E. Нека O е центарот на опишаната кружница на триаголникот ABE. Докажи дека средината на отсечката AO припаѓа на кружницата Y.

Решение. *Прв начин*. Прво ќе докажеме дека точката C е средина на отсечката BE. Имаме:

$$\measuredangle BCD = \measuredangle ACB = \measuredangle CBA = \measuredangle EBA \text{ и}$$
$$\measuredangle BDC = \measuredangle BAD + \measuredangle DBA = \measuredangle BAD + \measuredangle DAE = \measuredangle BAE,$$

па затоа $\triangle ABE \sim \triangle DCB$. Според тоа, $\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{CD}} = 2$, т.е. точката C е средина на отсечката BE.



Сега ќе докажеме дека AE е тангента на кружницата ACO. Имаме:

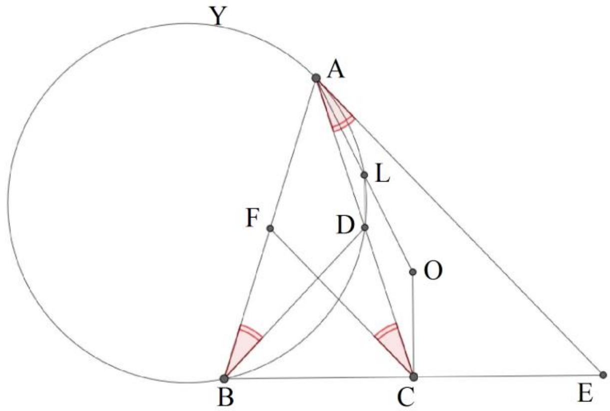
$$\measuredangle OAE = 90^\circ - \measuredangle EBA \text{ и } \measuredangle OCA = \measuredangle OCB - \measuredangle ACB = 90^\circ - \measuredangle CBA = 90^\circ - \measuredangle EBA,$$

па затоа $\measuredangle OAE = \measuredangle OCA$, што значи дека AE се совпаѓа со тангентата во точката A на кружницата ACO.

Конечно, нека Γ е сликата на Y при хомотетија со центар во A и коефициент 2. Тогаш Γ исто така се допира до AE во точката A и минува низ C, па така Γ се совпаѓа со кружницата која минува низ точката O, т.е. со кружницата ACO. Така, Y минува низ средината на отсечката AO.

Втор начин. Како и при првиот начин на решавање прво докажуваме дека C е средина на отсечката BE. Нека точката F е средина на отсечката AB. Од $\measuredangle EAC = \measuredangle ABD = \measuredangle FCD$, следува $CF \parallel AE$. Последното значи дека CF е средна линија на $\triangle BAE$, па така C е средина на отсечката BE.

Нека L е средина на отсечката AO. Бидејќи LD е средна линија на $\triangle AOC$, заклучуваме дека $LD \parallel OC$, што значи дека $\measuredangle ALD = \measuredangle AOC$. Сега, од

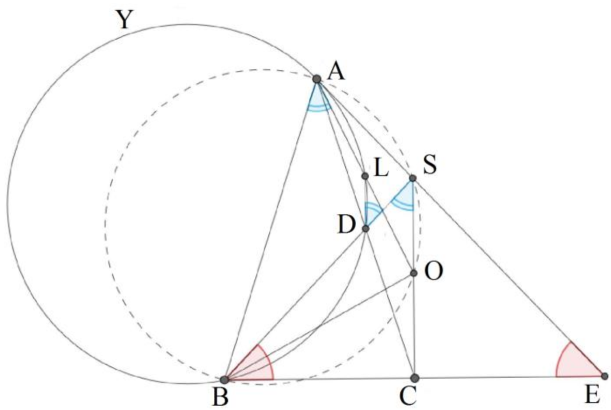


$$\measuredangle ALD = \measuredangle AOC = \measuredangle BOC + \measuredangle AOB = \measuredangle BAE + 2\measuredangle BEA,$$
$$\measuredangle ABD = \measuredangle CEA = \measuredangle BCA - \measuredangle BEA = \measuredangle ABE - \measuredangle BEA,$$
$$\measuredangle ALD + \measuredangle ABD = \measuredangle BAE + 2\measuredangle BEA + \measuredangle ABE - \measuredangle BEA = 180^\circ,$$

следува дека четириагоникот $ABDL$ е тетивен, т.е. L припаѓа на Y.

Трет начин. Како и во претходните начини на решавање прво се докажува дека точката C е средина на отсечката BE.

Нека правите AE и AD се сечат во точката S. Ќе докажеме дека S припаѓа на правата CO. Бидејќи

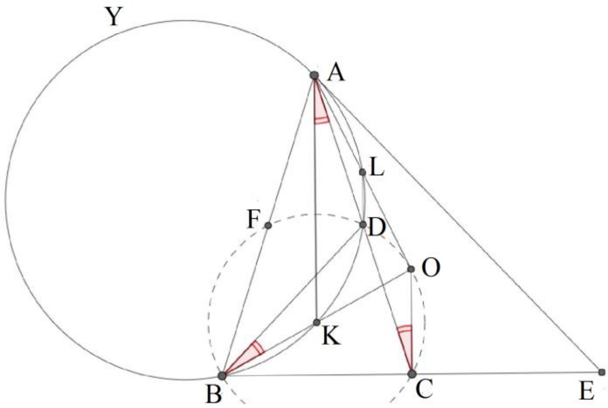


$$\measuredangle BDC = \measuredangle BAD + \measuredangle DBA = \measuredangle BAD + \measuredangle DAE = \measuredangle BAE$$

(исто како и во првиот начин на решавање), добиваме дека $\triangle SBE$ е рамнокрак, па така CO како симетрала на основата BE минува низ врвот S.

Од $\measuredangle BOC = \measuredangle BAS$ следува дека четириаголникот $ASOB$ е тетивен, па затоа $\measuredangle BAL = \measuredangle BSO$. Со L да ја означиме пресечната точка на AO и Y. Тогаш $\measuredangle LDS = \measuredangle BAL$, што заедно со претходното равенство дава $\measuredangle BSO = \measuredangle LDS$, па затоа $LD \parallel SO$. Последното значи дека LD е средна линија на $\triangle AOC$, што значи дека точката L која припаѓа на Y е средина на отсечката AO.

Четврт начин. Како и претходно прво докажуваме дека точката C е средина на отсечката BE. Нека точката F е средина на отсечката AB. Тогаш точките F и C лежат на кружница со дијаметар BO. Бидејќи четириаголникот $BFDC$ е тетивен, заклучуваме дека D исто така припаѓа на оваа кружница.



Нека K е средина на BO. Тогаш AK е симетрала на отсечката BC, па затоа $OC \parallel AK$, што значи $\measuredangle KAD = \measuredangle DCO$. Освен тоа, $\measuredangle DCO = \measuredangle KBD$, бидејќи четириаголникот $DBCO$ е тетивен. Од последните две равенства следува $\measuredangle KAD = \measuredangle KBD$, па така K припаѓа на Y. Понатаму, AK е симетрала на $\measuredangle BAD$, што значи дека K е средина на лакот BD.
Сега да разгледаме осна симетрија со оска на симетрија правата OF. Јасно, B се пресликува на A. Бидејќи OF е симетрала на AB, при оваа симетрија кружницата Y се пресликува во самата себе. Така, пресечната точка K меѓу OB и Y се пресликува во точката L која е пресечна точка меѓу OA и Y. Но, K е средина на отсечката BO, па затоа L е средина на отсечката OA.

2. Определи ги сите функции $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ такви што за секој природен број n важи:

1) $\sum_{k=1}^{n} f(k)$ е квадрат на природен број и

2) n^3 е делив со $f(n)$.

Решение. *Прв начин*. Со индукција ќе докажеме дека $f(n)=n^3$ за секој природен број n. Лесно се проверува дека оваа функција ги задоволува условите на задачата.
Јасно, тврдењето важи за $n=1$. Нека $n\geq 2$ и да претпоставиме дека $f(m)=m^3$ за секој природен број $m<n$. Тогаш $\sum_{k=1}^{n-1} f(k)=\frac{n^2(n-1)^2}{4}$, па затоа од 1) следува

$$f(n)=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\sum_{k=1}^{n-1} f(k)=(\tfrac{n(n-1)}{2}+k)^2-\tfrac{n^2(n-1)^2}{4}=k(n^2-n+k)\,,$$

за некој природен број k. Понатаму, од $f(n)\,|\,n^3$ следува $k(n^2-n+k)\le n^3$, што е еквивалентно со $(n-k)(n^2+k)\ge 0$, што значи $k\le n$. Од друга страна, n^2-n+k е делител на n^3. Затоа, ако $k<n$, тогаш

$$n<\tfrac{n^3}{n^2-1}\le\tfrac{n^3}{n^2-n+k}\le\tfrac{n^3}{n^2-n+1}<\tfrac{n^3+1}{n^2-n+1}=n+1,$$

па затоа $\frac{n^3}{n^2-n+k}$ не може да биде природен број. Последното значи дека $k=n$ и така $f(n)=n^3$. Со тоа е комплетирана индукцијата, па затоа единствена функција која ги задоволува условите на задачата е $f(n)=n^3,\ n\in\mathbb{N}$.

Втор начин. Нека $F(n)=f(1)+f(2)+...+f(n)$. Ќе докажеме три леми.

Лема 1. $F(n)\le\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Доказ. Од $f(i)\,|\,i^3$ за $i=1,2,...,n$ следува $f(i)\le i^3$, па затоа

$$F(n)=f(1)+f(2)+...+f(n)\le 1^3+2^3+...+n^3=\tfrac{n^2(n+1)^2}{4}\,.\ \blacksquare$$

Лема 2. $F(n)\ge n^2$.

Доказ. Од $f(i)>0$, за секој i следува дека $F(n)$ е инјекција и монотоно расте. Според 1) $F(n)$ е точен квадрат, па затоа $F(n)\ge n^2$ за секој n. ■

Лема 3. $f(p)=p^3$ за секој прост број p.

Доказ. Од $f(p)\,|\,p^3$ следува дека можни вредности на $f(p)$ се $1,p,p^2$ и p^3. Ќе докажеме дека $f(p)$ не може да биде 1 или p или p^2.

Случај 1. Нека $f(p)=1$. Тогаш $F(p)=F(p-1)+1$ и $F(p-1)$ и $F(p)$ се природни броеви поголеми од 1 кои се точни квадрати, што е противречност.

Случај 2. Нека $f(p)=p$. Нека $F(p-1)=b^2$ и $F(p)=a^2$. Затоа,

$$p=F(p)-F(p-1)=(a-b)(a+b)\,,$$

од каде добиваме $a-b=1, a+b=p$, односно $a=\frac{p+1}{2}$ и $b=\frac{p-1}{2}$. Сега, според лема 2 важи

$$(\tfrac{p-1}{2})^2=b^2=F(p-1)\ge(p-1)^2\,,$$

што е противречност.

Случај 3. Нека $f(p)=p$. Нека $F(p-1)=b^2$ и $F(p)=a^2$. Затоа,

$$p^2=F(p)-F(p-1)=(a-b)(a+b)\,,$$

па како $a,b>0$ од последното равенство следува

$$a-b=1, a+b=p^2 \text{, т.е. } a=\frac{p^2+1}{2} \text{ и } b=\frac{p^2-1}{2}.$$

Но според лема 1 важи

$$(\frac{p^2-1}{2})^2=b^2=F(p-1)\geq(\frac{p(p-1)}{2})^2=(\frac{p^2-p}{2})^2,$$

што е противречност. ■

За да го комплетираме доказот дека $f(n)=n^3$ за секој природен број n, треба да докажеме дека $f(n)=n^3$ за секој сложен број n. Нека $p>n$ е прост број. Докажавме дека $f(p)=p^3$ и по услов $f(p)=F(p)-F(p-1)=(a-b)(a+b)$. Со аналогни размислувања како во горните разгледувања се докажува дека случајот $a-b=1$ и $a+b=p^3$ не е можен, па затоа важи $a-b=p$ и $a+b=p^2$. Оттука добиваме $b=\frac{p^2-p}{2}$, па така

$$F(p-1)=f(1)+f(2)+...+f(p-1)=(\frac{p^2-p}{2})^2=\frac{p^2(p-1)^2}{4},$$

што значи дека во лема 1 важи знак за равенство. Сега, бидејќи функцијата F строго монотоно расте, последното е можно само ако $f(i)=i^3$ за секој $i\leq p-1$, со што доказот е комплетиран.

3. Даден е природен број k. Определи го најмалиот природен број $n\geq k+1$ за кој во следнава игра може да се одиграат бесконечно многу потези.

Дадени се n кутии означени со $b_1,b_2,...,b_n$, при што за секој i кутијата b_i на почетокот содржи точно i монети. Во секој потез редоследно ги реализираме следниве три чекори:

1) Се избираат $k+1$ кутии.
2) Од овие $k+1$ кутии се избира една, да кажеме b_i. Во оваа кутија се додаваат i монети, а од секоја од преостанатите k кутии се отстранува најмалку половина од монетите.
3) Ако некоја кутија се испразни, играта завршува. Во спротивно се преминува на следниот чекор.

Решение. Бараниот минимум е $n=2^k+k-1$.

Во овој случај може да се одиграат бесконечно многу потези ако во секој чекор се избираат последните $k+1$ кутии $b_{2^k-1},b_{2^k},...,b_{2^k+k-1}$. Така, ако во чекорот r кутијата b_{2^k+i-1} има точно m_i монети, тогаш од неа се отстрануваат точно $\lceil m_i/2\rceil$ монети, освен во случајот $i\equiv r-1 \pmod{k+1}$, кога во кутијата се додаваат 2^k+i-1 монети. Така по чекорот r кутијата b_{2^k+i-1} содржи точно

$\lfloor m_i / 2 \rfloor$ монети, освен ако $i \equiv r-1 (\bmod k+1)$, во кој случај таа содржи $m_i + 2^k + i - 1$ монети. Значи, играта ќе продолжи неограничено, бидејќи секогаш кога кутија се дополнува се додаваат најмалку $2^k - 1$ монети, па така кутијата ќе содржи најмалку 2^k монети, што е доволно да се реализираат следните k чекори.

Нека $n \le 2^k + k - 2$ и да претпоставиме дека во играта може да се реализираат бесконечно многу потези. Да забележиме дека од кутија која содржи m монети може најмногу $w = \lfloor \log_2 m \rfloor$ пати да се извадат монети и бројот w ќе го наречеме *тежина* на оваа кутија. Збирот од тежините на сите кутии ќе го наречеме *вкупна тежина*. Сега ќе ја докажеме следнава лема.

Лема. Реализирањето на произволен чекор не ја зголемува вкупната тежина. Освен тоа, дополнувањето на било која од првите $2^k - 2$ кутии строго ја намалува вкупната тежина.

Доказ. Бидејќи вадењето на монети од секоја кутија ја намалува нејзината тежина за најмалку 1, доволно е да докажеме дека дополнувањето на било која кутија ја зголемува нејзината тежина за најмногу k, и ако тоа се прави со некоја од првите $2^k - 2$ кутии, тогаш нејзината тежина се зголемува за најмногу $k-1$. Нека кутијата која ја пополнуваме е b_i и нека во моментот таа содржи точно m_i монети. Ќе разгледаме неколку случаи.

Ако $m_i = 1$, тогаш тежината се зголемува за

$$\lfloor \log_2(i+1) \rfloor \le \left\lfloor \log_2(2^k + k - 1) \right\rfloor \le \left\lfloor \log_2(2^{k+1} - 2) \right\rfloor \le k ,$$

и ако додадеме $i \le 2^k - 2$ монети, тогаш тежината се зголемува за

$$\lfloor \log_2(i+1) \rfloor \le \left\lfloor \log_2(2^k - 1) \right\rfloor = k - 1 .$$

Ако $m_i = 2$, тогаш тежината се зголемува за

$$\lfloor \log_2(i+2) \rfloor - \lfloor \log_2 2 \rfloor \le \left\lfloor \log_2(2^k + k) \right\rfloor - 1 \le k - 1 .$$

Ако $m_i \ge 3$, тогаш тежината се зголемува за

$$\begin{aligned} \lfloor \log_2(i+m_i) \rfloor - \lfloor \log_2 m_i \rfloor &\le \lfloor \log_2(i+m_i) - \log_2 m_i \rfloor + 1 \\ &\le \left\lfloor \log_2\left(1 + \tfrac{2^k + k - 2}{3}\right) \right\rfloor + 1 \le k, \end{aligned}$$

бидејќи $1 + \frac{2^k + k - 2}{3} = \frac{2^k + k + 1}{3} < \frac{2^k + 2^{k+1}}{3} = 2^k$.

Конечно, ако $i \le 2^k - 2$ тогаш ги разгледуваме подслучаите $m_i = 3$ и $m_i \ge 4$. Во останатите подслучаи тежината се зголемува за

$$\lfloor \log_2(i+3) \rfloor - \lfloor \log_2 3 \rfloor \le \left\lfloor \log_2(2^k+1) \right\rfloor - 1 \le k-1,$$

а во последниот за

$$\begin{aligned}\lfloor \log_2(i+m_i) \rfloor - \lfloor \log_2 m_i \rfloor &\le \lfloor \log_2(i+m_i) - \log_2 m_i \rfloor + 1 \\ &\le \left\lfloor \log_2(1+\tfrac{2^k-2}{4}) \right\rfloor + 1 \le k-1,\end{aligned}$$

бидејќи $1+\frac{2^k-2}{4} = \frac{2^k+2}{4} < 2^{k-2}+1$. ■

Да се вратиме на задачата. Бидејќи вкупната тежина не може да опаѓа бесконечно многу пати, $n > 2^k - 2$ и од некој момент ниту една од првите $2^k - 2$ кутии не е дополнета. Понатаму, секој чекор вклучува избор на $k+1$ кутија. Бидејќи $n \le 2^k + k - 2$, од овој момент во секој чекор имаме одземање монети од најмалку една од првите $2^k - 2$ кутии. Ова не е можно да се направи бесконечно многу пати, што противречи на претпоставиме дека во играта може да се реализираат бесконечно многу потези

Конечно, во оваа игра може да се направат бесконечно многу чекори ако и само ако $n \ge 2^k + k - 1$.

4. Нека $a_1 = 2$. За секој природен број n, нека a_{n+1} е најмалиот природен број поголем од a_n чиј број на делители е поголем од бројот на делителите на a_n. Докажи дека само за конечно многу природни броеви n важи $2a_{n+1} = 3a_n$.

Решение. Прво ќе ја докажеме следнава лема.

Лема 1. Секој a_n е најмалиот природен број меѓу сите природни броеви кои имаат еднаков број позитивни делители како и a_n.

Доказ. Да претпоставиме дека постои n таков што некој природен број $b < a_n$ има еднаков број позитивни делители како и a_n. Тогаш $a_m < b \le a_{m+1}$ за некој $m < n$ и од дефиницијата на низата следува дека $b = a_{m+1}$. Бидејќи $b < a_n$, добиваме дека $m+1 < n$, што е противречност, бидејќи a_{m+1} треба да има помалку позитивни делители од a_n. ■

Нека $p_1 < p_2 < ... < p_n < ...$ е низата прости броеви запишани во строго растечки редослед и каноничната репрезентација на природниот број N да ја запишеме во облик $N = \prod_{i \ge 1} p_i^{e_i}$, каде $e_i \ge 0$ за секој i и $e_i = 0$ освен за конечно многу индекси i. Во оваа ознака бројот на позитивните делители на бројот N можеме да го запишеме во обликот $\tau(N) = \prod_{i \ge 1}(e_i + 1)$.

Ќе ја докажеме следнава лема.

Лема 2. Експонентите во каноничната репрезентација на секој член на низата a_n формираат не строго опаѓачка низа.

Доказ. Навистина ако во каноничното претставување на a_n важи $e_i < e_j$ за некој $i < j$, тогаш ако во каноничното претставување на a_n ги замениме само местата на овие две експоненти се добива помал природен број кој има еднаков број позитивни делители како и a_n, што противречи на Лема 1. ■

Да се вратиме на задачата. Членот на низата a_n за кој важи $2a_{n+1} = 3a_n$ ќе го наречеме *убав член* на низата.

Нека претпоставиме дека низата има бесконечно многу убави членови, кои формираат строго растечка бесконечна подниза од низата $\{a_n\}$. За да добиеме противречност доволно е да докажеме дека:

1) Експонентите на простите броеви во каноничните претставувања на убавите членови имаат заедничка горна граница e, и
2) За сите доволно големи прости броеви p ниту еден убав член на низата не е делив со p.

Користејќи ја Лема 2 можеме да запишеме $a_n = \prod_{i \geq 1} p_i^{e_i(n)}$, каде $e_i(n) \geq e_{i+1}(n)$ за секој i.

Тврдењето 2) е директна последица од тврдењето 1) и Лема 1. Нека претпоставиме дека некој убав член на низата a_n е делив со прост број $p_i > 2^{e+1}$, каде e е заедничката горна граница од тврдењето 1). Тогаш $e \geq e_i(n) > 0$, па затоа $2^{e_1(n)e_i(n)+e_i(n)} a_n / p_i^{e_i(n)}$ е природен број кој има еднаков број позитивни делители како и a_n, но е помал од a_n. Последното противречи на Лема 1. Според тоа, не постои убав член на низата кој е делив со прост број поголем од 2^{e+1}.

За да го докажеме 1), доволно е да докажеме дека во множеството убави членови на низата експонентот $e_1(n)$ е ограничен од горе. Тогаш од Лема 2 ќе следува тврдењето 1).

Нека a_n доволно голем убав член. Условот $\tau(a_n) < \tau(a_{n+1})$ е еквивалентен со

$$(e_1(n)+1)(e_2(n)+1) < e_1(n)(e_2(n)+2),$$

односно со условот $e_2(n)+2 \leq e_1(n)$. Последното значи дека a_n е делив со 8, бидејќи или $e_1(n) \geq 3$ или a_n е доволно голем степен на бројот 2.

Понатаму, $\frac{9a_n}{8}$ е природен број кој се наоѓа строго меѓу a_n и a_{n+1}, па затоа $\tau(\frac{9a_n}{8}) \leq \tau(a_n)$, што е еквивалентно на

$$(e_1(n)-2)(e_2(n)+3) \leq (e_1(n)+1)(e_2(n)+1),$$

односно на $2e_1(n) \leq 3e_2(n)+7$. Ова покажува дека a_n е делив со 3, бидејќи во спротивно, ако земеме a_n да се менува во множеството убави членови, тогаш 3 ќе биде горна граница за сите освен конечно многу $e_1(n)$, па убавите членови ќе формираат ограничена низа.

Така $\frac{4a_n}{3}$ е друг природен број кој се наоѓа строго меѓу a_n и a_{n+1}, па затоа $\tau(\frac{4a_n}{3}) \leq \tau(a_n)$, што е еквивалентно на

$$(e_1(n)+3)e_2(n) \leq (e_1(n)+1)(e_2(n)+1),$$

односно на $2e_2(n)-1 \leq e_1(n)$. Комбинирајќи го ова неравенство со неравенството од претходниот параграф добиваме

$$4e_2(n)-2 \leq 2e_1(n) \leq 3e_2(n)+7,$$

односно $e_2(n) \leq 9$. Конечно, $2e_1(n) \leq 3e_2(n)+7 \leq 34$, односно $e_1(n) \leq 17$. Тоа значи дека $e_1 \leq 17$, со што е докажано тврдењето 1).

ЛИТЕРАТУРА

1. Malčeski, A., Manova - Erakovic, V., Malčeski, R. et all: Mathematical Olympiads 2015, SMM, Skopje, 2015
2. Malčeski, A., Velinov, D., Malčeski, R. et all: Mathematical Olympiads 2017, SMM, Skopje, 2017
3. Malčeski, A., Velinov, D., Malčeski, R. et all: Mathematical Olympiads 2018, SMM, Skopje, 2018
4. Malčeski, A., Velinov, D., Malčeski, R., et all: Mathematical Olympiads 2016, SMM, Skopje, 2016
5. Malcheski, R., Grozdev, S., Anevska, K.: Geometry of complex numbers, Arhimed, Sofia, 2015
6. Velinov, D., Atanasova, S., Malcheski, A., Malcheski, R., Malcheski, S. et all: Mathematical Olympiads 2019, SMM, Skopje, 2019
7. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-2006, УНИМАТ СМБ, София, 2007
8. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2009-2011, УНИМАТ СМБ, София, 2012
9. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О., Николов, Н.: Български математически състезания 2012-2015, УНИМАТ СМБ, София, 2015
10. Бойваленков, П., Колев, Е., Мушкаров, О.: Български математически състезания 2003-2005, УНИМАТ СМБ, София, 2005
11. Гроздев, С., Мушкаров, О., Давидов, О., Ранков, Н.: Балкански олимпиади по математика 1984-1993, Математика плус, Стара Загора, 1995
12. Ђукић, Д., Радовановић, М.: Математичке олимпијаде средљошколаца од 2012 до 2019 године, ДМ Србије, Београд, 2012
13. Кртинић, Ђ.: Математичке олимпијаде средњошколаца 2007-2011 године, ДМ Србије, Београд, 2012
14. Малчески, А., Малчески, Р. и др.: Натпревари по математика во средното образование во учебната 1998/99 година, СММ, Скопје, 2000
15. Малчески, Р., Димовски, Д., Малчески, А., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '96, СММ, Скопје, 1997

16. Малчески, Р., Димовски, Д., Тренчевски, К.: Натпревари по математика '95, СММ, Скопје, 1996
17. Малчески, Р., Малчески, А.: Функции и функционални равенки (второ издание), Армаганка, Скопје, 2019
18. Малчески, Р.: Елементарни алгебарски и аналитички неравенства (второ издание), Армаганка, Скопје, 2019
19. Младеновић, П., Кртинић, Ђ.: Међународне и балканске математичке олимпијаде 1996-2006, ДМ Србије, Београд, 2007