

Регионален натпревар 1996

I година

1A. Разложи го на множители полиномот $x^5 + x + 1$.

Решение. За дадениот израз имаме

$$\begin{aligned} x^5 + x + 1 &= x^5 + x^4 + x^3 - x^4 - x^3 - x^2 + x^2 + x + 1 \\ &= x^3(x^2 + x + 1) - x^2(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1) \\ &= (x^2 + x + 1)(x^3 - x^2 + 1). \end{aligned}$$

2A. Дадени се броевите 5, 52, 525, 5252, 52525, ... Одреди го најмалиот меѓу нив кој е делив со 99.

Решение. Нека S_1 е збирот на цифрите на непарните места, а S_2 е збирот на цифрите на парните места во произволен број a_N од дадената низа. Број е делив со 11 ако $11 \mid S_1 - S_2$. Број е делив со 9 ако $9 \mid S_1 + S_2$.

1) Нека бројот на цифри N е парен. Тогаш збирот на цифрите на бројот a_N е еднаков на $\frac{7N}{2}$, а $S_1 - S_2 = \frac{3N}{2}$. За да бројот a_N биде делив со 99 мора $9 \mid S_1 + S_2$ и $11 \mid S_1 - S_2$. Овој услов го исполнуваат сите броеви N за кои $99 \mid N$, т.е. $N = 99k$. Најмалиот k за кој ова е исполнето е $k = 2$. Најмал ваков a_N ќе има $2 \cdot 99 = 198$ цифри. ($N = 198$).

2) Нека N е непарен. Тогаш

$$\begin{aligned} S_1 + S_2 &= \frac{7(N-1)}{2} + 5 = \frac{7N+3}{2}, \\ S_1 - S_2 &= \frac{3(N-1)}{2} + 5 = \frac{3N+7}{2}. \end{aligned}$$

Притоа

$$9 \mid S_1 + S_2 \Leftrightarrow 9 \mid \frac{7N+3}{2} \Leftrightarrow 9 \mid (7N+3) \Leftrightarrow N \equiv 5 \pmod{9}.$$

Освен тоа,

$$\begin{aligned} 11 \mid S_1 - S_2 &\Leftrightarrow 11 \mid \frac{3N+7}{2} \Leftrightarrow 11 \mid (3N+7) \Leftrightarrow \\ &11 \mid 4(3N+7) \Leftrightarrow 11 \mid (N+6) \Leftrightarrow N \equiv 5 \pmod{11} \end{aligned}$$

Најмалиот непарен број N таков што $N \equiv 5 \pmod{9}$ и $N \equiv 5 \pmod{11}$ е 159.

1Б. Ако за позитивните реални броеви a, b и c важи равенството

$$ab\left(\frac{a+b}{2} - c\right) + bc\left(\frac{b+c}{2} - a\right) + ac\left(\frac{c+a}{2} - b\right) = 0,$$

тогаш $a = b = c$. Докажи!

Решение. Равенството е еквивалентно со

$$\frac{a}{2}(b-c)^2 + \frac{b}{2}(a-c)^2 + \frac{c}{2}(a-b)^2 = 0.$$

Бидејќи a, b, c се позитивни реални броеви, се добива дека $a-b=b-c=c-a=0$, т.е. $a=b=c$.

2Б. Легура на цинк и сребро со маса 3,5 килограми содржи 75% сребро. Кога оваа легура ќе се стопи и ќе се измеша со друга легура од истите елементи, се добива трета легура со маса 10,5 килограми, која има 84% сребро. Колкав е процентот на сребро во втората легура?

Решение. Во првата легура имало $3,5 \cdot 0,75 \text{ kg} = 2,625 \text{ kg}$ сребро. Во третата легура имало $10,5 \cdot 0,84 \text{ kg} = 8,82 \text{ kg}$ сребро. На првата легура и се додадени $(10,5 - 3,5) \text{ kg} = 7 \text{ kg}$ легура, која имала $(8,82 - 2,66) \text{ kg} = 6,16 \text{ kg}$ сребро. Значи, во втората легура имало $\frac{6,16 \cdot 100}{7} = 88\%$ сребро.

3АБ. Игор, Јован, Кире и Лазар ги поканиле своите девојки на играчка. На еден танц Бети играла со Игор, Ана со момчето на Вера, Гордана со момчето на Ана, Јован со девојката на Кире а Кире со девојката на Игор. Определи ги вљубените парови.

Решение. (1) Бети играла со Игор, (2) Ана со момчето на Вера, (3) Гордана со момчето на Ана, (4) Јован со девојката на Киро, (5) Киро со девојката на Игор.

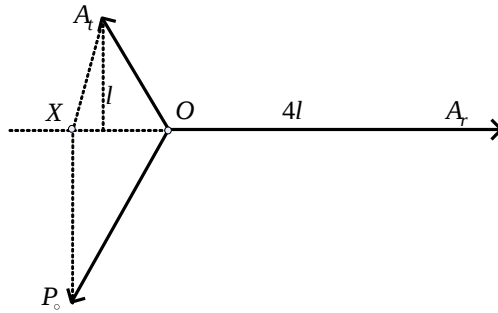
Дали сите играле со туѓ партнер? Евентуално би можело тоа да не е бети и Игор, но од (5) тоа се елиминира, па (6) никој не играл со својата девојка. Од (1), (2) и (3), а земајќи предвид (6) следува дека (7) Гордана е девојка на Игор. Од (2), (3) и (5) следува дека (8) Киро е момчето на Ана, (9) Јован е момчето на Вера. На крајот остана дека (10) Бети е девојка на Лазар.

4АБ. Тројца мускетари Атос, Портос и Арамис по краткотрајно дружење во крајпатната кафеана заминале кон своите домови, по насоки кои зафаќале агли од 120° . Брзините со кои се движеле мускетарите соодветно се: 10, 20 и 40 километри на час. Докажете дека во секој момент положбите на мускетарите се темиња на правоаголен триаголник.

Решение. Нека O е кафеаната, а A_t, P_o и A_r точките во кои во одреден момент се наоѓаат мускетарите. Во секој момент Атос се наоѓа на растојание l , Портос на растојание $2l$ и арамис на растојание $4l$ од точката O . Јасно $\triangle P_o O X$ е правоаголен, со $\overline{XP_o} = l\sqrt{3}$, $\overline{XO} = l$, па затоа

$$\overline{P_o A_r} = \sqrt{(l\sqrt{3})^2 + (l + 4l)^2} = \sqrt{28}l,$$

$$\overline{P_o A_t} = \sqrt{(l\sqrt{3})^2 + (l + 4l)^2} = \sqrt{28}l,$$



$$\overline{A_t A_r}^2 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}l\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}l + 4l\right)^2} = \sqrt{21}l.$$

Со проверка се уверуваме дека

$$\overline{P_o A_r}^2 = \overline{P_o A_t}^2 + \overline{A_t A_r}^2.$$

II година

1A. Решете ја во $\mathbb{R}$ равенката

$$(x^2 - 3)^3 - (4x + 6)^3 + 6^3 = 18(4x + 6)(3 - x^2).$$

Решение. Со смените:

$$a = x^2 - 3, \quad b = -(4x + 6), \quad c = 6$$

равенката го добива обликот

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0 \Leftrightarrow (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac) = 0$$

$$\Leftrightarrow (a + b + c)[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow a + b + c = 0 \quad \text{или} \quad a - b = a - c = b - c = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 3 = 0 \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^2 + 4x + 3 = 0 \\ x^2 - 9 = 0 \\ -4x - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x_1 = 2 + \sqrt{7}, \quad x_2 = 2 - \sqrt{7}, \quad x_3 = -3.$$

2A. Дијагоналите на конвексниот четириаголник $ABCD$ се сечат во точката E . Пресметајте ја плоштината на четириаголникот $ABCD$ ако плоштините на триаголниците ABD , ACD и AED соодветно изнесуваат 10 cm^2 , 9 cm^2 и 6 cm^2 .

Решение. Нека

$$P_1 = P_{\triangle AED}, P_2 = P_{\triangle DEC},$$

$$P_3 = P_{\triangle CEB}, P_4 = P_{\triangle ABE}.$$

Ќе докажеме дека

$$P_1 P_3 = P_2 P_4, \quad (*)$$

Навистина, нека со h_1 ја означиме висината спуштена од темето D на дијагоналата AC , а со h_2 ја означиме висината спуштена од темето B на истата дијагонала AC . Тогаш

$$\begin{aligned} P_1 P_3 &= \frac{1}{2} \overline{AE} \cdot h_1 \cdot \frac{1}{2} \overline{EC} \cdot h_2 \\ &= \frac{1}{4} \overline{AE} \cdot \overline{EC} \cdot h_1 \cdot h_2 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} P_2 P_4 &= \frac{1}{2} \overline{EC} \cdot h_1 \cdot \frac{1}{2} \overline{AE} \cdot h_2 \\ &= \frac{1}{4} \overline{AE} \cdot \overline{EC} \cdot h_1 \cdot h_2 \end{aligned} \quad (2)$$

Од (1) и (2) следува (*). Сега добиваме

$$P_2 = P_{\triangle DEC} = P_{\triangle ACD} - P_{\triangle AED} = 9\text{cm}^2 - 6\text{cm}^2 = 3\text{cm}^2$$

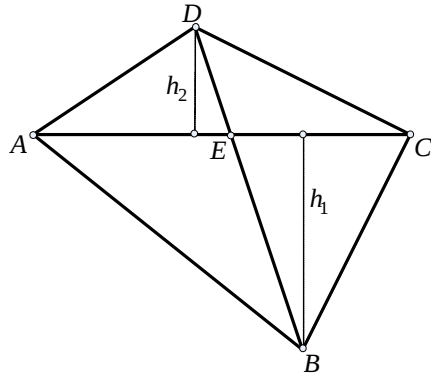
$$P_3 = P_{\triangle AEB} = P_{\triangle ABD} - P_{\triangle AED} = 10\text{cm}^2 - 6\text{cm}^2 = 4\text{cm}^2.$$

Од (*) и од горните пресметки, добиваме

$$P_3 = \frac{P_2 P_3}{P_1} = 2\text{cm}^2.$$

Конечно,

$$P_{ABCD} = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = (6+3+4+2)\text{cm}^2 = 15\text{cm}^2.$$



1Б. Нека z_1, z_2 се комплексни броеви. Ако $|z_1| = |z_2| = 1$ и $z_1 z_2 \neq -1$, тогаш $z = \frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2}$ е реален број. Докажете!

Решение. Комплексниот број z е реален ако и само ако $z = \bar{z}$. Според тоа

$$\frac{z_1 + z_2}{1 + z_1 z_2} = \frac{\overline{z_1 + z_2}}{\overline{1 + z_1 z_2}} \Leftrightarrow z_1 + z_2 + |z_1|^2 \overline{z_2} + |z_2|^2 \overline{z_1} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + |z_1|^2 z_2 + |z_2|^2 z_1$$

$$\Leftrightarrow z_1 + z_2 + \overline{z_2} + \overline{z_1} = \overline{z_1} + \overline{z_2} + z_2 + z_1.$$

2Б. Најдете x , за којшто функцијата $y = (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_{1996})^2$ прима најмала вредност.

Решение. Имаме

$$y = 1996x^2 - 2(x_1 + x_2 + \dots + x_{1996})x + (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{1996}^2).$$

Последната функција е квадратна со коефициент $a = 1996 > 0$, па значи прима најмала вредност во $\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{1996}}{1996}$.

3АБ. Ако $(x + \sqrt{x^2 + 1})(y + \sqrt{y^2 + 1}) = 1$, тогаш $x + y = 0$. Докажете!

Решение. Ако даденото равенство се помножи со $x - \sqrt{x^2 + 1}$ добиваме

$$(-1)(y + \sqrt{y^2 + 1}) = x - \sqrt{x^2 + 1}. \quad (1)$$

Ако, пак, го помножиме со $y - \sqrt{y^2 + 1}$ добиваме

$$(-1)(x + \sqrt{x^2 + 1}) = y - \sqrt{y^2 + 1}. \quad (2)$$

Така од (1) имаме

$$x + y = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{y^2 + 1},$$

а од (2) имаме

$$x + y = \sqrt{y^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}.$$

Со собирање на последните две равенки добиваме: $2(x + y) = 0$ од каде $x + y = 0$.

4АБ. Ако аглите на триаголникот ABC се: $\alpha = 80^\circ$, $\beta = 60^\circ$, тогаш за неговите страни важи равенството $a^2 = (b + c)c$. Докажете!

Решение. Да повлечеме права CD која зафаќа $\angle ACH = 40^\circ$ (направи цртеж), тогаш и $\delta = 40^\circ$, па триаголникот CDA е рамнокрак со $\overline{AD} = \overline{AC} = b$. Очигледно е дека $\triangle ABC \sim \triangle CBD$. Оттука

$$\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{CB} : \overline{BD} \Rightarrow c : a = a : (b + c) \Rightarrow a^2 = (b + c)c.$$

III година

1А. Нека $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и нека $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ е функција зададена со

$$f(x) = 1 + a \cos x + b \sin x + c \cos 2x + d \sin 2x.$$

Докажете дека, ако за секој $x \in \mathbb{R}$ важи $f(x) > 0$, тогаш за секој $x \in \mathbb{R}$ важи и $f(x) < 3$.

Решение. Ако ги искористиме равенствата

$$\cos x + \cos(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos(x - \frac{2\pi}{3}) = 0$$

$$\cos 2x + \cos 2(x + \frac{2\pi}{3}) + \cos 2(x - \frac{2\pi}{3}) = 0$$

$$\sin x + \sin(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin(x - \frac{2\pi}{3}) = 0$$

$$\sin 2x + \sin 2(x + \frac{2\pi}{3}) + \sin 2(x - \frac{2\pi}{3}) = 0$$

добиваме

$$f(x) + f(x + \frac{2\pi}{3}) + f(x - \frac{2\pi}{3}) = 3$$

за секој $x \in \mathbb{R}$. Но бидејќи $f(y) > 0$ за секој $y \in \mathbb{R}$, следува дека $f(x) < 3$ за секој $x \in \mathbb{R}$.

2А. Во кружница е впишан рамностран триаголник ABC . На кружниот лак AB кој не ја содржи точката C , избрана е точка M различна од A и B . Нека правите AC и BM се сечат во точката K , а правите BC и AM во точката N . Докажете дека производот од должините на отсечките AK и BN не зависи од изборот на точката M .

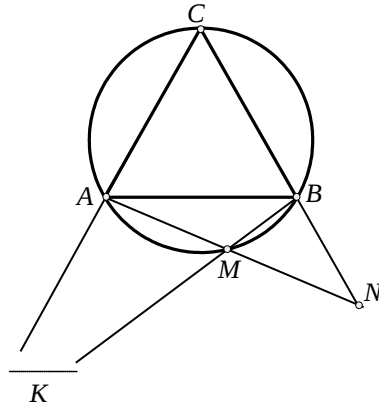
Решение. Четириаголникот $ACBM$ е впишан во кружницата. Според тоа

$$\angle AMK = 180^\circ - \angle AMB = \angle ACB = 60^\circ.$$

Од особините на надворешен агол за триаголникот AMK добиваме

$$\angle MAC = \angle CKB + \angle AMK.$$

Од друга страна $\angle MAC = \angle MAB + \angle BAC$. Бидејќи $\angle BAC = \angle AMK = 60^\circ$ и последните две равенства добиваме $\angle MAB = \angle CKB$. Освен тоа, $\angle KAB = \angle ABN = 120^\circ$. Според тоа, триаголниците ABK и BNA се слични, што значи $\overline{AK} : \overline{AB} = \overline{AB} : \overline{NB}$, т.е. $\overline{AK} \cdot \overline{NB} = \overline{AB}^2 = \text{const}$.



1Б. Најдете го аголот α на триаголникот ABC , ако за неговите агли α, β, γ важи равенството $\sin \alpha = \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$.

Решение. Бидејќи α, β, γ се агли на триаголник, од $\sin \alpha = \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma}$ добиваме $\cos \beta + \cos \gamma \neq 0$, $\cos \frac{\beta - \gamma}{2} \neq 0$, $\frac{\beta + \gamma}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\alpha}{2}$ па затоа

$$\sin \alpha = \frac{\sin \beta + \sin \gamma}{\cos \beta + \cos \gamma} = \frac{2 \sin \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2}}{2 \cos \frac{\beta + \gamma}{2} \cos \frac{\beta - \gamma}{2}} \Rightarrow 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{2} \Rightarrow$$

$$\cos \frac{\alpha}{2} = 0 \text{ или } \sin^2 \frac{\alpha}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = \pi \text{ што не е можно, или } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

1Б. Даден е квадрат $ABCD$ со страна a и центар во точката O . Низ спротивните темиња A и C на квадратот се повлечени полуправи AH и CY нормални на рамнината на квадратот и од иста страна на таа рамнина. На AH е земена точка M таква што $\overline{OM} = a$, а на CY точка N таква што $\overline{MN} = 2a$. Докажете дека MN е нормална на рамнината DMB .

Решение. Ќе покажеме дека $\triangle MON$ е правоаголен, т.е.

$$\overline{OM}^2 + \overline{NM}^2 = \overline{ON}^2.$$

Од $\triangle OMA$ (нацртај цртеж) наоѓаме

$$\overline{MA}^2 = \overline{OM}^2 - \overline{OA}^2 = a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

па според тоа $\overline{MA} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Нека P е точка на полуправата CY таква што $\overline{PC} = \overline{MA}$. Од $\triangle MPN$ катетата NP изнесува $\overline{NP} = \sqrt{(2a)^2 - 2a^2} = a\sqrt{2}$. Бидејќи $\overline{PC} = \overline{MA}$, имаме

$$\overline{NC} = \overline{PC} + \overline{NP} = \overline{MA} + \overline{NP} = \frac{a\sqrt{2}}{2} + a\sqrt{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

За $\triangle OCN$ важи:

$$\overline{ON}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{NC}^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 5a^2.$$

Тогаш,

$$\overline{ON}^2 + \overline{NM}^2 = a^2 + 4a^2 = \overline{OM}^2.$$

3АБ. Решете ја неравенката

$$x\sqrt{y-1} + y\sqrt{x-1} \geq xy.$$

Решение. Бидејќи $x \geq 1$ и $y \geq 1$, дадената неравенка е еквивалентна со:

$$\frac{\sqrt{x-1}}{x} + \frac{\sqrt{y-1}}{y} \geq 1.$$

Сега секој од собироците на левата страна од неравенката не е поголем од 0,5, т.е.

$$\frac{\sqrt{t-1}}{t} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4(t-1) = t^2 \Leftrightarrow (t-2)^2 \geq 0$$

при што равенство се достигнува кога $t = 2$. Значи, $x = y = 2$.

4АБ. Најдете ги сите вредности на параметарот k , за кои што равенката

$$\lg(x^2 + 2kx) - \lg(8x - 6k - 3) = 0$$

има двоен корен, а потоа одреди го тој корен.

Решение. Дадената равенка ја трансформираме во квадратна равенка

$$x^2 + 2(k-4)x + 6k + 3 = 0$$

која што има двоен корен ако дискриминантата е еднаква на нула, т.е. ако

$$4(k-4)^2 - 4(6k+3) = 0,$$

односно $k^2 - 14k + 13 = 0$. Оттука $k_1 = 1$, $k_2 = 13$.

i) За $k = 1$, почетната равенка го добива обликот $\lg(x^2 + 2x) - \lg(8x - 9) = 0$ или $x^2 - 6x + 9 = 0$, од каде што $x_1 = x_2 = 3$.

ii) За $k=13$, на сличен начин наоѓаме дека $x_1 = x_2 = -9$, но за оваа вредност на x логаритмот не е дефиниран.

Значи, единствена вредност за k е 1, и во тој случај $x=3$.

IV година

1A. Без употреба на логаритамски таблици, докажете дека $\operatorname{tg} 11^\circ < 0,2$.

Решение. Нека $\operatorname{tg} \alpha = 0,2$. Тогаш

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg} \alpha}{1-\operatorname{tg}^2 \alpha} = \frac{5}{12}, \quad \operatorname{tg} 4\alpha = \frac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1-\operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{120}{119} \Rightarrow \operatorname{tg} 4\alpha > 1 = \operatorname{tg} 45^\circ,$$

Функцијата тангенс е растечка на $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, па следува $4\alpha > 45^\circ$, т.е. $\alpha > 11^\circ$. Значи, $\operatorname{tg} 11^\circ < \operatorname{tg} \alpha = 0,2$.

2A. Нека $a_1, a_2, \dots$ е аритметичка прогресија со разлика d , а $b_1, b_2, \dots$ е геометриска прогресија со количник $q, q \neq 1$.

Пресметајте го збирот

$$S_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n.$$

Решение. Бидејќи за секој природен број k важи

$$a_k = a_1 + (k-1)d; \quad b_k = b_1 q^{k-1}$$

за S_n добиваме:

$$\begin{aligned} S_n &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \\ &= a_1 b_1 (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) + db_1 q (1 + 2q + \dots + (n-1)q^{n-2}) \\ &= a_1 b_1 \frac{1-q^n}{1-q} + db_1 q (1 + 2q + \dots + (n-1)q^{n-2}) \\ &= a_1 b_1 \frac{1-q^n}{1-q} + db_1 q \frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1}{(1-q)^2} \end{aligned}$$

Збирот

$$1 + 2q + \dots + (n-1)q^{n-2}$$

се пресметува на следниот начин:

$$\begin{aligned} 1 + 2q + \dots + (n-1)q^{n-2} &= (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) + (q + q^2 + \dots + q^{n-2}) + \dots + (q^{n-3} + q^{n-2}) + q^{n-2} \\ &= \frac{1-q^{n-1}}{1-q} + q \frac{1-q^{n-2}}{1-q} + q^2 \frac{1-q^{n-3}}{1-q} + \dots + q^{n-3} \frac{1-q^2}{1-q} + q^{n-2} \\ &= \frac{1+q+q^2+\dots+q^{n-2}-(n-1)q^{n-1}}{1-q} \\ &= \frac{\frac{1-q^{n-1}}{1-q} - (n-1)q^{n-1}}{1-q} = \frac{(n-1)q^n - nq^{n-1} + 1}{(1-q)^2} \end{aligned}$$

1Б. Нека $a_1, a_2, \dots, a_n$ се членови на аритметичка прогресија. Докажете дека

$$\frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_2} + \frac{1}{a_1 a_n} = \frac{2}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \right).$$

Решение. Бидејќи $a_1, a_2, \dots, a_n$ е аритметичка прогресија, следува:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = \dots = a_n + a_1$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{a_1 a_n} + \frac{1}{a_2 a_{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_2} + \frac{1}{a_1 a_n} = \\ & = \frac{1}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_n} \right) + \frac{1}{a_2 + a_{n-1}} \left(\frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_{n-1}} \right) + \dots + \frac{1}{a_n + a_1} \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1} \right) \\ \text{и} \quad & = \frac{1}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_{n-1}} + \dots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{a_1} \right) \\ & = \frac{2}{a_1 + a_n} \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} \right). \end{aligned}$$

2Б. Нека за аглие α, β, γ на триаголникот ABC важи равенството

$$\frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} = 1.$$

Пресметајте го аголот α .

Решение. Според синусната теорема имаме:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R,$$

па според тоа

$$1 = \frac{\sin^2 \beta + \sin^2 \gamma - \sin^2 \alpha}{\sin \beta \sin \gamma} = \frac{\frac{b^2}{4R^2} + \frac{c^2}{4R^2} - \frac{a^2}{4R^2}}{\frac{bc}{4R^2}} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{bc}.$$

Значи,

$$a^2 = b^2 + c^2 - bc. \quad (1)$$

Од косинусна теорема имаме

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha. \quad (2)$$

Од (1) и (2) добиваме $2 \cos \alpha = 1$ а оттука $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

3АБ. Ако темињата на еден триаголник припаѓаат на хиперболата $xy=1$, тогаш неговиот ортоцентар припаѓа на таа хипербола. Докажете!

Решение. Нека $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ и $C(x_3, y_3)$ се темиња на триаголникот. Равенката на висината спуштена од темето A е:

$$y - y_1 = -\frac{x_3 - x_2}{y_3 - y_2} (x - x_1).$$

Ако замениме $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$, $y_3 = \frac{1}{x_3}$ добиваме

$$y - \frac{1}{x_1} = x_2 x_3 (x - x_1) \quad (1)$$

Равенката на висината спуштена од темето B е:

$$y - y_2 = -\frac{x_3 - x_1}{y_3 - y_1}(x - x_2).$$

Со замена $y_1 = \frac{1}{x_1}$, $y_2 = \frac{1}{x_2}$, $y_3 = \frac{1}{x_3}$ добиваме:

$$y - \frac{1}{x_2} = x_3 x_1 (x - x_2). \quad (2)$$

Со решавање на системот равенки (1) и (2) по непознати x и y добиваме $x = -\frac{1}{x_1 x_2 x_3}$, $y = -x_1 x_2 x_3$. Значи, $x = -\frac{1}{x_1 x_2 x_3}$, $y = -x_1 x_2 x_3$ се координатите на ортоцентарот. За нив важи $xy = 1$, од каде следува дека ортоцентарот припаѓа на хиперболатата.

4АБ. Ако

$$f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) + 2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x,$$

најдете ја $f(x)$.

Решение. Да ставиме $t = \frac{x+1}{x-1}$, тогаш $x = \frac{t+1}{t-1}$, па добиваме

$$f(t) + 2f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{t+1}{t-1}. \quad (1)$$

Да ставиме $t = \frac{x-1}{x+1}$, тогаш $x = \frac{1+t}{1-t}$, па добиваме

$$2f(t) + f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1+t}{1-t}. \quad (2)$$

Од (1) и (2) наоѓаме $f(t) = \frac{1+t}{1-t}$, следствено $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$.