XXVI РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИТЕ ОД ОСНОВНОТО ОБРАЗОВАНИЕ

VI ОДДЕЛЕНИЕ

1 Записот на секој датум се состои од осум цифри. (На пример: 05. 05. 2001). Најди го најблискиот иден датум, во чиј запис сите цифри се различни.

Решение: Во записот $\overline{ab}\cdot\overline{cd}\cdot\overline{efgh}$ очигледно $e=2$. Бројот на месецот $\overline{cd}$ е различен од 11 и 12, па следува дека во неговиот запис ќе ја има цифрата 0, т.е. $c=0$. Но, тогаш $12<\overline{ab}<19$ или $\overline{ab}=31$, т.е. записот на бројот $\overline{ab}$ ќе ја содржи цифрата 1. Затоа секоја од цифрите f, g, h е поголема од 2, па најблиската година е $\overline{efgh}\geq 2345$. Ако $\overline{efgh}=2345$, тогаш лесно одредуваме дека $\overline{cd}\geq 6$. За $\overline{xd}=6$, наоѓаме $\overline{ab}=17$. Значи бараниот датум е 17.06.2345.

2 Тројца рибари уловиле неколку риби и ги оставиле во една кошница. Пред тргнување едниот од нив зел $\frac{1}{3}$ од останатите риби и си заминал. Во кошницата останале 8 риби. По колку риби зел секој од нив?

Решение: Ако третиот рибар затекнал x риби и зел $\frac{1}{3}x$ риби, тогаш останале $\frac{2}{3}x$ риби, па до $\frac{2}{3}x=8$ следува $x=12$. Значи тој зел 4 риби. Ако вториот затекнал y риби и зел $\frac{1}{3}y$ риби, тогаш останале $\frac{2}{3}y$ риби, па $\frac{2}{3}y=12$, т.е. $y=18$. Вториот зел $\frac{1}{3}$ од 18, т.е. 6 риби. ако во кошницата имало z риби и првиот зел $\frac{1}{3}z$ риби, тогаш останале $\frac{2}{3}z$ риби, па $\frac{2}{3}z=18$, т.е. $z=27$. Тој зел 9 риби. Следствено, првиот зел 9, вториот 6, а третиот 4 риби.

3

Одреди ги сите природни броеви деливи со 8, чиј збир на цифрите е еднаков на 7, а производот на цифрите е еднаков на 6.

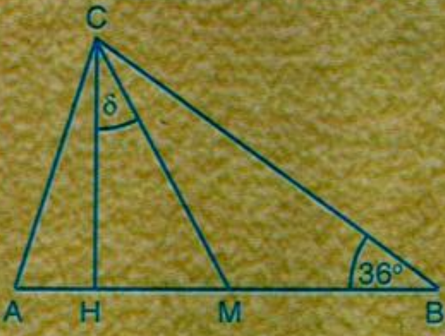
Решение: Бидејќи бројот е делив со 8, неговата последна цифра треба да е некоја од цифрите 0, 2, 4, 6 или 8. Последната цифра не може да биде 8 бидејќи збирот на сите цифри е еднаков на 7. Последната цифра не може да биде ниту 0, ниту 4, бидејќи производот на сите цифри е еднаков на 6. Значи последната цифра на бараниот број е 2 или 6.

1) Ако последната цифра е 2, тогаш бројот мора да ја содржи и цифррата 3 а производот на цифрите да биде еднаков на 6. За дабиде збирот на цифрите еднаков на 7, треба тој да содржи уште две единици. Од цифрите 1, 1, 2 и 3, броеви кои завршуваат на 2 се: 1132, 1212 и 3112, од кои првиот не е делив со 8.

2) Ако последната цифра на бројот е 6, тогаш другите цифри се само единици - за нивниот производ да биде еднаков на 6. За да биде збирот 7, употребена е само една единица. Значи бараниот број е 16. Следствено, сите природни броеви со наведените својства се 16, 1312 и 3112.

4

Еден од острите агли во правоаголниот триаголник е 36°. Пресметај го аголот меѓу висината и тежишната линија повлечени од темето на правиот агол на тој триаголник.

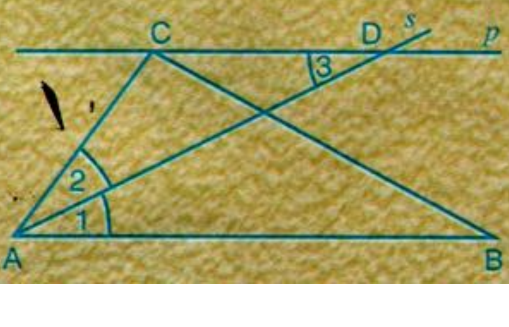


Решение: Нека CH е висина, а CM е тежишна линија во правоаголниот триаголник ABC ($\sphericalangle C = 90°$) и нека $\sphericalangle B = 36°$. Бидејќи M е средина на хипотенузата AB, следува дека $\overline{MB} = \overline{MC}$. Оттука следува дека ΔBCM е рамнокрак, па $\sphericalangle BCM = \sphericalangle B = 36°$.
Од $\sphericalangle A = 90° - 36° = 54°$, следува дека

$\sphericalangle ACH = 90° - \sphericalangle A = 90° - 54° = 36°$. Тогаш $\sphericalangle MCH = 90° - 36° - 36° = 18°$.

5

Низ темето C на триаголникот ABC е повлечена права p, паралелна со страната AB. Симетралата на аголот кај темето A ја сече правата p во точката D. Докажи дека $\overline{CA} = \overline{CD}$.



Решение: Симетралата s на аголот кај темето A е трансверзала за паралелните прави p и AB, па следува дека $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 3$, како наизменични. Бидејќи $\sphericalangle 1 = \sphericalangle 2$, следува дека $\sphericalangle 2 = \sphericalangle 3$. Оттука заклучуваме дека ΔADC е рамнокрак, па $\overline{CA} = \overline{CD}$.

VII ОДДЕЛЕНИЕ

1 Пресметај ја вредноста на изразот $2(a^3 + b^3) - 3(a^2 + b^2)$, ако $a + b = 1$.

Решение: Ако $a + b = 1$, тогаш $a^2 + b^2 + 2ab = 1$, т.е. $a^2 + b^2 = 1 - 2ab$; $a^3 + b^3 + 3ab(a + b) = 1$, т.е. $a^3 + b^3 = 1 - 3ab$, па имаме $2(a^3 + b^3) - 3(a^2 + b^2) = 2(1-3ab) - 3(1 - 2ab) = 2-6ab-3+6ab = -1$.

2 Во изразот 1 : 2 : 3 : 4 стави загради, за неговата вредност да биде: **а)** најмала; **б)** најголема.

Решение: а) Бидејќи $(1 : 2) : 3 = \frac{1}{6}$, $1 : (2 : 3) = \frac{3}{2}$ можеме да заклучиме дека најмалата вредност на изразот 1 : 2 : 3 : 4 ќе ја добиеме ако го вршиме делењето по наведениот редослед, т.е. $((1 : 2) : 3) : 4 = \frac{1}{6} : 4 = \frac{1}{24}$.

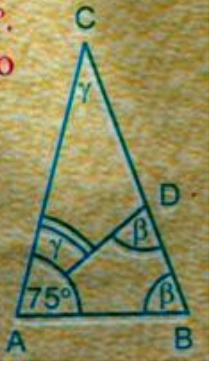
б) Најголемата вредност, пак, ќе ја добиеме ако бројот 1 го поделиме со најмалата вредност на изразот 2 : 3 : 4, т.е. $1 : ((2 : 3) : 4) = 1 : \frac{1}{6} = 6$.

3 Еден робот ги извршува следниве две операции:
1° со монета од 2 денари тој додава 4 на секој посочен број;
2° со монета од 5 денари тој го множи со 3 секој посочен број.

Дали е можно, почнувајќи од бројот 1, при конечен број операции со роботот да го добиеме бројот 2001? Ако е можно, за која најмала сума денари можеме тоа да го постигнеме?

Решение: Бидејќи $2001 = 3 \cdot 667$, доволно е да го добиеме бројот 667. Потоа од $667 = 3 \cdot 222 + 1 = 3 \cdot 221 + 4$ следува дека треба да го добиеме бројот 221. Слично заклучуваме понатаму: $221 = 3 \cdot 73 + 2 = 3 \cdot 71 + 4 + 4$, $71 = 3 \cdot 23 + 2 = 3 \cdot 21 + 4 + 4$, $21 = 3 \cdot 7$, $7 = 3 \cdot 1 + 4$. Оттука следува дека почнувајќи од бројот 1, со двете операции на роботот, можеме да го добиеме бројот 2001 на следниов начин: $3 \cdot 1 = 3$ (операција 2°); $4 + 3 = 7$ (операција 1°); $3 \cdot 7 = 21$; $3 \cdot 21 = 63$; $4 + 63 = 67$; $4 + 67 = 71$; $3 \cdot 71 = 213$; $4 + 213 = 217$; $4 + 217 = 221$; $3 \cdot 221 = 663$; $4 + 663 = 667$; $3 \cdot 667 = 2001$. Значи, потребни се вкупно 12 операции, по шест од секоја, па за тоа се потребни $12 \cdot 2 + 5$)денари, т.е. 84 денари.

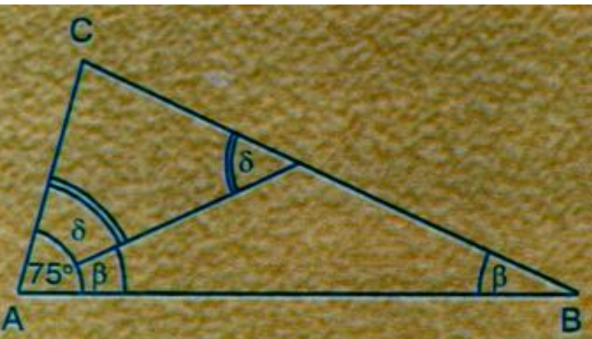
4 Во триаголникот ABC аголот кај темето A е 75°. Одреди ги другите агли во триаголникот ABC, ако на страната BC е избрана точката D, таква што триаголниците ABD и ACD се рамнокраки.



Решение: Ќе разгледаме два случаи.

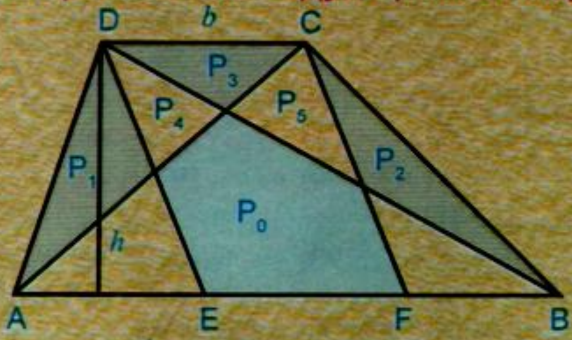
I случај: Нека $\overline{BA} = \overline{DA}$ и $\overline{AD} = \overline{CD}$ тогаш $\measuredangle BDA = \measuredangle B = \beta$, $\measuredangle CAD = \measuredangle C = \alpha$. За ΔADC аголот β е надворешен агол, па $\beta = 2\alpha$.

Во ΔBDA е: $\measuredangle DAB = 75^\circ - \gamma$, па имаме: $\beta + \beta + 75^\circ - \gamma = 180^\circ$; $2\gamma + 2\gamma + 75^\circ - \gamma = 180^\circ$; $3\gamma = 105^\circ \Rightarrow \gamma = 35^\circ$, $\beta = 70^\circ$.



II случај: Нека $\overline{AD} = \overline{BD}$ и $\overline{AC} = \overline{DC}$, тогаш $\measuredangle DAB = \measuredangle B = \beta$, $\measuredangle CAD = \measuredangle ADC = \delta$. За ΔABD аголот δ е надворешен агол, па $\delta = 2\beta$. Очигледно, $\beta + \delta = 75^\circ$; значи $\beta + 2\beta = 75^\circ$, т.е. $\beta = 25^\circ$, а $\gamma = 180^\circ - (75^\circ + 25^\circ) = 80^\circ$.

5 Низ крајните точки C и D на помалата основа на трапезот ABCD се повлечени паралелни прави, кои ја сечат поголемата основа AB во точки различни од A и B. Дијагоналите на трапезот и овие две прави го делат трапезот на седум триаголници и еден петаголник. Докажи дека збирот од плоштините на трите триаголници, што имаат по една страна заедничка со трапезот, е еднаков на плоштината на петаголникот.



Решение: Да ги означиме плоштините на триаголниците и петаголникот како на цртежот. Тогаш: $P_{ACD} = \frac{1}{2}bh = P_1 + P_4 + P_3$; $P_{BACD} = \frac{1}{2}bh = P_1 + P_2 + P_3$; $P_{CDEF} = bh$.

Оттука: $(P_1 + P_2 + P_3) + (P_2 + P_5 + P_3) = P_0 + P_3 + P_4 + P_5$, и конечно: $P_1 + P_2 + P_3 = P_0$.

VIII ОДДЕЛЕНИЕ

1 Докажи дека бројот $2^{198} + 1$ е делив со бројот $2^{99} + 2^{50} + 1$.

Решение: Имаме $2^{198} + 1 = 2^{198} + 2 \cdot 2^{99} + 1 - 2 \cdot 2^{99} = (2^{99} + 1)^2 - (2^{50})^2 =$
$= (2^{99} - 2^{50} + 1)(2^{99} + 2^{50} + 1)$.
Оттука следува тврдењето.

2 Еден дактилограф може да отчука извесен број страници за 5 часа и 20 минути, а друг дактилограф истиот текст го завршува за 4 часа и 40 минути. Кога тие работеле на еден текст истовремено, вториот дактилограф отчукал три страници повеќе од првиот. Колку страници имал овој текст?

Решение: Една иста работа првиот ја завршува за 320 минути, а вториот за 280 минути.

Брзините на чукањето на двата дактилографи се однесуваат како $\frac{1}{320} : \frac{1}{280} = 28 : 32 =$

= 7 : 8. Значи, од 15 страници првиот отчукал 7, а вториот 8 страници или една страница повеќе. Бидејќи вториот отчукал 3 страници повеќе, следува дека дадениот текст има 45 страници.

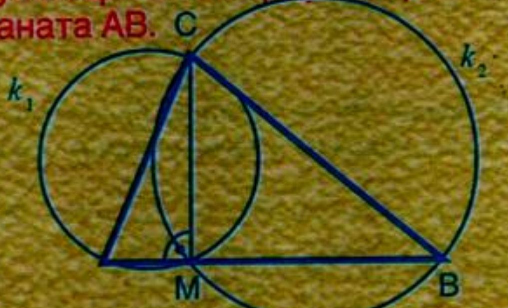
3 Нека a, b, c, x, y, z се позитивни реални броеви и нека $\frac{a}{x} < \frac{b}{y} < \frac{c}{z}$. Докажи дека $\frac{a}{x} < \frac{a+b+c}{x+y+z} < \frac{c}{z}$.

Решение: Од $\frac{a}{x} < \frac{b}{y}$ следува $ay < bx$, а од $\frac{a}{x} < \frac{c}{z}$ следува $az < cx$. Ако на овие неравенства го додедеме очигледното равенство $ax = ax$, добиваме: $ax + ay + az < ax + bx + cx$,

$a(x+y+z) < x(a+b+c)$, $\frac{a}{x} < \frac{a+b+c}{x+y+z}$. На сличен начин докажуваме дека $\frac{a+b+c}{x+y+z} < \frac{c}{z}$.

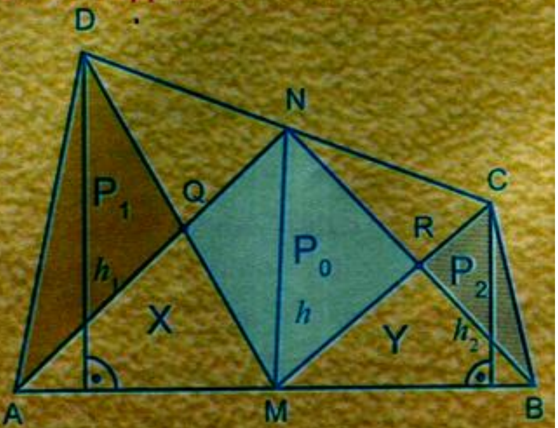
Значи $\frac{a}{x} < \frac{a+b+c}{x+y+z} < \frac{c}{z}$.

4 Нека триаголникот ABC е остроаголен. Докажи дека една од пресечните точки на кружниците чии дијаметри се страните AC и BC лежи на страната AB.



Решение: Нека кружницата k со дијаметар AC ја сече страната AB во точката M. Тогаш $\sphericalangle AMC = 90^\circ$. Но и $\sphericalangle BMC = 90^\circ$, па следува дека точката M ќе припаѓа на кружницата k_2, чиј дијаметар е страната BC.

5 Нека M и N се средини на страните AB и CD на конвексниот четириаголник ABCD. Отсечките AN и MD се сечат во точката Q, а отсечките BN и MC – во точката R. Докажи дека збирот од плоштините на триаголниците AQD и BCR е еднаков на плоштината на четириаголникот MRNQ.



Решение: Нека h_1, h_2, h се висините на триаголниците AMD, MBC, ABN, соодветно, и нека $\overline{AM} = \overline{MB} = \frac{a}{2}$. Користејќи ги ознаките P_1, P_2, P_o, X, Y за плоштините на триаголниците на цртежот, добиваме: $P_1 + X = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h_1 = \frac{ah_1}{4}$,

$P_2 + Y = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot h_2 = \frac{ah_2}{4}$, $P_o + X + Y = \frac{ah}{2}$. Бидејќи h е средна линија на правоаголниот трапез со основа h_1 и h_2, следува $h = \frac{h_1 + h_2}{2}$. Понатаму добиваме: $P_1 + X + P_2 + Y = \frac{a}{2} \cdot \frac{h_1 + h_2}{2} = \frac{ah}{2} =$

$= P_o + X + Y$. Оттука $P_1 + P_2 = P_o$.