Ристо Малчески, Скопје

ЗА УЧЕНИЦИТЕ ДО 7 ОДДЕЛЕНИЕ: МАЛА ЗБИРКА РЕШЕНИ ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

На општинските и регионалните натпревари во секое одделение како по правило се задаваат таканаречените текстуални задачи и задачи од теоријата на броеви. Оттука и потребата учениците при подготовката за натпреварите систематски да решаваат задачи од ваков вид. Имајќи го ова предвид во оваа статија ќе презентираме повеќе задачи од наведените типови, за кои сметаме дека учениците треба да ги решаваат во почетната фаза при подготовките за општинските и регионалните натпревари, што може да се прави и во рамките на редовната настава. Имено, дел од презентираните задачи се погодни и за реализација на следењето, проверувањето и оценувањето на постигањата на учениците.

БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Никола во низа ги запишал сите броеви од 1 до 20 и го добил 31-цифрениот број

$$12345678910111213141516171819 20.$$

Потоа избришал 24 од запишаните 31 цифра така што бројот кој останал е најголемиот можен број. Кој број го добил Никола?

Решение. Јасно, за да се добие најголемиот можен број прво треба да се избришат првите осум цифри, по што добиваме

$$91011121314151617181920.$$

Останува да избришеме уште шеснаесет цифри, при што бришењето го правиме така што по цифрата 9 ќе остане најголемата можна цифра, а тоа е цифрата 7, при што сме избришале петнаесет цифри и добиваме 97181920. Конечно, треба да избришеме уште една цифра и за да бројот биде најголем можен ја бришеме првата цифра 1 гледајќи од лево и добиваме 9781920.

2. Сите страници на една книга која ја чита Филип се нумерирани, почнувајќи со бројот 1 и е нумерирана секоја страница без разлика дали на неа е нешто напишано или е празна. Броевите кои се искористени за нумерирање на страниците ја содржат цифрата 0 точно пет пати и цифрата 8 точно шест пати.

Со кој број е нумерирана последната страница на книгата?

Решение. Бидејќи броевите со кои се нумерирани страниците на книгата ја содржат цифрата 0 точно пет пати, при нумерирањето се искористени броевите 10, 20, 30, 40 и 50, т.е. бројот на страниците на книгата е помал од 60. Понатаму, цифрата 8 е искористена точно шест пати, што значи дека за нумерирање на страниците на книгата се искористени броевите 8, 18, 28, 38, 48 и 58. Значи, најголемиот парен број кој е употребен за нумерирањето на страниците е 58. Книгата содржи парен број страници, па како најголемиот парен број кој е употребен е 58, заклучуваме дека последната страница на книгата е нумерирана со бројот 58.

3. Дадени се два трицифрени броја запишани со 6 различни цифри. Првата цифра на вториот број е два пати поголема од последната цифра на првиот број. Кој е најмалиот можен збир на два такви броја?

   Решение. Збирот на два броја е најмал можен број, ако собирците се најмалите можни трицифрени броеви. Последното значи дека цифрите на стотките треба да се најмалите можни броеви кои даваат ист збир. Бидејќи цифрата на стотките на едниот број е двапати поголема од цифрата на единиците на другиот број, ќе разгледаме два случаја:

   1) цифрата на единиците на едниот број е 1, а цифрата на стотките на другиот број е 2, па броевите се $\overline{cd1}$ и $\overline{2ab}$. Сега, за да го добиеме најмалиот можен број треба цифрите a,b,c и d да се најмалите можни цифри, при што прво ја избираме цифрата на стотките, па цифрите на десетките, па цифрите на единиците. Последователно добиваме $c=3$, $d=0$ или $a=0$, $d=4$ или $a=4$, а $b=5$. Во овој случај ги добиваме броевите 301 и 245, односно броевите 341 и 205, при што нивниот збир е еднаков на 546.
   2) цифрата на единиците на едниот број е 2, а цифрата на стотките на другиот број е 4, па броевите се $\overline{cd2}$ и $\overline{4ab}$. Аналогно како во претходниот случај ги добиваме или броевите 102 и 435 или броевите 132 и 405, при што нивниот збир е еднаков на 537.

   Според тоа, најмалиот можен збир на два броја со саканите својства е 537.

4. Буквите a,b,c претставуваат три различни цифри. Ако се соберат цифрите на трицифрениот број $\overline{aba}$ се добива двоцифрениот број $\overline{bc}$.

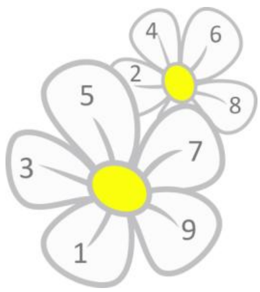
Ако се соберат цифрите на двоцифрениот број $\overline{bc}$, се добива едноцифрениот број b. Определи ги цифрите a,b,c.

Решение. Од вториот услов следува $b+c=b$, па затоа $c=0$. Понатаму, од $a+b+a=10b+c$ следува $2a=9b$, па затоа $9|2a$. Но, $(2,9)=1$, па затоа $a=9$. Конечно, $2\cdot 9=9b$, што значи $b=2$.

5. Колку од броевите 2, 20, 202, 2020 се прости броеви?
Решение. Дадените броеви се парни. Бидејќи единствен парен прост број е бројот 2, заклучуваме дека само еден од дадените броеви е прост.

6. Андреј користејќи ги цифрите 1, 2, 3, 4 и 5, и тоа само по еднаш, запишал неколку прости броеви помали од 100.
Кој број мора да биде меѓу запишаните прости броеви?
Решение. Бидејќи единствен парен прост број е бројот 2, при користење на цифрата 4, истата не смее да биде цифра на единиците. Значи, цифрата 4 мора да е цифра на десетките на двоцифрен број. Меѓу броевите 41, 42, 43 и 45 прости броеви се 41 и 43. Ако Андреј го зпишал бројот 43, тогаш остануваат цифрите 1, 2 и 5. Но со нив не може да се запишат само прости броеви. Според тоа, меѓу запишаните броеви мора да е бројот 41. Значи, Андреј ги запишал броевите 2, 3, 5 и 41, или броевите 2, 41 и 53.

7. На секој лист од двата цвета на цртежот десно е запишан по еден број. Бројот запишан на еден од листовите не се гледа. Збирот на броевите запишани на едниот цвет е еднаков со збирот на броевите запишани на другиот цвет. Кој е бројот што не се гледа?



Решение. Збирот на броевите запишани на горниот цвет е $1+3+5+7+9=25$. Збирот на четирите запишани броја кои се гледаат на долниот цвет е еднаков на $2+4+6+8=20$. Бидејќи збирот на броевите запишани на едниот цвет е еднаков на збирот на броевите запишани на другиот цвет, бројот кој не се гледа е $25-20=5$.

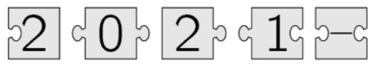
8. Четири од броевите 1, 3, 4, 5 и 7 се упо-

$$\square+\square=\square+\square$$

требени, по еден за секое квадратче на цртежот десно. Притоа е добиено точно равенството. Кој од броевите не е употребен?

Решение. Збирот на дадените броеви е $1+3+4+5+7=24$. Бидејќи кога ќе употребиме четири од дадените броеви се добива точно равенство, нивниот збир треба да е парен број. Но, четири од петте броја се непарни броеви, па ако не е употребен непарен број, тогаш збирот на употребените броеви ќе биде непарен што не е можно. Значи, не е употребен единствениот парен број, т.е. бројот 4. Притоа, преостанатите четири броја, со точност до комутативност, може да се запишат на следниотв начин: $1+7=3+5$

9. Ако петте прикажани фигури се поставаат правилно, т.е. правилно се поврзат, се добива правоаголник на кој е запишан броен израз. Колку е вредноста на овој броен израз?



Решение. Лесно се воочува дека при правилно поврзување на дадените фигури се добива бројниот израз $2-102$ чија вредност е -100.

10. Од броевите 3, 5, 2, 6, 1, 4, 7 Маја избрала три различни броеви чиј збир е еднаков на 8. Од истите броеви Дорка избрала три различни броеви чиј збир е еднаков на 7.

Колку заеднички броеви избрале Маја и Дорка?

Решение. Бидејќи збирот на било кои два од дадените броеви е поголем или еднаков на $1+2=3$ заклучуваме дека Дорка не може да избере ниту еден од броевите 5, 6 и 7, а Маја не може да избере ниту еден од броевите 6 и 7.

Значи, Дорка од броевите 1, 2, 3 и 4 избрала три различни броја чиј збир е еднаков на 7. Јасно, тоа се броевите 1, 2 и 4. Понатаму, Маја од броевите 1, 2, 3, 4 и 5 избрала три различни броја чиј збир е 8, што значи дека таа ги избрала или броевите 1, 2 и 5, или броевите 1, 3 и 4. Конечно, во секој случај Маја и Дорка избрале по два заеднички броја.

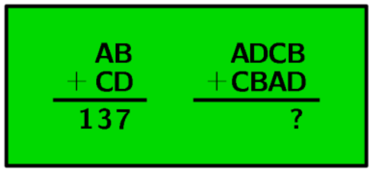
11. Дијана има девет броја: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9. Таа додава 2 на некои од нив и 5 на останатите броеви. Кој е најмалиот број на различни резултати кои Дијана може да ги добие?

Решение. Имаме $5-2=3$. Дијана има девет различни броја и за да добие најмал можен број различни резултати, прво таа треба на помалиот од сите дисјунктни парови броеви кои се разликуваат за три да го додава бројот 5, а на поголемиот да го додава бројот 2. На пример, дисјунктни парови броеви кои се разликуваат за три се: 1 и 4, 2 и 5, 3 и 6, па така Дијана ги добива резултатите

$$1+5=4+2=6,$$
$$2+5=5+2=7,$$
$$3+5=6+2=8.$$

Сега останува на секој од броевите 7, 8 и 9 да се додаде или 2 или 5, што значи дека најмалиот број различни резултати кои Дијана може да ги добие е 6, бидејќи меѓу дадените броеви има само три дисјунктни парови кои се разликуваат за 3.

12. Горјан правилно ги собрал двоцифрените броеви дадени лево на таблата и добил резултат 137. Кој број го добил Горјан кога ги собрал двата четирицифрени броја кои се запишани десно на таблата?



Решение. Имаме:

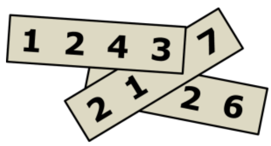
$$10A+B+10C+D=\overline{AB}+\overline{CD}=137\,.$$

Затоа,

$$\begin{aligned}\overline{ADCB}+\overline{CBAD}&=1000A+100D+10C+B+1000C+100B+10A+D\\&=1010A+1010C+101B+101D\\&=101(10A+10C+B+D)\\&=101\cdot 137=13837.\end{aligned}$$

Значи, Горјан го добил бројот 13837.

13. Три четирицифрени броеви се запишани на три различни картончиња. Картончињата се наместени така што три цифри се покриени како што е прикажано на цртежот десно. Збирот на трите четирицифрени броеви е 10126. Кои се покриените цифри?



Решение. Нека броевите се 1243, $\overline{21a7}$ и $\overline{bc26}$. Имаме:

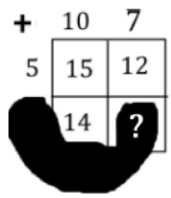
$$1243+\overline{21a7}+\overline{bc26}=10126\,,$$

од каде последователно добиваме

$$1243+2100+10a+7+1000b+100c+26=10126$$
$$10a+100c+1000b=6750$$
$$a+10c+100b=675$$
$$\overline{bca}=675.$$

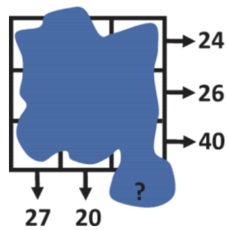
Според тоа, покриените цифри се 5, 6 и 7.

14. Пред да се истури мастилото, во табелата на цртежот десно биле прикажани точни збирови. Кој број треба да стои во полето каде што е прашалникот?



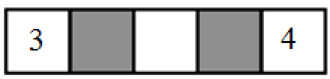
Решение. Бројот со кој се собираат броевите 10 и 7 за да се добие вториот ред во табелата е $14-10=4$. Според тоа, на местото на прашаникот треба да е запишан бројот $7+4=11$.

15. Во секое од квадратчињата од 3×3 квадратот е запишан по еден број. За жал, броевите не се видливи бидејќи се истурило мастило. Но, збировите на броевите во секој ред и збировите на броевите во две од колоните се познати (види цртеж десно). Колкав е збирот на броевите во третата колона?



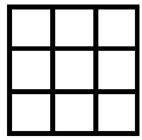
Решение. Збирот на броевите кои се запишани во табелата можеме да го пресметаме на два начини и тоа: прво ги пресметуваме збировите на броевите запишани во одделните редови, а потоа ги собираме добиените збирови или пак, прво ги пресметуваме збировите на броевите запишани во одделните колони, а потоа ги собираме добиените збирови. Според тоа, збирот на броевите запишани во табелата е $24+26+40=90$.Затоа, збирот на броевите запишани во третата колона е еднаков на $90-(27+20)=43$.

16. Теодора треба да запише по еден број во секое поле од фигурата дадена на цртежот десно. Таа веќе запишала два од броевите. Теодора сака збирот на сите броеви запишани во полињата да биде 35, збирот на броевите запишани во првите три полиња да биде 22, а збирот на броевите запишани во последните три полиња да биде 25. Колку низнесува производот на броевите кои Теодора треба да ги запише во сивите полиња?



Решение. Во збирот на броевите запишани во првите три полиња и збирот на броевите запишани во последните три полиња се собрани сите пет броја и бројот запиашн во средното поле. Според тоа, бројот запишан во средното поле е еднаков на $22+25-35=12$. Значи, во левото сиво поле е запишан бројот $22-(3+12)=7$, а во десното сиво поле е запишан бројот $25-(4+12)=9$. Конечно, производот на броевите запишани во сивите полиња е еднаков на $7\cdot 9=63$.

17. Мето во секое поле на 3×3 табелата запишал различен број од 1 до 9, а потоа ги нашол збировите на броевите во секој ред и секоја колона. Пет од збировите кои ги добил се: 12, 13, 15, 16 и 17. Кој е шестиот збир?



Решение. Збирот на броевите кои Мето ги запишал во дадената табела е

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$$

Кога ги собираме броевите прво по редици, а потоа по колони ние всушност два пати ги собираме броевите запишани во табелата. Значи, збирот на збировите кои ги добил Мето е еднаков на $2\cdot 45=90$. Според тоа, шестиот збир кој го пресметал Мето е еднаков на

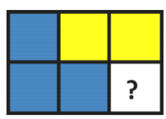
$$90-(12+13+15+16+17)=17.$$

18. Ласте избира квадрат составен од четири квадратчиња од табелата прикажана на цртежот десно, така што збирот на сите четири броја во квадратот е поголем од 63. Кои броеви мора да бидат во избраниот квадрат?

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

Решение. Збирот на броевите запишани во 2×2 квадрат е поголем од 63 само во долниот десен аголен 2×2 квадрат и во 2×2 квадратот кој е во пресекот на третата и четвртата колона и третата и четвртата редица. Во првиот случај во 2×2 се запишани броевите 14, 15, 19 и 20, а во вориот случај во 2×2 квадратот се запишани броевите 13, 14, 18 и 19. Според тоа, во избраниот квадрат мора да се запишани броевите 14 и 19.

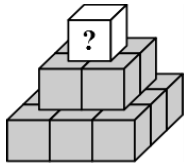
19. Марија сака да ги запише броевите 1, 2, 3, 4, 5 и 6, по еден број во секое од шесте квадратчиња на цртежот десно. Збирот на броевите запишани во сините квадратчиња треба да е 10. Збирот на броевите запишани во



жолтите квадратчиња треба да е 10. Кој број мора да биде запишан во квадратчето во кое се наоѓа знакот прашалник?

Решение. Од дадените броеви збирот на два броја е 10 само ако тоа се броевите 6 и 4. Понатаму, од преостанатите четири броја 1, 2, 3 и 5 збир на три броја е 10 само ако тоа се броевите 2, 3 и 5. Значи, останува во квадратчето во кое е знакот прашалник да е запишан бројот 1.

20. Бојан запишува различен природен број на секоја од четиринаесетте коцки на пирамидата прикажана на цртежот десно. Збирот на деветте природни броеви запишани на коцките од основата на пирамидата е еднаков на 50. Природниот број запишан на секоја коцка од вториот и третиот ред е еднаков на збирот на броевите на четирите коцки под неа. Кој е најголемиот природен број кој Бојан може да го запише на коцката на врвот?



Решение. Нека во коцките во првиот ред запишаните броеви се како на цртежот десно. Тогаш во коцките во вториот ред се запишани броевите

a	b	c
d	e	f
g	h	m

$a+b+e+d,\ b+c+e+f$, $e+f+h+m$ и $e+h+g+d$.

Значи, во коцката на врвот е запишан бројот

$$a+2b+c+2d+4e+2f+g+2h+m=50+b+d+3e+f+h.$$

Јасно, запишаниот број ќе биде најголем ако збирот $b+d+3e+f+h$ е најголем можен број. Но, броевите кои ги запишува Бојан се различни природни броеви, па затоа последниот збир ќе биде најголем ако броевите a,c,g,m се најмалите можни природни броеви, а тоа се броевите 1, 2, 3 и 4, во некој редослед, потоа броевите b,d,f,h се следните најмали можни броеви, а тоа се броевите 5, 6, 7 и 8, во некој редослед и на крајот

$$e=50-(1+2+3+4+5+6+7+8)=14.$$

Според тоа, најголемиот природен број кој Бојан може да го запише на коцката на врвот е

$$50+b+d+3e+f+h=50+5+6+3\cdot 14+7+8=118.$$

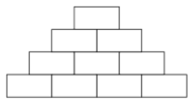
21. Ивана треба да запише по еден број во секое квадратче на границата на табела со димензии 5×6. Бројот запишан во секое квадратче треба да биде еднаков на збирот на броевите запишани во

10					3
	x				

соседните квадратчиња од границата на табелата (соседни се квадратчињата кои имаат заедничка страна). Два броја веќе се запишани во табелата (цртеж лево). Кој број ќе го запише Ивана во полето означено со x?

Решение. Ако во горниот ред на границата до бројот 10 е запишан бројот a, тогаш следниот број треба да е $a-10$. Сега, до бројот $a-10$ треба да е запишан бројот $a-10-a=-10$. Јасно, следниот број е бројот $-10+3=-7$. Според тоа, $-10=-7+a-10$, од каде добиваме $a=7$. Значи, во горниот ред на границата се запишани последователно броевите $10, 7, -3, -10, -7$ и 3. Сега, применувајќи го правилото дека бројот запишан во секое квадратче треба да биде еднаков на збирот на броевите запишани во соседните квадратчиња од границата на табелата добиваме дека на местото на бројот x треба да е запишан бројот 7.

22. Михаил сака да запише по еден природен број во секое поле на цртежот десно, но така што секој број над долниот ред да е збир од двата броја запишани во полињата веднаш под него.



Кој е најголемиот број на непарни броеви кои Михаил може да ги запише?

Решение. Редовите ќе ги броиме оддолу-нагоре. Нека Михаил во првиот ред гледајќи од лево на десно ги запишал броевите a, b, c и d.

Ако сите четири броја се непарни, тогаш бидејќи збир на два непарни броја е парен број и збир на два парни броја е парен број, сите броеви во вториот, третиот и четвртиот ред ќе бидат парни. Значи, во овој случај имаме 4 непарни броја.

Ако броевите a, b, c се непарни, а бројот d е парен, тогаш лесно се гледа дека имаме 6 непарни броја. Случајот кога a е непарен, а b, c, d се парни е симетричен.

Ако броевите a, b, d се непарни, а c е парен, тогаш лесно се гледа дека имаме 7 непарни броеви. Случајот кога b е парен, а a, c, d се непарни е симетричен.

Ако броевите a, b се непарни, а броевите c, d се парни, тогаш лесно се гледа дека имаме 5 непарни броја. Случајот кога a, b се парни, а c, d се непарни е симетричен.

Ако броевите a,c се непарни, а броевите b,d се парни, тогаш лесно се гледа дека имаме 5 непарни броја. Случајот кога a,c се парни, а b,d се непарни е симетричен.

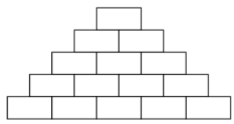
Ако броевите a,d се непарни, а броевите b,c се парни, тогаш лесно се гледа дека имаме 6 непарни броја. Слично, 6 непарни броја имаме и кога a,d се парни, а броевите b,c се непарни.

Ако еден од броевите a,b,c и d е непарен, а другите три се парни, тогаш лесно се гледа дека имаме 4 или 5 непарни броја.

Ако сите четири броја a,b,c и d се парни, тогаш немаме непарен број.

Со тоа се разгледани сите можности, што значи дека Михаи може да запише најмногу 7 непарни броја.

23. Сара сака да запише по еден природен број во секое поле на цртежот така да секој број над долниот ред е збир од двата броја во полињата веднаш под него. Кој е најголемиот број на непарни броеви кои Сара може да ги запише?



Решение. Сара во полињата може да запише најмногу 10 непарни броја. Задачата се решава на потполно ист начин како претходната задача. Деталите ги оставаме на читателот за вежба.

24. Определи ја вредноста на изразот

а) $(20+18):(20-18)$, б) $(20\cdot 21):(2+0+2+1)$

Решение. а) Имаме:

$$(20+18):(20-18)=38:2=19.$$

б) Имаме:

$$(20\cdot 21):(2+0+2+1)=(20\cdot 21):5=4\cdot 21=84.$$

25. Кој број треба да се стави на местото на буквата A за да пресметувањата $2\cdot 18\cdot 14=6\cdot A\cdot 7$ се точни?

Решение. Последователно добиваме:

$$2\cdot 18\cdot 14=6\cdot A\cdot 7$$
$$2\cdot 3\cdot 6\cdot 2\cdot 7=6\cdot A\cdot 7$$
$$2\cdot 3\cdot 2=A$$
$$A=12.$$

26. Пабло помножил два двоцифрени броја, а потоа избришал по една цифра од секој од трите броја, како што е прикажано на цртежот десно. Определи го збирот на трите избришани цифри?

Решение. Цифрата на единиците на производот е 2, па како цифрата на единиците на првиот множител е 3, заклучуваме дека цифрата на единиците на вториот множител е 4. Според тоа имаме

$$\_3\cdot 24=3\_2.$$

Сега, бидејќи $23\cdot 24>3\_2$, заклучуваме дека цифрата на десетките на првиот множител мора да е 1, па имаме $13\cdot 24=312$. Значи, избришаните цифри се 1, 4 и 1 и нивниот збир е $1+4+1=6$.

27. Шестцифрениот број $\overline{2ABCDE}$ се множи со 3 и резултатот од множењето е шестцифрениот број $\overline{ABCDE2}$. Определи го збирот на цифрите на почетниот број?

Решение. Бидејќи само при множење на 4 со 3 се добива производ со цифра на единиците 2, следува дека дадениот број е $\overline{2ABCD4}$, а производот е $\overline{ABCD42}$. Тоа значи дека цифрата на единиците на производот $3\cdot D$ треба де е 3, од каде добиваме дека дадениот број е $\overline{2ABC14}$, а производот е $\overline{ABC142}$. Понатаму, само при множење на 7 со 3 се добива цифра на единиците 1, па затоа дадениот број е $\overline{2AB714}$, а производот е $\overline{AB7142}$. На потполно аналоген начи се добива дека дадениот број е $\overline{2A5714}$, а производот е $\overline{A57142}$, односно дека дадениот број е 285714, а производот е 857142. Конечно, збирот на цифрите на почетниот број е $2+8+5+7+1+4=27$.

28. Збирот на три различни природни броеви е еднаков на 7. Определи го производот на тие броеви?

Решение. Збирот на било кои три различни природни броја е поголем или еднаков на $1+2+3=6$. Бидејќи збирот на нашите три различни природни броја е еднаков на 7, тоа е можно само ако броевите се 1, 2 и 4. Значи, нивниот производ е еднаков на $1\cdot 2\cdot 4=8$.

29. Кој број треба да се одземе од -17 за да се добие бројот -33?

Решение. Нека x е бараниот број. Имаме,

$$-17-x=-33,$$

од каде добиваме

$$x=-17-(-33)=-17+33=16.$$

30. Марија треба да го додаде бројот 26 на некој број. Наместо тоа, таа од тој број одзела 26 и го добила бројот -14. Кој број требало да го добие Марија, ако точно ја решела задачата?

Решение. Нека непознатиот број е x. Од условот на задачата имаме $x-26=-14$, од каде добиваме $x=26-14=12$. Според тоа, ако Марија точно ја решела задачата таа требало да го добие бројот $12+26=38$.

31. Горјан сака да помножи три различни броеви од следниве броеви: $-5,-3,-1,2,4$ и 6. Кој е најмалиот производ кој Горјан може да го добие?

Решение. Најмалиот производ кој може да се добие мора да е негативен број. Производот на три броја е негативен ако сите три броја се негативни или два се позитивни и еден е негативен. Во првиот случај се добива бројот -15, а во вториот случај најмалиот производ се добива ако ги помножиме два најголеми позитивни броја со најмалиот негативен број, при што добиваме $(-5)\cdot 4\cdot 6=-120$. Значи, најмалиот производ кој Горјан може да го добие е -120.

32. Дадени броеви подреди ги по големина почнувајќи од најмалиот:

$$\frac{8+5}{3},\ \frac{8}{3+5},\frac{3+5}{8},\ \frac{8+3}{5},\ \frac{3}{8+5}.$$

Решение. Имаме:

$$\frac{8+5}{3}=\frac{13}{3},\ \frac{8}{3+5}=1,\frac{3+5}{8}=1,\ \frac{8+3}{5}=\frac{11}{5},\ \frac{3}{8+5}=\frac{3}{13},$$

па затоа

$$\frac{3}{8+5}<\frac{8}{3+5}=\frac{3+5}{8}<\frac{8+3}{5}<\frac{8+5}{3}.$$

33. Која од дропките $\frac{25}{79}$, $\frac{27}{59}$, $\frac{29}{57}$, $\frac{52}{79}$, $\frac{57}{92}$ има вредност најблиска до вредноста на дропката $\frac{1}{2}$?

Решение. Имаме

$$|\frac{1}{2}-\frac{25}{79}|=\frac{79-50}{158}=\frac{29}{158}$$

$$|\frac{1}{2}-\frac{27}{59}|=\frac{59-54}{118}=\frac{5}{118}$$

$$\left|\frac{1}{2}-\frac{29}{57}\right|=\frac{58–57}{114}=\frac{1}{114}$$
$$\left|\frac{1}{2}-\frac{52}{79}\right|=\frac{104–79}{158}=\frac{25}{158}$$
$$\left|\frac{1}{2}-\frac{57}{92}\right|=\frac{57–46}{92}=\frac{11}{92}$$

и како $\frac{1}{114}$ е најмалата апсолутна вредност на разликите на дропката $\frac{1}{2}$ и дадените дропки, заклучуваме дека $\frac{29}{57}$ е бараната дропка.

34. Сања запишала по еден природен број на секоја страна од еден квадрат. Потоа таа ги запишала производите на броевите од секои две страни во темето во кое тие страни се сечат. Збирот на броевите запишани во сите темиња е 15. Колку е збирот на броевите запишани на страните на квадратот?

Решение. Ако на страните на квадратот последователно се запишани броевите x, y, z и t, тогаш збирот на броевите запишани во темињата на квадратот е еднаков на $xy+yz+zt+tx=(y+t)(x+z)$. Според тоа,

$$(y+t)(x+z)=15. \qquad (1)$$

Но, x, y, z и t се природни броеви, па затоа $y+t>1$ и $x+z>1$. Конечно, од последните две неравенства и од равенството (1) следува $y+t=3$ и $x+z=5$, или пак $y+t=5$ и $x+z=3$. Во секој случај $x+y+z+t=8$. Значи, бараниот збир е еднаков на 8.

35. Неколку различни природни броеви се запишани на таблата. Производот на најмалите два од нив 16. Производот на најголемите два од нив е 225. Определи го збирот на запишаните броеви?

Решение. Броевите 16 и 225 ги запишуваме како производи на различни множители. Имаме,

$$16=1\cdot 16=2\cdot 8 \text{ и } 225=1\cdot 225=3\cdot 75=9\cdot 25.$$

Но, 16 е производ на двата најмали броја, а 225 е производ на двата најголеми броја, па затоа $16=2\cdot 8$ и $225=9\cdot 25$. Сега, бидејќи не постои природен број кој е поголем од 8, а е помал од 9, од последните две равенства следува дека запишаните броеви се 2, 8, 9 и 25, а нивниот збир е еднаков на $2+8+9+25=44$.

36. Дадена е дропка во која броителот и именителот се позитивни броеви. Броителот на оваа дропка го зголемуваме за 40%. За колкав процент

треба да го намалиме именителот, така што новодобиената дропка е двојно поголема од дадената дропка?

Решение. Нека x е броителот и y се именителот на дропката, соодветно. Ако p е процентот за кој треба да го намалиме именителот на дропката, тогаш од условот на задачата следува

$$2\frac{x}{y}=\frac{1,4x}{(1-\frac{p}{100})y}\text{, т.е. } 2(1-\frac{p}{100})=1,4,$$

од каде добиваме $p=30\%$.

37. Секоја цифра од низата која почнува со цифирте 2, 3, 6, 8, 8 е добиена на следниов начин: првите две цифри се 2 и 3 и потоа секоја цифра е цифрата на единиците од производот на претходните две цифри во низата. Која е 2017-тата цифра во низата?

Решение. Ќе ги определиме првите шестнаесет цифри од вака дефинираната низа. Имаме: 2, 3, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6, 8, 8, 4, 2, 8, 6 и 8. Забележуваме дека почнувајќи од третиот член на низата групата цифри 6, 8, 8, 4, 2, 8 се повторува. Сега, бидејќи $2017-2=2015=335\cdot 6+5$ добиваме дека 2017-тата цифра во низата е петтата цифра во групата цифри 6, 8, 8, 4, 2, 8 и тоа е цифрата 2.

КУПУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

38. Ивана има 20 денари. Секоја од нејзините четири сестри има по 10 денари. Колку денари Ивана треба да даде на секоја од своите сестри така што секое од петте девојчиња ќе има еднаква сума на пари?

Решение. Петте девојчиња заедно имаат $20+4\cdot 10=60$ денари. Ако секое од петте девојчиња има еднаква сума на пари, тогаш секое девојче има по $60:5=12$ денари. Но, четирите сестри на Ивана имаат по 10 денари, па затоа Ивана на секоја сестра треба да ѝ даде по $12-10=2$ денари.

39. Ламбе ги потрошил сите свои пари купувајќи 50 шишиња сок по цена од 1 евро за шише. Тој, потоа ги продавал шишињата сок за иста повисока цена. По продавањето на 40 шишиња, тој имал 10 евра повеќе отколку на почетокот. Потоа, тој ги продал сите преостанати шишиња сок. Колку пари имал Ламбе по продавањето на сите шишиња сок?

Решение. За купување на шишињата сок Ламбе потрошил 50 евра. По продавањето на 40 шишиња тој имал $50+10=60$ евра. Значи, Ламбе 1 шише сок го продавал по $60:40=1,5$ евра. Конечно, откако ги продал сите 50 шишиња сок тој имал $50\cdot 1,5=75$ евра.

40. Кога Весна и Маја ги споредиле своите заштеди, заклучиле дека тие се однесуваат како $5:3$. Весна купила таблет кој чини 160 евра, па односот на нивните заштеди се променил во $3:5$. Колку пари имала Весна пред да го купи таблетот?

Решение. Нека Весна имала x евра, а Маја имала y евра. Тогаш од условот на задачата следува дека $\frac{x}{y}=\frac{5}{3}$ и $\frac{x-160}{y}=\frac{3}{5}$, т.е. $\frac{x}{y}=\frac{5}{3}$ и $\frac{y}{x-160}=\frac{5}{3}$. Ако ги помножиме последните две равенства добиваме $\frac{x}{x-160}=\frac{25}{9}$, од каде наоѓаме $x=250$. Значи, пред да го купи таблетот Весна имала 250 евра.

41. Три пријателки Ана, Билјана и Цветанка биле на пазар. Билјана потрошила само 15 % од парите што ги потрошила Цветанка, а Ана потрошила 60 % повеќе од Цветанка. Заедно потрошиле 550 денари. Колку пари потрошила секоја од трите пријателки?

Решение. Нека Цветанка потрошила x денари. Тогаш Билјана потрошила $\frac{15}{100}x=0,15x$ денари, а Ана потрошила $x+\frac{60}{100}x=1,6x$ денари. Сега, бидејќи трите заедно потрошиле 550 денари ја добиваме равенката

$$x+0,15x+1,6x=550,$$

од каде наоѓаме $x=200$ денари. Значи, Цветанка потрошила 200 денари, Билјана потрошила $0,15\cdot 200=30$ денари и Ана потрошила $1,6\cdot 200=320$ денари.

42. Платата на Виктор е 20% од платата на неговиот шеф. За колку проценти платата на шефот е поголема од платата на Виктор?

Решение. Ако шефот на Виктор има плата x денари, тогаш платата на Виктор е еднаква на $\frac{20}{100}x=0,2x$ денари. Значи, платата на шефот на Виктор е поголема за $x-0,2x=0,8x$ денари од платата на Виктор.

Според тоа, плата на шефот е поголема за $\frac{0{,}8x}{0{,}2x}\cdot 100=400\%$ од платата на Виктор.

ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

43. Дигиталниот часовник на цртежот десно покажува 20:19 часот. Кое време ќе го покажува часовникот кога за прв пат повторно на него ќе се појават истите цифри?

Решение. Јасно до 21 часот на дигиталниот часовник не е можно повторно да се појават истите цифри. По 21 часот истите цифри за прв пат повторно ќе се појават во 21:09 часот и тоа е бараното време.

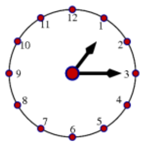
44. Колку ќе биде часот 17 часа по 17:00?
Решение. Од 17:00 до 24:00 има 7 часа. Значи, 17 часа по 17:00 часот е исто што 10 часа по 24:00 часот. Според тоа, 17 часа по 17:00 часот ќе биде 10:00 часот.

45. Колку часа има во десет четвртини од час?
Решение. Еден час има 60 инути, што значи дека една четвртина од часот има $60:4=15\,\text{min}$. Според тоа, десет четвртини од часот имаат

$$10\cdot 15=150\,\text{min}=120\,\text{min}\,30\,\text{min}=2\,h\,30\,\text{min}\,.$$

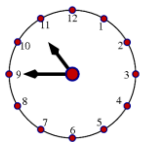
Значи, десет четвртини од часот се 2,5 часа.

46. Сега е точно 15 минути по тринаесет часот (види цртеж десно). Како изгледа часовникот кој го покажува времето пред два часа и триесет минути?



Решение. Пред два часа и 30 минути било

$$\begin{aligned}13\,h\,15\,\text{min}-2\,h\,30\,\text{min}&=11\,h\,15\,\text{min}-30\,\text{min}\\&=10\,h\,75\,\text{min}-30\,\text{min}\\&=10\,h\,45\,\text{min}.\end{aligned}$$

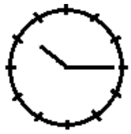


Според тоа, часовникот кој го покажува времето пред 2 часа и 30 минути изгледа како на цртежот десно.

47. Марко требало да оди фризер. Кога погледнал во огледалото, стрелките на часовникот се наоѓале во положба како на цртежот десно.

Што ќе видел Марко, ако погледнал во огледалото десет минути порано?

Решение. За да определи во колку часот Марко погледнал во огледалото прво треба часовникот да го пресликаме симетрично во однос на хоризонтална права под часовникот, а потоа треба часовникот да го ротираме за 180°. Двете трансформации се прикажани на долните цртежи:

 и  .

Значи, Марко во огледалото погледнал во 10:15 часот. Десет минути порано било 10:05 часот и часовникот изгледал како на цртежот десно. Сега за да видиме што Марко ќе види во огледалото потребно е часовнкот прво да го ротираме за 180°, а потоа симетрично да го пресликаме во однос на хоризонтална права над часовникот. Двете трансформации се дадени на долните цртежи и Марко ќе го види десниот цртеж.

 и  .

48. Кенгурот прави 10 скока за 1 минута, а потоа одмара 3 минути, па пак прави 10 скока за 1 минута па одмара 3 минути итн. По колку најмалку минути, кенгурот ќе направи 50 скока?

Решение. За да направ 50 скока кенгурот треба да направи $50:10=5$ серии од по 10 скока. Притоа, тој ќе одмара меѓу првата и втората серија, меѓу втората и третата серија, меѓу третата и четвртата серија и меѓу четвртата и петтата серија. Значи, кенгурот ќе одмара 4 пати. Конечно, кенгуорт ќе направи 50 скока по најмалку $5\cdot 1+4\cdot 3=17$ минути.

49. На секои три минути автобус оди од аеродромот до центарот на градот. Автомобил поаѓа од аеродромот во исто време како и еден автобус и до центарот на градот вози по истата патека. Патот од аеродро-

мот до центарот на градот автобусите го минуваат за 60 минути, а автомобилот за 35 минути. Колку автобуси автомобилот престигнал одејќи кон центарот на градот, не сметајќи го автобусот кој поаѓа во исто време со автомобилот?

Решение. Автомобилот истиот пат како и секој од автобусите го минува за $60-35=25m$ пократко време. Ако не го сметаме автобусот кој поаѓа во исто време со автомобилот, бидејќи автобусите од аеродромот поаѓаат на секои $3\,\mathrm{min}$, во овие $25\,\mathrm{min}=(8\cdot 3+1)\,\mathrm{min}$ автомобилот ќе престигне 8 автобуси.

50. Воз во 6:00 наутро тргнува од станицата Одам и оди до станицата Идам, а поминува низ три други станици по патот, без притоа да застанува.

Броевите на цртежот го прикажуваат времето, во часови, потребно да се помине патот меѓу две станици. Возот пристигнува на станицата Идам во 11:00 навечер истиот ден. Кое е времето на патување меѓу станицата Идам и станицата која е пред неа?

Решение. Од станицата Одам до станицата Идам возот патувал од 6:00 часот наутро до 11:00 часот навечер, што значи дека патувал $12-6+11=17$ часа. Ако со x го означиме времето на патување до станицата Идам од станицата која е одма пред неа, добиваме

$$2+3+7+x=17,$$

односно $x=5$ часа.

51. Кога лилјакот Лилко излегувал од пештерата дигиталниот часовник покажувал 20:20. Кога Лилко се вратил и си ја заземал својата положба со главата надолу, во таква положба го погледнал часовникот и пак здогледал 20:20. Колку долго Лилко бил излезен во лов надвор од пештерата?

Решение. За да видиме во колку часот лилко се вратил и го погледна часовникот потребно е да ја пресликаме сликата која ја видел прво симетрично во однос на права над неа, а потоа да ја пресликаме симетрично во однос на права која е лево од неа. Така, прво добиваме 50:50, а потоа добиваме 02:02. Според тоа, Лилко излегол во

$20h\,20\min$, а се вратил по полноќ во $2h\,2\min$. До полноќ има $3h\,40\min$, што значи дека Лилко бил излезен

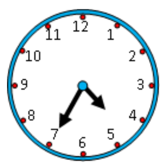
$$3h\,40\min + 2h\,2\min = 5h\,42\min.$$

52. Часовникот на Драган доцни 10 минути, но тој мисли дека е 5 минути напред. Часовникот на Столе е 5 минути напред, но тој мисли дека доцни 10 минути. Во ист момент, секој од нив гледа во сопствениот часовник. Драган мисли дека е 12:00 часот. Што мисли Столе, колку е часот?

Решение. Кога Драган мисли дека е 12:00 часот, неговиот часовник покажува 12:05 часот. Но, часовникот на Драган доцни 10 минути, што значи дека всушност е 12:15 часот. Часовникот на Столе оди 5 минути напред, па затоа тој покажува 12:20 часот. Но, Столе мисли дека наговиот часовник доцни 10 минути, па затоа кога неговиот часовник покажува 12:20 часот мисли дека е 12:30 часот.

53. Марко почнува со тренинг во 5 часот попладне. За да стигне од дома до автобуската постојка му се потребни 5 минути. Со автобусот патува 15 минути. Потоа му требаат 5 минути да оди од автобуската постојка до тркачката патеката. Автобус доаѓа на секои 10 минути, почнувајќи од 6 часот наутро. Кога најдоцна Марко може да замине од дома за да не задоцни на тренинг?

Решение. Од качувањето во автобусот до доаѓањето на тркачката патека на Марко му се потребни $15+5=20\min$, што значи дека тој треба да се качи во 16:40 часот. Бидејќи автобусот доаѓа на секои $10\min$ почнувајќи од 6:00 часот наутро, Марко има автобус во 16:40 часот. Сега за да стигне од дома до автобуската станица на Марко му се потребни $5\min$, па затоа за да не задоцни на тренинг Марко од дома може да замине најдоцна во 16:35 часот (цртеж десно).



54. Марко треба да зготви 5 различни видови јадења, при што користи фурна во која одеднаш собира два вида јадења. Времињата потребни да се зготват петте јадења се 40 min, 15 min, 35 min, 10 min и 45 min. Кое е најкраткото време за кое Марко може да ги зготви јадењата? (Притоа, Марко може да извади јадење од фурната само кога тоа е зготвено).

Решение. Најкраткото време ќе го определиме ако времињата потребни за да се зготват петте јадење ги поделиме во две групи чии збирови имаат најмала разлика. Јасно, најкраткот време за кое ќе се зготват петте јадење е еднакво на поголемиот од двата збира на времињата во групите. Имаме $40+15+35+10+45=145$ и како најмалата разлика на времињата во двете групи мора да е поголема или еднаква на $5\,\text{min}$, добиваме дека ако времињата може да се поделат во групи чии збирови се 70 и 75 минути, тогаш најкраткот време за кое може да се зготвата јадењата е $75\,\text{min}$. Бараната поделба е можна: $40\,\text{min}, 35\,\text{min}$ и $15\,\text{min}, 10\,\text{min}, 45\,\text{min}$.

55. Четири братучетки Ема, Ива, Рената и Зора имаат 3, 8, 12 и 14 години, при што нивните години не мора да соодветствуваат на редоследот по кој се напишани. Ема е помлада од Рената. Збирот на годините на Зора и Ема е делив со 5. Збирот на годините на Зора и Рената исто така е делив со 5. Колку години има Ива?

Решение. Од дадените броеви 3, 8, 12 и 14 само збировите на броевите 3 и 12, односно 8 и 12 се делив со 5. Бидејќи збирот на годините на Зора и Ема е делив со 5, а исто така и збирот на годините на Зора и Рената е делив со 5, заклучуваме дека Зора има 12 години, а Ема и Рената имаат по 3 и 8 години, во некој редослед. Конечно, Ива има 14 години.

56. Михаил, Григор и Кристијан, се тројка (тројца браќа родени на ист датум). Нивните браќа близнаци Мартин и Иван се 3 години помлади. Збирот на годините на петте браќа е еднаков на 89. Колку години има секој од браќата?

Решение. Нека Михаил, Григор и Кристијан имаат по x години. Тогаш Мартин и Иван имаат по $x-3$ години. Затоа, $3x+2(x-3)=89$, од каде добиваме $5x-6=89$, односно $x=19$. Значи, Михаил, Григор и Кристијан имаат по 19 години, а Мартин и Иван имаат по 16 години.

57. Ламбе има две цилиндрични свеќи со различни висини и дијаметри. Првата свеќа догорува за 6 часа, додека втората свеќа догорува за 8 часа. Тој ги запалил двете свеќи во исто време и три часа потоа двете свеќи биле со иста висина. Кој е односот на нивните оригинални висини?

Решение. Нека висината на првата свеќа е x, а висината на втората свеќа е y. Бидејќи првата свеќа догорува за 6 часа, од неа за 3 часа ќе изгори $\frac{3}{6}x=\frac{1}{2}x$, што значи дека ќе остане $x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{2}x$. Бидејќи втората свеќа догорува за 8 часа, од неа за 3 часа ќе изгори $\frac{3}{8}y$, што значи дека ќе остане $y-\frac{3}{8}y=\frac{5}{8}y$. По 3 часа двете свеќи имаат иста висина, па затоа $\frac{1}{2}x=\frac{5}{8}y$, од каде добиваме $x:y=5:4$.

58. Мајката Кирјана и нејзиниот син Павел заедно имаат 64 килограми. Мајката има седум пати повеќе килограми од синот. Колку килограми има Кирјана, а колку Павел?
Решение. Нека Павел има x килограми. Тогаш Кирјана има $7x$ килограми, па затоа $x+7x=64$, од каде добиваме $x=8\,kg$. Значи, Павел има $8\,kg$, а Кирјана има $7\cdot 8=56\,kg$.

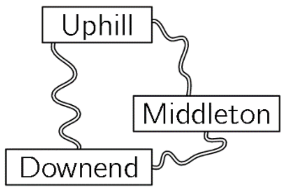
59. Кога една тегла е една петтина наполнета со вода таа има маса 560 грама. Ако истата тегла е четири петтини наполнета со вода, тогаш таа има маса 740 грама. Колкава е масата на празната тегла?
Решение. Имаме $\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$, што значи дека $\frac{3}{5}$ од водата во теглата има маса $740-560=180\,g$. Значи, масата на $\frac{1}{5}$ од водата во теглата е еднаква на $180:3=60\,g$. Конечно, масата на празната тегла е еднаква на $560-60=500\,g$.

60. Филип располага со вага која мери со точност од 10 g. Тој сака да ја измери масата на учебникот по математика со точност до половина грам. Кој е најмалиот број идентични копии на учебникот кои Филип треба да ги употреби за да ја постигне саканата цел?
Решение. Без разлика колку идентични копии на учебникот ќе стави на вагата, точноста во мерењето ќе биде $10\,g$. Ако Филип на вагата стави n копии на учебникот, тогаш за да точноста во мерењето на учебвникот биде $0{,}5\,g$ треба да важи $\frac{10}{n}=0{,}5$, од каде добиваме $n=20$.

61. Ана сака да пешачи 5 *km* во просек секој ден во март. На 16-ти март, вечерта пред спиење, таа пресметала дека досега испешачила 95 *km*. Колкаво растојание таа треба да пешачи дневно во просек во преостанатите денови, ако сака да ја постигне почетната цел, *5km* во просек секој ден?

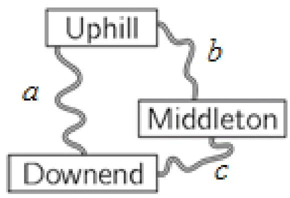
Решение. Месецот март има 31 ден, па затоа Ана во текот на целиот месец треба да испешачи $5\cdot 31=155\,km$. Таа во првите 16 дена испешачила $95\,km$, па затоа во следните 15 дена треба да испешачи $155-95=60\,km$. Значи, во преостанатите денови Ана просечно секој ден треба да пешачи по $60:15=4\,km$.

62. Три села се поврзани меѓу себе со патеки како што е прикажано на цртежот десно. Од Downend до Uphill, со заобиколување преку Middleton патот е за $1\,km$ подолг од директниот пат. Од Downend до Middleton, со заобиколен пат преку Uphill патот е за $5\,km$ подолг од директниот пат. Од Uphill до Middleton, со заобиколен пат преку Downend патот е за $7\,km$ подолг од директниот пат. Колкав е најдолгиот пат од трите директни патишта меѓу селата?



Решение. Нека должините на патиштата се како на цртежот десно. Тогаш имаме

$$a+1=b+c,$$
$$c+5=a+b,$$
$$b+7=c+a.$$



Ако ги собереме последните три равенки, по скратувањето добиваме дека $a+b+c=13$. Сега со замена од првата равенка добиваме $2a+1=13$, т.е. $a=6\,km$. Со замена од втората равенка добиваме $2c+5=13$, т.е. $c=4\,km$ и со замена од третата равенка добиваме $2b+7=13$, т.е. $b=3\,km$. Според тоа, најкраткиот пат е долг $3\,km$.

63. Виолета неколку пати скокала во далечина. Просечната должина на направените скокови била 3,80 *m*. Во следниот скок таа скокнала 3,99 *m* и просечната должина на досегашните скокови се зголемила на 3,81 *m*. Колку треба да скокне во следниот скок за да просечната доилжина на сите направени скокови биде 3,82 *m*?

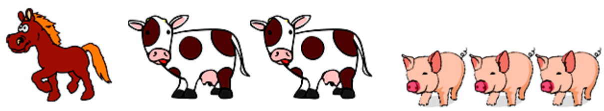
Решение. Нека Виолета скокнала k пати и постигнала просечна должина од $3{,}80\,m$. Таа до овој момент вкупно прескокнала $3{,}80k\,m$, па со последниот скок од $3{,}99\,m$ остварила вкупно $(3{,}80k+3{,}99)\,m$, односно $3{,}81(k+1)\,m$. Значи, $3{,}80k+3{,}99=3{,}81(k+1)$, од каде добиваме $k=18$. Значи, Виолета треба да го скокне 20-тиот скок и бидејќи просечната должина на сите скокови треба да е $3{,}82\,m$, ако должината на овој скок е x добиваме $19\cdot 3{,}81+x=20\cdot 3{,}82$. Според тоа, $x=4{,}01\,m$.

ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

64. Во една пештера се наоѓале само две морски коњчиња, една медуза и три желки. Подоцна, ним им се придружиле уште пет морски коњчиња, три медузи и четири желки. Колку животни вкупно имало во пештерата?
Решение. На почетокот во пештерата имало $1+2+3=6$ животни, на кои им се придружиле $5+3+4=12$ животни. Значи, во пештерата вкупно имало $6+12=18$ животни.

65. Во една одделение има 14 девојчиња и 12 момчиња. Ако половината од децата отишле на екскурзија, колку најмалку од нив се девојчиња?
Решение. Во одделението вкупно има $14+12=26$ ученици, што значи дека половина од учениците се $26:2=13$ деца. Ако 13 деца отишле на екскурзија, тогаш најмалиот број девојчиња кои отишле на екскурзија се добива ако сите 12 момчиња отишле на екскурзија. Значи, најмалку $13-12=1$ девојче отишло на екскурзија.

66. На фармата на дедо Кире има еден коњ, две крави и три свињи.



Уште колку крави му требаат на дедо Кире, за да половина од животните на фармата бидат крави?
Решение. Дедо Кире има 1 коњ и 3 свињи, што значи дека тој има $1+3=4$ животни кои не се крави. За да половина од животните се крави дедо Кире треба да има 4 крави. Но, тој има 2 крави, па затоа треба да купи уште $4-2=2$ крави.

67. Елена има две кофи со цвеќиња како што е прикажано на цртежот и во секоја кофа има цвеќиња колку што е прикажано на цртежот. Таа треба да купи уште цвеќиња и да ги ставила во кофите. Потоа во секоја двете кофи треба да имаат еднаков број од секој вид цвеќиња. Кој е најмалиот број на цвеќиња кои Елена треба да ги купи?

Решение. Од трите вида цвеќиња Елена во првата и втората кофа има соодветно 2, 4, 2 и 4, 1, 3 цвеќиња. Најмалиот број цвеќиња кои треба Елена да ги купи го добиваме како збир на соодветните апсолутни разлики на цвеќињата од ист вид во двете кофи. Имаме,

$$|2-4|+|4-1|+|2-3|=2+3+1=6.$$

Значи, Елена најмалку треба да купи 6 цвеќиња.

68. Во зоолошката градина има 10 камили. Камилите или имаат две грпки, или имаат една грпка. Вкупно, сите камили имаат 14 грпки. Определи го бројот на камили кои имаат по две грпки и бројот на камилите кои имаат по една грпка.

Решение. Ако сите камили имаат по една грпка, тогаш бројот на грпките на десетте камили ќе биде 10. Но, има $14-10=4$ грпки повеќе и овие грпки се распределени по една на двогрбите камили. Според тоа, има 4 двогрби камили и $10-4=6$ едногрби камили.

69. Еден воз има пет вагони, и притоа во секој вагон има барем по еден патник. За два патника ќе велиме дека се „соседи“ ако тие или се наоѓаат во ист вагон или се наоѓаат во два соседни вагона. Секој патник има или точно пет или точно десет „соседи“. Колку патници има во возот?

Решение. Нека гледајќи од лево кон десно во вагоните има a,b,c,d,e патници, каде $a,b,c,d,e\geq 1$. Патник кој е во првиот вагон има 5 или 10 соседи, па затоа $a+b=6$ или $a+b=11$. Случајот $a+b=11$ не е можен, бидејќи во спротивно од $a+b+c\geq 12$ ќе следува дека патник кој е во вториот вагон има повеќе од 10 соседи, што е противречност. На потполно идентичен начин следува дека $d+e=6$. Понатаму, патник кој е во вториот вагон има повеќе од 5 соседи, па затоа тој има 10 соседи, а исто важи и за патник кој е во четвртиот вагон. Значи, овие патници имаат по 10 соседи, а тоа е можно само ако во средниот вагон има 5 патници. Конечно, во возот има $6+5+6=17$ патници.

70. На една фарма има само овци и крави. Бројот на овците е за 8 поголем од бројот на кравите. Бројот на кравите е еднаков на половина од бројот на овците. Колку животни има на фармата?
Решение. Нека на фармата има x крави. Тогаш на фармата има $x+8$ овци. Но, бројот на кравите е половина од бројот на овците, што значи дека бројот овците е двапати поголем од бројот на кравите, т.е. на фармата има $2x$ овци. Според тоа, $2x=x+8$, па затоа на фармата има $x=8$ крави и оттука добиваме дека има $8+8=16$ овци. Конечно, на фармата има $8+16=24$ животни.

71. Три верверички, Ани, Асиа и Ели собрале вкупно 7 лешници. Секоја верверичка собрала различен број лешници, но секоја собрала барем еден лешник. Ани собрала најмалку, а Асиа најмногу лепници. Колку лешници собрала Ели?
Решение. Бројот 7 како збир на три различни природни броја може да се запише на единствен начин и тоа $1+2+4=7$. Бидејќи Ани собрала најмалку лешници, таа собрала 1 лешник, а бидејќи Асиа собрала најмногу лешници таа собрала 4 лешници. Значи, Ели собрала 2 лешници.

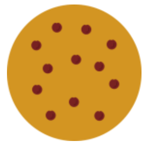
72. Михаил решава шест олимписки задачи секој ден, а Лазар решава четири олимписки задачи секој ден. Колку денови му се потребни на Лазар за да реши еднаков број задачи колку што ќе реши Михаил за четири дена?
Решение. За четири дена Михаил ќе реши $4\cdot 6=24$ задачи. Бидејќи Лазар секој ден решава по 4 задача, тој 24 задачи ќе реши за $24:4=6$ дена.

73. Се сретнале пет пријатели. Секој од нив му дал по едно колаче на секој од останатите пријатели. Потоа секој ги изел колачињата кои му биле дадени од пријателите. Како резултат на тоа вкупниот број колачиња се намалил за поло-

вина во однос на колачињата кои пријателите ги имале на почетокот. Колку колачиња имале петте пријатели на почеткот?

Решение. Секој од петте пријатели добил по 4 колачиња. Според тоа, тие изеле $5 \cdot 4 = 20$ колачиња. Бидејќи пријателите изеле половина од колачињата кои ги имале на почетокот, добиваме дека тие на почетокот имале $2 \cdot 20 = 40$ колачиња.

74. Питата прикажана на цртежот лево е украсена со цреши. Питата е поделена на неколку деца. Секое дете добило парче пита кое е украсено со три цреши.
Колку деца ја поделиле питата?



Решение. Питата е украсена со 12 цреши. Бидејќи секое дете добило по 3 цреши, питата ја поделиле $12:3 = 4$ деца.

75. Сања направила 555 купчиња од по 9 камчиња во едно купче. Потоа, таа камчињата ги собрала во едно купче и новото купче го поделила на купчиња од по 5 камчиња. Колку купчиња добила Сања?

Решение. Сања имала вкупно $9 \cdot 555$ камчиња. Кога таа ги поделила во купчиња од по 5 камчиња, добивал $9 \cdot 555 : 5 = 9 \cdot 111 = 999$ купчиња.

76. Во една куќа има дванаесет соби и секоја соба има два прозора и едно светло. Минатата ноќ, светло се гледало од 18 прозори. Во колку соби било изгасено светлото?

Решение. Светло се гледа од 18 прозори и како секоја соба има по 2 прозори, добиваме дека во $18:2 = 9$ соби било запалено светлото.

Но, куќата има 12 соби, што значи дека во $12 - 9 = 3$ соби светлото било изгасено.

77. Црвенкапа носи колачи на три бабички. Таа почнала со кошница полна со колачи. Пред да влезе во куќата на секоја од бабичките, Големиот Лош Волк јадел по половина од колачите во нејзината кошница. Црвенкапа на секоја од бабичките и давала еднаков на број на колачи. Кога Црвенкапа заминала од куќата на последната бабичка, во нејзината кошница повеќе немало колачи. Докажи дека бројот на колачите кои Црвенкапа ги имала на почетокот е делив со 7.

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-нанапред. Нека Црвенкапа на секоја бабичка и дала по n колачи. Пред да влезе во куќета на третата бабика Црвенкапа имала $n + n = 2n$ колачи. Кога влегла во во куќата на втората бабичка таа имала $2n+n=3n$ колачи, што значи дека пред да влезе во куќата на втората бабичка таа имала $2\cdot 3n=6n$ колачи. Кога влегла во куќата на првата бабичка Црвенкапа имала $6n+n=7n$ колачи, што значи дека пред да влезе во куќата на првата бабичка, односно на почетокот таа имала $2\cdot 7n=14n$ колачи. Сега тврдењето на задачата следува од тоа што 7 е делител на 14.

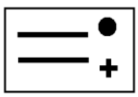
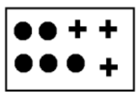
78. Андреј поделил неколку јаболка на шест еднакви купчиња. Борис истиот број јаболка го поделил на пет еднакви купчиња. Борис забележал дека секое од неговите купчиња има по две јаболка повеќе од секое од купчињата на Андреј. Колку јаболка имал Андреј?

Решение. Нека во секое купче на Андреј има по x јаболка. Тогаш во секое купче на Борис има по $x+2$ јаболка. Андреј има 6 купчиња, а Борис има 5 купчиња, па затоа

$$6x=5(x+2),$$
$$6x=5x+10,$$
$$x=10.$$

Според тоа, Андреј имал $6\cdot 10=60$ јаболка.

79. Марија, со печатење и сечење на форми кои ги симнала од интернет, прави круни од хартија како на цртежот десно. Таа располага со два различни типа на модели

 и .

Ако Марија сака да направи 7 круни, кој е најмалиот број на модели кои треба да ги симне и испечати?

Решение. За да направи 7 круни Марија треба да употреби 7 крвчиња, 28 кругови и 7 линии. Линии има само на првиот модел и тоа по 2, па за да Марија има 7 линии, бидејќи $3\cdot 2<7<4\cdot 2$ таа треба да отпечати 4 модели од првиот тип. Со овие модели Марија ќе добие 4 крвчиња и 4 кругови, па ќе и недостасуваат $28-4=24$ кругови и $7-4=3$ крвчиња. Но, $4\cdot 5<24<5\cdot 5$ што значи дека Марија треба да отпечати 5 модели од вториот тип.

Конечно, Марија вкупно треба да отпечати $4+5=9$ шаблони.

80. Еден воз има 18 вагони. Со возот патуваат 700 патници. Во било која група од пет соседни вагони има вкупно 199 патници.

Колку патници има во двата вагона кои се на средината на возот?

Решение. Според условот на задачата од 11-тиот до 13-тиот вагон патуваат $700-3\cdot 199=103$ патници, а исто толку патници патуваат од 6-тиот до 8-миот вагон. Понатаму, од 6-тиот до 13-тиот вагон патуваат $700-2\cdot 199=302$ патници. Конечно, во двата средни вагони, т.е. во 9-тиот и 10-тиот вагон патуваат $302-2\cdot 103=96$ патници.

81. За член на училишниот совет гласаат 130 ученици. Избран е кандидатот кој ќе освои најмногу гласови. На изборите се јавиле учениците: Софија, Кирил и Александар. До овој момент Софија добила 24 гласови, Кирил добил 29 гласови и Александар добил 37 гласови. Уште колку ученици треба да гласаат за Александар за тој да победи на изборите?

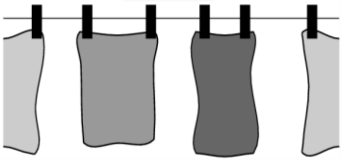
Решение. До моментот на броењето од 130 ученици вкупно гласале $24+29+37=90$ ученици. Според тоа, остануваат да гласаат уште $130-90=40$ ученици. Во најлош случај овие 40 ученици може да гласаат само за Кирил и Александар. Александар има $37-29=8$ гласови повеќе од Кирил, па за да Александар победи доволно е Кирил од преостанатите 40 гласови да добие најмногу 7 гласови повеќе од Александар. Според тоа, Александар од $40-7=33$ гласови треба да добие најмалку повеќе од половината, а тоа се 17 гласови.

82. Дванаесет девојчиња се сретнале во кафетерија. Во просек, секое девојче изело по 1,5 колаче. Ниту едно од девојчињата не изело повеќе од две колачиња. Две од девојчињата само пиеле минерална вода. Колку девојчиња изеле по две колачиња?

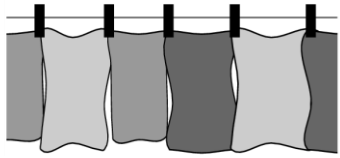
Решение. Дванаесетте девојчиња вкупно изеле $12\cdot 1{,}5=18$ колачиња. Бидејќи две девојчиња пиеле само минерална вода, колачињата ги изеле $12-2=10$ девојчиња. Ако x девојчиња изеле по 2 колачиња, тогаш $10-x$ девојчиња изеле по 1 колаче. Затоа, $2x+10-x=18$, од каде добиваме $x=8$. Според тоа, 8 девојчиња изеле по 2 колачиња.

83. Емил почнал да закачува крпи и притоа користел по две штипки за секоја крпа, како што е прикажано на слика 1. Тој заклучил дека нема да има доволно штипки и продолжил да ги закачува крпите како што е прикажано на слика 2. Емил вкупно закачил 35 крпи и искористил 58 штипки.

Слика 1



Слика 2



Колку крпи закачил Емил на начинот прикажан на сликата 1, а колку на начинот што е прикажан на сликата 2?

Решение. Нека Емил за x крпи искористил по 2 штипки, а $35-x$ крпи закачил како што е прикажано на сликата 2. За овие $35-x$ крпи Емил искористил по $36-x$ штипка, па затоа $2x+36-x=58$, од каде добиваме $x=22$. Значи, Емил 22 крпи закачикл како на сликата 1, а 13 крпи како на сликата 2.

84. На еден квиз има 20 прашања. За секој точен одговор на поставено прашање се добиваат 7 поени, за секој погрешен одговор на поставено прашање се одземаат 4 поени, а за секое неодговорено прашање се добиваат 0 поени. Натпреварувачот Емил учествувал на квизот и освоил 100 поени. На колку прашања Емил не дал одговор?

Решение. Нека Емил точно одговорл на x прашања, не одговорил на y прашања и грешно одговорил на $20-x-y$ прашања. Тоа значи дека

$$7x-4(20-x-y)=100,$$
$$11x+4y=180,$$

каде $x>0$, $y\geq 0$, $x+y\leq 20$. Од последната равенка следува дека x е број делив со 4 и како $11\cdot 18>180$ заклучуваме дека $x\in\{4,8,12,16\}$. Со непосредна проверка се добива дека единствена можност е $x=16$. Според тоа, Емил не дал одговор на $y=(180-11\cdot 16):4=1$ прашање.

85. Правоаголна чоколадна табла е составена од еднакви квадрати. Наум скршил две цели ленти од таблата на квадрати и ги изел 12-те квадрати што ги добил. Потоа, Јасен скршил една цела лента од делот што преостанал од истата чоколадна табла и ги изел 9-те квадрати што ги добил. Колку квадрати од чоколадната табла останале?

Решение. Двете ленти што ги скршил Наум имаат 12 квадрати чоколадо, што значи дека една лента има по 6 квадрати чоколадо. Бидејќи Јасен скршил една лента чоколадо и изел 9 квадрати, заклучуваме дека тој не скршил ист вид лента како Наум, туку скршил лента која е нормална на лентите на Наум. Сега, од чоколадата останале 5 ленти паралелни со лентите кои ги скршил Наум и во секоја од нив има по 9 квадрати чоколадо. Значи, од чоколадната табла останале $5 \cdot 9 = 45$ квадрати.

86. Една шестина од публиката во детскиот театар Снегулка се возрасни. Две петтини од децата се момчиња. Колкав дел од публиката се девојчиња?

Решение. Бидејќи $\frac{1}{6}$ од публиката се возрасни, заклучуваме дека $1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ од публиката се деца. Понатаму, $\frac{2}{5}$ од децата се момчиња, што значи дека $\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{3}$ од публиката се момчиња. Конечно,

$$1-(\frac{1}{6}+\frac{1}{3})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

од публиката се девојчиња.

87. Елизабета има торба со 60 чоколади. Таа во понеделникот изела една десеттина од чоколадите, потоа во вторникот изела една деветтина од преостанатите чоколади, па една осмина од остатокот изела во средата, потоа една седмина од остатокот изела во четвртокот и така понатаму се додека не изела една половина од преостанатите чоколади од претходниот ден. Колку чоколади ѝ останале?

Решение. Елизабета во понеделникот изела $\frac{60}{10}=6$ чоколади, по што останале $60-6=54$ чоколади. Во вторникот таа изела $\frac{54}{9}=6$ чоколади и останале $54-6=48$ чоколади. Во средата Елизабета изела $\frac{48}{8}=6$ чоколади, па останале 42 чоколади. Во четвртокот изела $\frac{42}{7}=6$ чоколади и останале 36 чоколади. Во петокот таа изела $\frac{36}{6}$ чоколади, па останале 30 чоколади. Во саботата изела $\frac{30}{5}=6$ чоколади и останале 24, па затоа во неделата изела $\frac{24}{4}=6$ чоколади и останале 18 чоколади. Значи, во понеделникот Елизабета изела $\frac{18}{3}=6$ чоколади, по што останаче 12 чоколади и откако во вторникот изела $\frac{12}{2}=6$ на Елизабета и останале 6 чоколади.

88. На фармата на Мирослав има кучиња, крави, мачки и коњи. Тој и кажал на Елена дека има вкупно 24 животни, и тоа $\frac{1}{8}$ од животните се кучиња, $\frac{3}{4}$ не се крави и $\frac{2}{3}$ од животните не се мачки. Колку коњи има Мирослав?

Решение. Според условот на задачата $\frac{1}{8}$ од животните се кучиња, $1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$ се крави и $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ се мачки. Значи, на фармата на Мирослав $1-(\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3})=1-\frac{3+6+8}{24}=\frac{7}{24}$ од животните се коњи. Но, на фармата вкупно има 24 животни, што значи дека на фармата има $\frac{7}{24}\cdot 24=7$ коњи.

89. Ана има 49 сини леи (леи засадени со сини цвеќиња) и само една црвена леа (леа засадена со црвени цвеќиња). Колку леи треба Ана да отстрани за да 90% од нејзините леи бидат сини?

Решение. За да 90% од леите на Ана бидат сина, потребно е 10% да бидат црвени. Но, Ана има само 1 црвена леја и како $10\cdot 10\%=100\%$, добиваме дека по отстранување на сините леи таа треба да има точно 10 леи. Една од овие 10 леи е црвена, па на Ана треба да и останат 9 сини леи. Конечно, Ана треба да отстрани $49-9=40$ сини леи.

90. Во моето училиште 45 наставници, односно 60% од наставниците на работа доаѓаат со велосипед. Само 12% од наставниците, за да дојдат на работа, користат автомобил. Колку наставници користат автомобил за доаѓање на работа?

Решение. Ако во училиптето има x наставници, тогаш бидејќи 45 од нив, односно 60% доаќаат на работа со велосипед, точна е равенката $45=\frac{60}{100}x$, од каде добиваме $x=75$. Значи, во училиптето има 75 наставници и како 12% на работа доаѓаат со автомобил, заклучуваме дека $\frac{12}{100}\cdot 75=9$ наставници на работа доаѓаат со автомобил.

91. Јане играл кошарка. Во првите 20 шутеви на кошот, Јане погодил 55% од шутевите. Во следните пет шута, неговиот процент на успешност се искачил на 56%. Колку од последните пет шута погодил Јане?

Решение. Во првите 20 шутеви Јане погодил $20\cdot\frac{55}{100}=11$ шутеви, а од $20+5=25$ шутеви, тој погодил $25\cdot\frac{56}{100}=14$ шутеви. Според тоа, од последните 5 шута Јане погодил 3 шута.

92. Во едно одделение има 20 ученици. Тие седат во парови така што точно една третина од момчињата седи со девојче и точно една половина од девојчињата седи со момче. Колку момчиња има во одделението?

Решение. Нека во одделението има x момчиња и $20-x$ девојчиња. Од условот на задачата следува дека $\frac{x}{3}=\frac{20-x}{2}$, од каде добиваме $2x=60-3x$. Значи, $5x=60$, па затоа $x=12$. Според тоа, во одделението има 12 момчиња.

93. Оваа година на Скопскиот маратон точно 35% од маратонците се жени и има 252 повеќе мажи отколку жени. Колку маратонци учествуваат на маратонот?

Решение. Нека на маратонот учествуваат x маратонци. Од нив $\frac{35}{100}x$ се жени, а $(1-\frac{35}{100})x=\frac{65}{100}x$ се мажи. Значи, бројот на мажите е за $\frac{65}{100}x-\frac{35}{100}x=\frac{30}{100}x$ поголем од бројот на жените. Според тоа, $\frac{30}{100}x=252$, од каде добиваме $x=840$. Конечно, на маратонот учествуваат 840 маратонци.