Наум Целакоски
Верица Бакева
Боривоје Миладиновиќ
Јово Стефановски

МАТЕМАТИКА
за втора година

СРЕДНО СТРУЧНО ОБРАЗОВАНИЕ
ЗА СИТЕ СТРУКИ

ПРЕДГОВОР

Оваа книга претставува учебник по математика за II година на средното стручно образование. Во неа се обработени сите содржини предвидени со наставната програма за сите струки на средното стручно образование.

Според наставната програма, за секоја група струки се обработени соодветните теми.

Секоја тема во книгата за соодветната група струки е обележена со ознака на следниот начин:

Ознака	Група на струки
Т	електротехничка, машинска, градежно-геодетска, сообраќајна, хемиско-технолошка, геолошко-рударска, металуршка, лични услуги (очна оптика)
Е	економско-правна и трговска, текстилно-кожарска, угостителско-туристичка и графичка
З	здравствена, земјоделско-ветеринарна, шумарско-дрвопреработувачка и лични услуги (профил: козметички техничар).

Секоја тема е означена со соодветен знак за која струка или група струки е наменета.

Во темите кои се предвидени за две групи на струки, наставните содржини (лекции) се означени за која струка се однесуваат, а тие содржини другата група на струки не ги изучува.

Задачите што се посебно наменети за една или за две групи на струки се соодветно означени и тие не се задолжителни за другите струки.

Книгата содржи десет тематски целини. Секоја тема започнува со преглед на наставните содржини. При обработката на содржините ќе се сретнеш со:

Потсети се! Значи, треба да се потсетиш на некои поими и тврдења и да одговориш на дадените барања. Тоа ќе ти го олесни изучувањето на новите содржини.

А, Б, ... Со овие ознаки наставната единица е поделена на делови (порции) што се однесуваат на новите поими.

1, 2, 3, ... Со ваквите ознаки се означени активностите, прашањата и задачите што ќе ги решаваш на часот самостојно или со помош на наставникот.

● Со оваа ознака ти е упатено прашање на кое треба да дадеш одговор.

■ Со оваа ознака е дадена информација за објаснување на новиот поим.

Запомни! Ова те упатува на дефиницијата на новиот поим или на тврдењата што важат за тој поим.

На крајот на секоја наставна единица се дадени задачи за самостојна работа означени со 1, 2, ...

На крајот на секоја наставна тема се дадени задачи за повторување и утврдување означени со 1, ...

Секоја тема на крајот содржи задачи за самопроверка означени со 1, 2, 3, ...

Во вториот дел на книгата се дадени одговори, упатства или решенија на сите задачи.

Ќе не радува ако оваа книга ти помогне да постигнеш солиден успех.

Авторите

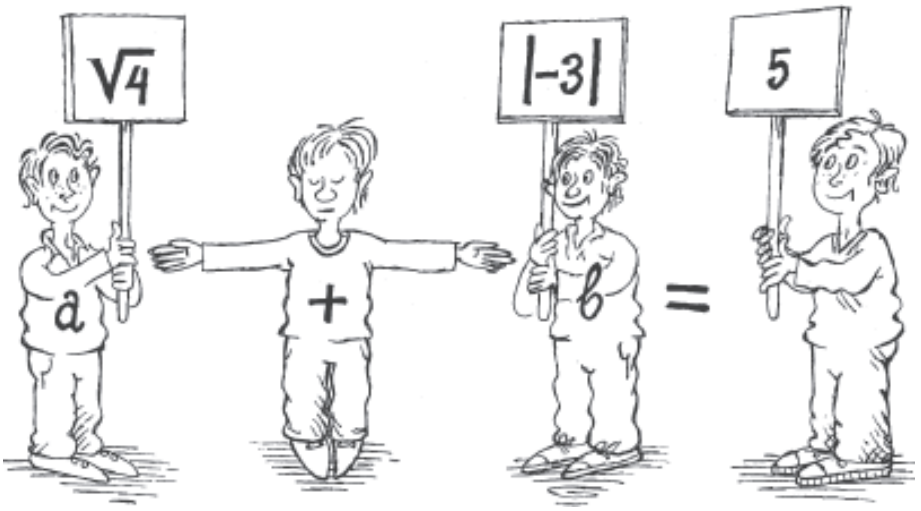
ТЕМА 1

СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

за сите струки

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1. Линеарна равенка со една непозната (повторување) 4
2. Линеарна равенка со две непознати 9
3. Систем линеарни равенки со две непознати 13
4. Решавање на систем линеарни равенки со метод на замена 17
5. Решавање на систем линеарни равенки со метод на спротивни коефициенти 20
6. Графичко решавање на систем линеарни равенки со две непознати 24
7. Примена на систем линеарни равенки со две непознати 29
8. Задачи за повторување и утврдување 32
9. Задачи за самопроверка 33



1 ЛИНЕАРНА РАВЕНКА СО ЕДНА НЕПОЗНАТА (повторување)

Потсети се!

- $3\cdot 4+2;\ 4^2-2\cdot 6,5+9:3$ се бројни изрази.
- $3x+2;\ 5x^2-\frac{y}{2};\ \frac{3}{4}a^3b;\ x-3y+2z-1;$ $\frac{4x-1}{x+1};\ \sqrt{2x}$ се изрази со променливи; првите пет од нив се ***рационални изрази***, а $\sqrt{2x}$ е ***ирационален израз***.
- Изразите $3x+2;\ 5x^2-\frac{y}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{\sqrt{4}}{3}a^3b$ се ***цели рационални изрази*** (или полиноми). Воочи дека во нив нема делење со променлива. И константите, како на пример $\frac{2}{3}$, се полиноми.
- $\frac{4x-1}{x+1}$ е дробен рационален израз.
- Изразите со една променлива се означуваат кратко со $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ итн.

А Равенство на два изрази, од кои барем едниот е со променливи, се вика ***равенка***. Променливите во неа се викаат ***непознати***.

- Ако $A(x,y,...,z)$ и $B(x,y,...,z)$ се полиноми и барем едниот од нив ги содржи променливите x, y, ..., z, тогаш равенството $A(x,y,...,z)=B(x,y,...,z)$ се вика ***алгебарска равенка***.
- Множеството допуштени вредности на променливата се вика ***дефиниционо множество*** на равенката и се означува со D.
- Ако $A(x)$ и $B(x)$ се цели рационални изрази и барем едниот од нив содржи променлива x, тогаш равенката $A(x)=B(x)$ се вика ***алгебарска равенка со една непозната***.

- Според највисокиот степен на непознатите, алгебарските равенки се: од прв степен, од втор степен, од трет степен итн.

Понатаму, наместо „алгебарска равенка", ќе го користиме поимот „равенка".

1 Определи го видот на дадената равенка според бројот на непознатите и според степенот:

а) $2x-3=x+5;$ б) $3x-y=2;$ в) $x-3y+2z=4;$ г) $x^2-x=8+x;$
д) $x-xy=6;$ ѓ) $x^3-x^2y^2-5=0.$

Решение. Равенките а), б) и в) се од прв степен; г) и д) се од втор степен, а ѓ) е од четврти степен. Со една непозната се: а) и г); со две непознати се: б), д) и ѓ); со три непознати е равенката в).

Запомни!

Секоја равенка од прв степен (со една, со две или повеќе непознати) се вика ***линеарна равенка***.

- Кои од равенките на задача **1** се линеарни?

Воочи дека во линеарната равенка нема множење на променливи.

Секоја вредност на променливата, за која равенката $A(x)=B(x)$ преминува во точно бројно равенство, се вика ***решение*** (или ***корен***) на таа равенка.

На пример, $x=4$ е решение на равенката $x^2-x=8+x$, бидејќи $4^2-4=8+4$ е точно бројно равенство.

- Покажи дека и $x=-2$ е нејзино решение.
- Да се реши една равенка значи да се најдат сите нејзини решенија, т.е. да се најде ***множеството решенија*** на таа равенка.

За да решиме дадена равенка, неа ја заменуваме со друга поедноставна, но еквивалентна равенка на неа. Потоа, добиената равенка ја заменуваме со уште поедноставна од неа итн. сè додека не дојдеме до наједноставна равенка чии решенија се очигледни.

Две равенки се ***еквиваленти*** ако имаат исто дефиниционо множество и исто множество решенија.

Заменувањето на дадена равенка со друга поедноставна равенка еквивалентна на неа претставува трансформација на дадената равенка. Трансформациите се изведуваат врз основа на теоремите за еквивалентност на равенки и нивните последици.

Т. 1. Ако кон двете страни на равенката $A(x)=B(x)$ се додаде еден ист број p или израз $P(x)$ кој е дефиниран за сите допуштени вредности на променливата, ќе се добие нова равенка еквивалентна на дадената, т.е.

$$A(x)=B(x) \Leftrightarrow A(x)+P(x)=B(x)+P(x).$$

Последиците на теоремата се:

П. 1. Секој член (собирок) на една равенка може да се пренесе од една на друга страна на равенката, ако неговиот знак се промени во спротивен.

П. 2. Ако на двете страни на една равенка има еднакви членови (собироци), тогаш тие може да се изостават, т.е. да се поништат.

Во следниве задачи ќе покажеме како се применуваат теоремата **Т.1** и последиците **П.1** и **П.2** при решавањето на равенките.

2 Реши ја равенката: а) $3x-4=2x+5$; б) $(x-2)(x-3)=x^2+2$.

Решение. а) Со примена на **П.1** на левата страна ги групираме членовите што ја содржат непознатата, а на десната познатите членови и имаме

$3x-4=2x+5 \Leftrightarrow 3x-2x=5+4 \Leftrightarrow x=9$, па $x=9$ е решение на дадената равенка.

б) $(x-2)(x+3)=x^2+2$ *Со извршување на назначените операции, дадената равенка ја заменуваме со следната што е еквивалентна со дадената.*

$\Leftrightarrow x^2+3x-2x-6=x^2+2$ *Со примена на* **П.2** *членот* x^2 *го изоставаме на двете страни и ја добиваме равенката.*

$\Leftrightarrow 3x-2x-6=2$ *Со примена на* **П.1** *имаме*

$\Leftrightarrow 3x-2x=2+6,$ *па*

$\Leftrightarrow x=8$ *е решение на равенката.*

3 Реши ја равенката:

а) $5(x+3)=2(2x+3);$ б) $2(x+1)+3(x-1)=4(x+1)+1;$

в) $(x-1)(x+2)+2x=x^2+2;$ г) $(x-1)^2=x(x-3)+2.$

Т. 2. Ако двете страни на равенката $A(x)=B(x)$ се помножат или се поделат со еден ист број p $(p\neq 0)$ или израз $P(x)$ дефиниран и различен од нула за сите допуштени вредности на непознатата x, ќе се добие равенка еквивалентна на дадената, т.е.

$$A(x)=B(x) \quad \Leftrightarrow \quad A(x)\cdot P(x)=B(x)\cdot P(x).$$

Последиците од теоремата **Т.2** што се користат при решавање на равенките се:

П. 3. Ако двете страни на равенката $A(x)=B(x)$ се помножат со -1, тогаш сите нејзини членови добиваат спротивен знак.

П. 4. Ако некои членови на равенката $A(x)=B(x)$ имаат именител, тогаш со множење на двете страни на равенката со НЗС на именителите, ќе се добие равенка без именители.

Забелешка. *Теоремите* **Т.1** *и* **Т.2**, *како и нивните последици, соодветно прилагодени, важат и за равенки со повеќе непознати, и тоа не само за алгебарски, туку и за други видови равенки.*

4 Реши ја равенката: а) $3(x-2)-4(2x+3)=2x+3;$ б) $\frac{3x-1}{4}-\frac{x+2}{3}=\frac{x+2}{6}.$

Решение.

б) $\frac{3x-1}{4}-\frac{x+2}{3}=\frac{x+2}{6}$ *Двете страни на равенката ги множиме со* НЗС$(4,3,6)=12.$

$\Leftrightarrow 3(3x-1)-4(x+2)=2(x+2)$ *Го извршуваме множењето*

$\Leftrightarrow 9x-3-4x-8=2x+4$ *Со примена на* **П.1.** *ги групираме членовите*

$\Leftrightarrow 9x-4x-2x=4+3+8$ *Ги собираме сличните мономи*

$\Leftrightarrow 3x=15/:3$ *Делиме со коефициентот пред непознатата, т.е. со* 3, **Т.2**

$\Leftrightarrow x=5$ е решение на равенката.

Равенката под а) реши ја сам и во секој чекор запишувај која последица ја применуваш.

5 Со примена на теоремите за еквивалентни равенки и последиците од нив покажи дека се еквивалентни равенките:

а) $\frac{x-3}{4}-\frac{x-2}{6}=\frac{x-5}{3}$ и $x=5$;

б) $(x-2)(x+2)=x(x+2)$ и $x=-2$.

Потсети се!

- Во изразот $ax+b$, x означува променлива, а a и b - коефициенти.
- Одреди ги коефициентите во изразот со променлива x:

  а) $2x-4$; б) $3ax-\frac{1}{2}$.
- Равенката $3x-2=x$ е линеарна, а равенката $3x^2+4x=5$ е квадратна.

В **6** Дадена е равенката $(2x-1)(x+2)=2x^2+3$.

- Изврши ги назначените операции и сите членови пренеси ги на левата страна во равенката.

Решение. $(2x-1)(x+2)=2x^2+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2+4x-x-2=2x^2+3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x-5=0.$

Добиената равенка е линеарна.

Запомни!

Равенката $ax+b=0$ се вика ***општ*** или ***нормален*** вид на линеарна равенка со една непозната; x е непозната, a е коефициент пред непознатата, а b е слободен член. Секоја линеарна равенка може да се трансформира во општ вид.

7 Реши ја равенката: а) $\frac{x-2}{3}-\frac{2x-3}{6}=x+1$; б) $(x-3)(x-2)=x(x-3)$.

8 Реши ја равенката: а) $x-2+\frac{x-3}{2}=1$; б) $3x+2=3(x+4)$; в) $2x-6=2(x-3)$.

Решение.

а) $x-2+\frac{x-3}{2}=1/\cdot 2$

$\Leftrightarrow 2x-4+x-3=2$

$\Leftrightarrow 3x=9$

$\Leftrightarrow x=3.$

б) $3x+2=3(x+4)$

$\Leftrightarrow 3x+2=3x+12$

$\Leftrightarrow 3x-3x=12-2$

$\Leftrightarrow 0\cdot x=10.$

в) $2x-6=2(x-3)$

$\Leftrightarrow 2x-6=2x-6$

$\Leftrightarrow 2x-2x=6-6$

$\Leftrightarrow 0\cdot x=0.$

Воочи. Решение на равенката под а) е $x=3$. Равенката под б) нема решение, бидејќи производот од кој било број и бројот нула секогаш е еднаков на нула. Решение на равенката под в) е кој било реален број, бидејќи за секој реален број x таа преминува во точно бројно равенство. Според тоа, дали равенката $ax+b=0$ има решение или нема решение зависи од вредностите на a и b.

Запомни!

Линеарната равенка $ax+b=0$:

а) за $a\neq 0$ има единствено решение $x=-\frac{b}{a}$;

б) за $a=0$ и $b\neq 0$ нема решение, (т.е. е невозможна, противречна);

в) за $a=0$ и $b=0$ е од видот $0\cdot x=0$, па решение е секој реален број, т.е. има бесконечно многу решенија.

8 Провери која од равенките има, а која нема решение: а) $x-3=3x-2(x-1)$;

б) $2(x-3)+4=x-2$; в) $x+6=7x-6(x-1)$; г) $\frac{2x-1}{2}-1=x-\frac{1}{3}$.

Задачи

1 Провери кое равенство е точно:

а) $8\cdot 3-4=5\cdot 4$; б) $0\cdot 5=0-5$;

в) $(-5)\cdot(-3)=-15$; г) $\frac{15-9}{6}=\frac{5-3}{2}$.

2 Кои од равенките се еквивалентни:

а) $x^2+3x=12+x^2$ и $3x=12$;

б) $2x^2=6x$ и $2x=6$;

в) $\frac{x}{3}+\frac{x}{5}=8$ и $x=15$?

Реши ги равенките $(3-6)$:

3 а) $10x-2=4$; б) $x-7-9x=4x-3-8x$;

в) $\frac{x-2}{3}=x+1$; г) $3x^2-(3x-2)(x+1)=8$.

4 а) $(x-2)^2=x(x+2)-2$;

б) $(x+1)^2-(x-1)^2=4$;

5 а) $\frac{3x-2}{3}-\frac{4-x}{2}=2$;

б) $\frac{14x-1}{15}+\frac{2x-3}{5}=\frac{3x-4}{3}$.

6 а) $\frac{4x-3}{2}-\frac{3x-1}{4}=\frac{5x+1}{3}+\frac{1}{2}$;

б) $x-\frac{2}{3}-\frac{x-2}{2}=\frac{9+2x}{3}$.

7 Одреди која од дадените равенки има единствено решение, која нема решение, а која е равенка идентитет:

а) $x-3=6x-5(x-2)$;

б) $2(x-3)+2=x-4$;

в) $x+6=77-6(x-1)$; г) $\frac{1}{5}x+1=\frac{x+5}{5}$.

8 За која вредност на бројот m равенката $(m-3)x=m^2-3m$:

а) има единствено решение;

б) е невозможна;

в) има бесконечно многу решенија?

2 ЛИНЕАРНА РАВЕНКА СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Потсети се!

- Според бројот на непознатите една равенка може да биде: со една непозната, со две непознати итн.
- Според највисокиот степен на непознатата, равенката може да биде: линеарна (равенка од прв степен), квадратна (равенка од втор степен), кубна (равенка од трет степен) итн.
- Според бројот на непознатите и степенот на непознатите одреди го видот на равенката:

а) $3x-2=6$; б) $2x+y=3$;

в) $x^2=2x+3$; г) $x+2xy-3=0$.

А 1 Збирот на два природни броја е 19. Колку решенија има задачата?

- Ако непознатите броеви ги означиме со x и y, тогаш можеме да запишеме:

$$x+y=19, \text{ каде што } x,y\in\mathbb{N}.$$

- Добиената равенка $x+y=19$ е линеарна, со две непознати.
- Решенија на задачата се подредените парови (1, 18), (2, 17), (3, 16), ..., (18, 1), вкупно 18 решенија.

Воочи дека паровите (1, 18) и (18, 1) не се еднакви, т.е. $(1,18)\neq(18,1)$.

Запомни!

Равенката од видот $ax+by=c$, каде што x и y се непознати, а a, b и c се реални броеви или изрази кои не зависат од x и y, се вика ***општ*** или ***нормален*** вид на ***линеарна равенка со две непознати***. Броевите a, b и c се викаат ***коефициенти*** на равенката.

- Секој подреден пар реални броеви (x_0, y_0) за којшто равенката $ax+by=c$ преминува во точно бројно равенство $ax_0+by_0=c$ се вика ***решение*** на равенката, а множеството M од тие подредени парови се вика ***множество решенија*** на равенката.

Во задачата **1** множеството решенија е $M=\{(1,18),(2,17),(3,16),(4,15),...,(18,1)\}$.

2 Провери дали подредениот пар: а) $(4,-6)$; б) $(5,3)$ е решение на равенката $2x-\frac{1}{3}y=10$.

Решение. б) Равенката е со непознати x и y. За $x=5$ и $y=3$ имаме $2\cdot5-\frac{1}{3}\cdot6=10$, т.е. $8=10$, а тоа е бројно равенство што не е точно. Значи, парот $(5,3)$ не е решение на равенката.

3 Одреди ги коефициентите во равенката: а) $2x-3y=5$; б) $x+\frac{1}{2}y=0$.

- Равенките се од видот $ax+by=c$, па а) $a=2$, $b=-3$, $c=5$. б) $a=1$, $b=\frac{1}{2}$, $c=0$.

Потсети се!

- Како гласат теоремите **Т.1** и **Т.2** и нивните последици за еквивалентни равенки?

Б Две линеарни равенки со две непознати се ***еквивалентни*** ако имаат исто дефиниционо множество и еднакви множества решенија.

Секоја линеарна равенка со две непознати може да се трансформира во еквивалентна на неа равенка од видот $ax+by=c$, со помош на теоремите **Т.1** и **Т.2** и нивните последици.

4 Трансформирај ја во нормален вид равенката $\frac{2x-3}{3}+\frac{x+y}{2}=1$.

Решение.

$\frac{2x-3}{3}+\frac{x+y}{2}=1/\cdot 6$ — *Двете страни на равенката ги множиме со* НЗС$(3,2)=6$.

$\Leftrightarrow 2(2x-3)+3(x+y)=6$ — *Ги извршуваме назначените операции.*

$\Leftrightarrow 4x-6+3x+3y=6$ — *Ги преграпираме членовите во равенката.*

$\Leftrightarrow 4x+3x+3y=6+6$ — *Ги собираме сличните мономи.*

$\Leftrightarrow 7x+3y=12.$

5 Запиши ја во нормален вид (ако е можно) равенката:

а) $2x+y-3=x+3y-4$; б) $(x-3)(y-2)-1=xy$; в) $(x-1)(y-3)=4-3x$.

Решение. а) $2x+y-3=x+3y-4 \Leftrightarrow 2x-x+y-3y=-4+3 \Leftrightarrow x-2y=-1$;

б) $(x-3)(y-2)-1=xy \Leftrightarrow xy-2x-3y+6-1=xy \Leftrightarrow -2x-3y=-5 \Leftrightarrow 2x+3y=5$.

в) $(x-1)(y-3)=4-3x \Leftrightarrow xy-3x-y+3=4-3x \Leftrightarrow xy-y=1$.

Равенката в) не е линеарна, па не може да се запише во видот $ax+by=c$.

В **6** Одреди ги решенијата на равенката $4x+y=6$ за $y\in\{2,-3,-2\}$.

Решение. За $y=2$ имаме $4x+2=6 \Leftrightarrow 4x=6-2 \Leftrightarrow 4x=4 \Leftrightarrow x=1$. Значи, парот $(1,2)$ е решение на равенката. За $y=-3$ имаме $4x+(-3)=6 \Leftrightarrow 4x=6+3 \Leftrightarrow x=\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$, значи парот $\left(2\frac{1}{4},-3\right)$ е решение на равенката.

- Одреди го решението на равенката за $y=-2$. Избери друга вредност за y и одреди го решението на равенката. Што заклучуваш?

- Воочи, ако во равенката од видот $ax+by=c$ е дадена вредност на една од непознатите, тогаш можеме да ја одредиме вредноста и на другата непозната, т.е. да одредиме едно решение на равенката.

7 Одреди го множеството решенија на равенката $2x+y=3;\ x,y\in\mathbb{R}$.

Решение. Избираме произволна вредност на непознатата x. На пример $x=2$. Тогаш имаме $2\cdot 2+y=3 \Leftrightarrow y=3-4 \Leftrightarrow y=-1$, па парот $(2,-1)$ е едно решение на равенката.

За $x=-1$, $2\cdot(-1)+y=3 \Leftrightarrow y=3+2 \Leftrightarrow y=5$, па $(x,y)=(-1,5)$ е решение на равенката.

- Воопшто, ако x е кој било реален број, т.е. $x=k$, $k\in\mathbb{R}$, тогаш $2k+y=3 \Leftrightarrow y=3-2k$, па множеството решенија на равенката е $M(2x+y=3)=\{(k,3-2k)\mid k\in\mathbb{R}\}$.

Запомни!

Линеарната равенка $ax+by=c$ има бесконечно многу решенија ако:

1. $a\neq 0$ или $b\neq 0$ и **2.** $a=b=c=0$.

Ако $a=b=0$, а $c\neq 0$, тогаш равенката нема решение.

- Дадената равенка можеме да ја решиме и со избирање на вредност на непознатата y. На пример, за $y=-1$ имаме $2x+(-1)=3 \Leftrightarrow 2x=3+1 \Leftrightarrow x=2$, па парот $(x,y)=(2,-1)$ е решение на равенката. Воопшто, ако y е кој било реален број, т.е. $y=n$, $n\in\mathbb{R}$, тогаш $2x+n=3 \Leftrightarrow 2x=3-n \Leftrightarrow x=\frac{3-n}{2}$, па множеството решенија на равенката е

$$N(2x+y=3)=\left\{\left(\frac{3-n}{2},n\right)\mid n\in\mathbb{R}\right\}.$$

Множествата решенија M и N на равенката $2x+y=3$ се запишани на различни начини, но тие како множества од подредени парови се еднакви.

8 Одреди го множеството решенија на равенката:

а) $x-4y=2$; б) $2x-(y+1)=2(x+1)$; в) $x+2y-3=2(y+1)$; г) $2x-y=3+2x-y$.

Решение.

- Секоја равенка ја запишуваме во видот $ax+by=c$.

б) $2x-(y+1)=2(x+1) \Leftrightarrow 2x-y-1=2x+2 \Leftrightarrow 2x-2x-y=2+1 \Leftrightarrow 0\cdot x-y=3 \Leftrightarrow 0\cdot x+y=-3$.

Воочи дека $a=0$, $b=1$, $c=-3$, па x е кој било реален број, т.е. $x=k$, $k\in\mathbb{R}$, тогаш поради $0\cdot x=0$ следува дека $y=-3$, па множеството решенија е $M=\{(k,-3)\mid k\in\mathbb{R}\}$.

г) $2x-y=3+2x-y \Leftrightarrow 2x-2x-y+y=3 \Leftrightarrow 0\cdot x+0\cdot y=3$. Воочи дека $a=b=0$, $c=3$, па равенката нема решение, т.е. $M=\varnothing$.

Потсети се!

- $y = ax + b$ се вика линеарна функција по независно променлива x (или аргумент), а a и b се реални броеви.
- Графикот на линеарната функција е права.
- Нацртај го графикот на функцијата $y = -2x + 1$.

9 Одреди го множеството решенија на равенката $x + y - 2 = 0$, а потоа претстави го графички во правоаголен координатен систем.

Твоето решение спореди го со даденото.

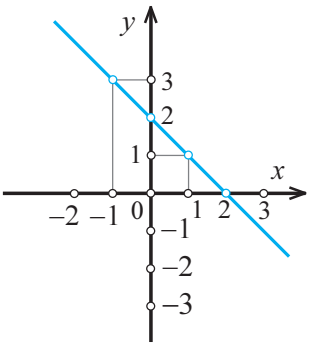
$x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow x + y = 2 \Leftrightarrow y = -x + 2$. Ако $x = k$, $k \in \mathbb{R}$, тогаш $y = -k + 2$, па решение на равенката е множеството $M(x + y - 2 = 0) = \{(k, -k + 2) \mid k \in \mathbb{R}\}$.

На пример, за $k = -1$: $y = -(-1) + 2 = 1 + 2 = 3$, па парот $(-1, 3)$ е решение;

за $k = 0$: $y = 0 + 2 = 2$, па парот $(0, 2)$ е решение.

- Воочи дека со равенката $x + y - 2 = 0$ е определена линеарната функција $y = -x + 2$ чиј график е претставен на цртежот.

x	-1	0	3
y	3	2	1



Подредените парови од множеството M што се решенија на равенката се, всушност, координати на точките од графикот на функцијата $y = -x + 2$.

- Координатите на која било точка од графикот на функцијата $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ за $b \neq 0$ се решенија на равенката $ax + by = c$, бидејќи $ax + by = c \Leftrightarrow y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

10 Нацртај го графикот на линеарната функција определена со равенката:

а) $x - 2y = 4$; б) $2x + y = 0$; в) $2(x - y) = 2x + 4$; г) $x + 3y = 3(1 + y)$.

Одреди го множеството решенија на секоја од дадените равенки.

Задачи

1 Која од дадените равенки е линеарна равенка со две непознати:

а) $x + 5 = y - 3$; б) $y - 7x = 10$;

в) $9 = 2y$; г) $3x - 5 = 0$;

д) $2x^2 - 3y = 4$; ѓ) $x - xy = 4$?

2 Дадена е равенката $2x + 3y = 4$. Кој од подредените парови е решение на дадената равенка:

а) $(1, 1)$; б) $(-1, 2)$; в) $(3, -1)$;

г) $(5, -2)$; д) $(1, -2)$?

3 Секоја од равенките запиши ја во општ вид (ако може):

а) $3(x + y) = 2x - 3$;

б) $(x + 3)(y + 2) - 3 = xy$;

в) $3(x - 2) = y(4 - x)$;

г) $\frac{x + 3y}{4} - \frac{x + y}{3} = 2 + x$;

д) $2(x + 1) - 3(y + 1) = \frac{1}{2} + x$.

4 Дадена е равенката $2x - y = 3$. Одреди го решението на равенката ако:

а) $x = 1$; б) $x = -2$;

в) $y = 1$; г) $y = 2$.

5 Одреди го множеството решенија на равенката:

а) $x + 2y = 3$; б) $x - \frac{1}{2}y = 3$;

в) $x + 2(y - 1) = 3$; г) $2x - 3y = 3(1 - y)$;

д) $2(x - 2) - y + 2 = 2x$.

6 Нацртај го графикот на функцијата определена со равенката:

а) $2x + y = 1$; б) $3x - y + 6 = 0$;

в) $2x + 4y - 8 = 0$; г) $2x - 3 = 0$;

д) $y + 2 = 0$.

3 СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Потсети се!

- Равенката $2x + y = 5$ е линеарна равенка со две непознати.
- Две линеарни равенки со две непознати се еквивалентни ако имаат исто дефиниционо множество и еднакви множества решенија.
- Секој подреден пар реални броеви (x_0, y_0) за кој равенката $ax + by = c$ преминува во точно бројно равенство $ax_0 + by_0 = c$ се вика решение на равенката.

A Нека $a_1x + b_1y = c_1$ и $a_2x + b_2y = c_2$ се две линеарни равенки со две непознати.

Запомни!

Множеството од две линеарни равенки со две исти непознати за кои се бара заедничко решение се вика ***систем од две линеарни равенки со две непознати***.

- Секој систем од две линеарни равенки со две непознати може да се сведе во систем што е еквивалентен со него во видот $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$, кој се вика ***општ*** или ***нормален*** вид на системот. Притоа, x и y се непознати, а a_1, b_1, c_1, a_2, b_2 и c_2 се реални броеви (коефициенти) или изрази кои не зависат од непознатите.
- Познатите величини во равенката кои не зависат од непознатите се викаат ***параметри*** на равенката, а ги обележуваме со a, b, c, k, p, m, n итн.
- При сведувањето на еден систем линеарни равенки во нормален вид ги користиме претходните теореми **Т.1**, **Т.2**, нивните последици и следната теорема:

Т. 3. Ако која било равенка на системот се замени со еквивалентна равенка на неа се добива систем еквивалентен со дадениот.

1 Сведи го системот во општ вид и одреди ги коефициентите:

а) $\begin{cases}(x-2)(y+3)=xy-2\\2x+y=3\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dfrac{2x-y}{3}-2x=\dfrac{x}{2}\\3(x-y)+2x=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$

Решение.

а) $\begin{cases}(x-2)(y+3)=xy-2\\2x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy+3x-2y-6=xy-2\\2x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=6-2\\2x+y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-2y=4\\2x+y=3.\end{cases}$

Коефициентите се: $a_1=3,\ b_1=-2,\ c_1=4,\ a_2=2,\ b_2=1,\ c_2=3.$

б) $\begin{cases}\dfrac{2x-y}{3}-2x=\dfrac{x}{2}\\3(x-y)+2x=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2(2x-y)-6\cdot 2x=3x\\6(x-y)+2\cdot 2x=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}11x+2y=0\\10x-6y=1.\end{cases}$

Коефициентите се: $a_1=11,\ b_1=2,\ c_1=0,\ a_2=10,\ b_2=-6,\ c_2=1.$

2 Сведи го во нормален вид системот равенки:

а) $\begin{cases}3x-\dfrac{1}{2}=y+2\\x-2y=\dfrac{x}{2}\end{cases}$; б) $\begin{cases}\dfrac{x-y}{2}+\dfrac{y-3}{3}=x-1\\(x-1)(x+1)-2y=(x-1)^2.\end{cases}$

- Секој подреден пар реални броеви (x_0, y_0) за којшто равенките од системот преминуваат во точни бројни равенства $a_1x_0+b_1y_0=c_1$ и $a_2x_0+b_2y_0=c_2$ се вика ***решение на системот***.

3 Провери дали подредениот пар $(-2,3)$ е решение на системот равенки:

а) $\begin{cases}x-y=-5\\2x+2y=-1\end{cases}$; б) $\begin{cases}x+2y=4\\3x+5y=9\end{cases}$; в) $\begin{cases}2x-3y=3\\x+5y=1.\end{cases}$

Решение. Со замена за $x=-2$ и $y=3$ во секој од дадените системи имаме:

а) $\begin{cases}-2-3=-5\\2\cdot(-2)+2\cdot 3=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5=-5\\-4+6=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-5=-5\\2=-1\end{cases}$;

б) $\begin{cases}-2+2\cdot 3=4\\3\cdot(-2)+5\cdot 3=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-2+6=4\\-6+15=9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4=4\\9=9\end{cases}$;

в) $\begin{cases}2\cdot(-2)-3\cdot 3=3\\-2+5\cdot 3=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4-9=3\\-2+15=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-13=3\\13=1.\end{cases}$

Значи, парот $(-2,3)$ е решение само на системот под б). Зошто парот $(-2,3)$ не е решение на системот а), односно в)?

4 Даден е системот равенки: а) $\begin{cases} 2x+y=-1 \\ x+y=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x-y=-5 \\ 2x+3y=-4 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3x-y=-5 \\ 2x+3y=4. \end{cases}$

Провери дали парот $(-1,2)$ е негово решение.

- Да се реши даден систем значи да се најдат сите негови решенија.

Два системи од две линеарни равенки со две непознати се ***еквивалентни*** ако имаат еднакви множества решенија.

5 Дадени се системите $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 3x=5y+6 \end{cases}$ и $\begin{cases} 2x=4-y \\ 3x-5y=6. \end{cases}$

а) Провери дали парот $(2,0)$ е решение на двата системи равенки.

б) Дадените системи равенки сведи ги во општ вид. Што воочуваш? Какви се системите?

Запомни!

Ако со еквивалентни трансформации даден систем од две линеарни равенки се трансформира во еквивалентен систем од видот $\begin{cases} x=k \\ y=p \end{cases}$, тогаш подредениот пар $(x,y)=(k,p)$ е единствено решение на системот.

6 Реши го системот равенки: а) $\begin{cases} 3x-2y=2(x-y)+3 \\ y=2 \end{cases}$; б $\begin{cases} x=3 \\ 3(y-2)=5x+3. \end{cases}$

Решение. а) $\begin{cases} 3x-2y=2(x-y)+3 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=2x-2y+3 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2x-2y+2y=3 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2, \end{cases}$

па решение на системот е парот $(x,y)=(3,2)$.

б) $\begin{cases} x=3 \\ 3y-5\cdot 3=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ 3y=9+15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=8. \end{cases}$

Значи, решение на системот е парот $(x,y)=(3,8)$.

7 Реши го системот равенки: а) $\begin{cases} y=2 \\ 2x-3(y+2)=6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3(x-y)-1=2-3y \\ 2(x+2y)-1=x-4. \end{cases}$

Задачи

Запиши го во нормален вид системот равенки $(1-4)$:

1 а) $\begin{cases} x-2y+5=y-2x \\ 3-x=y+2 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 5-2x+y=x+3 \\ 2x-4-y=x-5+y. \end{cases}$

2 а) $\begin{cases} 2x-y=3y-x-5 \\ 3(x-2)=2(y+3) \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x+y=3(y-x)+5 \\ 3(2x+y)=4x-2y-5. \end{cases}$

3 а) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2 \\ \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x}{6}-\frac{y}{9}=-1 \\ 2x-3y=4 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} \frac{x+y}{3}+x=15 \\ y-\frac{y-x}{5}=\frac{6}{5}. \end{cases}$

4 а) $\begin{cases} (x-2)^2+(y-1)^2=x^2+y^2-1 \\ (x-1)^2-(x-2)^2=3x-y+2 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} (y+2)^2-(y-1)^2=2(x-y) \\ (x+y)^2-3=(x-2)(2y+3)+x^2+y^2. \end{cases}$

Состави систем од две линеарни равенки со две непознати според реченицата $(5-7)$:

5 Збирот на два броја е 64, а нивната разлика е 40.

6 Бројот 32 раздели го на два собироци, така што ако првиот се помножи со 5, а вториот со 3 се добиваат еднакви производи.

7 Еден внатрешен агол на триаголникот ABC е 52^0, а разликата на другите два е 18^0.

8 Провери дали подредениот пар:

а) $(3,2)$ е решение на системот $\begin{cases} 2x-y=3 \\ x+y=5 \end{cases}$;

б) $(-2,1)$ е решение на системот

$\begin{cases} 2x+y=-3 \\ x+2y=0 \end{cases}$;

в) $\left(-\frac{1}{2},\frac{2}{3}\right)$ е решение на системот

$\begin{cases} x-y=-\frac{1}{6} \\ 2x+3y=1. \end{cases}$

Одреди го решението на системот равенки $(9-10)$:

9 а) $\begin{cases} 2x-y+3=0 \\ y=3 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x+3y=x+y-2 \\ x=2 \end{cases}$;

10 а) $\begin{cases} x+2y=3-2(x-y) \\ x+y-5=0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} \frac{2x-y}{3}-\frac{x}{2}=\frac{1}{6}x \\ (x-2y)(x+1)=x^2-2. \end{cases}$

4 РЕШАВАЊЕ СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО МЕТОД НА ЗАМЕНА

Потсети се!

- Ако која било равенка од системот линеарни равенки се замени со друга равенка еквивалентна на неа се добива нов систем што е еквивалентен на дадениот.
- Кои два системи равенки се еквивалентни?
- Провери дали подредениот пар $(x,y)=(3,1)$ е решение на системите

$$\begin{cases} x-2y=1 \\ 2x+y=7 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x=2y+1 \\ 2(2y+1)+y=7. \end{cases}$$

- Реши ја равенката $2x+y=3$ по:
  а) непозната x; б) непозната y.

А 1 Дадени се системите:

а) $\begin{cases} 2x+y=5 \\ x-3y=-1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y=5-2x \\ x-3(5-2x)=-1. \end{cases}$

- Провери дали парот $(x,y)=(2,1)$ е решение на секој од дадените системи равенки.

Проследи го решението.

Со замена за $x=2$ и $y=1$ во секој од дадените системи имаме:

а) $\begin{cases} 2\cdot 2+1=5 \\ 2-3\cdot 1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5=5 \\ -1=-1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 1=5-2\cdot 2 \\ 2-3(5-2\cdot 2)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=5-4 \\ 2-3(5-4)=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=1 \\ -1=-1. \end{cases}$

Очигледно, подредениот пар $(2,1)$ е решение на двата системи.

- Разгледај ги равенките во дадените системи. Сигурно воочи дека:
- Првите равенки во двата системи се еквивалентни, т.е. $2x+y=5 \Leftrightarrow y=5-2x$.
- Во втората равенка на вториот систем непознатата y е заменета со изразот $5-2x$ добиен од првата равенка.
- Со оваа трансформација добивме систем што е еквивалентен со дадениот, а тоа ни го овозможува следната теорема:

Т. 4. Ако од едната равенка на системот, едната непозната (на пример y) може еднозначно да се изрази преку другата, а потоа со добиениот израз се замени таа непозната во другата равенка, тогаш новодобиената равенка и првата равенка од системот образуваат нов систем што е еквивалентен со дадениот.

- Примената на оваа теорема при решавањето на систем равенки е позната под името ***метод на замена***.

2 Реши го системот равенки $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x-2y=-1. \end{cases}$

Решение.

- Системот равенки е даден во нормален вид.
- Со примена на методот на замена ја изразуваме непознатата пред која коефициентот е 1 или -1, ако таков постои, па имаме:

$$\begin{cases} 3x-y=2 \\ x-2y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3(2y-1)-y=2 \\ x=2y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y-3-y=2 \\ x=2y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6y-y=2+3 \\ x=2y-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y=5 \\ x=2y-1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=2\cdot 1-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=1. \end{cases}$$ Решението на системот е парот $(x,y)=(1,1)$.

3 Реши го системот равенки $\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x-2y=8. \end{cases}$

Решение. Коефициентот пред која било непозната е различен од 1 и од -1, па сосема е сеедно која непозната ќе ја изразиме преку другата. Во овој случај имаме:

$$\begin{cases} 2x+3y=1 \\ 3x-2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=1-3y \\ 3x-2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-3y}{2} \\ 3\cdot\dfrac{1-3y}{2}-2y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-3y}{2} \\ \dfrac{3-9y}{2}-2y=8/\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-3y}{2} \\ 3-9y-4y=16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-3y}{2} \\ -13y=16-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-3y}{2} \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{1-3\cdot(-1)}{2} \\ y=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=-1. \end{cases}$$ Според тоа, решението е $(x,y)=(2,-1)$.

4 Реши го системот равенки: а) $\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-2y=7 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-3y=2 \\ -4x+5y=-10. \end{cases}$

5 Реши го системот равенки $\begin{cases} (x-1)(y+3)=xy+4 \\ \dfrac{x-2}{3}-\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{y-x}{6}-2. \end{cases}$

- Системот не е даден во општ вид, па со низа еквивалентни трансформации го сведуваме во општ вид.

Решение.

$$\begin{cases} (x-1)(y+3)=xy+4 \\ \dfrac{x-2}{3}-\dfrac{x+y}{2}=\dfrac{y-x}{6}-2/\cdot 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy+3x-y-3=xy+4 \\ 2(x-2)-3(x+y)=y-x-2\cdot 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=4+3 \\ 2x-4-3x-3y=y-x-12 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=7 \\ 2x-3x+x-3y-y=-12+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-y=7 \\ -4y=-8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2=7 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2. \end{cases}$$

Значи, решение на системот е парот $(x,y)=(3,2)$.

6 Одреди го решението на системот: а) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y}{6}=\frac{1}{6} \\ \frac{5x}{2}+\frac{y}{5}=-4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y-4}{2}=\frac{y+2}{6} \\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}. \end{cases}$

Ако по извршените трансформации на даден систем равенки со непознати x и y една од равенките е од видот $0\cdot x=k$ (или $0\cdot y=k$), каде што $k\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, тогаш таа равенка нема решение, па и ***системот равенки нема решение***, т.е. тој е ***невозможен*** или ***противречен***.

Ако, пак, системот не е противречен, една од равенките е од видот $0\cdot x=0$ (или $0\cdot y=0$), тогаш таа равенка има бесконечно многу решенија, па и ***системот равенки има бесконечно многу решенија***, т.е. тој е ***неопределен***.

7 Реши го системот равенки: а) $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ 6x+4y=8. \end{cases}$

Решение. а) $\begin{cases} x+2y=3 \\ x+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ 3-2y+2y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ 0\cdot y=5-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3-2y \\ 0\cdot y=2. \end{cases}$

Равенката $0\cdot y=2$ нема решение, па и системот нема решение, т.е. тој е невозможен.

б) $\begin{cases} 3x+2y=4 \\ 6x+4y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4-2y}{3} \\ 6\cdot\frac{4-2y}{3}+4y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4-2y}{3} \\ 0\cdot y=0. \end{cases}$ Равенката $0\cdot y=0$ има бесконечно многу решенија, т.е. за $y=k,\ k\in\mathbb{R},\ x=\frac{4-2k}{3}$, па решението е $(x,y)=\left\{\left(\frac{4-2k}{3},k\right) \mid k\in\mathbb{R}\right\}$.

Запомни!

Систем од две линеарни равенки со две непознати може:
- да има единствено решение;
- да има бесконечно многу решенија, т.е. да биде неопределен;
- да нема решение, т.е. да биде невозможен (или противречен).

Задачи

Реши го со метод на замена системот равенки:

1 а) $\begin{cases} 2x-3y=x-4 \\ y=2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x=3 \\ 3y-x=y+2. \end{cases}$

2 а) $\begin{cases} x-2y=3 \\ 2x+y=-1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x-2y+7=0 \\ x+2y+1=0. \end{cases}$

3 а) $\begin{cases} 3x-4y=5 \\ 4x+2y=3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x-2y-2=0 \\ 3x-4y+10=0. \end{cases}$

4 а) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y+5}{2}=1 \\ y=\frac{x+1}{2} \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x+1}{3}-\frac{y+1}{2}=\frac{x-y}{3} \\ \frac{x-3}{4}-\frac{y-3}{2}=2y. \end{cases}$

5 а) $\begin{cases} \frac{x-y}{4}+\frac{2x-y}{2}=\frac{7}{4} \\ \frac{2x-4}{3}+\frac{x-2y}{5}=-\frac{7}{5} \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x+3=3y-2 \\ x(2y-5)-2y(x+3)=2x+1. \end{cases}$

6 а) $\begin{cases} x-2y=4 \\ -3x+6y=-12 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-y=3 \\ 4x-2y=5. \end{cases}$

5 РЕШАВАЊЕ СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО МЕТОД НА СПРОТИВНИ КОЕФИЦИЕНТИ

Потсети се!

- Броевите 5 и -5; -12 и 12; $3{,}5$ и $-3{,}5$ се спротивни броеви.
- Збирот на два спротивни броеви е еднаков на нула, на пример $5+(-5)=0$; $-12+12=0$.
- На мономот $2x$ спротивен моном е $-2x$; на $-5x$ спротивен е мономот $5x$.
- Колку е збирот на два спротивни мономи?
- Провери дали подредениот пар $(x,y)=(2,0)$ е решение на системите

$\begin{cases} 3x+2y=6 \\ x-2y=2 \end{cases}$ и $\begin{cases} 3x+2y=6 \\ 3x+2y+(x-2y)=6+2. \end{cases}$

- Ако $a=b$ и $c=d$, тогаш $a+c=b+d$.

А 1 Разгледај ги системите равенки

$\begin{cases} 5x-3y=11 \\ -x+3y=5 \end{cases}$ и $\begin{cases} 5x-3y=11 \\ 5x-3y+(-x+3y)=11+5. \end{cases}$

- Покажи дека парот $(x,y)=(4,3)$ е решение на двата системи.
- Со замена за $x=4$ и $y=3$ сигурно утврди дека парот $(4,3)$ е решение на двата системи.
- Воочи ги првите равенки во системите.
- Првите равенки во дадените системи се исти.

- Втората равенка на вториот систем е добиена со собирање на левите и десните страни на првата и втората равенка од првиот систем користејќи го својството: ако $a=b$ и $c=d$, тогаш $a+c=b+d$.
- Со оваа трансформација е добиен систем равенки што е еквивалентен на дадениот, а тоа ни го овозможува следната теорема:

Т. 5. Системот равенки $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ е еквивалентен со системот равенки

$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_1x+b_1y+k(a_2x+b_2y)=c_1+kc_2, \end{cases}$ каде што k е кој било реален број или израз што не зависи од непознатите x и y.

- Примената на оваа теорема при решавањето на систем равенки е позната под името ***метод на спротивни коефициенти***.

2 Одреди го решението на системот равенки $\begin{cases} 4x-3y=2 \\ -4x+5y=8 \end{cases}$ со методот на спротивни коефициенти.

Проследи го решението.

- Системот равенки е даден во општ вид.
- Коефициентите пред непознатата x се спротивни броеви, па имаме:

$$\begin{cases} 4x-3y=2 \\ -4x+5y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=2 \\ 4x-3y+(-4x)+5y=2+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3y=2 \\ 2y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-3\cdot 5=2 \\ y=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4\frac{1}{4} \\ y=5. \end{cases}$$

Решение на системот е парот $(x,y)=\left(4\frac{1}{4},5\right)$.

3 Со примена на методот на спротивни коефициенти реши го системот равенки:

а) $\begin{cases} 3x+5y=19 \\ 2x-5y=6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 3x+y=9. \end{cases}$

4 Реши го системот равенки $\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+2y=4. \end{cases}$

Твоето решение спореди го со следното:

- Системот равенки е даден во општ вид.
- Коефициентите пред иста непозната не се спротивни броеви.
- Едната (или двете) равенки на системот ги множиме со избран број, така што коефициентите пред иста непозната да бидат спротивни броеви. За таа цел имаме:

$$\begin{cases} x+y=5/\cdot(-2) \\ 3x+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-2y=-10 \\ 3x+2y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-2y=-10 \\ -2x-2y+3x+2y=-10+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x-2y=-10 \\ x=-6 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2\cdot(-6)-2y=-10 \\ x=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=11 \\ x=-6. \end{cases}$$ Решение на системот е парот $(x,y)=(-6,11)$.

Воочи дека системот можеш да го решиш и ако првата равенка ја помножиш со -3.

- Реши го системот во овој случај.

5 Со примена на методот на спротивни коефициенти реши го системот равенки:

а) $\begin{cases} 2x+6y=3 \\ 3x+2y=-6 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 0,5x+0,2y=3 \\ x+y=0. \end{cases}$

6 Со методот на спротивни коефициенти реши го системот равенки $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=\frac{1}{3} \\ \frac{x-1}{3}+\frac{y-2}{2}=\frac{2}{3}. \end{cases}$

Проследи ја постапката.

- Дадениот систем го трансформираме во нормален вид и имаме:

$$\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=\frac{1}{3}/\cdot 6 \\ \frac{x-1}{3}+\frac{y-2}{2}=\frac{2}{3}/\cdot 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2(x-1)+3(y-2)=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2y=2 \\ 2x+3y=12. \end{cases}$$

Првата равенка ја множиме со 3, а втората со 2 и добиваме:

$$\begin{cases} 3x-2y=2/\cdot 3 \\ 2x+3y=12/\cdot 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-6y=6 \\ 4x+6y=24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x-6y=6 \\ 9x-6y+4x+6y=6+24 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9\cdot\frac{30}{13}-6y=6 \\ x=\frac{30}{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{32}{13} \\ x=\frac{30}{13}. \end{cases}$$

Решение на системот е парот $(x,y)=\left(\frac{30}{13},\frac{32}{13}\right)$.

- Реши го системот множејќи ја првата равенка со -2, а втората со 3.

7 Со методот на спротивни коефициенти реши го системот равенки:

а) $\begin{cases} (x-1)(y+3)=xy+2 \\ (x+5)(y-3)=xy+2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x}{3}+\frac{y-4}{2}=\frac{y+2}{6} \\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{3}. \end{cases}$

8 Системот равенки $\begin{cases} mx+y=1 \\ 2x+y=2 \end{cases}$ реши го со методот на спротивни коефициенти.

Решение.

- Првата равенка во системот содржи параметар m.
- Параметар е константа која може да има различни вредности, зависно од условот на задачата.

$$\begin{cases} mx+y=1/\cdot(-1) \\ 2x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -mx-y=-1 \\ 2x+y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -mx-y=-1/\cdot(-1) \\ -mx-y+2x+y=-1+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx+y=1 \\ (2-m)x=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\cdot\frac{1}{2-m}+y=1 \\ x=\frac{1}{2-m} \end{cases}, \ (2-m\neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} y=1-\frac{m}{2-m} \\ x=\frac{1}{2-m} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\frac{2-2m}{2-m} \\ x=\frac{1}{2-m} \end{cases}, \ m\neq 2.$$

Решение на системот е парот $(x,y)=\left(\frac{1}{2-m},\frac{2-2m}{2-m}\right)$, за $m\neq 2$.

- Зошто е потребен условот $2-m\neq 0$, т.е. $m\neq 2$?
- Ако $m=2$, тогаш равенката $(2-m)x=1$ е од видот $0\cdot x=1$ која нема решение, па и системот за $m=2$ нема решение, т.е. е противречен.

9 Реши го системот равенки $\begin{cases} ax+y=6 \\ 2x+y=a \end{cases}$, каде што a е параметар.

Задачи

Реши го системот равенки со методот на спротивни коефициенти:

1 а) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 5x-y=4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x+4y=-1 \\ 2x-y=3 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x-2y=-5 \\ -2x+y=1. \end{cases}$

2 а) $\begin{cases} 3x=2y-9 \\ x=2+y \end{cases}$; б) $\begin{cases} 15x+23y+10=0 \\ 3x+4y+2=0. \end{cases}$

3 а) $\begin{cases} (x-1)(y+2)=(x-2)(y+5) \\ (x+4)(y-3)-(x+7)(y-4)=0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} (x+3)(x-1)=x^2+4y+5 \\ (3x+2)(x-3)=3x^2-14y+15. \end{cases}$

4 а) $\begin{cases} \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=2 \\ \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{x}{6}-\frac{y}{9}=-1 \\ \frac{5x}{9}+\frac{4y}{6}=15\frac{1}{3} \end{cases}$;

в) $\begin{cases} \frac{6x+5y}{8}=2 \\ \frac{6x+y}{8}=1. \end{cases}$

5 а) $\begin{cases} \frac{2x-1}{5}+\frac{3y+2}{4}=2 \\ \frac{3x+1}{5}-\frac{3y+2}{4}=0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} (x-1)^2+2(y-1)=(x-2)^2-1 \\ (y-1)^2-y(y-3)+x=3. \end{cases}$

6 а) $\begin{cases} x:(x+3)=(y-2):(y+4) \\ 2y-5x=9 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} (x-1):(y+2)=1:2 \\ x:y=3:4. \end{cases}$

7 Реши го системот равенки и испитај го неговото решение во зависност од параметарот:

а) $\begin{cases} ax+y=5a \\ x+2y=3a \end{cases}$; б) $\begin{cases} ax+2ay=5 \\ x+y=3 \end{cases}$;

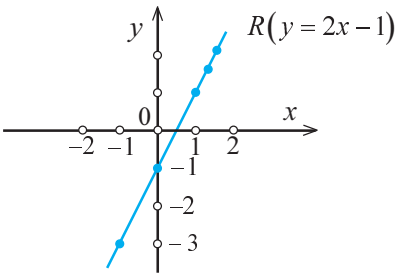
в) $\begin{cases} x+y=k \\ kx+y=1. \end{cases}$

6 ГРАФИЧКО РЕШАВАЊЕ НА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

Потсети се!

- Графикот на линеарната фунција $y = ax + b$ е множеството $G = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y = ax + b\}$.
- $y = 2x - 1$ е линеарна функција, а нејзиниот график е прикажан на цртежот.

x	y
-1	[illegible]
0	-1
1	1



- Секоја линеарна равенка со две непознати $ax + by = c$, ако $a \neq 0$ или $b \neq 0$ определува линеарна функција.
- Што претставува графикот на линеарна равенка со две непознати?
- Што претставуваат координатите на точките од графикот на линеарна равенка со две непознати за таа равенка?

А 1 Во ист координатен систем нацртај ги графиците на линеарните функции определени со равенките на системот $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x - y = 4. \end{cases}$

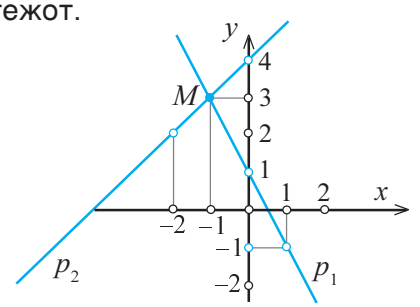
- Со равенките на системот се определени линеарните функции

$y = -2x + 1$ и $y = x + 4.$

x	y
0	1
1	-1

x	y
0	4
-2	2

- Графиците на равенките се дадени на цртежот.



- Множество решенија на првата равенка од дадениот систем равенки се координатите на секоја точка од правата p_1, а множество решенија на втората равенка се координатите на секоја точка од правата p_2.
- Точката $M(-1, 3)$ е пресечна точка на правите p_1 и p_2, па нејзините координати припаѓаат на пресекот од множествата решенија на двете равенки.

Според тоа, парот $(x, y) = (-1, 3)$ е единствено решение на дадениот систем равенки.

- За графички да се реши систем од две линеарни равенки со две непознати треба:
  - да се претстават графички линеарните функции определени со равенките на системот;
  - да се одредат координатите на пресечната точка на правите, ако таква постои.

2 Реши го графички системот равенки:

а) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - 2y = -1. \end{cases}$

Потсети се!

- Две прави во рамнината може:
  - да се сечат;
  - да се паралелни и различни;
  - да се совпаѓаат.

- Системот од две линеарни равенки со две непознати има толку решенија, колку што заеднички точки имаат графиците на функциите дадени со неговите равенки.

3 Графички реши го системот равенки:

а) $\begin{cases} x+2y=5 \\ x-y=-1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x+3y=2 \\ x+3y=-5. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x+2y=3 \\ 2x+4y=6 \end{cases}$;

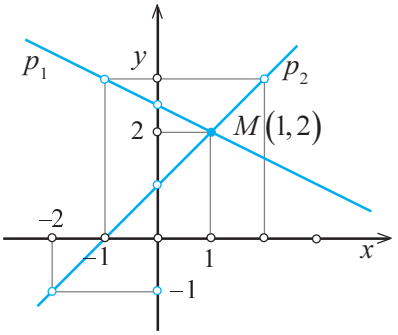
Проследи го решението.

а) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$.

x	-1	0	1
y	3	$2\frac{1}{2}$	2

$y=x+1$.

x	-2	0	2
y	-1	1	3



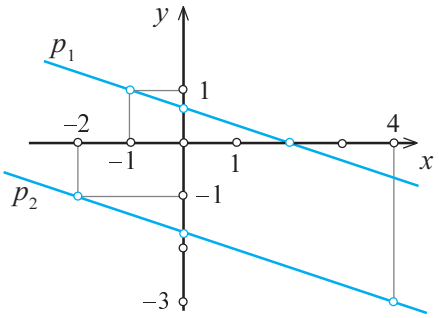
Графиците на функциите дадени со равенките на системот се правите p_1 и p_2 коишто се сечат во точката $M(1,2)$, па решение на системот е парот $(x,y)=(1,2)$.

б) $y=\frac{2-x}{3}$.

x	-1	0	2
y	1	$\frac{2}{3}$	0

$y=\frac{-5-x}{3}$.

x	-2	0	4
y	-1	$-\frac{5}{3}$	-3



Графиците на функциите дадени со равенките на системот немаат заеднички точки, па системот нема решение.

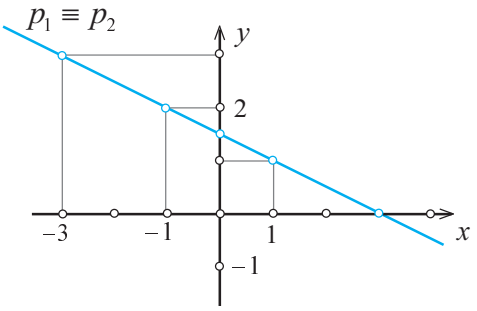
в) $y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

x	-1	0	1
y	2	$\frac{3}{2}$	1

$y=-\frac{2}{4}x+\frac{6}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$.

x	-3	0	3
y	3	$\frac{3}{2}$	0



Графиците на функциите дадени со равенките на системот се совпаѓаат, па системот има бесконечно многу решенија, т.е. $M=\left\{(x,y) \mid x\in\mathbb{R},\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right\}$.

Воочи дека решението на систем линеарни равенки со две непознати зависи од односот на коефициентите пред иста непозната и односот на слободните членови:

а) $\frac{1}{1} \neq \frac{2}{-1}$, т.е. $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, системот има единствено решение;

б) $\frac{1}{1} = \frac{3}{3} \neq \frac{2}{-5}$, т.е. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, системот нема решение;

в) $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6}$, т.е. $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, системот има бесконечно многу решенија.

Запомни!

Системот равенки $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$:

- има единствено решение, т.е. е определен ако $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$;
- нема решение, т.е. е противречен ако $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$;
- има бесконечно многу решенија, т.е. е неопределен ако $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

4 Со споредување на коефициентите испитај од кој вид е системот равенки:

а) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x + 2y = -1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x - 2y = 2 \\ x - 2y = 3 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 6x + 9y = 12. \end{cases}$

Решение. а) Имаме: $a_1 = 3,\ b_1 = -1,\ c_1 = 2,\ a_2 = 1,\ b_2 = 2,\ c_2 = -1,$ па $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, т.е. $\frac{3}{1} \neq \frac{-1}{2}$.

Значи, системот равенки има единствено решение.

б) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, т.е. $\frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{2}{3}$. Значи, системот равенки нема решение.

в) $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, т.е. $\frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, па системот равенки има бесконечно многу решенија.

5 Даден е системот равенки: а) $\begin{cases} x - y = 2 \\ 2x - 2y = 4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 4x + 2y = 1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y = 0. \end{cases}$

Со споредување на коефициентите испитај од кој вид е дадениот систем. Добиениот одговор провери го со графичко решавање на системот.

6 Одреди ја вредноста на параметарот така што системот равенки:

а) $\begin{cases} kx+(k+1)y=3 \\ 2x+3y=k-1 \end{cases}$ да има единствено решение;

б) $\begin{cases} (1+2k)x+5y=7 \\ (2+k)x+4y=8 \end{cases}$ да нема решение; в) $\begin{cases} 5x+3y=k \\ 10x+my=8 \end{cases}$ да е неопределен.

Соѓледај ѓо решениешо.

а) Системот има единствено решение ако $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$, т.е. $\frac{k}{2} \neq \frac{k+1}{3}$. Оттука следува дека $3k \neq 2(k+1)$ или $3k-2k \neq 2$, т.е. $k \neq 2$.

б) Системот нема решение ако $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$, т.е. $\frac{1+2k}{2+k} = \frac{5}{4} \neq \frac{7}{8}$. Од $\frac{1+2k}{2+k} = \frac{5}{4}$ добиваме $4(1+2k)=5(2+k)$, т.е. $k=2$.

б) Системот е неопределен ако $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, т.е. $\frac{5}{10} = \frac{3}{m} = \frac{k}{8}$. Од $\frac{5}{10} = \frac{3}{m}$ добиваме $m=6$, а од $\frac{5}{10} = \frac{k}{8}$ добиваме $k=4$.

7 **Т** Од местото A кон местото B тргнува воз кој се движи со брзина $v_A = 110$ km/h. Во исто време од местото B кон A тргнува воз кој се движи со брзина $v_B = 60$ km/h. На кое растојание од местото A возовите ќе се разминат, ако растојанието од A до B е 85 km? Одговорот прикажи го графички.

Твоешо решение сѓореди ѓо со следношо.

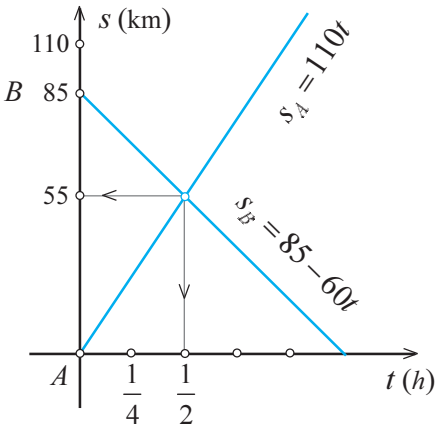
Нека t е времето поминато од поаѓањето на возовите до нивното разминување. За тоа време едниот воз ќе помине пат $s_A = 110 \cdot t$, а другиот $s_B = 60 \cdot t$. Од условот $s_A + s_B = 85$, т.е. $110t + 60t = 85$ следува дека $t = \frac{1}{2}$, па $s_A = 110 \cdot \frac{1}{2} = 55$. Значи, возовите ќе се разминат после $\frac{1}{2}$ h од тргнувањето и на растојание 55 km од местото A.

Равенката на движењето е $s = s_0 \pm v \cdot t$, каде што s_0 е почетната положба, v е брзината и t е времето на движење. Според тоа имаме:

$x_A = v_A \cdot t = 110t$ и $x_B = 85 - 60t$.

t	0	1
x_A	0	110

t	0	$\frac{1}{4}$	1
x_A	85	70	25



Воочи дека графиците на функциите на движењето се прави. Координатите на нивната пресечна точка ги определуваат моментот на разминување и изминатиот пат до тој момент, т.е.

$$t = \frac{1}{2}\ \text{h} \quad \text{и} \quad s_A = 55\ \text{km}.$$

Задачи

Графички реши го системот равенки $(1-2)$:

1 а) $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=3 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x-y=2 \\ x+2y=3 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y=2. \end{cases}$

2 а) $\begin{cases} x+y=1 \\ x=-1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y+2=3 \\ x-2y=3 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x=2 \\ y=-3. \end{cases}$

3 Со графички метод на решавање провери кој од дадените системи равенки е определен, противречен или неопределен:

а) $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=-2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} -x+2y=1 \\ 2x-4y=-2 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 2x+y=3 \\ x-\frac{1}{2}y=\frac{5}{2}. \end{cases}$

4 Со споредување на соодветните коефициенти утврди кој од системите равенки е определен, неопределен или противречен:

а) $\begin{cases} 4x+6y=3 \\ 6x+9y=4{,}5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x-3y=4 \\ 4x+6y=5 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 4x-6y=7 \\ 8x-12y=15. \end{cases}$

5 Одреди ги вредностите на параметарот m за кои системот равенки $\begin{cases} x+my=4 \\ x-2y=3 \end{cases}$:

а) нема решение;

б) има единствено решение; во тој случај одреди го решението на системот.

6 За која вредност на параметарот a системот равенки $\begin{cases} x-2y=3 \\ x+ay=a+5 \end{cases}$ е неопределен?

7 Даден е системот равенки $\begin{cases} 3x-ky=m \\ x+2y=3. \end{cases}$ За кои вредности на параметрите k и m дадениот систем:

а) има само едно решение;

а) нема решение;

а) има бесконечно многу решенија?

7 ПРИМЕНА НА СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

- Запиши систем линеарни равенки со две непознати што следува од реченицата: „Збирот на два броја е 30, а разликата меѓу половината на првиот број и третината на вториот број е 5”.

- $\begin{cases} x+y=30 \\ \frac{x}{2}-\frac{y}{3}=5. \end{cases}$ е бараниот систем равенки.

- Провери дали парот $(x,y)=(18,12)$ е решение на системот, односно дали бараните броеви се 18 и 12.

Решавањето на различни задачи од математика, други науки или проблеми од практиката многу често се сведува на составување и решавање на некој систем од линеарни равенки со две непознати. За таа цел, во овој дел преку неколку задачи ќе покажеме како се поставуваат и решаваат некои проблеми.

1 Ако некој број се подели со друг број ќе се добие количник 2 и остаток 2. Ако, пак, нивниот збир се подели со нивната разлика, тогаш ќе се добие количник 2 и остаток 8. Кои се тие броеви?

Проследи го решението. Нека x и y се бараните броеви.

- Од првиот услов на задачата имаме $x:y=2$ и остаток 2, т.е. $x=2y+2$.
- Од вториот услов на задачата имаме $(x+y):(x-y)=2$ и остаток 8, т.е. $x+y=2(x-y)+8$.

Бидејќи за добиените равенки се бара заедничко решение го формираме системот равенки:

$$\begin{cases} x=2y+2 \\ x+y=2(x-y)+8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+2 \\ -x+3y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2y+2 \\ -(2y+2)+3y=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2\cdot 10+2 \\ y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=22 \\ y=10. \end{cases}$$

Решение на системот е парот $(x,y)=(22,10)$.

- По одредувањето на решението на системот равенки треба да се провери дали тоа решение ги задоволува условите на задачата.

Проверка: Од $22:10=2$ и остаток 2 и $(22+10):(22-10)=32:12=2$ и остаток 8 следува дека условот е задоволен, па бараните броеви се 22 и 10.

2 Таткото сака на своите деца да им подели одреден број јаболка. Ако на секое дете му даде по 5 јаболка, тогаш ќе му останат 3 јаболка, а ако на секое дете му даде по 6 јаболка, тогаш ќе му недостасува едно јаболко. Колку деца има таткото, а колку јаболка?

Решение. Ако таткото има x деца и y јаболка, тогаш:

$$\begin{cases} x\cdot 5=y-3 \\ x\cdot 6=y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-y=-3 \\ 6x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ y=23. \end{cases}$$ Решение на системот е парот $(x,y)=(4,23)$.

Проверка: Ако на 4 деца подели по 5 јаболка, тогаш ќе подели вкупно $4\cdot 5=20$ јаболка, па ќе му останат $23-20=3$ јаболка. Ако, пак, на секое дете му даде по 6 јаболка, тогаш треба да подели $4\cdot 6=24$ јаболка, па му недостига едно јаболко. Според тоа, таткото има 4 деца и 23 јаболка.

3 На прашањето колку години има синот, таткото одговорил: „Пред 5 години бев 5 пати постар од својот син, а по 3 години ќе бидам само 3 пати постар од него".
Колку години има таткото, а колку синот?

Соѓледај ѓо решениешо. Нека таткото сега има x години, а синот y години. Тогаш имаме:

$$\begin{cases} x-5=5(y-5) \\ x+3=3(y+3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-5y=-20 \\ x-3y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=45 \\ y=13. \end{cases}$$

Проверка: Пред 5 години таткото имал 40 години, а синот $13-5=8$ години, па $5\cdot 8=40.$ По 3 години таткото ќе има $45+3=48,$ а синот $13+3=16,$ па $3\cdot 16=48.$ Значи, сега таткото има 45 години, а синот 13 години.

4 **T** Моторен чамец изминал 63 km за 5 часа движејќи се спроти течението на реката. Истото растојание по течението на реката го поминал за 3 часа. Колкава е брзината на чамецот, а колкава на реката?

Решение. Нека x е брзината на чамецот, а y брзината на реката. Тогаш изминатиот пат спроти течението на реката е $(x-y)\cdot 5=63,$ а по течението е $(x+y)\cdot 3=63.$ Оттука следува системот равенки $\begin{cases} (x-y)\cdot 5=63 \\ (x+y)\cdot 3=63 \end{cases},$ чие решение е парот $(x,y)=(16{,}8;4{,}2).$ Значи, брзината на чамецот е 16,8 km/h, а на реката 4,2 km/h.

5 **E** Ако се помешаат 15 литри топла вода со 5 литри ладна вода, тогаш мешавината ќе има температура 66 ^{0}C. Ако, пак, се помешаат 12 литри топла со 8 литри ладна вода, тогаш мешавината ќе има температура 57 ^{0}C. Колкава е температурата на топлата вода, а колкава на ладната?

Решение. Задачата ќе ја решиме со изедначување на топлинската енергија. Нека x е степен на загреаност на топлата вода, а y на ладната вода. Тогаш имаме:

$$\begin{cases} 15\cdot x+5\cdot y=(15+5)\cdot 66 \\ 12\cdot x+8\cdot y=(12+8)\cdot 57 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x+y=264 \\ 3x+2y=285 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=81 \\ y=21. \end{cases}$$

Значи, топлата вода имала 81 ^{0}C, а ладната 21 ^{0}C.

6 **3** Еден аптекар располага со два вида хидроген, еден со јачина 7%, а друг 12%. Колку треба да земе од секој вид ако сака да добие еден литар хидроген со јачина 10%?

Решение. Нека x е количината на хидрогенот со јачина 7%, а y со јачина 12%. Тогаш системот равенки е $\begin{cases} x+y=1 \\ x\cdot 0,7+y\cdot 1,2=0,1\cdot 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ 7x+12y=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0,4 \\ y=0,6. \end{cases}$

Решение е парот $(x,y)=(0,4;0,6)$. Бараните количини хидроген се $0,4\,\ell$ и $0,6\,\ell$.

Задачи

1 Разликата на два броја е 28. Ако од бројот што е 5 пати поголем од првиот број се одземе бројот што е 6 пати поголем од вториот број, тогаш ќе се добие бројот 5. Кои се тие броеви?

2 Збирот на цифрите на еден двоцифрен број е еднаков на 11. Ако на дадениот број се додаде бројот 27, тогаш ќе се добие двоцифрен број што е запишан со истите цифри, но во обратен ред. Кој е тој двоцифрен број?

3 На писмениот испит ученикот треба да одговори на 20 прашања. За секој точен одговор ученикот добива 4 поени, а за секој неточен одговор губи 2 поени. Еден ученик освоил 38 поени. На колку прашања тој ученик точно одговорил?

4 Мајка и ќерка заедно имаат 37 години. Пред 2 години мајката била 10 пати постара од ќерката. Колку години има мајката, а колку ќерката?

5 **T** Местата A, B и C се наоѓаат по ред на ист пат и растојанието меѓу A и B е 80 km. Од местото A кон C тргнува мотоциклист кој се движи со брзина 50 km/h. Во исто време и во иста насока од местото B тргнува камион кој се движи со брзина 30 km/h. По колку време од тргнувањето и на кое растојание од местото A мотоциклистот ќе го стигне камионот? Решението претстави го графички.

6 **T** Два преносни запчаници имаат вкупно 104 запци, а бројот на запците се однесуваат како $5:8$. Ако поголемиот запчаник прави 50 завртувања во една минута, тогаш колку завртувања во една минута прави помалиот запчаник?

7 **T** Движењето на една материјална точка се опишува со равенките $y=1+2t$ и $x=2+t$, каде што растојанијата x и y се мерат во метри, а времето t во секунди.

а) Одреди ја равенката на движењето $y=y(x)$.

б) Нацртај ја траекторијата на движењето во координатна рамнина xOy.

в) Одреди ја положбата на материјалната точка за $t=0$.

г) Одреди ја брзината на движењето.

8 **E** Една стока се продава по цена од 35 денари за килограм, а друга по 48 денари за килограм. Колку килограми трговецот треба да земе од едната, а колку од другата стока за да добие 260 kg мешавина која ќе се продава по 40 денари за килограм? (При мешањето на стоките со различен квалитет трговецот не смее да има загуба, ниту добивка.)

9 **E** Една легура од цинк и сребро содржи 76% сребро, а друга таква легура содржи 88% сребро. Колку треба да се земе од првата легура, а колку од втората легура, за да се добие парче од $10,5$ kg кое ќе содржи 84% сребро?

10 **E** Двајца работници можат да завршат една работа за 12 дена. По 5 дена заедничка работа, едниот работник се разболел, па другиот работник треба сам да ја доврши работата за наредните $17,5$ дена. За колку дена може целата работа да ја заврши сам секој работник?

11 **E** Еден бизнисмен инвестирал вкупно 120000 евра во две компании, во првата со годишна камата од $10{,}5\%$, а во втората со 12%. На тој начин остварил годишен профит од 13800 евра. Колкава сума инвестирал во секоја компанија?

12 **E** Еден ден директорот на хотелот го прашува рецепционерот: „Колку гости има во хотелот"? Рецепционерот одговорил: „Ако си заминат 50 гости, тогаш половина кревети ќе бидат празни, а ако дојдат 80 гости, тогаш за 30 гости ќе нема место". Колку гости и колку кревети има во хотелот?

13 **3** Еден аптекар располага со два вида хидроген, еден со јачина 10%, а друг 15%. Колку треба да земе од секој вид ако сака да добие еден литар хидроген со јачина 12%?

14 **3** Една легура содржи злато и сребро во однос $7:4$, а во неа има $0{,}56\ \text{kg}$ злато. Колкава маса има таа легура?

15 **3** Една фарма има ливада во форма на правоаголник засеана со трева. Периметарот на ливадата е $700\ \text{m}$, а нејзината должина е за $50\ \text{m}$ поголема од ширината. Од $1\ \text{ar}$ од ливадата се добиваат $50\ \text{kg}$ сено, а за исхрана на една крава за еден месец се трошат $150\ \text{kg}$ сено. Колку време фармата може да прехрани 15 крави со храната собрана од ливадата?

8 ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1 Дадена е равенката $2x-3y=5$. Кој од подредените парови е решение на дадената равенка?

а) $(4,1)$; б) $\left(\frac{1}{2},2\right)$; в) $(1,-1)$; г) $(-1,1)$.

2 Одреди ја вредноста на параметарот k, така што парот $(2,-3)$ да е решение на равенката $(2k-1)x+3y=1$.

3 Дадена е равенката $3x+2y=6$. Одреди ја вредноста на:

а) x, ако $y=3$; б) y, ако $x=-2$.

4 Одреди го множеството решенија на равенката: а) $2x+y=-1$; б) $2x-y=\frac{y}{2}+1$.

5 Нацртај го графикот на функцијата определена со равенката:

а) $2x+y+1=0$; б) $x-2y-1=0$; в) $y+2=0$.

6 Провери дали точката $A(3,-2)$ лежи на графикот на функцијата дадена со равенката:

а) $2x-y=8$; б) $x+2y=1$.

7 Запиши го во општ вид системот равенки:

а) $\begin{cases} \frac{2}{3}x+y=5 \\ x-2=\frac{1}{2}y \end{cases}$; б) $\begin{cases} \frac{3x-y}{3}-\frac{x-3y}{6}=y-\frac{5}{2} \\ (x-2)(y+3)=xy. \end{cases}$

8 Даден е системот равенки $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 3y = -2. \end{cases}$ Кој од подредените парови е решение на системот?

а) $(-1,1)$; б) $(1,-1)$; в) $(-5,1)$.

Реши го системот равенки $(9-11)$:

9 $\begin{cases} \dfrac{5x-5}{3} - y = 7 \\ 3x + y - 24 = 0 \end{cases}$ со метод на замена.

10 $\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{x-y}{6} \\ (x-2)^2 + 3y = x^2 \end{cases}$ со метод на спротивни коефициенти.

11 $\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ со графички метод.

12 Со споредување на коефициентите во равенките провери кој од системите равенки има единствено решение: а) $\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ x - 2y = -2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ x + 2y = 2 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 2x - 4y = 4 \\ x - 2y = 2. \end{cases}$

13 Одреди го параметарот k така што системот равенки $\begin{cases} (k-2)x + 3y = 1 \\ kx - y = 5 \end{cases}$:

а) да има единствено решение; б) да нема решение.

14 **3** Возрасен човек со нормален раст има околу 6 литри крв. Крвта на човекот содржи 83% течности, а коските содржат 22% вода. Ако во крвта и во сите коски на еден човек има вкупно $8{,}5$ литри течности, тогаш колкава е масата на коските на тој човек?

15 **E** Еден трговец за 6500 денари купил портокали по 20 денари за килограм и мандарини по цена од 28 денари за килограм. Од портокалите фрлил 10%, а од мандарините 16%. Продавајќи ги портокалите по 40 денари за килограм, а мандарините по 50 денари за килограм, трговецот заработил 3940 денари. Колку килограми портокали, а колку килограми мандарини купил трговецот?

9 ЗАДАЧИ ЗА САМОПРОВЕРКА

1 Подредениот пар $(2, y)$ е решение на равенката $2x + y = 3$ ако y е:

а) 1; б) -1; в) -7; г) 5. 1

2 Подредениот пар $(x, y) = (-1, 2)$ е решение на равенката $2x - 3ky = 4$ ако вредноста на параметарот k е: а) 1; б) 2; в) -1; г) 0. 1

3 Решение на системот равенки $\begin{cases} x+2y=4 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ е подредениот пар:

а) $(-2,1)$; б) $(2,-1)$; в) $(-2,-1)$; г) $(2,1)$. 1

4 Системот равенки $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x+3y=-1 \end{cases}$ е: а) противречен; б) неопределен; в) определен. 1

5 Системот равенки $\begin{cases} kx+6y=2 \\ x+3y=-1 \end{cases}$ е противречен ако параметарот k е:

а) $k=2$; б) $k\neq 2$; в) $k=-1$; г) $k=3$. 1

6 Ако графиците на функциите определени со равенките на системот $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ се совпаѓаат, тогаш системот е: а) определен; б) неопределен; в) противречен. 1

7 Две линеарни равенки со две непознати се еквивалентни ако имаат _____ множества решенија. 2

8 Линеарна равенка $ax+by=c$ нема решение ако _____. 2

9 Множеството решенија на равенката $-2x+y=1$ е $M=\{\qquad\qquad\}$. 2

10 Ако графиците на равенките од системот се сечат, тогаш решение на системот е _____. 2

11 Системот равенки $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ има бесконечно многу решенија ако коефициентите го задоволуваат условот _____. 2

12 Сведи ја во општ вид равенката $\frac{2x-3}{2}-\frac{x+y}{3}=x-2$. 3

13 Сведи го во општ вид системот равенки $\begin{cases} (x-2)(y+3)=xy \\ (x-1)^2+(y+1)^2=x^2+y^2. \end{cases}$ 3

14 Со метод на спротивни коефициенти реши го системот равенки $\begin{cases} x+y=5-x \\ \frac{x-2y}{4}+\frac{x-y}{2}=\frac{1}{2}. \end{cases}$ 3

15 Дадени се два броја. Разликата на првиот и вториот е 5, а збирот на вториот број и бројот што е двапати поголем од првиот број е 43. Одреди ги тие броеви. 3

16 Моторен чамец се движи по течението на реката и растојанието од 150 km меѓу две пристаништа го поминува за 2 часа, а истото растојание спроти течението на реката го поминува за 3 часа. Одреди ги брзината на чамецот и брзината на реката. 3

ТЕМА 2

КОРЕНУВАЊЕ

Т

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1 Поим за корен 36

2 Степен со показател рационален број. Својства на корените 40

3 Трансформација на корените 45

4 Собирање и одземање на корени 48

5 Множење, делење, степенување и коренување на корени 50

6 Рационализирање на именителот на дропка 53

7 Ирационални изрази 55

8 Задачи за повторување и утврдување 57

9 Задачи за самопроверка 58

1 ПОИМ ЗА КОРЕН

Потсети се!

- За $a=2$ и $n\in\{-2,-1,0,1,2\}$ одреди ја вредноста на x, ако $x=a^n$.
- Која операција користеше за да ја одредиш вредноста на x?

А

1 Плоштината на еден квадрат е $16\,\text{cm}^2$. Одреди ја должината на страната на квадратот.

2 Волуменот на една коцка е $125\,\text{cm}^3$. Одреди ја должината на работ на коцката.

- Плоштината на квадрат со страна a се пресметува со формулата $P=a^2$, а волуменот на коцка со раб a се пресметува со формулата $V=a^3$.
  За да ја пресметаме должината на страната на квадратот, односно должината на работ на коцката, треба да ја решиме равенката $a^2=16$, односно равенката $a^3=125$.
- Решение на равенката $a^2=16$ е $a=4$ или $a=-4$, а решение на равенката $a^3=125$ е $a=5$. Според тоа, страната на квадратот е $a=4\,\text{cm}$, а работ на коцката е $a=5\,\text{cm}$.
- Зошто решението $a=-4$ на равенката $a^2=16$ не е решение на задачата, иако $(-4)^2=16$?
- Решение на равенката $x^3=27$ е $x=3$, бидејќи $3^3=27$; решение на равенката $x^3=-27$ е $x=-3$, бидејќи $(-3)^3=-27$.

За решенијата на равенката $x^n=a$ важи следната основна теорема (којашто ја даваме без доказ).

Теорема. За секој позитивен реален број a и секој природен број n постои единствен позитивен реален број x што е решение на равенката $x^n=a$.

- Кој позитивен реален број е решение на равенката: а) $x^3=27$; б) $x^6=64$; в) $x^2=49$?

Претходната теорема не ја исклучува можноста дека во множеството на реалните негативни броеви постои број што ја задоволува равенката $x^n=a$.

3 Одреди ги (корените) решенијата на равенката:
а) $x^3=-64$; б) $x^3=64$; в) $x^5=-32$; г) $x^3=125$.

Решение. а) $x=-4$, бидејќи $(-4)^3=-64$; г) $x=5$, бидејќи $5^3=125$.

Запомни!

За секој реален број a и секој непарен природен број $n = 2k+1,\ k \in \mathbb{N},$ постои единствен реален број x, таков што $x^{2k+1} = a.$

Значи, кога n е непарен природен број, секогаш постои единствен број што е решение на равенката $x^n = a$ и тој број го означуваме со $\sqrt[n]{a}.$

На пример: а) Записот $\sqrt[3]{27}$ означува трети корен од 27, а $\sqrt[3]{27} = 3$ бидејќи $3^3 = 27;$

б) записот $\sqrt[5]{-32}$ означува петти корен од $-32,$ а $\sqrt[5]{-32} = -2$ бидејќи $(-2)^5 = -32.$

- Решението на равенката $x^2 = 9$ е $x = 3$ или $x = -3,$ бидејќи $3^2 = 9$ и $(-3)^2 = 9.$ Решенија на равенката $x^2 = 25$ се $x = 5$ или $x = -5.$

Запомни!

За секој реален број $a > 0$ и секој парен природен број $n = 2k,\ k \in \mathbb{N},$ постојат два реални броја x и $-x$ за кои важи $x^{2k} = (-x)^{2k} = a.$

- Значи, за $a > 0$ и $n = 2k,\ k \in \mathbb{N},$ равенката $x^{2k} = a$ има две решенија кои се спротивни реални броеви. Позитивното решение го означуваме $\sqrt[n]{a},$ а негативното го означуваме со $-\sqrt[n]{a}.$

- Бројот $n\ (n \geq 2)$ се вика ***коренов показател***, бројот a се вика ***подкоренов израз*** или ***радиканд***, а $\sqrt{\ }$ е ***знак за корен***.
  Постапката со која се определува $\sqrt[n]{a}$ се вика ***коренување***.

Ако кореновиот показател n е парен број и $a > 0,$ тогаш n-ти корен од a е ненегативниот број $x,$ така што $x^n = a.$ Тој број x е еднозначно определен.

На пример: Равенката $x^2 = 16$ има два реални корени кои се спротивни броеви. Позитивниот корен е $\sqrt{16},$ а негативниот корен е $-\sqrt{16},$ т.е. $x = \sqrt{16} = 4$ или $x = -\sqrt{16} = -4.$

- Ако $a \geq 0$ и $n = 2,$ тогаш наместо $\sqrt[2]{a}$ пишуваме $\sqrt{a},$ а читаме квадратен корен од a.

- Ако $a=0$, тогаш постои единствен n-ти корен од 0, т.е. $\sqrt[n]{0}=0$ бидејќи $0^n=0$ (и нема друг број, таков што $a^n=0$).

Според досега кажаното имаме:

а) $\sqrt[3]{8}=2$ бидејќи $2^3=8$;

б) $\sqrt[3]{-64}=-4$ бидејќи $(-4)^3=-64$;

в) $\sqrt[5]{-1}=-1$ бидејќи $(-1)^5=-1$;

г) $\sqrt{49}=7$, бидејќи $7^2=49$ и 7 е единствениот ненегативен број за кој важи тоа равенство.

- Ако $a<0$, тогаш $-a>0$, па за $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$ имаме $\sqrt[2k+1]{a}=-\sqrt[2k+1]{-a}$.

На пример: а) $\sqrt[5]{-32}=-2$ и $-\sqrt[5]{32}=-2$, т.е. $\sqrt[5]{-32}=-\sqrt[5]{32}$, бидејќи $(-2)^5=-2^5=-32$;

б) $\sqrt[3]{-125}=-\sqrt[3]{125}=-5$; в) $\sqrt[7]{-1}=-\sqrt[7]{1}=-1$ итн.

- Дали равенката а) $x^2=-4$, б) $x^4=-81$ има решение во множеството $\mathbb{R}$?

Бидејќи $x^2\geq 0$ и $x^4\geq 0$ за секој реален број x, следува дека дадените равенки немаат решение во множеството $\mathbb{R}$, т.е. изразите $\sqrt{-4}$ и $\sqrt[4]{-81}$ не се реални броеви. За овие изрази велиме уште дека немаат смисла во множеството $\mathbb{R}$.

Запомни!

Коренувањето со парен коренов показател на негативни реални броеви не е дефинирано во множеството на реални броеви.

4 Кои од дадените изрази имаат смисла: а) $\sqrt[9]{-8}$; б) $\sqrt[12]{0}$; в) $\sqrt[16]{-256}$; г) $\sqrt[4]{-16}$?

5 Колку е: а) $\sqrt[5]{2^5}$; б) $\sqrt[3]{2^3}$; в) $\sqrt[3]{(-2)^3}$; г) $\sqrt{(-2)^2}$?

Согледај го одговорот.

а) 2; б) 2; в) $\sqrt[3]{(-2)^3}=\sqrt[3]{-2^3}=-\sqrt[3]{2^3}=-2$; г) $\sqrt{(-2)^2}$ е позитивен број, а тоа значи дека $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{4}=2$. Бидејќи, $(-2)^2=4$, следува дека $\sqrt{(-2)^2}$ има смисла, па $\sqrt{(-2)^2}=\sqrt{2^2}=2$.

Од исти причини имаме $\sqrt[4]{(-3)^4}=\sqrt[4]{3^4}=3$, $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{5^2}=5$ итн.

Воочи дека, $\sqrt{(-2)^2}=|-2|=2$, $\sqrt[4]{(-3)^4}=|-3|=3$, $\sqrt{(-5)^2}=|-5|=5$, т.е, ако $a\in\mathbb{R}$, тогаш $\sqrt{a^2}=|a|$.

Воопшто, ако n е парен природен број, тогаш $\sqrt[n]{a^n}=|a|$.

Запомни!

$$\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a, & \text{ако } n \text{ е непарен број} \\ |a|, & \text{ако } n \text{ е парен број.} \end{cases}$$

6 Одреди ја вредноста на изразот: а) $\sqrt[5]{(-7)^5}$; б) $\sqrt[3]{9^3}$; в) $\sqrt[4]{(-4)^4}$; г) $\sqrt[6]{3^6}$.

- Колку е: $\left(\sqrt{4}\right)^2$, $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3$? ***Решение.*** Бидејќи $\left(\sqrt{4}\right)^2 = (2)^2 = 4$, следува дека $\left(\sqrt{4}\right)^2 = 4$.

Од исти причини имаме $\left(\sqrt[3]{5}\right)^3 = 5$, $\left(\sqrt[7]{15}\right)^7 = 15$ итн.

Воопшто, ако $\sqrt[n]{a}$ има смисла, тогаш $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$.

На пример, $\left(\sqrt[5]{-5}\right)^5 = -5$, додека, пак, $\left(\sqrt{-3}\right)^2 \neq -3$, бидејќи $\sqrt{-3}$ нема смисла.

Задачи

1 Кои од следните искази се вистинити:
а) бројот 8 е квадратен корен од 16;
б) бројот 8 е квадратен корен од 64;
в) петти корен од 32 е 2;
г) петти корен од -32 е 2;
д) четврти корен од 81 е -3?

2 Кои од дадените изрази немаат смисла:
а) $\sqrt{-9}$; б) $\sqrt[5]{-1}$; в) $\sqrt[5]{-32}$; г) $\sqrt[4]{-16}$;
д) $\sqrt[6]{0}$; ѓ) $-\sqrt{25}$?

3 За која вредност на променливата x има смисла изразот:
а) $\sqrt{x-1}$; б) $\sqrt[3]{x-5}$; в) $\sqrt[4]{6-2x}$;
г) $\sqrt[5]{1-x}$; д) $\sqrt[6]{x^2+1}$?

4 Пресметај:
а) $\sqrt{121}$; б) $\sqrt[3]{64}$; в) $\sqrt[3]{-64}$; г) $\sqrt[4]{81}$.

5 Пресметај:
а) $2\sqrt{\frac{1}{4}} + 3\sqrt{25} - 4\sqrt{\frac{1}{16}}$;
б) $\sqrt{169} - \sqrt[3]{-125} + \sqrt[4]{16}$;
в) $\sqrt[3]{-8} - \sqrt{36} - \sqrt[5]{-32}$.

6 Кои од дадените равенства се точни:
а) $\sqrt{3^2} = 3$; б) $\sqrt{(-3)^2} = -3$; в) $\sqrt{(-3)^2} = 3$;
г) $\sqrt[3]{(-4)^3} = -4$; д) $\sqrt[4]{(-6)^4} = |-6|$;
ѓ) $\sqrt[3]{(-1)^3} = 1$?

7 За кои вредности на променливата е точно равенството:
а) $\sqrt{a^2} = a$; б) $\sqrt[3]{a^3} = a$;
в) $\sqrt{(x-2)^2} = x-2$;
г) $\sqrt[4]{(1-x)^4} = |1-x|$?

2 СТЕПЕН СО ПОКАЗАТЕЛ РАЦИОНАЛЕН БРОЈ. СВОЈСТВА НА КОРЕНИ

Потсети се!

- Изразот a^m, $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{Z}$ се вика степен.
- Ако $m \in \mathbb{Z}^+$, тогаш $a^m = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m}$, за $m \geq 2$ и $a^1 = a$.
- Ако $m = 0$ и $a \neq 0$, тогаш $a^0 \overset{def}{=} 1$.
- Ако $m \in \mathbb{Z}^-$, т.е. $m = -k$, $k \in \mathbb{N}$ и $a \neq 0$, тогаш $a^m = a^{-k} \overset{def}{=} \frac{1}{a^k}$.

А Проширувајќи го поимот за степен со показател нула и цел негативен број, покажавме дека операциите со нив се изведуваат според истите правила коишто важат за степен со показател природен број. Сега ќе извршиме уште едно проширување на поимот за степен, воведувајќи степен со показател рационален број.

Запомни!

Ако $a \in \mathbb{R}^+$ и $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ (каде што $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$), тогаш важи

$$a^{\frac{m}{n}} \overset{def}{=} \sqrt[n]{a^m}.$$

Притоа $a^{\frac{m}{n}}$ се вика ***степен со рационален показател***.

- Според дефиницијата имаме: $4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2$; $4^{\frac{3}{2}} = \sqrt{4^3} = \sqrt{64} = 8$; $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$.

1 Пресметај: а) $9^{0,5}$; б) $8^{\frac{2}{3}}$; в) $125^{\frac{1}{3}}$; г) $0,01^{0,5}$.

Решение. б) $8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = 4$; г) $0,01^{0,5} = 0,01^{\frac{1}{2}} = \sqrt{0,01} = 0,1$.

- Ако $m = 1$, тогаш $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$, за $m = -1$: $a^{-\frac{1}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{1}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}}$.

2 Запиши ги во вид на корен степените:

а) $49^{\frac{1}{2}}$; б) $100^{-0,5}$; в) $a^{\frac{2}{3}}$; г) $x^{-\frac{2}{3}}$; д) $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{2}{3}}$;

Решение. а) $49^{\frac{1}{2}} = \sqrt{49}$; в) $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{a^2}$; г) $x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$; д) $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{2}{3}} = \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b^2}$.

Познато ти е дека записот на даден рационален број со некоја дропка $\frac{m}{n}$ не е еднозначен. На пример, $\frac{3}{4}=\frac{6}{8}=\frac{9}{12}=\ldots$ Усвоената дефиниција за степенот $a^{\frac{m}{n}}$ не зависи од тоа со која дропка, еднаква на $\frac{m}{n}$ е запишан рационалниот показател на степенот. Според тоа важи:

$$a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m\cdot k}{n\cdot k}}=\sqrt[nk]{a^{mk}},\ a\in\mathbb{R}^{+},\ m\in\mathbb{Z},\ n,k\in\mathbb{N}.$$

На пример, $8^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{8}=2,$ а за $\frac{1}{3}=\frac{2}{6}$ имаме $8^{\frac{2}{6}}=\sqrt[6]{8^{2}}=\sqrt[6]{64}=2.$ Значи, $8^{\frac{1}{3}}=8^{\frac{2}{6}}$ итн.

- Операциите со степени чии показатели се рационални броеви се изведуваат според истите правила што важат за операциите со степени чии показатели се природни броеви.

За секои $a,b\in\mathbb{R}^{+}$ и секои $\frac{m}{n},\frac{p}{q}\in\mathbb{Q},$ каде што $m,p\in\mathbb{Z},\ n,q\in\mathbb{N}$ важи:

$$1^{0}.\ a^{\frac{m}{n}}\cdot a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}};\qquad 2^{0}.\ a^{\frac{m}{n}}:a^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}};\qquad 3^{0}.\ \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}}=a^{\frac{m\cdot p}{n\cdot q}};$$

$$4^{0}.\ (a\cdot b)^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m}{n}}\cdot b^{\frac{m}{n}};\qquad 5^{0}.\ \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}=\frac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}.$$

3 Изврши ги назначените операции:

а) $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{\frac{1}{2}};$ б) $x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}:x^{-1,5};$ в) $\left(a\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}};$ г) $\left(x^{\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}.$

Проследи го решението. б) $x^{\frac{3}{4}}\cdot x^{\frac{1}{2}}:x^{-1,5}=x^{\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\left(-\frac{3}{2}\right)}=x^{\frac{3+2+6}{4}}=x^{\frac{11}{4}}=\sqrt[4]{x^{11}};$

в) $\left(a\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}=\left(a^{1+\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{2}{3}}=a^{\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}=a^{-1}=\frac{1}{a}.$

4 Изврши ги назначените операции:

а) $x^{2}\cdot x^{\frac{1}{2}}:x^{-\frac{1}{2}};$ б) $\left(x^{2}\cdot y^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}\cdot x^{\frac{1}{3}};$ в) $x^{0,5}\cdot(xy)^{\frac{1}{2}}:\left(x^{\frac{2}{3}}y^{0,5}\right).$

Добиените резултати запиши ги во вид на корен.

Потсети се!

- $\frac{m}{n}=\frac{m\cdot k}{n\cdot k},\ k\neq 0.$
- $\frac{m}{n}=\frac{m:k}{n:k},\ k\neq 0.$
- $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}},\ a>0.$

Запиши ги во вид на корен степените:

$3^{\frac{1}{2}},\quad a^{\frac{2}{3}},\quad 2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}.$

Запомни!

Ако кореновиот показател и показателот на поткореновиот израз ги помножиме со ист број различен од нула, тогаш вредноста на коренот не се менува.

Б Спореди ги вредностите на корените $\sqrt[3]{8}$ и $\sqrt[6]{64}$.

- $\sqrt[3]{8}=2,$ бидејќи $2^3=8;\ \sqrt[6]{64}=\sqrt[6]{2^6}=2.$

Значи, корените $\sqrt[3]{8}$ и $\sqrt[6]{64}$ имаат иста вредност: $\sqrt[3]{8}=\sqrt[6]{64}=2,$ т.е. $\sqrt[3]{2^3}=\sqrt[6]{2^6}.$

Воопшто, ако $a>0$ и $m,n,k\in\mathbb{N},$ тогаш важи

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}.$$

Имено $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}=a^{\frac{m\cdot k}{n\cdot k}}=\sqrt[n\cdot k]{a^{m\cdot k}}.$

Ова својство се вика ***проширување на корени***.

5 Корените $\sqrt{3},\ \sqrt[3]{2}$ и $\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$ прошири ги со: а) 3; б) 4.

Согледај ја постапката. а) $\sqrt{3}=\sqrt[2\cdot 3]{3^{1\cdot 3}}=\sqrt[6]{3^3};\ \sqrt[3\cdot 3]{2^{1\cdot 3}}=\sqrt[9]{2^3};\ \sqrt[4]{\frac{2}{3}}=\sqrt[12]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}.$

6 Прошири ги со 2 корените: а) $\sqrt[5]{a^2}$; б) $\sqrt[3]{a^2b}$; в) $\sqrt[4]{ab^2c^3}$, ако $a>0,b>0,c>0.$

Решение. а) $\sqrt[5]{a^2}=\sqrt[5\cdot 2]{a^{2\cdot 2}}=\sqrt[10]{a^4};$ б) $\sqrt[3]{a^2b}=\sqrt[6]{\left(a^2b\right)^2}=\sqrt[6]{a^4b^2}.$

7 Сведи ги на ист коренов показател корените: а) $\sqrt{2},\ \sqrt[3]{2},\ \sqrt[4]{2};$ б) $\sqrt[6]{a},\ \sqrt[4]{a^3},\ \sqrt[3]{2ab^2}.$

Решение. Корените ги сведуваме на ист показател којшто најчесто е најмалиот заеднички содржател на показателите.

а) НЗС $(2,3,4)=12,$ па

$\sqrt{2}=\sqrt[2\cdot 6]{2^6}=\sqrt[12]{64},$

$\sqrt[3]{2}=\sqrt[3\cdot 4]{2^4}=\sqrt[12]{16},$

$\sqrt[4]{2}=\sqrt[4\cdot 3]{2^3}=\sqrt[12]{8};$

б) НЗС $(6,4,3)=12,$ па

$\sqrt[6]{a}=\sqrt[12]{a^2},$

$\sqrt[4]{a^3}=\sqrt[3\cdot 4]{a^{3\cdot 3}}=\sqrt[12]{a^9},$

$\sqrt[3]{2ab^2}=\sqrt[3\cdot 4]{\left(2ab^2\right)^4}=\sqrt[12]{2^4a^4b^8}.$

8 Сведи ги на ист коренов показател корените: а) $\sqrt[3]{4},\ \sqrt{3},\ \sqrt[4]{2};$ б) $\sqrt{x},\ \sqrt[3]{xy^2},\ \sqrt[5]{x^2y}.$

И понатаму ќе сметаме дека променливите во поткореновиот израз примаат позитивни вредности и дека поткореновиот израз во целина е позитивен.

В Спореди ги вредностите на корените $\sqrt[9]{8^6}$ и $\sqrt[3]{8^2}$.

- $\sqrt[9]{8^6}=\sqrt[9]{\left(2^3\right)^6}=\sqrt[9]{2^{18}}=\sqrt[9]{\left(2^2\right)^9}=2^2=4;$
- $\sqrt[3]{8^2}=\sqrt[3]{\left(2^3\right)^2}=\sqrt[3]{\left(2^2\right)^3}=2^2=4.$

Значи, корените $\sqrt[9]{8^6}$ и $\sqrt[3]{8^2}$ имаат иста вредност, т.е. $\sqrt[9]{8^6}=\sqrt[3]{8^2}$.

9 Секој од корените $\sqrt[12]{3^6}$, $\sqrt[6]{3^3}$ и $\sqrt{3}$ запиши го како степен со показател рационален број и спореди ги.

Решение. Со примена на $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ имаме: $\sqrt[12]{3^6}=3^{\frac{6}{12}}$, $\sqrt[6]{3^3}=3^{\frac{3}{6}}$, $\sqrt{3}=3^{\frac{1}{2}}$. Бидејќи $\frac{6}{12}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, следува дека $3^{\frac{6}{12}}=3^{\frac{3}{6}}=3^{\frac{1}{2}}$, т.е. $\sqrt[12]{3^6}=\sqrt[6]{3^3}=\sqrt{3}$.

Воопшто, важи: ако $a>0$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$, тогаш

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n:k]{a^{m:k}}.$$

Имено $\sqrt[n:k]{a^{m:k}}=a^{\frac{m:k}{n:k}}=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$. Ова својство се вика ***скратување на корени***.

Запомни!

Ако кореновиот показател и показателот на поткореновиот израз ги поделиме со некој нивни заеднички делител, тогаш вредноста на коренот не се менува.

10 Скрати го коренот: а) $\sqrt[12]{a^8}$; б) $\sqrt[24]{a^{18}}$; в) $\sqrt[8]{a^2b^4}$.

Твоето решение спореди го со следното.

а) $\sqrt[12]{a^8}=\sqrt[12:2]{a^{8:2}}=\sqrt[6]{a^4}=\sqrt[6:2]{a^{4:2}}=\sqrt[3]{a^2}$ или $\sqrt[12]{a^8}=\sqrt[12:4]{a^{8:4}}=\sqrt[3]{a^2}$;

б) $\sqrt[24]{a^{18}}=\sqrt[24:6]{a^{18:6}}=\sqrt[4]{a^3}$; в) Воочи, НЗД $(8,2,4)=2$, па $\sqrt[8]{a^2b^4}=\sqrt[4]{ab^2}$.

11 Упрости го коренот: а) $\sqrt[6]{a^4}$; б) $\sqrt[8]{x^4y^2}$; в) $\sqrt[6]{x^6y^4z^8}$.

- Да се упрости корен, значи да се изврши скратување на коренот.

Ако во коренот $\sqrt[n]{a^m}$ кореновиот показател n е делител на показателот m на поткореновиот израз, т.е. ако $m=n\cdot p$, тогаш за секој $a\geq 0$, $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{n\cdot p}}=a^p$.

- ако $n=2k$, $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[2k]{a^{2k\cdot p}}=|a|^p$, за секој $a\in\mathbb{R}$,
- ако $n=2k+1$, $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[2k+1]{a^{(2k+1)\cdot p}}=a^p$, за секој $a\in\mathbb{R}$.

На пример: $\sqrt{5^6}=5^3=125$; $\sqrt[3]{(-4)^9}=(-4)^3=-64$; $\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^6}=\left|-\frac{1}{2}\right|^3=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$.

12 Упрости го изразот: а) $\sqrt[4]{x^4}$, $\sqrt[5]{x^5}$; б) $\sqrt[3]{(x-2)^3}$; в) $\sqrt{x^2-4x+4}$.

Согледај го решението.

а) $\sqrt[4]{x^4}=\begin{cases} x, \text{ за } x>0 \\ 0, \text{ за } x=0 \\ -x, \text{ за } x<0 \end{cases}$, т.е. $\sqrt[4]{x^4}=|x|$.

б) $\sqrt[3]{(x-2)^3}=x-2$, за секој $x\in\mathbb{R}$.

в) $\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|=$

$=\begin{cases} x-2, \text{ за } x-2>0, \text{ т.е. за } x>2 \\ 0, \text{ за } x-2=0, \text{ т.е. за } x=2 \\ -(x-2), \text{ за } x-2<0, \text{ т.е. за } x<2. \end{cases}$

13 Спореди ги корените: а) $\sqrt[6]{8}$ и $\sqrt[6]{5}$; б) $\sqrt[3]{4}$ и $\sqrt[4]{3}$; в) $\sqrt{5}$ и $\sqrt[3]{11}$.

Решение. Од два корени со ист коренов показател, поголема вредност има коренот што има поголем поткоренов израз.

а) $\sqrt[6]{8}>\sqrt[6]{5}$, бидејќи $8>5$;

б) НЗС $(3,4)=12$, $\sqrt[3]{4}=\sqrt[12]{4^4}$, а $\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{3^3}$, бидејќи $4^4>3^3$ следува дека $\sqrt[3]{4}>\sqrt[4]{3}$;

в) НЗС $(2,3)=6$, па $\sqrt{5}=\sqrt[6]{5^3}=\sqrt[6]{125}$, а $\sqrt[3]{11}=\sqrt[6]{11^2}=\sqrt[6]{121}$, значи $\sqrt{5}>\sqrt[3]{11}$.

14 Подреди ги по големина корените: а) $\sqrt[3]{10}, \sqrt[3]{8}, \sqrt[3]{43}$; б) $\sqrt{3}, \sqrt[3]{6}, \sqrt[6]{37}$.

Задачи

1 Запиши ги како корен степените:

а) $x^{\frac{1}{4}}$; б) $2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{3}}$; в) $3a^{-\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}$.

2 Запиши ги како степен корените:

а) $\sqrt[4]{a^3}$; б) $\sqrt[4]{2a^2b^3}$; в) $\sqrt[3]{b^2}\cdot\sqrt{a}$; г) $a^2+\sqrt[3]{a^2}$.

3 Одреди ја вредноста на степенот:

а) $9^{\frac{3}{2}}$; б) $4^{-\frac{1}{2}}$; в) $49^{\frac{1}{2}}$; г) $16^{1,5}$; д) $8^{-\frac{2}{3}}$.

4 Пресметај: а) $\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(2\frac{1}{4}\right)^{0,5}-\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$;

б) $36^{0,5}+81^{0,25}-16^{0,75}-5,6^0$.

5 Пресметај: а) $a^{\frac{2}{3}}\cdot a^{-\frac{1}{3}}\cdot a^{1\frac{1}{3}}$; б) $b^{\frac{1}{2}}:\left(b^{\frac{1}{3}}\cdot b^{-1}\right)$;

в) $\left(\left(x:x^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{6}{5}}:x^{-\frac{4}{5}}$.

6 Прошири ги со 3 корените:

а) $\sqrt[3]{2}$; б) $\sqrt{2a}$; в) $\sqrt[3]{2a^2b}$; г) $\sqrt[4]{3a^2b^3}$.

Сведи ги корените на заеднички коренов показател $(7-8)$:

7 а) $\sqrt[4]{a^3}$ и $\sqrt[6]{a^5}$; б) $\sqrt[3]{2x^2}$ и $\sqrt[6]{ab^5}$;

в) $\sqrt[3]{2a^2b}$ и $\sqrt[4]{3a^2b}$.

8 а) $\sqrt[3]{3}, \sqrt{2}$ и $\sqrt[6]{6}$; б) $\sqrt[12]{a^2b}, \sqrt[4]{a}$ и $\sqrt[8]{ab^2}$;

в) $\sqrt[6]{2xy^2}, \sqrt[4]{x^3}$ и $\sqrt[8]{3y^5}$.

Упрости ги корените $(9-11)$:

9 а) $\sqrt[3]{2^6}$; б) $\sqrt[8]{64}$; в) $\sqrt[5]{32}$; г) $\sqrt{0,01}$.

10 а) $\sqrt[4]{x^2}$; б) $\sqrt[6]{x^4}$; в) $\sqrt[6]{x^3}$; г) $\sqrt[12]{x^8}$.

11 а) $\sqrt[12]{a^6b^3}$; б) $\sqrt[4]{25a^2b^2}$;

в) $\sqrt{81x^2y^2}$; г) $\sqrt[12]{64a^9b^3}$.

3 ТРАНСФОРМАЦИЈА НА КОРЕНИТЕ

Потсети се!

- Коренот $\sqrt[3]{a^2}$ запиши го во вид на степен со показател рационален број.
- Степенувај:

  а) $(a\cdot b)^2$; б) $(a:b)^2$; в) $(a\cdot b)^{\frac{2}{3}}$; г) $(a:b)^{\frac{3}{4}}$.

А 1 Провери дали е точно:

а) $\sqrt{64\cdot 25}=\sqrt{64}\cdot\sqrt{25}$; б) $\sqrt{\frac{100}{25}}=\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}}$.

Сигурно утврди дека дадените бројни равенства се вистинити. Значи, квадратниот корен од производ, односно количник на позитивни броеви е еднаков на производот, односно количникот од квадратните корени на тие броеви.

Воопшто важи:

$$\sqrt[n]{ab}=(ab)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b};\qquad \sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}},\ a\geq 0,\ b>0,\ n\in\mathbb{N}.$$

Ова се правила за ***коренување на производ***, односно ***количник***.

Овие правила важат и во случај кога поткореновиот израз има повеќе од два множители.

2 Пресметај: а) $\sqrt[3]{8\cdot 64}$; б) $\sqrt[3]{\frac{8}{64}}$.

3 Пресметај: а) $\sqrt[3]{27\cdot(-64)\cdot 125}$; б) $\sqrt[5]{\frac{-32}{243}}$.

4 Упрости го изразот: а) $\sqrt[3]{x^9y^6z^3}$; б) $\sqrt[3]{\frac{8a^3b^6}{27x^6y^3}}$.

Решение. а) $\sqrt[3]{x^9y^6z^3}=\sqrt[3]{x^9}\cdot\sqrt[3]{y^6}\cdot\sqrt[3]{z^3}=x^3y^2z$.

5 За кои вредности на променливата x се точни равенствата:

а) $\sqrt[3]{x(x+2)}=\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x+2}$; б) $\sqrt[4]{\frac{x}{x^2+1}}=\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[4]{x^2+1}}$?

Согледај го решението.

а) За секој $x\in\mathbb{R}$, бидејќи коренот со непарен коренов показател е дефиниран за секој реален број.

б) За $x\geq 0$, бидејќи корен со парен коренов показател е дефиниран само за ненегативни броеви, т.е. броеви што се поголеми или еднакви на нула.

Б **6** Упрости го изразот: а) $\sqrt{16a^2b}$; б) $\sqrt[5]{\frac{x^5y^3}{32}}$.

Решение.

а) $\sqrt{16a^2b}=\sqrt{16}\cdot\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=4a\sqrt{b}$;

б) $\sqrt[5]{\frac{x^5y^3}{32}}=\frac{\sqrt[5]{x^5}\cdot\sqrt[5]{y^3}}{\sqrt[5]{32}}=\frac{x}{2}\sqrt[5]{y^3}$.

Ваква трансформација на корени се вика ***извлекување на множител пред знакот на коренот***.

Ако $A=\alpha^n\cdot\beta$ $(\alpha>0,\ \beta>0)$, тогаш $\sqrt[n]{A}=\sqrt[n]{\alpha^n\cdot\beta}=\sqrt[n]{\alpha^n}\cdot\sqrt[n]{\beta}=\alpha\sqrt[n]{\beta}$.

7 Извлечи ги множителите пред знакот на коренот:

а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt[3]{192}$; в) $\sqrt[4]{a^{11}}$; г) $\sqrt[3]{72a^7b^5}$; д) $\sqrt{4a^2+16}$.

Решение. а) $\sqrt{8}=\sqrt{2^3}=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{2}=2\sqrt{2}$; в) $\sqrt[4]{a^{11}}=\sqrt[4]{a^8\cdot a^3}=a^2\cdot\sqrt[4]{a^3}$;

д) $\sqrt{4a^2+16}=\sqrt{4\left(a^2+4\right)}=2\sqrt{a^2+4}$.

- Кои множители може да се извлекуваат пред знакот на коренот?

Пред знакот на коренот се извлекуваат само множители на поткореновиот израз чиишто показатели се поголеми или еднакви на кореновиот показател.

Нека е даден $\sqrt[n]{a^m}$. Ако $m>n$ и $m=np+r$, тогаш $a^m=a^{np+r}=a^{np}\cdot a^r$. Оттука следува дека

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{np}\cdot a^r}=a^p\cdot\sqrt[n]{a^r}.$$

8 Извлечи ги множителите пред знакот на коренот: а) $\sqrt[4]{a^{35}}$; б) $\sqrt[5]{x^7y^{14}}$.

Решение. а) $\sqrt[4]{a^{35}}=a^8\cdot\sqrt[4]{a^3}$, бидејќи $35=8\cdot4+3$.

В **9** Разгледај го равенството $\sqrt{12}=\sqrt{2^2\cdot3}=2\sqrt{3}$ оддесно налево.

Воочи, множителот 2 е внесен под знакот на коренот, т.е. $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot3}=\sqrt{12}$.

Оваа трансформација на корени се вика ***внесување на множител под знакот на коренот***.

Ако $\alpha>0,\ \beta>0$, тогаш $\alpha\sqrt[n]{\beta}=\sqrt[n]{\alpha^n\cdot\beta}$.

10 Внеси ги множителите под знакот на коренот:

а) $x\cdot\sqrt[3]{x^2}$; б) $\frac{a}{b}\cdot\sqrt[4]{\frac{b^2}{a}}$; в) $3a\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{9a}}$; г) $\frac{2x}{3}\cdot\sqrt{\frac{27a}{4x}}$.

Решение. г) $\frac{2x}{3}\cdot\sqrt{\frac{27a}{4x}}=\sqrt{\frac{4x^2}{9}\cdot\frac{27a}{4x}}=\sqrt{3ax}$.

11 Без да ја пресметуваш вредноста на коренот спореди ги броевите:

а) $3\sqrt{5}$ и $4\sqrt{3}$; б) $2\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[3]{25}$; в) $2\cdot\sqrt[4]{10}$ и $3\cdot\sqrt[4]{2}$.

Решение. а) $3\sqrt{5}=\sqrt{3^2\cdot 5}=\sqrt{45}$; $4\sqrt{3}=\sqrt{4^2\cdot 3}=\sqrt{48}$. Бидејќи $\sqrt{45}<\sqrt{48}$, следува дека $3\sqrt{5}<4\sqrt{3}$.

Запомни!

Множител се внесува под знакот на корен, така што тој се степенува со кореновиот показател и така добиената вредност на степенот се множи со поткореновиот израз.

Досегашните трансформации на корените ги вршевме со однапред поставена цел: упрости го изразот, доведи го изразот до некој сакан облик итн. Тие трансформации ги изведуваме врз основа на својствата на операциите и самите операции со корени.

- Една од трансформациите со корените е ***доведување на корените во нормален вид***.

На пример, корените $2\sqrt{2}$, $\sqrt{3ax}$, $\sqrt[3]{4a^2b}$, $\frac{2}{3}\sqrt[5]{a^4}$ се запишани во нормален вид.

Запомни!

Еден корен е во нормален вид ако:
1°. Поткореновиот израз не содржи именител различен од 1.
2°. Поткореновиот израз не содржи множители што може да се извлечат пред знакот на коренот.
3°. Показателот на коренот и показателот на поткореновиот израз немаат заеднички делител.

12 Зошто корените а) $\sqrt{18}$, б) $3a\sqrt{\frac{1}{a}}$ $(a\neq 1,\ a\neq 0)$, в) $2a\sqrt[4]{a^2b^2}$ не се во нормален вид?

Решение. а) $\sqrt{18}$ не е во нормален вид, бидејќи $\sqrt{18}=\sqrt{2\cdot 3^2}$ содржи множител што може да се извлече пред знакот на коренот.

б) Поткореновиот израз на коренот $\sqrt{\frac{1}{a}}$ содржи именител различен од 1.

в) $2a\sqrt[4]{a^2b^2}$ не е во нормален вид затоа што кореновиот показател и показателот на поткореновиот израз имаат заеднички делител 2, т.е. коренот не е запишан со најмал можен показател.

13 Запиши ги во нормален вид корените: а) $\sqrt{48}$; б) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; в) $2x\sqrt{\frac{3}{x}}$.

Решение.

а) $\sqrt{48}=\sqrt{16\cdot 3}=4\sqrt{3}$; б) $\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{2}{4}}=\frac{1}{2}\sqrt{2}$; в) $2x\sqrt{\frac{3}{x}}=2x\sqrt{\frac{3\cdot x}{x\cdot x}}=2x\sqrt{\frac{3x}{x^2}}=2x\frac{\sqrt{3x}}{\sqrt{x^2}}=2\sqrt{3x}$.

Понекогаш коренот го трансформираме во нормален со внесување на множител под знакот на коренот. Тоа воочи го на примерот в) од претходната задача: $2x\cdot\sqrt{\frac{3}{x}}=2\cdot\sqrt{x^2\cdot\frac{3}{x}}=2\cdot\sqrt{3x}$.

Задачи

1 Пресметај: а) $\sqrt{16\cdot 121}$; б) $\sqrt[3]{8\cdot(-27)\cdot 64}$; в) $\sqrt{85^2-84^2}$; г) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}$.

2 Пресметај: а) $\sqrt{x^2\cdot y^4}$; б) $\sqrt[4]{81x^8y^{12}}$; в) $\sqrt[5]{\frac{-32x^{15}}{y^{10}}}$.

3 Извлечи ги множителите пред знакот на коренот: а) $\sqrt{108}$; б) $\sqrt[3]{54x^5y^4}$; в) $\sqrt{\frac{12a^3b^5}{c^4}}$.

4 Внеси ги множителите под знакот на коренот:

а) $3\sqrt{2}$; б) $\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{3}{2}}$; в) $a\sqrt{\frac{1}{a}}$; г) $2xy\sqrt{\frac{3x}{2y}}$.

5 Без пресметување на коренот спореди ги броевите: а) $2\sqrt{3}$ и $3\sqrt{2}$; б) $5\sqrt[3]{5}$ и $7\sqrt[3]{2}$; в) $3\sqrt[3]{2}$ и $2\sqrt[3]{3}$.

6 Доведи ги во нормален вид корените:

а) $\sqrt{5\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt[3]{54}$; в) $\sqrt{3a^2b^5}$; г) $ab\sqrt{\frac{12}{ab}}$;

д) $2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{7}}$; ѓ) $\sqrt{4a^3-8a^2}$; е) $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{b}{a^2}}$.

4 СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА КОРЕНИ

Потсети се!

- Кои мономи се слични?
- Кој е коефициентот на мономот: $2a^2b$; $-xy$; $0,25y^2$?
- Како се собираат мономи?

А 1 Доведи ги во нормален вид корените:

а) $4a^2\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{a^2}}$; б) $\sqrt{8}$; в) $\sqrt{\frac{1}{2}}$; г) $\sqrt{50a^2}$

Следи го решението.

а) $4a^2\cdot\sqrt[3]{\frac{2}{a^2}}=4a^2\sqrt[3]{\frac{2\cdot a}{a^2\cdot a}}=4a^2\cdot\frac{1}{a}\cdot\sqrt[3]{2a}=4a\cdot\sqrt[3]{2a}$; б) $2\sqrt{2}$; в) $\frac{1}{2}\sqrt{2}$; г) $5a\sqrt{2}$.

Рационалниот множител пред знакот на коренот што е доведен во нормален вид се вика ***коефициент на коренот***.

На пример, коефициенти на корените: $5\cdot\sqrt[3]{a^2}$; $7a\cdot\sqrt[4]{b}$; $3\cdot\sqrt{2ab}$ соодветно се 5, $7a$ и 3.

- Коефициентите на корените што се доведени во нормален вид во претходната задача **1** соодветно се $4a$, 2, $\frac{1}{2}$ и $5a$.

Запомни!

Два или повеќе корени во нормален вид што се разликуваат само по своите коефициенти се викаат ***слични корени***.

На пример, корените: $4a^2b\cdot\sqrt[3]{2ab^2}$, $\frac{1}{2}\sqrt[3]{2ab^2}$, $2b\cdot\sqrt[3]{2ab^2}$, $\sqrt[3]{2ab^2}$ се слични.

- Коефициентите на корените соодветно се: $4a^2b$, $\frac{1}{2}$, $2b$, 1.

2 Покажи дека се слични корените: а) $\sqrt{8}$ и $\sqrt{32}$; б) $\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $6\sqrt{\frac{1}{6}}$; в) $\sqrt{\frac{a}{2}}$ и $\sqrt{\frac{2}{a}}$.

Решение.

а) $\sqrt{8}=\sqrt{4\cdot 2}=2\sqrt{2}$,

$\sqrt{32}=\sqrt{16\cdot 2}=4\sqrt{2}$;

б) $\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{2\cdot 3}{3\cdot 3}}=\sqrt{\frac{6}{3^2}}=\frac{1}{3}\sqrt{6}$,

$6\sqrt{\frac{1}{6}}=6\sqrt{\frac{1\cdot 6}{6\cdot 6}}=6\cdot\frac{1}{6}\sqrt{6}=\sqrt{6}$;

в) $\sqrt{\frac{a}{2}}=\frac{1}{2}\sqrt{2a}$ и $\sqrt{\frac{2}{a}}=\frac{1}{a}\sqrt{2a}$.

3 Покажи дека се слични корените: а) $\sqrt[3]{16}$ и $\sqrt[3]{54}$; б) $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}$ и $\sqrt{\frac{8}{9}-\frac{1}{3}}$; в) $\sqrt{\frac{x}{y}}$ и $\sqrt{\frac{y}{x}}$.

Потсети се!

- Запиши го дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето во $\mathbb{R}$.
- Сведи го во нормален вид полиномот

$2ab-\frac{1}{2}ab+1\frac{1}{2}ab.$

Б **4** Упрости го изразот

$2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+1\frac{1}{2}\sqrt{3}.$

Решение.

Со примена на дистрибутивното својство имаме:

$$2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+1\frac{1}{2}\sqrt{3}=\left(2-3+1\frac{1}{2}\right)\cdot\sqrt{3}=\frac{1}{2}\sqrt{3}.$$

- Оваа трансформација се вика ***сведување на слични корени***.

Воочи, се собираат и одземаат само слични корени.

5 Пресметај го збирот: а) $5\sqrt{5}+7\sqrt{20}-2\sqrt{45}$; б) $3\sqrt[3]{a}+5\sqrt[3]{8a}-\sqrt[3]{27a}$.

Решение. Секој од дадените изрази е збир од три корени. Нив прво ги трансформираме во нормален вид, а потоа ги сведуваме сличните корени.

а) $5\sqrt{5}+7\sqrt{20}-2\sqrt{45}=5\sqrt{5}+7\sqrt{4\cdot 5}-2\sqrt{9\cdot 5}=5\sqrt{5}+7\cdot 2\sqrt{5}-2\cdot 3\sqrt{5}=(5+14-6)\sqrt{5}=13\sqrt{5}$;

б) $3\sqrt[3]{a}+5\sqrt[3]{8a}-\sqrt[3]{27a}=3\sqrt[3]{a}+5\sqrt[3]{2^3a}-\sqrt[3]{3^3a}=3\sqrt[3]{a}+5\cdot 2\sqrt[3]{a}-3\sqrt[3]{a}=10\sqrt[3]{a}$.

6 Упрости го изразот: а) $\frac{3}{a}\sqrt{a^3}+\frac{4}{b}\sqrt{b^2a}$; б) $\sqrt[3]{125x}-\sqrt[3]{8x}-\left(\sqrt[3]{27x}-\sqrt[3]{64x}\right)$.

Решение. б) $\sqrt[3]{125x}-\sqrt[3]{8x}-\left(\sqrt[3]{27x}-\sqrt[3]{64x}\right)=5\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{x}-3\sqrt[3]{x}+4\sqrt[3]{x}=(5-2-3+4)\sqrt[3]{x}=4\sqrt[3]{x}$.

Задачи

1 Провери дали се слични корените: а) $\sqrt{2}$ и $\sqrt{8}$; б) $\sqrt{18}$, $\sqrt{50}$ и $\sqrt{98}$; в) $\sqrt[3]{\frac{x}{y^2}}$, $\sqrt[3]{\frac{y}{x^2}}$ и $\sqrt[3]{x^{-2}y^{-2}}$.

2 Пресметај: а) $8\sqrt{2}-6\sqrt{2}+\sqrt{8}-\sqrt{18}$; б) $25\sqrt{0,2}+2\sqrt{1\frac{1}{4}}-3\sqrt{20}$; в) $4\sqrt[6]{4}-2\sqrt[6]{9}-3\sqrt[9]{8}$;

г) $\sqrt{12}-\sqrt{27}+\frac{1}{2}\sqrt{48}$; д) $\left(\sqrt{32}+\sqrt{0,5}-2\sqrt{\frac{1}{3}}\right)-\left(\sqrt{\frac{1}{8}}-\sqrt{27}\right)$.

3 Пресметај: а) $2\sqrt{36a}-3\sqrt{25a}+2\sqrt{9a}$; б) $2a\sqrt[3]{a^4b}-3a\sqrt[3]{ab^4}-a^2\sqrt[3]{\frac{b^4}{a^2}}+2b^3\sqrt[3]{\frac{a}{b^2}}$.

4 Пресметај: а) $\sqrt[4]{a}+\sqrt[4]{16a}+\sqrt[4]{81a}-\sqrt[4]{625a}$; б) $\left(\sqrt{9x}-\sqrt[3]{8y}\right)-\left(\sqrt[3]{27y}-\sqrt{16x}\right)$.

5 МНОЖЕЊЕ, ДЕЛЕЊЕ, СТЕПЕНУВАЊЕ И КОРЕНУВАЊЕ НА КОРЕНИ

А **1** Провери дали е точно равенството: а) $\sqrt{64}\cdot\sqrt{25}=\sqrt{64\cdot 25}$; б) $\frac{\sqrt{100}}{\sqrt{25}}=\sqrt{\frac{100}{25}}$.

Сигурно утврди дека равенствата се точни. Ова својство е точно за кој било корен, т.е.

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}}=(ab)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{ab} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Воопшто, точни се следните тврдења:

За кои било $a\geq 0$, $b\geq 0$ и $n\in\mathbb{N}$ важи:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b} \quad \text{и} \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

- Овие тврдења искажи ги со зборови.

2 Пресметај: а) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}$; б) $\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[5]{x^2}$; в) $\sqrt[5]{x^3y^2}:\sqrt[5]{x^2y}$.

Решение. в) $\sqrt[5]{x^3y^2}:\sqrt[5]{x^2y}=\sqrt[5]{x^3y^2:\left(x^2y\right)}=\sqrt[5]{xy}$.

Воочи, се множат, односно се делат само корени со ист коренов показател. Притоа, производот, односно количникот од поткореновите изрази се коренува со истиот коренов показател.

3 Пресметај: а) $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$; б) $2\sqrt[3]{25a^2}\cdot 3\sqrt[3]{15a}$; в) $\sqrt{48}:\sqrt{3}$;

г) $\sqrt[4]{27a^3}:\sqrt[4]{\frac{a^3}{3}}$; д) $\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)$.

4 Пресметај: а) $\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt{b}$; б) $\sqrt[3]{2x}\cdot\sqrt[4]{2x}\cdot\sqrt{2x}$; в) $\sqrt{a}:\sqrt[3]{a^2}$; г) $2a^3b\sqrt[3]{a^2b^3}:ab\sqrt{a^3b^2}$.

Корените се со различни коренови показатели. Затоа, прво ги сведуваме на ист коренов показател, а потоа ги применуваме правилата за множење и делење на корени со ист коренов показател.

Решение.

б) $\sqrt[3]{2x}\cdot\sqrt[4]{2x}\cdot\sqrt{2x}=\sqrt[12]{(2x)^4}\cdot\sqrt[12]{(2x)^3}\cdot\sqrt[12]{(2x)^6}=$

$=\sqrt[12]{(2x)^{4+3+6}}=\sqrt[12]{(2x)^{13}}=2x\sqrt[12]{2x}.$

г) $2a^3b\cdot\sqrt[3]{a^2b^3}:\left(ab\sqrt{a^3b^2}\right)=2a^2\sqrt[6]{\dfrac{a^4b^6}{a^9b^6}}=$

$=2a^2\sqrt[6]{\dfrac{1}{a^5}}=2a^2\sqrt[6]{\dfrac{a}{a^6}}=2a^2\dfrac{1}{a}\sqrt[6]{a}=2a\sqrt[6]{a}.$

5 Пресметај: а) $\dfrac{1}{3}\sqrt{3}\sqrt{5}\sqrt{15}$; б) $9\cdot\sqrt{\dfrac{2}{27}}:\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{2\dfrac{2}{3}}\right)$; в) $a^2\sqrt{2x}\cdot\dfrac{1}{a}\sqrt[3]{4x}$; г) $\sqrt[3]{4a^2}:\sqrt[6]{2a^3}$.

Б **6** Пресметај: а) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2$; б) $\left(\sqrt{a^2b}\right)^3$.

Решение. а) $\left(\sqrt[3]{2}\right)^2=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{2\cdot 2}=\sqrt[3]{2^2}$;

б) $\left(\sqrt{a^2b}\right)^3=\left(\left(a^2b\right)^{\frac{1}{2}}\right)^3=\left(a^2b\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{\left(a^2b\right)^3}=\sqrt{a^6b^3}=a^3b\sqrt{b}.$

Воопшто, правилото важи за кој било корен, т.е. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m=a^{\frac{1}{n}\cdot m}=a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}.$

Запомни!

Корен се степенува така што се степенува само поткореновиот израз и добиениот степен се коренува со истиот коренов показател, т.е.

$$\left(\sqrt[n]{a}\right)^m=\sqrt[n]{a^m},\ a>0;\ m,n\in\mathbb{N}.$$

7 Пресметај: а) $\left(\sqrt{5}\right)^2$; б) $\left(\sqrt[3]{3x^2}\right)^2$; в) $\left(\dfrac{a}{b}\sqrt{ab}\right)^3$.

В **8** Провери дали е точно бројното равенство $\sqrt[3]{\sqrt{64}}=\sqrt[6]{64}$.

9 Пресметај: а) $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$; б) $\sqrt{\sqrt[4]{ab^3}}$.

Решение. б) $\sqrt{\sqrt[4]{ab^3}}=\left(\sqrt[4]{ab^3}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\left(ab^3\right)^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(ab^3\right)^{\frac{1}{8}}=\sqrt[8]{ab^3}.$

Воопшто, правилото важи за кој било корен, т.е. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}=\left(\sqrt[m]{a}\right)^{\frac{1}{n}}=\left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}}=a^{\frac{1}{m\cdot n}}=\sqrt[m\cdot n]{a}.$

Запомни!

Корен се коренува така што поткореновиот израз се коренува со производот на кореновите показатели, т.е.

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a},\ a>0;\ m,n\in\mathbb{N}.$$

10 Пресметај: а) $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{2x^3y^4}}$; в) $\sqrt{x\sqrt[3]{2x}}$.

Решение. в) $\sqrt{x\sqrt[3]{2x}} = \sqrt{\sqrt[3]{x^3\cdot 2x}} = \sqrt{\sqrt[3]{2x^4}} = \sqrt[6]{2x^4}$.

Ако по извршените операции со корени добиениот резултат е корен, тој секогаш треба да се сведе во нормален вид.

11 Пресметај: а) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$; б) $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a}}$; в) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}$.

Задачи

Изврши ги назначените операции $(1-10)$:

1 а) $2\sqrt{7}\cdot 3\sqrt{7}$; б) $\sqrt{8}\cdot\sqrt{18}$; в) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}$.

2 а) $\sqrt{a}\cdot\sqrt{5a}$; б) $\sqrt{3x}\cdot\sqrt{27x}$;
в) $2\sqrt[3]{25a^5}\cdot 3\sqrt[3]{5a^4}$.

3 а) $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}$; б) $2\sqrt{x}\cdot 3\sqrt[3]{x^2y}\cdot\sqrt[4]{y^3}$;
в) $\sqrt{2x}\cdot\sqrt[3]{2x}\cdot\sqrt[4]{2x}$.

4 а) $\sqrt{48}:\sqrt{3}$; б) $\sqrt[3]{54}:\sqrt[3]{2}$; в) $9\cdot\sqrt{\frac{2}{75}}:\left(\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}\right)$.

5 а) $\sqrt[3]{4}:\sqrt{2}$; б) $\sqrt[5]{8}:\sqrt[3]{2}$; в) $\sqrt{1\frac{2}{3}}:\left(\frac{1}{3}\sqrt[6]{3\frac{3}{8}}\right)$.

6 а) $\sqrt{5a}:\sqrt{a}$; б) $\sqrt[3]{3a^2}:\sqrt[3]{a^2}$; в) $\sqrt[4]{27a^3}:\sqrt[4]{\frac{a^3}{3}}$.

7 а) $\sqrt{a}:\sqrt[3]{a^2}$; б) $\sqrt[3]{4a^2}:\sqrt[6]{2a^3}$; в) $3a\sqrt{a^2}:\sqrt[5]{a^2}$.

8 а) $\left(2\sqrt{6}+\sqrt{27}-2\frac{1}{3}\sqrt{3}+2\sqrt{12}\right)\cdot 3\sqrt{3}$;
б) $\left(5\sqrt{50}-10\sqrt{18}+25\sqrt{98}\right):5\sqrt{2}$.

9 а) $\sqrt[8]{\left(a^2b^3\right)^7}$; б) $\left(\frac{2}{3}\sqrt[4]{\frac{3}{2}}\right)^4$; в) $\left(\sqrt[3]{3x^2}\right)^2$;
г) $\left(\sqrt[3]{a^2b^3}\right)^6$; д) $\left(\frac{a}{b}\sqrt{ab}\right)^3\cdot\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^5$;
ѓ) $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2$.

10 а) $\sqrt{\sqrt{3\sqrt{3}}}$; б) $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a^3}}$; в) $\sqrt{a\sqrt[4]{a}}$;
г) $\sqrt{x\sqrt[3]{xy}}:\sqrt{y\sqrt{xy}}$; д) $\sqrt[3]{a\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}}$.

6 РАЦИОНАЛИЗИРАЊЕ НА ИМЕНИТЕЛОТ НА ДРОПКА

Потсети се!

- $\frac{m}{n}=\frac{m\cdot k}{n\cdot k},\ (k\neq 0).$
- $\sqrt{a}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{a^2}=a,\ (a>0).$
- $\sqrt[n]{a^n}=a,\ (a>0).$
- Кои изрази се викаат рационални алгебарски изрази?

А 1 Пресметај ја вредноста на бројот $\frac{10}{\sqrt{2}}$ и бројот $5\sqrt{2}$ со точност на четири децимали.

Со помош на калкулатор добиваме:

$10:1,41421=7,07108...;5\cdot 1,41421=7,07105.$

- Со која операција полесно ќе го добиеш резултатот без да користиш калкулатор?

Воочуваш дека $\frac{10}{\sqrt{2}}=5\cdot\sqrt{2}$, т.е. делењето со ирационален број го трансформиравме во множење, а множењето секако е поедноставна операција.

- Изразите во кои освен рационалните операции е застапена и операцијата коренување или степенување со показател рационален број се викаат ***ирационални изрази.***
- Рационалните и ирационалните изрази се викаат ***алгебарски изрази.***

Запомни!

Трансформацијата на изразите во коишто именителот на дропката од ирационален израз го трансформираме во рационален се вика ***рационализирање на именителот на дропката***.

2 Рационализирај го именителот на дропката: а) $\frac{4}{\sqrt{3}}$; б) $\frac{12}{\sqrt[3]{4}}$; в) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$.

Решение. Со проширување на дропката имаме: а) $\frac{4}{\sqrt{3}}=\frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3^2}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}.$

б) Бидејќи $\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2^2}$, за да го примениме равенството $\sqrt[n]{a^n}=a$ треба дропката да ја прошириме со $\sqrt[3]{2}$.

Според тоа имаме: $\frac{12}{\sqrt[3]{4}}=\frac{12}{\sqrt[3]{2^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}}=\frac{12\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2^3}}=\frac{12\cdot\sqrt[3]{2}}{2}=6\sqrt[3]{2}.$

в) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}=\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}\cdot\frac{\sqrt{a+b}}{\sqrt{a+b}}=\frac{\left(a^2-b^2\right)\cdot\sqrt{a+b}}{\left(\sqrt{a+b}\right)^2}=\frac{(a-b)(a+b)\sqrt{a+b}}{a+b}=(a-b)\sqrt{a+b}.$

Овде применивме: $\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{a+b}=\left(\sqrt{a+b}\right)^2$ и $a^2-b^2=(a-b)(a+b).$

3 Рационализирај го именителот на дропката $\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}$, $(n>m)$, каде што A е број или израз, а B е позитивен број или израз што добива само позитивна вредност.

Решение. $\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}=\frac{A}{\sqrt[n]{B^m}}\cdot\frac{\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{n-m}}}=\frac{A\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^{m+n-m}}}=\frac{A\sqrt[n]{B^{n-m}}}{\sqrt[n]{B^n}}=\frac{A\sqrt[n]{B^{n-m}}}{B}.$

- Ако $n<m$, тогаш прво коренот сведи го во нормален вид, па потоа примени ја постапката за рационализација.

4 Рационализирај го именителот на дропката: а) $\frac{5}{3\sqrt{2}}$; б) $\frac{5}{\sqrt[3]{49}}$; в) $\frac{4a^2-b^2}{\sqrt[3]{2a-b}}$; г) $\frac{4}{\sqrt[3]{16}}$.

Решение.

а) $\frac{5}{3\sqrt{2}}=\frac{5}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{3\sqrt{2^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{6}$;

б) $\frac{5}{\sqrt[3]{49}}=\frac{5}{\sqrt[3]{7^2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{7}}=\frac{5\sqrt[3]{7}}{7}$;

в) $\frac{4a^2-b^2}{\sqrt[3]{2a-b}}=\frac{4a^2-b^2}{\sqrt[3]{2a-b}}\cdot\frac{\sqrt[3]{(2a-b)^2}}{\sqrt[3]{(2a-b)^2}}=(2a+b)\sqrt[3]{(2a-b)^2}$.

г) $\frac{4}{\sqrt[3]{16}}=\frac{4}{\sqrt[3]{2^4}}=\frac{4}{2\sqrt[3]{2}}\cdot\frac{\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2^2}}=\frac{4\sqrt[3]{4}}{2\cdot 2}=\sqrt[3]{4}.$

Потсети се!

- $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$;
- $(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})=a^2-(\sqrt{b})^2$;
- $(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})=(\sqrt{a})^2-(\sqrt{b})^2$;

5 Рационализирај го именителот на дропката:

а) $\frac{7}{3+\sqrt{2}}$; б) $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$.

Решение. Бидејќи $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=3^2-(\sqrt{2})^2$, имаме:

а) $\frac{7}{3+\sqrt{2}}=\frac{7}{3+\sqrt{2}}\cdot\frac{3-\sqrt{2}}{3-\sqrt{2}}=\frac{7(3-\sqrt{2})}{9-(\sqrt{2})^2}=\frac{7(3-\sqrt{2})}{7}=3-\sqrt{2}$;

б) $\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{6}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(\sqrt{5})^2-(\sqrt{3})^2}=\frac{6(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{2}=3(\sqrt{5}+\sqrt{3})$.

6 Рационализирај го именителот на дропката: а) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; б) $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}$.

Решение. б) Дропката ќе ја прошириме со $4\sqrt{2}-3\sqrt{3}$, бидејќи

$(4\sqrt{2}+3\sqrt{3})(4\sqrt{2}-3\sqrt{3})=(4\sqrt{2})^2-(3\sqrt{3})^2$. Имаме: $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4\sqrt{2}+3\sqrt{3}}\cdot\frac{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}{4\sqrt{2}-3\sqrt{3}}=$

$$\frac{8\sqrt{6}-6\sqrt{9}+4\sqrt{4}-3\sqrt{6}}{(4\sqrt{2})^2-(3\sqrt{3})^2}=\frac{5\sqrt{6}-18+8}{4^2(\sqrt{2})^2-3^2(\sqrt{3})^2}=\frac{5(\sqrt{6}-2)}{32-27}=\sqrt{6}-2.$$

7 Рационализирај го именителот на дропката:

а) $\frac{3}{1+\sqrt{2}}$; б) $\frac{11\sqrt{3}}{3\sqrt{5}+2\sqrt{3}}$; в) $\frac{a}{a-\sqrt{a}}$; г) $\frac{a^2-4b^2}{\sqrt{a}+\sqrt{2b}}$.

Задачи

Рационализирај го именителот на дропката:

1 а) $\frac{20}{3\sqrt{5}}$; б) $\frac{4}{\sqrt{8}}$; в) $\frac{33}{\sqrt{11}}$; г) $\frac{4}{\sqrt[3]{2}}$.

2 а) $\frac{2b}{\sqrt{b}}$; б) $\frac{5a^2}{\sqrt{a}}$; в) $\frac{2x}{\sqrt[3]{4x^2}}$; г) $\frac{2x}{\sqrt[4]{x^3}}$.

3 а) $\frac{3}{\sqrt[3]{18}}$; б) $\frac{6}{\sqrt[4]{8}}$; в) $\frac{a}{\sqrt[4]{a^3}}$; г) $\frac{b}{\sqrt[5]{b^3}}$.

4 а) $\frac{1-b}{\sqrt{1-b}}$; б) $\frac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$; в) $\frac{a-b}{\sqrt[3]{a-b}}$.

5 а) $\frac{2}{2-\sqrt{2}}$; б) $\frac{12}{3+\sqrt{3}}$; в) $\frac{5}{2\sqrt{3}+\sqrt{2}}$;

г) $\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$; д) $\frac{3\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$; ѓ) $\frac{x\sqrt{y}-y\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}$;

е) $\frac{2}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}$.

7 ИРАЦИОНАЛНИ ИЗРАЗИ

Потсети се!

- Кои се цели, а кои дробно рационални алгебарски изрази?
- Во рационалните алгебарски изрази се застапени операциите: собирање, одземање, множење, делење и степенување со показател цел број. Овие операции се викаат рационални алгебарски операции.
- Како се викаат броевите $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$?

А **1** Кои од изразите се рационални алгебарски изрази?

а) $\frac{1}{2}$; б) $\sqrt{3}$; в) x^2-4y; г) $2+\sqrt{a}$;

д) $\frac{3x-y}{xy}$; ѓ) $\frac{4}{\sqrt{5}}$; е) $5a^{-2}bc^{\frac{1}{3}}$.

- Рационални изрази се а), в) и д).

Ирационалните изрази што содржат променливи ќе ги разгледуваме само за вредностите на променливите за коишто дадениот израз има смисла.

2 За која вредност на променливата има смисла изразот:

а) $\sqrt{x^2}-\sqrt{x-2}$; б) $\sqrt{x^2+1}-\sqrt[3]{x}$; в) $\sqrt{x+1}-(x+1)^{\frac{1}{3}}$?

- а) $\sqrt{x^2}$ има смисла за секој реален број, т.е. $x\in(-\infty,+\infty)$, а $\sqrt{x-2}$ има смисла за $x-2\geq 0$, $x\geq 2$, т.е. $x\in[2,+\infty)$. Според тоа, $x\in(-\infty,+\infty)\cap[2,+\infty)=[2,+\infty)$;
- в) $\sqrt{x+1}$ има смисла за $x\geq -1$, а $(x+1)^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x+1}$ има смисла за секој реален број.

Според тоа, $x\in[-1,+\infty)$.

3 Одреди ги допуштените вредности на променливата во ирационалните изрази:

а) $x-\sqrt{x}$; б) $\sqrt{3-x}-\sqrt[3]{x}$; в) $\dfrac{x-2}{\sqrt{x+3}}$. (Внимавај, именителот не смее да биде нула.)

Во понатамошното разгледување, ако поинаку не е речено, ќе подразбираме дека коренот секогаш има смисла.

4 Кои од дадените изрази се сведуваат на рационални:

а) $\sqrt[3]{81}$; б) $\sqrt[5]{32}$; в) $7\sqrt{4}$; г) $\sqrt[3]{x^3y^6}$?

б) $\sqrt[5]{32}=2$; г) $\sqrt[3]{x^3y^6}=xy^2$, бидејќи 2 и xy^2 се рационални изрази.

Кога во даден ирационален израз променливите се заменат со некои реални броеви, може да се добие или рационален или ирационален број.

5 Одреди неколку вредности на x и y за коишто ирационалниот израз $\sqrt{x+2y}$ ќе биде рационален израз.

Решение. За $x=1$, $y=4$ изразот $\sqrt{x+2y}$ е рационален, бидејќи $\sqrt{1+2\cdot 4}=\sqrt{9}=3$. За $x=4$, $y=6$ имаме: $\sqrt{4+2\cdot 6}=\sqrt{16}=4$, итн.

Некои ирационални изрази може да се трансформираат во рационален израз или тие да се упростат. Трансформациите на изразите се изведуваат врз основа на правилата за операциите со корени.

6 Упрости го изразот: а) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}$; б) $\sqrt{4x}+x^2\sqrt{\dfrac{1}{x}}+\dfrac{5}{x}\sqrt{x^3}$;

в) $\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$; г) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}+\dfrac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}$; д) $\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$.

Решение. а) $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}\cdot\sqrt[3]{a^2\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}=\sqrt{\sqrt[3]{a^3a}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{a^4a}}\cdot\sqrt{a}=\sqrt[6]{a^4}\cdot\sqrt[6]{a^5}\cdot\sqrt[6]{a^3}=\sqrt[6]{a^{12}}=a^2$.

б) $\sqrt{4x}+x^2\sqrt{\dfrac{1}{x}}+\dfrac{5}{x}\sqrt{x^3}=2\sqrt{x}+x^2\sqrt{\dfrac{1\cdot x}{x\cdot x}}+\dfrac{5}{x}\sqrt{x^2\cdot x}=2\sqrt{x}+x^2\cdot\dfrac{1}{x}\sqrt{x}+\dfrac{5}{x}\cdot x\sqrt{x}=(7+x)\sqrt{x}$;

Задачи

1 Одреди ги допуштените вредности на променливата x во изразот:

а) $\sqrt{x+2}$; б) $\sqrt{x+2}-\sqrt{x^2+1}$; в) $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}$; г) $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x+2}$; д) $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x-3}$.

2 Кои од следниве изрази не се сведуваат на рационални изрази:

а) $x-\sqrt{x}$; б) $5-x\sqrt{5}$; в) $2x-\sqrt{x^2}$; г) $3-\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^2}$; д) $x-\sqrt[3]{8x^3}$?

3 Упрости ги изразите, а потоа одреди кои од нив се ирационални изрази:

а) $\sqrt[5]{x^2}\cdot\sqrt[5]{x^3}$; б) $\sqrt[3]{a^2b}\cdot\sqrt[3]{ab^2}$; в) $\sqrt{8}:\sqrt{16}$; г) $\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{36}:2\sqrt[3]{\dfrac{4}{3}}$; д) $\sqrt{a^3b}:\sqrt{ab}$; ѓ) $\left(-2\sqrt[3]{4}\right)^3$; е) $\sqrt{x\sqrt[3]{x^2}}\cdot\sqrt[6]{x}$.

Упрости го изразот $(4-6)$:

4 а) $\sqrt{60}-3\sqrt{135}+10\sqrt{15}$; б) $2\sqrt{75}+3\sqrt{48}-5\sqrt{12}-2\sqrt{3}$.

5 $\frac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}-\frac{2}{3-\sqrt{7}}+\frac{6}{4+\sqrt{10}}.$

6 а) $\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}};$ б) $\left(\frac{5\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}-\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}-\frac{2x}{x-1}\right):\frac{2\sqrt{x}}{x-1}.$

8 ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1 Кои од следните искази се вистинити:

а) квадратен корен од 0 е 0; б) трети корен од -343 е -7;

в) изразот $\sqrt[3]{-8}$ нема смисла; г) четврти корен од 81 е 3?

2 За која вредност на x има смисла изразот: а) $\sqrt{2x+3}+\sqrt[3]{x}$; б) $\sqrt{2-x}-\sqrt{x^2+2}$?

3 Пресметај ја вредноста на изразот: а) $3\sqrt{25}-2\sqrt[3]{-64}+\sqrt[5]{-32}$; б) $9^{0,5}-8^{\frac{2}{3}}+125^{\frac{1}{3}}.$

4 Изврши ги назначените операции: а) $x^2\cdot\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3:x^{-\frac{1}{2}}$; б) $2a^2b^{\frac{1}{2}}:\left(a^{-1}b^{\frac{2}{3}}\right)^2.$

5 Запиши го во вид на корен степенот: а) $3^{\frac{1}{2}}$; б) $2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}$; в) $2x+3y^{\frac{1}{2}}.$

6 Запиши го како степен со рационален показател коренот: а) $\sqrt[4]{2}$; б) $\sqrt[3]{4}$; в) $2\sqrt[3]{ab^2}$; г) $2\sqrt{x}-\sqrt[3]{x^2y}.$

7 Сведи ги на заеднички коренов показател корените: а) $\sqrt[3]{x^2}$, $\sqrt[6]{xy^2}$, $\sqrt[4]{x^2y}$; б) $\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a^2b}$, $\sqrt[8]{a^5b^3}.$

8 Подреди ги по големина корените $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$, $\sqrt[4]{3}.$

9 Запиши го во нормален вид коренот: а) $\sqrt{200}$; б) $\sqrt[3]{8x^5y^7}$; в) $\frac{y}{x}\sqrt[5]{\frac{x^6}{y^3}}.$

10 Пресметај ја вредноста на изразот: а) $3\sqrt{8}-\sqrt{128}+\sqrt{200}$; б) $\sqrt[3]{x^2y^2}\cdot\sqrt[6]{x^2y}$; в) $\sqrt[4]{a^2b^3}:\sqrt{ab}.$

Изврши ги назначените операции $(11-12)$:

11 а) $\left(3\sqrt{2}+2\sqrt{8}\right)\cdot\sqrt{2}$; б) $\left(\sqrt[5]{x^3y^4}-\sqrt[5]{x^4y^3}\right):\sqrt[5]{x^2y^2}.$

12 а) $\sqrt[3]{a\sqrt{a^3}}$; б) $\sqrt{x\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{y^2}}$; в) $\left(\sqrt[3]{a^2b}\right)^2\cdot\sqrt{ab^2}.$

13 Кои од дадените изрази се сведуваат на рационални:

а) $x-\sqrt{x}$; б) $2x-\sqrt[3]{x^3}$; в) $3x-x\sqrt{5}$; г) $x-\sqrt[3]{8x^3}$?

14 Рационализирај го именителот на дропката: а) $\frac{26}{4-\sqrt{3}}$; б) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$; в) $\frac{x^2-y^2}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}.$

15 Упрости го изразот $\left(\frac{15}{\sqrt{6}+1}+\frac{4}{\sqrt{6}-2}-\frac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right).$

9 ЗАДАЧИ ЗА САМОПРОВЕРКА

1 Изразот $\sqrt{x+1}-(x-1)^{\frac{1}{3}}$ има смисла ако променливата x припаѓа на интервалот:

а) $(1,+\infty)$; б) $[1,+\infty)$; в) $[-1,+\infty)$; г) $(-1,+\infty)$. 1

2 Вредноста на изразот $8^{\frac{2}{3}}$ е: а) 64; б) 16; в) 4; г) 2. 1

3 Вредноста на изразот $\left(a^{-1}\cdot a^{\frac{1}{2}}\right)^2$ е: а) a^{-1}; б) a^{-2}; в) a; г) a^2. 1

4 По упростување на изразот $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ се добива изразот: а) $\sqrt[6]{a}$; б) $\sqrt[6]{a^3}$; в) $\sqrt{a^3}$; г) $\sqrt[3]{a^2}$. 1

5 На рационален израз се сведува изразот: а) $2x^2\sqrt{x}$; б) $2x\sqrt{x^2}$; в) $3-\sqrt[3]{8}$; г) $x-\sqrt[3]{8x^3}$. 1

6 Ако a е реален број и n е непарен природен број, тогаш решението на равенката $x^n=a$ по x во множеството $\mathbb{R}$ се вика _____ на бројот a. 2

7 Постапката со која се определува $\sqrt[n]{a}$ се вика _____. 2

8 Корен од негативен број со _____ коренов показател не е дефиниран во множеството на реалните броеви. 2

9 Два или повеќе корени што се во нормален вид, а се разликуваат само по нивните коефициенти се викаат _____. 2

10 Пресметај: $36^{0,5}-25^{\frac{1}{2}}+8^{\frac{2}{3}}$. 3

11 Пресметај: $2a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{3}{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}a^{\frac{3}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right)^2$. 3

12 Пресметај: $3\sqrt{36a}-2\sqrt{25a}+\frac{1}{3}\sqrt{9a}$. 3

13 Пресметај: а) $2\sqrt[3]{25a^5}\cdot 3\sqrt[3]{5a^4}$; б) $\sqrt[3]{4a^2}:\sqrt{2a^3}$. 3

14 Пресметај: $\sqrt{x\sqrt[3]{x^2y^2}}\cdot\sqrt[3]{y^2\sqrt{xy}}$. 3

15 Рационализирај го именителот на дропката: а) $\frac{20}{5+\sqrt{5}}$; б) $\frac{3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}$. 6

ТЕМА 3

КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Т, Е

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1 Т, Е Проширувања на множествата броеви. Поим за комплексен број 60

2 Т, Е Еднаквост на комплексни броеви. Собирање и одземање на комплексни броеви 64

3 Т, Е Множење и делење на комплексни броеви. Модул на комплексен број 66

4 Т Геометриско претставување на комплексни броеви 70

5 Т Собирање и одземање на комплексни броеви преку радиус-вектори..... 73

6 Т Својства на модул на комплексен број..... 76

7 Задачи за повторување и утврдување 79

8 Задачи за самопроверка 80

1 ПРОШИРУВАЊА НА МНОЖЕСТВАТА БРОЕВИ. ПОИМ ЗА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

Т, Е

А Множество природни броеви е множеството $\mathbb{N}=\{1, 2, 3,...,n, n+1,...\}$. Ова множество е затворено во однос на операциите собирање и множење, т.е. збир, односно производ на два природни броја е природен број.

- Дали операцијата одземање е затворена во $\mathbb{N}$?

Одговор. Не! Разликата на кои било два природни броеви не е секогаш природен број. На пример, $2-5\notin\mathbb{N}$. Оттука, постојат равенки од облик $x+a=b$ кои немаат решение во $\mathbb{N}$. Такви се равенките $6+x=3$, $x+3=1$ итн.

- За да се отстрани овој недостаток се воведува множеството цели броеви, на тој начин што $\mathbb{N}$ се проширува со 0 и со негативните броеви. Добиеното множество се нарекува множество цели броеви и се означува со $\mathbb{Z}$. Значи, $\mathbb{Z}=\{...,-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3...\}$.

1 Дали равенката $2x=3$ има решение во $\mathbb{Z}$?

Одговор. Не постои ниеден цел број x таков што $2x=3$. Значи, равенката нема решение во множеството на целите броеви.

- Во општ случај, постојат равенки од облик $ax=b$ кои немаат решение во $\mathbb{Z}$, бидејќи операцијата делење не е затворена во $\mathbb{Z}$, т.е. количник на два цели броеви не е секогаш цел број. Затоа множеството $\mathbb{Z}$ се проширува во множеството на рационални броеви $\mathbb{Q}$, каде што

$$\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b}\,\middle|\, a,b\in\mathbb{Z},\quad b\neq 0\right\}.$$

- Решение на равенката $2x=3$ во $\mathbb{Q}$ е $x=\frac{2}{3}$.

2 Дали равенката $x^2=3$ има решение во $\mathbb{Q}$?

Одговор. Не постои ниеден рационален број x таков што $x^2=3$, т.е. оваа равенка нема решение во множеството на рационалните броеви.

- Потребата од постоење на решение на сите равенки од облик $x^n=a\ (a>0)$ доведува до воведување на нови броеви кои се нарекуваат ирационални броеви. Множеството на ирационални броеви се означува со $\mathbb{J}$. Такви се броевите $\sqrt{2}=1{,}41421356\ldots$, $\pi=3{,}141592654\ldots$, $\sqrt{3}=1{,}7320508\ldots$, итн.

  Унијата од множеството на рационалните и множеството на ирационалните броеви се нарекува множество на реални броеви и се означува со $\mathbb{R}$. Значи, $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{J}$.

- Воочи дека $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.
- Во сите овие множества, операциите собирање и множење се комутативни и асоцијативни, а множењето е дистрибутивно во однос на собирањето.

Б 3 Во кои множества има решение равенката:

а) $x+3=5$; б) $x+3=1$; в) $2x-3=0$; г) $x^2=5$; д) $x^2+1=0$?

Решение. а) $x=2$, $2 \in \mathbb{N}$. Значи, равенката има решение во $\mathbb{N}$, а бидејќи $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$, таа има решение и во: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$.

б) $x=1-3=-2$, $-2 \in \mathbb{Z}$, равенката има решение во $\mathbb{Z}$, па и во $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$, но не и во $\mathbb{N}$, бидејќи $-2 \notin \mathbb{N}$.

в) $x=\frac{3}{2}$, $\frac{3}{2} \in \mathbb{Q}$; равенката има решение и во $\mathbb{R}$.

г) $x_1=\sqrt{5}$, $x_2=-\sqrt{5}$; $\sqrt{5}, -\sqrt{5} \in \mathbb{J}$ и $\sqrt{5}, -\sqrt{5} \in \mathbb{R}$.

д) Равенката $x^2+1=0$ нема решение во множеството на реалните броеви. Имено, равенката може да се трансформира во облик $x^2=-1$, а квадратот на ниеден реален број не е негативен.

- Оттука, се јавува потребата од проширување и на множеството на реалните броеви. При тоа проширување мора да се води сметка за следното:

  1) новото множество треба да ги содржи реалните броеви;

  2) новото множество треба да содржи еден елемент чиј квадрат е -1;

  3) во новото множество да се дефинираат операциите собирање и множење и за нив да важат комутативното и асоцијативното својство, како и дистрибутивното својство на множењето во однос на собирањето.
- За да биде исполнето второто барање, по дефиниција воведуваме нов број кој го означуваме со симболот i, таков што неговиот квадрат да е -1, т.е. $i^2 \overset{def}{=} -1$.

Запомни!

Бројот i се вика ***имагинарна единица*** и неговиот квадрат е -1, т.е. $i^2 \overset{def}{=} -1$.

В Бројот $a+ib$, каде што a и b се дадени реални броеви, а i е имагинарната единица се вика ***комплексен број***. Множеството од сите броеви од ваков облик се вика ***множество на комплексните броеви*** и се означува со $\mathbb{C}$. Ако $z=a+bi$, тогаш бројот a се вика ***реален дел*** на бројот z и се означува со $\mathrm{Re}(z)$, а бројот b се вика ***имагинарен дел*** на бројот z и се означува со $\mathrm{Im}(z)$.

Притоа, по дефиниција $0 \cdot i = 0,\ \ 1 \cdot i = i,\ \ a + 0i = a,\ \ 0 + bi = bi,$

т.е. $0i, 1i, a + 0i, 0 + bi$ се други ознаки за $0, i, a, bi,$ соодветно.

4 Запиши ги комплексните броеви, ако се дадени нивните реални и имагинарни делови:

а) $\mathrm{Re}(z) = 4,\ \ \mathrm{Im}(z) = -2;$ б) $\mathrm{Re}(z) = 0,\ \ \mathrm{Im}(z) = 3;$

в) $\mathrm{Re}(z) = 2,\ \ \mathrm{Im}(z) = 0;$ г) $\mathrm{Re}(z) = 0,\ \ \mathrm{Im}(z) = 0.$

Решение. а) $z = 4 - 2i;$ б) $z = 0 + 3i = 3i;$ в) $z = 2 + 0i = 2;$ г) $z = 0 + 0i = 0.$

За даден комплексен број $z = a + bi$ воочи го следното:

- Ако $\mathrm{Im}(z) = b = 0,$ тогаш $z = a + 0i = a \in \mathbb{R}.$ Оттука следува дека секој реален број е и комплексен, т.е. $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}.$ Според тоа, првиот услов за проширување на множеството на реалните броеви е исполнет.
- Ако $\mathrm{Re}(z) = a = 0,$ тогаш $z = 0 + bi = bi;$ и ако $b \neq 0,$ тогаш bi се вика ***имагинарен број***.

5 Одреди ги реалниот и имагинарниот дел на секој од дадените комплексни броеви:

а) $2 + 3i;$ б) $4 - 2i;$ в) $2;$ г) $3i.$

Запомни!

Комплексниот број $-z = -a - bi$ се вика ***спротивен*** на комплексниот број $z = a + bi.$
Комплексниот број $z = a - bi$ се вика ***конјугирано комплексен*** на бројот $z = a + bi$ и се означува со $\overline{z}$.

6 Запиши ги спротивниот и конјугирано комплексниот број на броевите:

а) $z = 4 - 2i;$ б) $z = 0 + 3i = 3i;$ в) $z = 2 + 0i = 2;$ г) $z = 0 + 0i = 0.$

Решение. а) Спротивен број на z е $-z = -4 + 2i,$ а конјугирано комплексен е $\overline{z} = 4 + 2i;$

б) $-z = 0 - 3i = -3i$ и $\overline{z} = -3i;$ в) $-z = -2 - 0i = -2$ и $\overline{z} = 2;$ г) $-z = 0 - 0i = 0$ и $\overline{z} = 0 - 0i = 0.$

7 Ако $z = a + bi,$ покажи дека: а) $\overline{\overline{z}} = z;$ б) $\overline{(-z)} = -\overline{z}.$

Решение. а) $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{(a + bi)}} = \overline{(a - bi)} = a + bi = z;$

б) $\overline{(-z)} = \overline{(-a - bi)} = -a + bi = -(a - bi) = -\overline{z}.$

- Квадратен корен од кој било негативен број a е имагинарен број; со симболот $\sqrt{a}$ ќе го означуваме имагинарниот број $\sqrt{|a|}\,i.$ Значи, за $a < 0:\ \ \sqrt{a} = \sqrt{|a|}\,i.$
На пример, $\sqrt{-4} = \sqrt{4}\,i = 2i,\ \sqrt{-1} = \sqrt{1}\,i = i.$

8 Запиши го имагинарниот број: а) $\sqrt{-9}$; б) $\sqrt{-49}$.

Т Два комплексни броја се ***еднакви*** ако и само ако реалните делови им се еднакви и имагинарни делови им се еднакви.

9 За кои реални броеви x и y важи равенството $x+2i=3+yi$?

Одговор. Равенството ќе важи ако и само ако $x=3$ и $y=2$.

Запомни!

Комплексните броеви $a+bi$ и $c+di$ се еднакви ако и само ако $a=c$ и $b=d$.

10 За кои реални броеви x и y важи равенството $(x+2)+(y-2)=3+2i$?

Решение. Равенството ќе важи ако и само ако $\begin{cases} x+2=3 \\ y-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=4 \end{cases}$.

Задачи

1 Одреди во кои бројни множества следните равенки имаат решение:
а) $x-10=5$; б) $x+5=2$;
в) $4x+5=0$; г) $x^2=7$.

2 Запиши ги комплексните броеви, ако се дадени:
а) $\mathrm{Re}(z)=-3,\ \mathrm{Im}(z)=12$;
б) $\mathrm{Re}(z)=10,\ \mathrm{Im}(z)=0$;
в) $\mathrm{Re}(z)=2,\ \mathrm{Im}(z)=3$;
г) $\mathrm{Re}(z)=0,\ \mathrm{Im}(z)=-4$.

3 Запиши ги реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број:
а) $1-3i$; б) $3-32i$; в) $5i$; г) 6.

4 Запиши ги спротивните и конјугирано комплексните броеви за броевите:
а) $2+3i$; б) $-32-32i$; в) 2; г) $53i$.

5 Ако $z=2-5i$, определи:
а) $\overline{\overline{z}}$; б) $\overline{(-z)}$.

6 Да се определи: а) $\sqrt{-81}$; б) $\sqrt{-144}$.

7 За кои реални броеви x и y се точни следните равенства: а) $6+xi=2y+4i$;
б) $(x+5i)+6i=2+yi$;
в) $3x+xi-12y=12+iy-i$;
г) $3x+3yi+xi-y=12-4i$?

2 СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Т, Е

Пошсеши се!

- Бројот i се вика имагинарна единица и $i^2 \overset{def}{=} -1$.
- Кој е реалниот, а кој имагинарниот дел на бројот $14-12i$?
- Кој е конјугирано комплексниот број на бројот $z=4+11i$?
- Провери дали се еднакви дропките:

  а) $\frac{2}{3}=\frac{6}{9}$; б) $\frac{4}{2}=\frac{6}{4}$.

А Во оваа лекција ќе дефинираме збир и разлика на два комплексни броја.

Запомни!

Ако $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$, тогаш збир и разлика на овие два броја се дефинира на следниот начин:

$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c)+(b + d)i$

и

$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c)+(b - d)i.$

- Значи, збир на два комплексни броја е комплексен број чиј реален дел е збир на реалните делови, а имагинарниот дел е збир на имагинарните делови на двата броја.
- Разлика на два комплексни броја е комплексен број чиј реален дел се добива кога од реалниот дел на првиот број се одземе реалниот дел на вториот број, а имагинарниот дел се добива кога од имагинарниот дел на првиот број се одземе имагинарниот дел на вториот број.

3 Пресметај ги збирот и разликата на следните броеви:

а) $z_1=2+3i$ и $z_2=3-2i$; б) $z_1=4-2i$ и $z_2=2i$; в) $z_1=3-6i$ и $z_2=5$.

Решение. а) $z_1+z_2=(2+3i)+(3-2i)=(2+3)+(3+(-2))i=5+i$,

$z_1-z_2=(2+3i)-(3-2i)=(2-3)+(3-(-2))i=-1+5i$;

б) $z_1+z_2=(4-2i)+2i=(4+0)+(-2+2)i=4$, $z_1-z_2=(4-2i)-2i=(4-0)+(-2-2)i=4-4i$;

в) $z_1+z_2=(3-6i)+5=(3+5)-6i=8-6i$, $z_1-z_2=(3-6i)-5=(3-5)-6i=-2-6i$.

4 Пресметај ги збирот и разликата на следните броеви:

а) $z_1=12+32i$ и $z_2=13-22i$; б) $z_1=4+12i$ и $z_2=-8i$.

5 Нека $z_1=2+3i$, $z_2=-8i$ и $z_3=3-4i$. Провери дали е точно дека:

а) $z_1+z_2=z_2+z_1$; б) $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

Решение. а) $z_1+z_2=2-5i=z_2+z_1$; б) $(z_1+z_2)+z_3=(2-5i)+(3-4i)=5-9i$ и $z_1+(z_2+z_3)=(2+3i)+(3-12i)=5-9i$. Значи, за дадените комплексни броеви важат равенствата $z_1+z_2=z_2+z_1$ и $(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$.

Овие равенства важат и за произволни комплексни броеви.

Важи и општо:

Операцијата собирање во множеството комплексни броеви е комутативна и асоцијативна, т.е. за кои било комплексни броеви z_1, z_2 и z_3 важи:

$z_1+z_2=z_2+z_1$ (***комутативно својство***) и

$(z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3)$ (***асоцијативно својство***).

6 Пресметај $z+\overline{z}$ и $z-\overline{z}$, ако $z=3-2i$.

Решение. $z+\overline{z}=(3-2i)+(3+2i)=(3+3)+(-2+2)i=6\in\mathbb{R}$,

$z-\overline{z}=(3-2i)-(3+2i)=(3-3)+(-2-2)i=-4i$.

Важи и општо:

За кој било комплексен број $z=a+bi$, збирот $z+\overline{z}=2a$ е реален број, а разликата $z-\overline{z}=2bi$ е имагинарен број.

7 Дали за комплексните броеви $z_1=6-3i$ и $z_2=1-i$ е точно равенството $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$?

Решение. $\overline{z_1+z_2}=\overline{(6-3i)+(1-i)}=\overline{7-4i}=7+4i$ и $\overline{z}_1+\overline{z}_2=(6+3i)+(1+i)=7+4i$. Значи, за дадените броеви равенството е точно.

Важи и општо:

Ако z_1 и z_2 се два комплексни броеја, тогаш $\overline{z_1+z_2}=\overline{z}_1+\overline{z}_2$.

8 Пресметај: $\sqrt{-4}+\sqrt{-1}-\sqrt{-25}$.

Решение. $\sqrt{-4}+\sqrt{-1}-\sqrt{-25}=2i+i-5i=-2i$.

Задачи

1 Пресметај ги збирот и разликата на комплексните броеви:

а) $z_1 = 4+3i$ и $z_2 = 4-8i$;

б) $z_1 = \frac{2}{3}-\frac{5}{4}i$ и $z_2 = \frac{1}{6}-\frac{3}{8}i$;

в) $z_1 = \sqrt{2}+\sqrt{3}\,i$ и $z_2 = 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\,i$.

2 Да се пресмета $\overline{z}+z$ и $\overline{z-\overline{z}}$, ако

а) $z = 10+i$; б) $z = \frac{2}{4}-\frac{3}{7}i$;

в) $z = \sqrt{3}-\sqrt{5}i$.

3 Ако $z_1 = 3+4i$ и $z_2 = 7-8i$, провери дали е точно равенството $\overline{z_1 - z_2} = \overline{z_1} - \overline{z_2}$.

4 Да се провери точноста на равенството $\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1}+\overline{z_2}$, ако $z_1 = 3-6i$, $z_2 = 3+5i$.

5 Пресметај:

а) $-\sqrt{25}-\sqrt{-36}+\sqrt{-64}+\sqrt{100}$;

б) $\sqrt{-625}+\sqrt{-121}-\sqrt{-324}+\sqrt{-16}$.

3 МНОЖЕЊЕ И ДЕЛЕЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ. МОДУЛ НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ

Т, Е

Потсети се!

- Кој е конјугирано комплексниот број на бројот $3-5i$?
- Одреди го производот на биномите $(2x-3)(x+2)$.

А Во овој дел ќе дефинираме множење на комплексни броеви. Тоа се сведува на множење на биноми. Ако броевите $z_1 = a+bi$ и $z_2 = c+di$ се помножат согласно правилото за множење на биноми, се добива следното:

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+cbi+bdi^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Запомни!

Ако $z_1 = a+bi$ и $z_2 = c+di$, тогаш производот на овие два броја се дефинира на следниот начин:

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i.$$

1 Одреди го производот на комплексните броеви $z_1 = 3+4i$ и $z_2 = 3-5i$.

Решение. $z_1 \cdot z_2 = (3+4i)(3-5i) = 9-15i+12i-20i^2 = 9-15i+12i+20 = 29-3i.$

2 Пресметај го производот на комплексните броеви $z_1 = 1-i$ и $z_2 = 2+i$.

3 Нека $z_1 = 2+3i$, $z_2 = -8i$ и $z_3 = 3-4i$. Провери дали:

$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$, $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ и $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.

Решение. $z_1 \cdot z_2 = -16i + 24 = z_2 \cdot z_1$; $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = (24-16i)\cdot(3-4i) = 72-96i-48i-64 = 8-144i$;

$z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) = (2+3i)\cdot(-32-24i) = -64-48i-96i+72 = 8-144i$.

- Од еднаквоста на десните страни, следува еднаквост и на левите, т.е. за дадените комплексни броеви важи равенството $(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$, бидејќи

$(z_1 + z_2)\cdot z_3 = (2-5i)\cdot(3-4i) = -14-23i$; $\quad z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3 = (18+i)+(-32-24i) = -14-23i$

- Значи, за дадените комплексни броеви важи равенството $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$.
- Дали овие три равенства важат и за кои било комплексни броеви?

Запомни!

Операцијата множење во множеството на комплексни броеви е комутативна и асоцијативна, т.е. ако z_1, z_2 и z_3 се кои било комплексни броеви, тогаш важат

$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$ (***комутативното својство***) и

$(z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3)$ (***асоцијативното својство***).

Исто така, во множеството на комплексни броеви, операцијата множење е дистрибутивна во однос на операцијата собирање, т.е. за кои било комплексни броеви z_1, z_2 и z_3 важи $z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$ и $(z_1 + z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot z_3 + z_2 \cdot z_3$ (***дистрибутивното својство***).

Д **4** Пресметај $z \cdot \overline{z}$, ако $z = a + bi$.

Решение. $z \cdot \overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - abi + abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2$, при што $a^2 + b^2 \in \mathbb{R}$.

Запомни!

За произволен комплексен број $z = a + bi$, производот $z \cdot \overline{z}$ е реален број. Квадратниот корен од тој број се означува со $|z|$ и се вика ***модул*** или ***апсолутна вредност*** на комплексниот број z. Значи,

$$|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

5 Пресметај го модулот на комплексниот број: а) $1+i$; б) $2-i$; в) $4-3i$.

Решение. а) $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$; б) $|2-i| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$; в) $|4-3i| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$.

6 Покажи дека за комплексните броеви $z_1 = 6-3i$ и $z_2 = 1-i$ е точно равенството $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

Решение.

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(6-3i)\cdot(1-i)} = \overline{6-6i-3i-3} = \overline{3-9i} = 3+9i; \quad \overline{z_1}\cdot\overline{z_2} = (6+3i)\cdot(1+i) = 6+6i+3i-3 = 3+9i.$$

Од еднаквоста на десните страни на последните две равенства, следува еднаквост и на левите страни, т.е. за дадените броеви $z_1 = 6-3i$ и $z_2 = 1-i$, равенството е точно.

Важи и ошшо:

Ако z_1 и z_2 се кои било комплексни броеви, тогаш $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$.

В Во овој дел ќе дефинираме операција делење на два комплексни броеви $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ $(z_2 \neq 0)$. Имајќи предвид дека производот на еден комплексен број и неговиот конјугирано комплексен број е реален број, изразот $\frac{z_1}{z_2}$ се множи со $\frac{\overline{z_2}}{\overline{z_2}}$ и на тој начин во именителот се добива реален број. Имено,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di}\cdot\frac{c-di}{c-di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+(-ad+bc)i}{c^2+d^2}.$$

Заошмни!

Ако $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ $(z_2 \neq 0)$,тогаш количникот на овие два броја се дефинира на следниот начин:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{-ad+bc}{c^2+d^2}i.$$

7 Одреди ги количниците: а) $\frac{3-i}{2+3i}$; б) $\frac{2+3i}{3-4i}$; в) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{3}-\sqrt{4}i}$.

Решение. а) $\frac{3-i}{2+3i} = \frac{3-i}{2+3i}\cdot\frac{2-3i}{2-3i} = \frac{6-9i-2i-3}{2^2+3^2} = \frac{3-11i}{13} = \frac{3}{13} - \frac{11}{13}i;$

б) $\frac{2+3i}{3-4i} = \frac{2+3i}{3-4i}\cdot\frac{3+4i}{3+4i} = \frac{6+8i+9i-12}{3^2+4^2} = \frac{-6+17i}{25} = -\frac{6}{25} + \frac{17}{25}i;$

в) $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}-\sqrt{3}i}\cdot\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}i}{\sqrt{2}+\sqrt{3}i} = \frac{\sqrt{4}+2\sqrt{6}i-\sqrt{9}}{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2} = \frac{-1+2\sqrt{6}i}{5} = \frac{-1}{5} + \frac{2\sqrt{6}}{5}i.$

- Воочи дека за да го одредиме количникот на два комплексни броја, броителот и именителот на дропката треба да ги помножиме со конјугирано комплексниот број на именителот.

8 Одреди ги реалниот и имагинарниот дел на комплексниот број $z=\frac{3-i}{3+i}+\frac{3+i}{3-i}$.

Решение. $\frac{3-i}{3+i}+\frac{3+i}{3-i}=\frac{3-i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i}+\frac{3+i}{3-i}\cdot\frac{3+i}{3+i}=\frac{9-2i-1}{9+1}+\frac{9+2i-1}{9+1}=\frac{8-2i}{10}+\frac{8+2i}{10}=\frac{16}{10}=\frac{8}{5}$.

Значи, $\mathrm{Re}(z)=8/5$, а $\mathrm{Im}(z)=0$.

В **9** Пресметај $(2-3i)(2-3i)(2-3i)$.

Решение. $(2-3i)(2-3i)(2-3i)=(4-6i-6i+9i^2)(2-3i)=(-5-12i)(2-3i)=$

$=-10+15i-24i+36i^2=-46-9i$.

Запомни!

За произволен комплексен број z и произволен природен број n, степенот z^n се дефинира со:

$$z^n=\underbrace{z\cdot z\cdot\ldots\cdot z}_{n\text{ пати}}$$

10 Пресметај: а) z^2; б) z^3, ако $z=1-2i$.

Решение. а) $z^2=(1-2i)(1-2i)=1-4i+4i^2=-3-4i$; б) $z^3=z^2\cdot z=(-3-4i)(1-2i)=-11+2i$.

11 Одреди ги степените i^n на имагинарната единица за секој цел број n.

Решение. За позитивните показатели на i имаме:

$i^1=i$,

$i^2=-1$,

$i^3=i^2\cdot i=-1\cdot i=-i$,

$i^4=i^3\cdot i=-i\cdot i=-i^2=1$,

$i^5=i^4\cdot i=1\cdot i=i$,

$i^6=i^4\cdot i^2=1\cdot(-1)=-1$,

$i^7=i^4\cdot i^3=i^3=-i$,

$i^8=i^4\cdot i^4=i^4=1$ итн.

За негативните показатели на i имаме: $i^{-1}=\frac{1}{i}=\frac{i^4}{i}=i^3=-i$, $i^{-2}=-1$, $i^{-3}=i$, $i^{-4}=1$, и.т.н.

- За $n=0$, по дефиниција $i^0\overset{def}{=}1$.

Воочи!

За секој цел број n, $i^n\in\{i,-1,-i,1\}$ и притоа ако $n=4k+r$ $(0\le r\le 3)$, тогаш

$$i^n=i^{4k+r}=i^r.$$

На пример, $i^{35} = i^{4\cdot 8+3} = i^3 = -i$; $i^{-35} = i^{-4\cdot 9+1} = i^1 = i$.

12 Пресметај ги следните степени: а) $(1+i)^2$; б) $(1-i)^8$.

Решение. а) $(1+i)^2 = (1+i)(1+i) = 1+i+i+i^2 = 2i$;

б) $(1-i)^8 = \left((1-i)^2\right)^4 = \left((1-i)(1-i)\right)^4 = (-2i)^4 = 16$.

Задачи

1 Пресметај го производот и количникот на комплексните броеви z_1 и z_2 ако:

а) $z_1 = 2+5i$ и $z_2 = 1-9i$;

б) $z_1 = 2-6i$ и $z_2 = 3-i$;

в) $z_1 = \sqrt{2}+\sqrt{3}i$ и $z_2 = 3\sqrt{2}-2\sqrt{3}i$.

2 Пресметај ги следните степени:

а) $(2+5i)^3$; б) $(2-6i)^4$; в) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}i)^3$.

3 Пресметај го модулот на комплексниот број:

а) $z = 10-2i$; б) $z = 1-4i$;

в) $z = \sqrt{3}-\sqrt{5}i$.

4 Да се покаже точноста на равенството

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}},$$

ако $z_1 = 1-2i$, $z_2 = 3+4i$.

5 Одреди ја вредноста на степенот на имагинарната единица:

а) i^{54}; б) i^{524}; в) i^{-97}; г) i^{-486}.

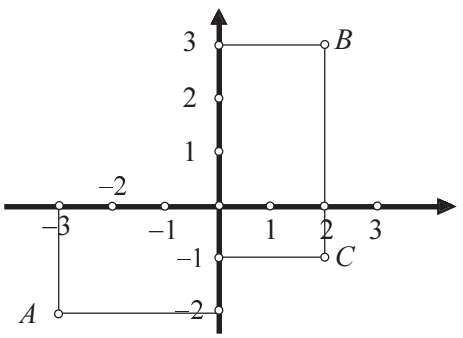
6 Реши ги дадените равенки и провери ги решенијата: а) $x^2 - 16 = 0$; б) $x^2 + 16 = 0$.

4 ГЕОМЕТРИСКО ПРЕТСТАВУВАЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

Т

Потсети се!

- Секоја точка во рамнината е определена со своите координати, т.е. со подреден пар реални броеви.
- Одреди ги координатите на точките A, B и C.



А Секој комплексен број $z = a + bi$ е наполно определен со неговиот реален дел a и имагинарен дел b, $a, b \in \mathbb{R}$. Според тоа, комплексниот број $z = a + bi$ може да се претстави со подредениот пар реални броеви (a,b) и обратно, секој подреден пар (a,b) може да се запише како комплексен број $z = a + bi$.

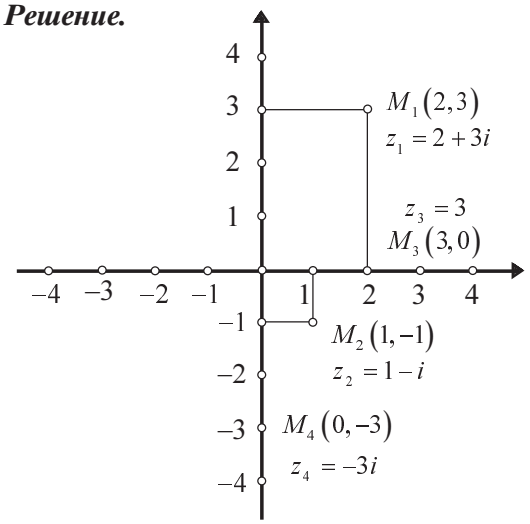
- Значи, постои заемно еднозначно соодветство помеѓу комплексните броеви и подредените парови реални броеви.
- На пример, $z = 3-2i = (3,-2)$; $z = 5i = (0,5)$; $z = 3 = (3,0)$. Исто така, $z = (2,3) = 2+3i$; $z = (1,0) = 1$; $z = (0,2) = 2i$.

- Од друга страна, познато е дека на секој подреден пар (a,b) соодветствува точно една точка $M(a,b)$ од координатната рамнина, и обратно, на секоја точка $N(x,y)$ од координатната рамнина соодветствува точно еден подреден пар реални броеви (x,y), т.е. постои заемно еднозначно соодветство помеѓу подредените парови реални броеви и точките од координатната рамнина.

- Оттука, може да се заклучи дека постои заемно еднозначно соодветство помеѓу комплексните броеви и точките од координатната рамнина. Тоа значи дека на секој комплексен број $z = a + bi$ соодветствува една точка $M(a,b)$ од координатната рамнина , и обратно, на секоја точка $N(x,y)$ од координатната рамнина соодветствува точно еден комплексен број $z = x + yi$.

1 Претстави ги комплексните броеви $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 1-i$, $z_3 = 3$ и $z_4 = -3i$ во координатна рамнина.

Решение.



- Според претходно кажаното,

  $z_1 = 2+3i = (2,3)$,

  $z_2 = 1-i = (1,-1)$,

  $z_3 = 3 = (3,0)$,

  $z_4 = -3i = (0,-3)$.

- Воочи дека на реалниот број $z_3 = 3$ соодветствува точката $M_1(3,0)$, која лежи на x-оската, а на имагинарниот број $z_4 = -3i$ соодветствува точката $M_2(0,-3)$, која лежи на y-оската.

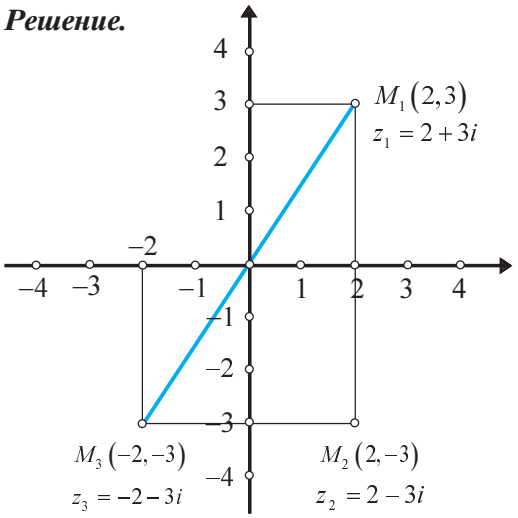
Запомни!

Рамнината чии точки претставуваат комплексни броеви се вика ***комплексна*** или ***Гаусова рамнина***. Апцисната оска на таа рамнина се вика ***реална оска***, а ординатната оска се вика ***имагинарна оска***.

- Знаеме дека два комплексни броја $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ се еднакви ако и само ако реални делови им се еднакви и имагинарни делови им се еднакви, т.е. $a = c$ и $b = d$. Оттука, $(a,b) = (c,d)$.

2 Претстави ги во комплексна рамнина комплексните броеви $z_1 = 2+3i$, $z_2 = 2-3i$, $z_3 = -2-3i$. Воочи кои од нив се симетрични во однос на x-оската, а кои во однос на координатниот почеток.

Решение.



- Воочи дека точките M_1 и M_2, кои соодветствуваат на конјугирано комплексните броеви z_1 и z_2 се симетрични во однос на x-оската, бидејќи подредените парови $(2,3)$ и $(2,-3)$ се симетрични во однос на x-оската.

- Од друга страна, точките M_1 и M_3, кои соодветствуваат на спротивните комплексни броеви z_1 и z_3 се симетрични во однос на координатниот почеток, бидејќи подредените парови $(2,3)$ и $(-2,-3)$ се симетрични во однос на координатниот почеток.

Запомни!

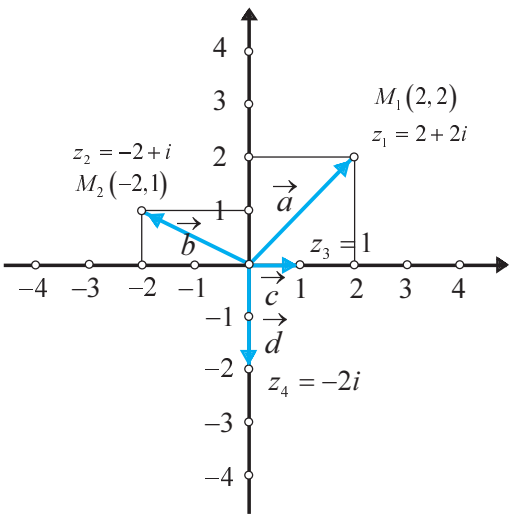
Точките од комплексната рамнина кои соодветствуваат на конјугирано комплексни броеви се симетрични во однос на x-оската, а оние точки кои соодветствуваат на спротивни комплексни броеви се симетрични во однос на координатниот почеток.

Д Векторот чиј почеток е во координатниот почеток, а крајот е во точката $M(a,b)$ се вика ***радиус-вектор*** на точката M и се означува со $\overrightarrow{OM}$.

Координатите на радиус-векторот се совпаѓаат со координатите на M. Притоа, секоја точка од рамнината е наполно определена со нејзиниот радиус-вектор.

- Бидејќи на секој комплексен број соодветствува точно една точка од рамнината, а секоја точка од рамнината е определена со нејзиниот радиус-вектор, може да се заклучи дека помеѓу комплексните броеви и радиус-векторите постои заемно еднозначно соодветство.

3 Претстави ги во координатна рамнина радиус-векторите:
$\vec{a} = (2,2)$, $\vec{b} = (-2,1)$, $\vec{c} = (1,0)$ и $\vec{d} = (0,-2)$.
Кои комплексни броеви ги определуваат овие радиус-вектори?



Решение. Радиус-векторот $\vec{a}$ го определува бројот $z_1 = 2+2i$, векторот $\vec{b}$ го определува $z_2 = -2+i$, $\vec{c}$ бројот $z_3 = 1$, а $\vec{d}$ бројот $z_4 = -2i$.

Задачи

1 Претстави ги во комплексна рамнина следните комплексни броеви:
$z_1 = 2+4i$, $z_2 = 1-5i$, $z_3 = 2-6i$ и $z_4 = 3-i$.

2 Определи ги комплексните броеви кои соодветствуваат на подредените парови реални броеви $(2,1)$, $(-2,3)$, $(-2,-3)$, $(4,0)$, $(0,2)$, а потоа претстави ги во комплексна рамнина.

3 Определи ги радиус-векторите соодветни на комплексните броеви $z_1 = 1-4i$, $z_2 = 2+4i$, $z_3 = 3-2i$ и $z_4 = 3+2i$ и претстави ги во комплексна рамнина.

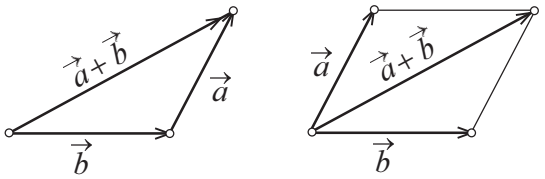
4 Определи ги реалните броеви x и y за да бидат еднакви комплексните броеви претставени со радиус-векторите $(x+3,-1)$ и $(2,1+y)$.

5 СОБИРАЊЕ И ОДЗЕМАЊЕ НА КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ ПРЕКУ РАДИУС-ВЕКТОРИ

Т

Потсети се!

- Векторите се собираат со надоврзување или според правилото на паралелограм.



- Разликата $\vec{a}-\vec{b}$ може да се одреди ако на векторот $\vec{a}$ го додадеме спротивниот вектор на векторот $\vec{b}$, т.е. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

- Пресметај го збирот $z_1 + z_2$, ако $z_1 = 2-i$, $z_2 = 1+5i$.
- Пресметај ја разликата $z_1 - z_2$, ако $z_1 = 1-i$, $z_2 = 2+3i$.

А Секој комплексен број $z = a + bi$ може да се претстави со подредениот пар реални броеви (a,b). Ако $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ се два комплексни броја, тогаш знаеме дека

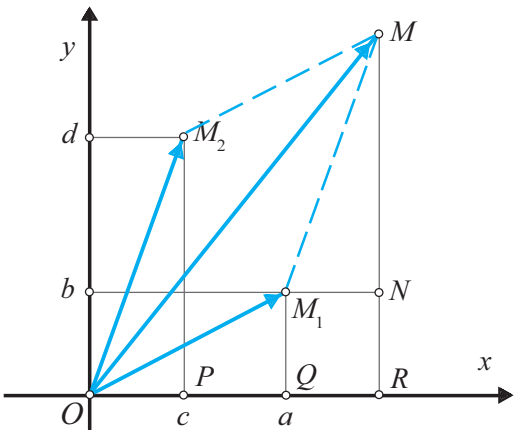
$$z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i.$$

Ако во последното равенство, комплексните броеви се претстават преку подредени парови, равенството го добива обликот:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

- Со $\overrightarrow{OM_1} = (a,b)$ го означуваме радиус-векторот соодветен на комплексниот број z_1, а со $\overrightarrow{OM_2} = (c,d)$ радиус-векторот соодветен на комплексниот број z_2.

Тогаш, $\overrightarrow{OM} = (a+c, b+d)$ е радиус-векторот на збирот на броевите z_1 и z_2, т.е. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2}$. Тоа може да се воочи од следниот цртеж, каде собирањето е извршено со правилото на паралелограм.



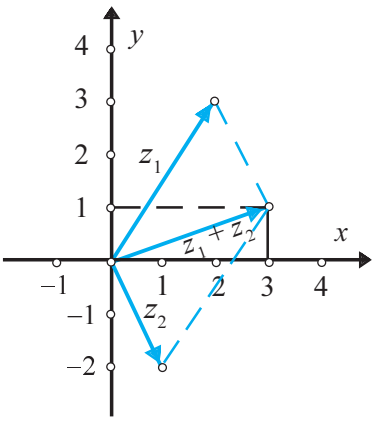
Може да се воочи дека триаголниците OPM_2 и M_1NM се складни. Поради тоа, заклучуваме дека координатите на векторот $\overrightarrow{OM}$, т.е.на точката M се $M(\overline{OR}, \overline{RM})$, каде што

$$\overline{OR} = \overline{OQ} + \overline{QR} = \overline{OQ} + \overline{OP} = a + c; \qquad \overline{RM} = \overline{RN} + \overline{NM} = \overline{RN} + \overline{PM_2} = b + d.$$

Значи, координатите на векторот $\overrightarrow{OM}$ се $(a + c, b + d)$, па $z_1 + z_2 = (a + c, b + d)$.

1 Дадени се комплексните броеви $z_1 = 2+3i$ и $z_2 = 1-2i$. Со примена на векторско претставување на комплексните броеви, определи го збирот на овие два броја.

Решение. Како што може да се види од цртежот, радиус-векторот соодветен на $z_1 + z_2$ има координати $(3,1)$, што значи дека $z_1 + z_2 = 3+i$. Навистина, согласно дефиницијата за збир на два комплексни броја $z_1 + z_2 = (2+3i) + (1-2i) = (2+1) + (3-2)i = 3+i$.



- Во физиката и техничките науки, силата се претставува со радиус-вектор. Според тоа, збирот на комплексните броеви е резултантата од радиус-векторите што соодветствуваат на комплексните броеви z_1 и z_2, одредена по правилото на паралелограм.

Потсети се!

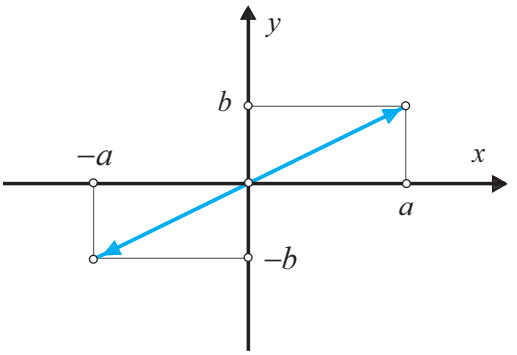
Збир на два вектори со иста должина, ист правец, но различна насока е вектор-нула или нулти вектор.

2 За произволен комплексен број $z = a + bi$, да се определи векторски и алгебарски збирот на z и на неговиот спротивен број $\overline{z}$.

Решение. Како што може да се види од цртежот, радиус-векторите на z и $-z$ се вектори кои имаат иста должина, исти правец, но спротивна насока. Оттука, $z + (-z) = 0 + 0i = 0$.

Според дефиницијата за збир, пак, имаме:

$$z + (-z) = (a + bi) + (-a - bi) =$$
$$= (a + (-a)) + (b + (-b)) = 0 + 0i = 0.$$

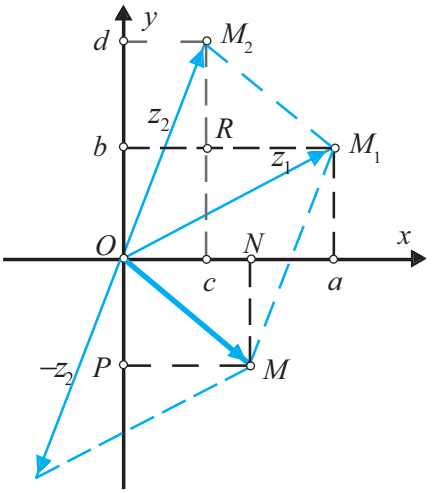


Б Ако $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ се два комплексни броја, тогаш знаеме дека

$$z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i.$$

- Ако во последното равенство, комплексните броеви се претстават преку подредени парови, равенството го добива обликот: $(a, b) - (c, d) = (a - c, b - d)$.

Нека $\overrightarrow{OM_1}$ е радиус-векторот соодветен на комплексниот број z_1, а $\overrightarrow{OM_2}$ радиус -векторот соодветен на комплексниот број z_2. Тогаш $\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{M_2M_1}$, но векторот $\overrightarrow{M_2M_1}$ не е радиус-вектор. За да го добиеме радиус-векторот соодветен на разликата на комплексните броеви z_1 и z_2, постапуваме на следниот начин. Бидејќи $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$, на векторот $\overrightarrow{OM_1}$ ќе му го додадеме спротивниот вектор на векторот $\overrightarrow{OM_2}$, па

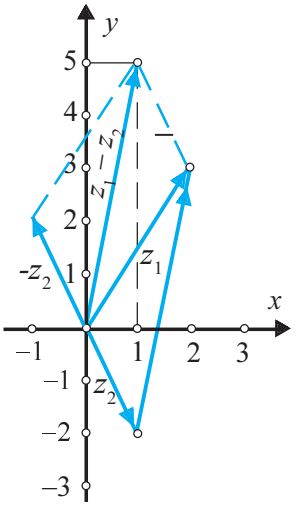


$\overrightarrow{OM_1}+(-\overrightarrow{OM_2})=\overrightarrow{OM}$. Од складноста на триаголниците ONM и M_1RM_2, може да се заклучи дека

$$\overline{ON}=\overline{M_1R}=a-c; \qquad \overline{NM}=\overline{RM_2}=d-b,$$

од каде што следува дека векторите $\overrightarrow{M_2M_1}$ и $\overrightarrow{OM}$ се еднакви, т.е. $\overrightarrow{OM}$ е радиус-векторот на разликата z_1-z_2.

3 Со примена на векторско претставување на комплексните броеви, определи ја разликата на броевите $z_1=2+3i$ и $z_2=1-2i$.



Решение. Од $z_1-z_2=z_1+(-z_2)$, следува дека се собираат комплексните броеви $z_1=2+3i$ и $-z_2=-1+2i$. Од цртежот се гледа дека радиус-векторот соодветен на z_1-z_2 има координати $(1,5)$, што значи дека $z_1-z_2=1+5i$. Навистина, согласно дефиницијата за разлика на два комплексни броја, имаме:

$z_1-z_2=(2+3i)-(1-2i)=(2-1)+(3-(-2))i=1+5i.$

Задачи

1 Со примена на векторско претставување на комплексните броеви да се пресмета збирот и разликата на следните броеви:

а) $z_1=4+3i$ и $z_2=4-4i$;

б) $z_1=2+i$ и $z_2=4$; в) $z_1=2i$ и $z_2=3-i$;

г) $z_1=i$ и $z_2=-2i$;

д) $z_1=\frac{2}{3}-\frac{5}{4}i$ и $z_2=\frac{1}{6}-\frac{3}{8}i$;

ѓ) $z_1=-1$ и $z_2=3$;

2 Со примена на векторско претставување на комплексните броеви да се пресмета $\bar{z}+z$ и $z-\bar{z}$, ако

а) $z=3+i$; б) $z=\frac{2}{4}-\frac{3}{7}i$;

в) $z=3-5i$.

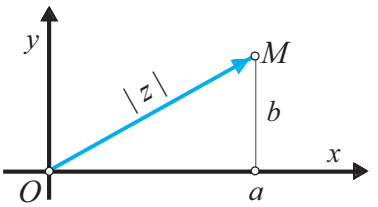
Што може да се заклучи за добиените вектори за збир и разлика на еден комплексен број со неговиот конјугиран?

6 СВОЈСТВА НА МОДУЛ НА КОМПЛЕКСЕН БРОЈ T

Потсети се!

- За произволен комплексен број $z = a + bi$, производот $z \cdot \overline{z}$ е реален број. Квадратниот корен од тој број се означува со $|z|$ и се вика модул или апсолутна вредност на комплексниот број z.
  Значи, $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$.
- Определи го модулот на комплексниот број $z_1 = 3 + 4i$.

A Нека комплексниот број $z = a + bi$ е претставен со неговиот радиус-вектор.



Согласно Питагоровата теорема, должината на соодветниот радиус-вектор е всушност $|\overrightarrow{OM}| = \sqrt{a^2 + b^2}$, т.е. должината на тој радиус-вектор е модулот на комплексниот број z.

- Јасно е дека $\sqrt{a^2 + b^2} \geq 0$, па може да се заклучи дека модулот на еден комплексен број е ненегативен реален број, т.е. $|z| \geq 0$. Притоа, $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = 0$ ако и само ако $a = b = 0$, т.е. $z = 0$.

1 Пресметај го модулот на комплексниот број $-1 + 2i$.

Решение. $|-1+2i| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$.

- Ако $x = x + 0i$, т.е. x е реален број, тогаш модулот на x е $|x| = \sqrt{x^2 + 0^2} = \sqrt{x^2} = |x|$.

Запомни!

Модулот на секој реален број се совпаѓа со неговата апсолутна вредност.

2 Нека $z_1 = 2 + 3i$ и $z_2 = 3 - 2i$. Одреди го модулот на бројот: z_1, z_2, $z_1 \cdot z_2$ и $\frac{z_1}{z_2}$.

Решение. Прво ќе пресметаме: $z_1 \cdot z_2 = (2+3i)\cdot(3-2i) = 12+5i$ и $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{3-2i} \cdot \frac{3+2i}{3+2i} = \frac{13i}{13} = i$.

Потоа, $|z_1| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$; $\quad |z_2| = |3 - 2i| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$;

$|z_1 \cdot z_2| = |12 + 5i| = \sqrt{12^2 + 5^2} = 13$; $\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$.

- Воочи дека за дадените комплексни броеви z_1 и z_2 важат равенствата

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{и} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}.$$

- Ќе ја провериме точноста на овие својства за произволни комплексни броеви z_1 и z_2.

3 Нека z_1 и z_2 се произволни комплексни броеви. Провери ја точноста на равенството: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

Решение. Бидејќи $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}}$, заклучуваме дека $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$.

Од $|z_1 \cdot z_2|^2 = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1 \cdot z_2} = z_1 \cdot z_2 \cdot \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$, со примена на асоцијативното и комутативното својство, се добива: $|z_1 \cdot z_2|^2 = z_1 \cdot \overline{z_1} \cdot z_2 \cdot \overline{z_2} = |z_1|^2 \cdot |z_2|^2$. Според тоа, $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$.

4 За произволни комплексни броеви z_1 и z_2, $z_2 \neq 0$, покажи дека $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.

Решение. Бидејќи $z_1 = z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2}$, со примена на резултатот од претходната задача, добиваме дека $|z_1| = \left|z_2 \cdot \frac{z_1}{z_2}\right| = |z_2| \cdot \left|\frac{z_1}{z_2}\right|$. Оттука, по делењето со $|z_2|$, следува точноста на горното равенство.

Запомни!

За произволни комплексни броеви z_1 и z_2, важат следните равенства:

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2| \quad \text{и} \quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad (z_2 \neq 0).$$

- Претходното својство за модул од производ на два броја, може да се обопшти на модул од производ на n броеви. Имено, $|z_1 \cdot z_2 \cdot \ldots \cdot z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdot \ldots \cdot |z_n|$.

  Ако $z_1 = z_2 = \ldots = z_n = z$, тогаш равенството го добива обликот $|z^n| = |z|^n$.

Запомни!

За произволен комплексен број z и произволен природен број n, важи $|z^n| = |z|^n$.

Д **5** Нека $z_1 = 6 + 8i$ и $z_2 = 4 - 3i$. Одреди го модулот на следниве броеви: z_1, z_2, $z_1 + z_2$ и $z_1 - z_2$! Потоа, спореди ги броевите: $|z_1| - |z_2|$, $|z_1 + z_2|$, $|z_1| - |z_2|$.

Решение. $|z_1| = |6+8i| = \sqrt{6^2+8^2} = 10;$ $\quad |z_2| = |4-3i| = \sqrt{4^2+3^2} = 5.$

- $z_1 + z_2 = (6+8i) + (4-3i) = 10 + 5i$ и $z_1 - z_2 = (6+8i) - (4-3i) = 2 + 11i$. Сега,

  $|z_1 + z_2| = |10+5i| = \sqrt{10^2+5^2} = 5\sqrt{5};$ $\quad |z_1 - z_2| = |2+11i| = \sqrt{2^2+11^2} = 5\sqrt{5}.$

- Ќе пресметаме и: $|z_1| - |z_2| = 5,$ $|z_1| + |z_2| = 15.$

- Воочи дека за дадените комплексни броеви z_1 и z_2 важат следните неравенства:

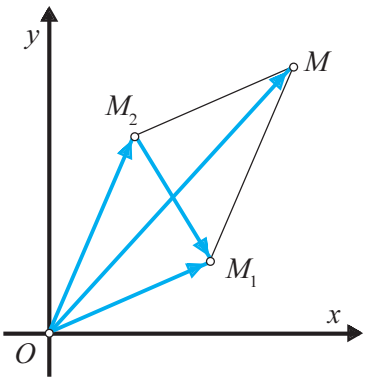
  $|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ и $|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|.$

6 Со користење на векторско претставување на комплексните броеви, за произволни комплексни броеви z_1 и z_2, провери ја точноста на неравенствата:

$|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ и $|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|.$

Решение. Означуваме: $|z_1| = \overline{OM_1};$ $\quad |z_2| = \overline{OM_2};$

$|z_1 + z_2| = \overline{OM}$ и $|z_1 - z_2| = \overline{M_2M_1}$. Познато е дека збирот на должините на кои било две страни во еден триаголник е поголем од должината на третата страна. Од триаголникот OM_1M добиваме $\overline{OM_1} < \overline{OM} + \overline{M_1M}$. Бидејќи $\overline{OM_2} = \overline{M_1M}$, имаме $\overline{OM_1} < \overline{OM} + \overline{OM_2}$, т.е. $\overline{OM_1} - \overline{OM_2} < \overline{OM}$.



Значи, $\overline{OM_1} - \overline{OM_2} < \overline{OM} < \overline{OM_1} + \overline{M_1M}$, т.е.

$|z_1| - |z_2| < |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|.$

Од ΔOM_1M_2 добиваме $\overline{OM_1} < \overline{OM_2} + \overline{M_1M_2}$, т.е. $\overline{OM_1} - \overline{OM_2} < \overline{M_1M_2}$, и $\overline{M_1M_2} < \overline{OM_1} + \overline{OM_2}$.

Оттука, $\overline{OM_1} - \overline{OM_2} < \overline{M_1M_2} < \overline{OM_1} + \overline{M_1M}$, т.е. $|z_1| - |z_2| < |z_1 - z_2| < |z_1| + |z_2|.$

- Во претходните неравенства, знакот „$<$" ќе премине во знакот „$=$", само ако точките O, M_1 и M_2 се колинеарни.

Запомни!

За произволни комплексни броеви z_1 и z_2, важат следните неравенства:

$|z_1| - |z_2| \le |z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$ и $|z_1| - |z_2| \le |z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|.$

Задачи

1 Одреди го модулот на комплексните броеви: а) $z = 4+3i$; б) $z = 2+i$; в) $z = 2i$; г) $z = i$; д) $z = -2i$; ѓ) $z = -1$.

2 Дадени се броевите $z_1 = 4+3i$ и $z_2 = 3-i$. Пресметај го модулот на броевите:

а) z_1; б) z_2; в) $z_1 \cdot z_2$; г) $\dfrac{z_1}{z_2}$; д) $\dfrac{z_2^4}{z_1}$.

Определи го комплексниот број z, ако $\mathrm{Re}(z)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, а $|z|=\sqrt{3}$.

4 Што може да се каже за модулите на:
а) два конјугирано комплексни броеви;
б) два спротивни комплексни броеви?

5 Одреди го модулот на комплексниот број:

а) $z=\frac{(1-2i)^3}{(1+i)^4}\cdot(1+\sqrt{2}i)^6$;

б) $z=\frac{(1-\sqrt{3}i)^2}{(1-\sqrt{2}i)^3\cdot(1-\sqrt{5}i)^4}$.

6 Одреди го модулот на комплексниот број:

а) $z=\frac{(2-i)^2}{(1+i)^2}$; б) $z=\frac{1+3i}{(2-4i)^5}$;

в) $z=\frac{i^5}{(3+i)^6}$.

7 ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1 **Т,Е** Запиши ги комплексните броеви, ако се дадени: а) $\mathrm{Re}(z)=-10$, $\mathrm{Im}(z)=22$;
б) $\mathrm{Re}(z)=-102$, $\mathrm{Im}(z)=25$; в) $\mathrm{Re}(z)=225$, $\mathrm{Im}(z)=-3$; г) $\mathrm{Re}(z)=1$, $\mathrm{Im}(z)=-1$.

2 **Т,Е** Пресметај го збирот и разликата на броевите z_1 и z_2 ако:
а) $z_1=4+3i, z_2=1-3i$; б) $z_1=\sqrt{2}+3\sqrt{5}i, z_2=3\sqrt{2}-5\sqrt{5}i$.

3 **Т,Е** Пресметај го производот и количникот на броевите z_1 и z_2 ако:
а) $z_1=1-3i, z_2=2+4i$; б) $z_1=\sqrt{3}-2\sqrt{2}i, z_2=3\sqrt{2}-\sqrt{3}i$.

4 **Т,Е** Пресметај ја вредноста на изразот: а) $i+i^2+i^3+\ldots+i^{20}$; б) $\frac{1}{i}+\frac{1}{i^2}+\frac{1}{i^3}+\ldots+\frac{1}{i^{20}}$.

5 **Т,Е** Изврши го степенувањето и одреди го модулот на добиениот комплексен број:
а) $(2+i)^4$; б) $(1-4i)^3$; в) $(\sqrt{3}+3i)^2$.

6 **Т,Е** Упрости го изразот: а) $\frac{2-3i}{6+8i}+(2+i)\cdot(4-i)-(1-i)^2$; б) $\frac{(1+2i)^3+(3+3i)\cdot 5i}{(3-4i)^2}$.

7 **Т,Е** Даден е комплексниот број $z_1=1-2i$. Определи комплексен број $z=x+yi$, таков што $\mathrm{Re}(z\cdot z_1)=-4$ и $\mathrm{Im}\left(\frac{z}{\overline{z_1}}\right)=-\frac{7}{5}$..

8 **Т,Е** Провери ја точноста на равенството: $\left(\sqrt{3}-i\right)^6+\left(\sqrt{3}+i\right)^6=-128$.

9 **Т** Комплексните броеви $z_1=4-2i$, $z_2=3+2i$, $z_3=1-3i$, $z_4=-4$ и $z_5=-4i$, претстави ги во комплексна рамнина со: а) точки од рамнината; б) радиус-вектори.

10 **Т** Со примена на векторско претставување на комплексните броеви, пресметај ги збирот и разликата на броевите $z_1=1+i$ и $z_2=-2+4i$.

11 **Т** Со примена на векторско претставување на комплексните броеви, пресметај го збирот на броевите $z_1=1+3i$, $z_2=-1-4i$ и $z_3=2-5i$.

ЗАДАЧИ ЗА САМОПРОВЕРКА

1 **Т,Е** Ако $\mathrm{Re}(z) = -4$ и $\mathrm{Im}(z) = 3$, тогаш комплексниот број z е:

а) $z=4-3i$; б) $z=-4-3i$; в) $z=-4+3i$; г) $z=4+3i$. 1

2 **Т,Е** Броевите $z_1 = b+3i$ и $z_2 = 1-ai$ се еднакви, ако вредностите на a и b се:

а) $a = 1,\ b = 1$; б) $a = 3,\ b = 1$; в) $a = -3,\ b = 1$; г) $a = 3,\ b = -1$. 1

3 **Т,Е** Изразот $2i\cdot[(2+5i)+(1-i)]$ е еднаков со:

а) $2i\cdot(2+5i)+(1-i)$; б) $2i\cdot(2+5i)+2i\cdot(1-i)$; в) $2i\cdot(3+4i)$; г) $(2+5i)+2i\cdot(1-i)$. 1

4 **Т,Е** Вредноста на степенот i^{1002} е: а) -1; б) 1; в) i; г) $-i$. 1

5 **Т** Модулот на еден комплексен број претставен со радиус-вектор во комплексна рамнина е: а) правец на радиус-векторот; б) должина на радиус-векторот; в) насока на радиус-векторот. 1

6 **Т,Е** Конјугирано комплексен број на бројот $z = 2 - 3i$ е бројот _____. 1

7 **Т,Е** Ако $z_1 = a_1 + b_1 i,\ z_2 = a_2 + b_2 i$ и $z_3 = a_3 + b_3 i$, тогаш:

$\mathrm{Re}(z_1 + z_2 + z_3) =$ _____, а $\mathrm{Im}(z_1 + z_2 + z_3) =$ _____. 1

8 **Т,Е** Модулот на комплексниот број $z = a - bi$ е _____. 1

9 **Т** Со што може да се претстави еден комплексен број во комплексна рамнина? 1

10 **Т** На што е еднаков модулот од производот на два комплексни броја z_1 и z_2? 1

11 **Т,Е** Упрости го изразот $z = \dfrac{(1+i)^8 - (1-i)^8}{(1+i)-(2-3i)}$ и потоа пресметај го неговиот модул. 5

12 **Т,Е** Определи ги сите комплексни броеви z, такви што $z\cdot\overline{z} = 74$ и нивните реални и имагинарни делови се природни броеви. 5

13 **Т** Одреди го модулот на комплексниот број z, ако $z = \dfrac{\left(\sqrt{3}-i\right)^5}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}i\right)^4\left(\dfrac{3}{4}-i\right)^2}$. 5

14 **Т** Со примена на векторско претставување на комплексните броеви, пресметај ги збирот и разликата на броевите $z_1 = 2+5i$ и $z_2 = 1-4i$. 5

ТЕМА 4

КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

за сите струки

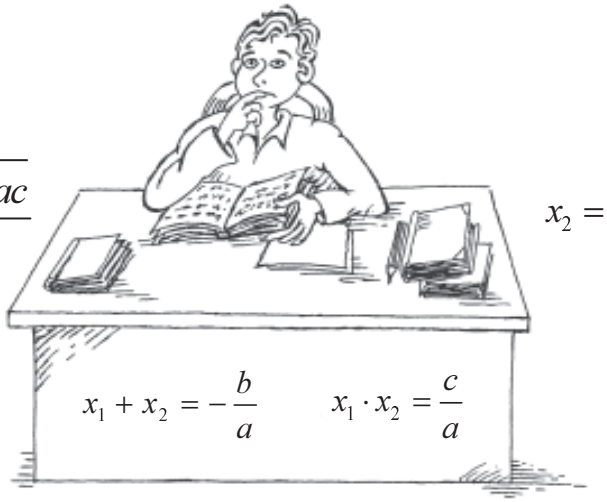
СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1. Поим за квадратна равенка. Видови квадратни равенки 82
2. Решавање на неполни квадратни равенки 86
3. Решавање на полни квадратни равенки 89
4. Дискусија за решенијата на квадратната равенка 92
5. Врска меѓу решенијата и коефициентите на квадратната равенка 94
6. Примена на Виетовите формули 97
7. Примена на квадратни равенки 100
8. Задачи за повторување и утврдување 104
9. Задачи за самопроверка 105

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$



$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$$

1 ПОИМ ЗА КВАДРАТНА РАВЕНКА. ВИДОВИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Пошсети се!

- $2x+3=0,\ 3y-5=0,$ општо $ax+b=0$ се линеарни равенки со една непозната.
- Збирот на два или повеќе мономи се вика полином.
- $3x^2+4xy+5,\ 2xy+x-3$ се полиноми од втор степен.

А Полиномот $2x^2+3x-5,\ \frac{1}{2}x^2-x+4$ или општо ax^2+bx+c е полином од втор степен со променлива x, т.е. ***квадратен трином***.

- Ако квадратниот трином се израмни на нула, се добива квадратна равенка.

На пример, $3x^2-4x+1=0,\ 5+2x-3x^2=0$ се квадратни равенки.

Запомни!

Равенката од видот $ax^2+bx+c=0,$ каде што x е непозната, а $a,\ b$ и c се дадени реални броеви, при што $a\neq 0$ се вика ***квадратна равенка со една непозната***.

Мономот ax^2 се вика квадратен член, bx – линеарен член, а c – слободен член. На пример, во равенката $3x^2-5x-4=0,\ 3x^2$ е квадратен член, $-5x$ е линеарен член, а -4 е слободен член. Броевите $a,\ b$ и c се викаат коефициенти на квадратната равенка.

На пример, во равенката $3x^2-x+2=0$ коефициентите се: $a=3,\ b=-1$ и $c=2.$

1 Одреди ги коефициентите на равенката:

а) $5x^2-6x+4=0;$ б) $5-x^2+2x=0;$ в) $\sqrt{2}x^2-\left(2+\sqrt{3}\right)x-1=0.$

Решение. Дадената равенка ја споредуваме со равенката $ax^2+bx+c=0$ и имаме:

а) $$\begin{array}{ccccccc} 5 & x^2 & -6 & x & +4 & = & 0 \\ a & x^2 & +b & x & +c & = & 0 \end{array}$$

$a=5,\ b=-6,\ c=4;$

б) $$\begin{array}{ccccccc} -1 & x^2 & +2 & x & +5 & = & 0 \\ a & x^2 & +b & x & +c & = & 0 \end{array}$$

$a=-1,\ b=2,\ c=5;$

в) $$\begin{array}{ccccccc} \sqrt{2} & x^2 & -\left(2+\sqrt{3}\right) & x & -1 & = & 0 \\ a & x^2 & +\quad b & x & +c & = & 0. \end{array}$$

$a=\sqrt{2},\ b=-\left(2+\sqrt{3}\right),\ c=-1.$

- Воочи, коефициентите a и b се множителите на x^2, и x, соодветно.

2 Одреди ги коефициентите на равенката:

а) $-3x^2+5x-6=0;$ б) $-5-\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}x^2=0;$ в) $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2-0{,}5x+0{,}1=0.$

- Условот $a\neq 0$ има суштинско значење, бидејќи ако $a=0,$ тогаш равенката не е квадратна. На пример, равенките $0\cdot x^2-3x+4=0,\ 0\cdot x^2+5x-6=0$ не се квадратни.

Условот $a,b,c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$ дозволува еден од коефициентите b или c да е еднаков на нула.

3 Одреди ги коефициентите на равенката:

а) $3x^2+4x=0;$ б) $2x^2+5=0;$ в) $5x^2=0.$

Решение. а) $a=3,\ b=4,$ слободниот член го нема, значи $c=0;$ б) $a=2,$ линеарниот член го нема, значи $b=0$ и $c=5;$ в) $a=5,\ b=0,\ c=0.$

4 Одреди ги коефициентите на равенката:

а) $\left(\sqrt{3}-1\right)x^2-2\sqrt{3}=0;$ б) $2\sqrt{3}x^2+\left(\sqrt{3}-1\right)x=0;$ в) $3x^2=0.$

Запомни!

Ако $b \neq 0$ и $c \neq 0$ (секако $a \neq 0$), тогаш равенката $ax^2+bx+c=0$ се вика ***полна квадратна равенка***.

Равенките од видот $ax^2+bx=0,\ b \neq 0;$ $ax^2+c=0,\ c \neq 0$ и $ax^2=0$ се викаат ***неполни квадратни равенки***.

- Ако еден од коефициентите a, b или c на равенката $ax^2+bx+c=0$ зависи од некој параметар, тогаш таа равенка се вика ***квадратна равенка со параметри*** или ***со општи коефициенти***.

Параметар е *константа* чија вредност зависи од поставениот услов во задачата.

На пример, равенката $(k-2)x^2+2(k+3)x-k+2p=0, k \neq 2$ е квадратна равенка со параметри, а нејзините коефициенти се: $a=k-2,\ b=2(k+3)$ и $c=-k+2p.$

5 Одреди го параметарот m, така што равенката $(2m-1)x^2-3(m+2)x-m+5=0$ да е:

а) квадратна; б) од видот $ax^2+c=0;$ в) од видот $ax^2+bx=0.$

Решение. Коефициентите на равенката се: $a=2m-1,\ b=-3(m+2),\ c=-m+5.$

а) Равенката е квадратна ако $a \neq 0,$ т.е. $2m-1 \neq 0,$ односно $m \neq \frac{1}{2}.$

б) Во равенката треба да го нема линеарниот член, значи $b=0,$ т.е. $-3(m+2)=0.$ Оттука следува дека $m=-2,$ па равенката е $\left(2\cdot(-2)-1\right)x^2-(-2)+5=0,$ т.е. $-5x^2+7=0.$

в) Во овој случај $c=0,$ т.е. $-m+5=0,$ односно $m=5,$ а равенката е $9x^2-21x=0.$

6 За која вредност на параметарот k, равенката $(k+3)x^2+4x-k+2=0$ е:

а) квадратна; б) од видот $ax^2+bx=0$?

В Равенката $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ се вика ***општ облик*** од квадратна равенка. Понатаму ќе работиме со квадратна равенка од општ облик. Од тие причини, секоја квадратна равенка ќе ја сведуваме во општ облик.

7 Трансформирај ја равенката во општ облик и одреди ги нејзините коефициенти:

а) $2x(x-1)=x-3;$ б) $(3x-2)(x+1)=x(x-3);$

в) $\frac{x-2}{2}+\frac{(x-2)x}{3}=2;$ г) $(x-3)^2=10-(1-2x)^2.$

Решение. За да ја трансформираме равенката во општ облик, ги извршуваме назначените операции и ги сведуваме сличните мономи.

а) $2x(x-1)=x-3 \Leftrightarrow 2x^2-2x=x-3 \Leftrightarrow 2x^2-2x-x=3=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x+3=0;$

$a=2,\ b=-3,\ c=3.$

в) $\frac{x-2}{2}+\frac{(x-2)x}{3}=2\,|\cdot 6 \Leftrightarrow 3(x-2)+2(x^2-2x)=12 \Leftrightarrow 2x^2-x-18=0;$

$a=2,\ b=-1,\ c=-18.$

г) $(x-3)^2=10-(1-2x)^2 \Leftrightarrow x^2-6x+9=10-(1-4x+4x^2) \Leftrightarrow 5x^2-10x=0 \Leftrightarrow x^2-2x=0;$

$a=1,\ b=-2,\ c=0.$

- Квадратната равенка во којашто $a=1$ велиме дека е ***нормален*** (или ***сведен облик***) и вообичаено ја запишуваме како $x^2+px+q=0$. На пример, равенката $-2x^2+6x-5=0$ ќе ја сведеме во нормален облик ако истата ја поделиме со коефициентот a, т.е. со -2, па имаме: $-2x^2+6x-5=0/:(-2) \Leftrightarrow x^2-3x+2,5=0$. Притоа, $p=-3,\ q=2,5.$

8 Запиши ја во нормален облик равенката:

а) $3x^2-6x+5=0;$ б) $x(2x-3)+(x-1)(x+2)=0;$ в) $(2x-3)^2+(x-1)(x+2)=7.$

Потсети се!

- За $x=3$, равенката $2x-6=0$ преминува во точно бројно равенство.
- Испитај за кој број од $\{-6,-1,1,3,-3,8\}$ квадратниот трином x^2-5x-6 е еднаков на нула.

Т **9** Дадена е квадратната равенка $x^2-2x-3=0.$

Ако $x\in\{-2,-1,1,2,3\}$, тогаш одреди ги вредностите на x за кои дадената равенка ќе премине во точно бројно равенство.

- Со проверка ќе утврдиш дека за $x=-1$ или $x=3$ равенката преминува во точно бројно равенство.

Запомни!

Вредноста на непознатата x за којашто равенката $ax^2+bx+c=0$ преминува во точно бројно равенство се вика ***решение*** или ***корен*** на равенката.

10 Испитај кој од броевите: $-1, -\frac{1}{3}, 0, 1, 2$ е решение на равенката $3x^2-2x-1=0$.

11 За која вредност на параметарот k, бројот 2 е решение на равенката $(k-2)x^2-2kx+3-k=0$?

Решение. Со замена на x со 2 во дадената равенка имаме $(k-2)\cdot 2^2-2k\cdot 2+3-k=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4k-8-4k+3-k=0 \Leftrightarrow -5-k=0 \Leftrightarrow k=-5$. Значи, за $k=-5$ дадената равенка е од обликот $-7x^2+10x+8=0$, т.е. $7x^2-10x-8=0$, а $x=2$ е нејзино решение.

12 Дадена е равенката $(2m-1)y^2-3y+m-2=0$, $m\neq\frac{1}{2}$. Одреди го параметарот m, така што решение на равенката да е: а) $y=1$; б) $y=-2$.

Задачи

1 Кои од дадените равенки се квадратни:

а) $3x^2-2x+5=0$; б) $5x-x^2=0$;

в) $0\cdot x^2+3x-3=0$; г) $-\frac{2}{3}x^2=0$;

д) $(k-1)x^2+(2k-3)x+4=0$ за $k=1$?

2 Одреди ги коефициентите a, b и c на равенката:

а) $3x^2-2x+3=0$; б) $x^2-x\sqrt{2}=3$;

в) $8x=x^2$; г) $6x^2=0$; д) $-2-3x^2=0$;

ѓ) $(k-2)x^2+3kx-2+k=0$.

3 За која вредност на параметарот k, равенката $(k-2)x^2+(k+3)x-2k+1=0$ е:

а) линеарна; б) квадратна;

в) од видот $ax^2+bx=0$;

г) од видот $ax^2+c=0$;

д) од видот $x^2+px+q=0$?

4 За која вредност на параметарот m дадената равенка ќе биде квадратна:

а) $(3m-1)y-(2m+1)y^2=5m$;

б) $2my-(m+1)y^2-(2m+3)y=0$?

5 За која вредност на параметарот p равенката $(p-3)t^2-(2p+1)t=2p-1$ ќе биде: а) неполна од видот $ax^2+c=0$;

б) неполна од видот $ax^2+bx=0$?

Трансформирај ја во општ вид равенката $(6-8)$:

6 а) $2x(x+3)=x-5$;

б) $(x-3)(x+2)=3-x$;

в) $(3x-2)(x+1)=(x+2)(2x-1)$.

7 а) $\frac{2x-1}{3}+\frac{(x-2)(x+1)}{2}=1$;

б) $\frac{x-2}{3}-(x+2)(x+3)=0$.

8 а) $\frac{(2x-3)^2}{2}-\frac{x+1}{3}-5=0$;

б) $(x+1)^3-(x+2)^3=(x+2)^2$.

9 Дадена е равенката $2x^2-3x+1=0$. Провери дали некој од броевите $0, 1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$ е решение на равенката.

10 За која вредност на параметарот k, равенката $(k+2)t^2+(2k-3)t-5=0$ има решение: а) $t=-1$; б) $t=1$; в) $t=\frac{1}{2}$?

2 РЕШАВАЊЕ НА НЕПОЛНИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Потсети се!

- Неполни квадратни равенки се:
  $ax^2 = 0;$
  $ax^2 + bx = 0,\ b \neq 0;$
  $ax^2 + c = 0,\ c \neq 0.$
- За разложувањето на полиномите на множители:
  $2x^2 - 3x = x(2x-3);\quad x^2 - 4 = (x-2)(x+2).$
- Производот на два броја A и B е нула, ако и само ако барем еден од нив е нула, т.е.
  $A \cdot B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ или $B = 0.$
- Парен корен од негативен број е комплексен број. На пример, $\sqrt{-4} = 2i;\ \sqrt{-25} = 5i.$

А Да се реши една равенка значи да се најдат сите нејзини решенија.

1 Реши ја равенката $(2x+3)(x-2) = 0.$

Решение. За решавање на дадената равенка (равенка - производ) ќе го користиме фактот дека производот на два или повеќе множители е еднаков на нула, ако барем еден од множителите е еднаков на нула. Според тоа имаме:

$(2x+3)(x-2) = 0 \Leftrightarrow 2x - 3 = 0$ или $x - 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = -\frac{3}{2}$ или $x = 2.$ Значи, решенијата на равенката се $x_1 = -\frac{3}{2},\ x_2 = 2.$

2 Одреди ги решенијата на равенката:

а) $(x+2)(3x+5) = 0;$ б) $(2x+1)(x-3)(3x-4) = 0;$ в) $5x^2 + 6x = 0.$

Б **3** Реши ја неполната квадратна равенка: а) $ax^2 + bx = 0;$ б) $ax^2 = 0.$

Решение. а) Равенката $ax^2 + bx = 0$ со разложување ќе ја запишеме во равенка - производ.

Имаме: $ax^2 + bx = 0 \Leftrightarrow x(ax+b) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $ax + b = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = -\frac{b}{a}.$ Значи, решенијата на равенката се $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{b}{a}.$

б) Ако $b = 0,$ тогаш равенката $ax^2 + bx = 0$ преминува во равенка $ax^2 = 0$ чии решенија се $x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{0}{a} = 0,$ т.е. $x_1 = x_2 = 0.$ Во овој случај велиме дека $x_1 = x_2 = 0$ е двоен (двократен) корен на равенката $ax^2 = 0.$

4 Реши ја равенката: а) $2x^2 - 3x = 0;$ б) $(x-2)^2 = 4;$ в) $(x-2)(2x-3) = 6.$

Решение.

а) $2x^2-3x=0$

$x(2x-3)=0$

$x=0$ или $2x-3=0$

$x_1=0,\ x_2=\frac{3}{2}.$

б) $x^2-4x+4=4$

$x(x-4)=0$

$x=0$ или $x-4=0$

$x_1=0,\ x_2=4.$

в) $2x^2-3x-4x+6=6$

$x(2x-7)=0$

$x=0$ или $2x-7=0$

$x_1=0,\ x_2=\frac{7}{2}.$

Запомни!

Решенијата на равенката $ax^2+bx=0,\ a\neq 0, b\neq 0$ се $x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{a}.$

Решенијата на равенката $ax^2=0$ се $x_1=x_2=0.$

5 Одреди ги решенијата на равенката:

а) $(5x-3)(x+3)=0;$ б) $(2x-3)(x+3)=x-9;$ в) $\frac{x(x-2)}{2}-\frac{x-1}{3}=\frac{1-4x}{3}.$

B **6** Реши ја равенката: $ax^2+c=0,\ a\neq 0, c\neq 0.$

Решение. $ax^2+c=0 \Leftrightarrow ax^2=-c \Leftrightarrow x^2=-\frac{c}{a}.$ Притоа имаме:

а) Ако $-\frac{c}{a}>0$ (a и c се со различни знаци), тогаш равенката има два различни корени кои се спротивни реални броеви: $x_1=\sqrt{-\frac{c}{a}},\quad x_2=-\sqrt{-\frac{c}{a}},$ т.е. $x_{1/2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$

б) Ако $-\frac{c}{a}<0$ (a и c се со исти знаци), тогаш корените на равенката не се реални броеви.

7 Реши ја равенката: а) $3x^2-12=0;$ б) **Т, Е** $2x^2+50=0.$ в) **Т, Е** $(2x-3)^2=12x;$

Решение. а) Прв начин: $3x^2-12=0,$ т.е. $x^2=4;\quad x_1=2,\ x_2=-2.$

Втор начин: $3x^2-12=0,$ т.е. $x^2-4=0;\ (x-2)(x+2)=0;\ x-2=0$ или $x+2=0;\ x_1=2,\ x_2=-2.$

б) $2x^2+50=0,$

$2x^2=-50,$

$x^2=-25,$

$x_1=5i,\ x_2=-5i.$

в) $(2x+3)^2=12x,$

$4x^2+12x+9=12x,$

$4x^2=-9,\quad x^2=-\frac{9}{4},$

$x=\pm\sqrt{-\frac{9}{4}},\quad x_1=\frac{3}{2}i,\ x_2=-\frac{3}{2}i.$

Запомни!

Решенијата на равенката $ax^2+c=0,\ a\neq 0$ се:

Т, Е

1. $x_{1/2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, кога $-\frac{c}{a}\geq 0$; **2.** $x_{1/2}=\pm i\sqrt{\frac{c}{a}}$, кога $-\frac{c}{a}<0$.

3

1. $x_{1/2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$, кога $-\frac{c}{a}\geq 0$;

2. Ако $-\frac{c}{a}<0$, тогаш равенката нема реални решенија.

8 Одреди ги решенијата на равенката:

а) $2x^2-18=0$; б) $(x-1)(x+2)=x$; в) **Т, Е** $(2x-1)^2=2-4x$.

9 За кои вредности на параметарот k, равенката $(2k-4)x^2+k-3=0$ ќе има реални корени?

Решение. Равенката е од видот $ax^2+c=0$ со коефициенти $a=2k-4$ и $c=k+3$.

Равенката ќе има реални корени ако a и c се со различни знаци.

Оттука следува системот равенки $\begin{cases}2k-4>0\\k+3\leq 0\end{cases}$ или $\begin{cases}2k-4<0\\k+3\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k>2\\k\leq -3\end{cases}$ или $\begin{cases}k<2\\k\geq -3.\end{cases}$

Првиот систем нема решение, а од вториот добиваме $k\in[-3,\ 2)$. Значи, дадената равенка ќе има реални корени ако $k\in[-3,\ 2)$.

Задачи

Одреди го решението на равенката $(1-7)$:

1 а) $(2x-5)(3-x)=0$;

б) $\left(-\frac{3}{2}x+2\right)\left(\frac{5}{4}x-1\right)=0$.

2 а) $x(2x-5)-x(x+4)=0$; б) $(x-2)^2-9=0$.

3 а) $-\sqrt{2}\,x^2=0$; б) $\left(2-\sqrt{2}\right)x^2=0$.

4 а) $7x^2-\frac{14}{3}x=0$; б) $2x^2+5x=0$;

в) $3x^2+x\sqrt{27}=0$.

5 а) $2x^2-32=0$; б) $\frac{1}{3}x^2-\frac{3}{4}=0$;

в) $4x^2-25b^2=0$.

6 а) $x(2-3x)+10=2(x+5)$;

б) $x(x-3)+2x(2-x)=x-16$.

7 а) $(x-5)^2-16=(2x-3)^2-10x$;

б) $\frac{3x^2-5x}{2}-\frac{5x^2+8}{4}=\frac{2(x^2-3)}{3}$.

8 За кои вредности на параметарот k следните равенки ќе имаат реални корени:

а) $(k-2)x^2+1=0$; б) $(k+1)x^2+k-3=0$?

9 За која вредност на параметарот k, равенката $(k^2-2)x^2+2kx+8=0$ ќе има корен $x=-2$?

10 Во равенката $3x^2+5x+m^2-4=0$ одреди го параметарот m ако $x_1=0$ е едно нејзино решение. За добиената вредност на m одреди го другото решение на равенката.

3 РЕШАВАЊЕ НА ПОЛНИ КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Потсети се!

- Кои формули за скратено множење ги знаеш?
- Провери дали се точни равенствата:

а) $x^2-4x+4=(x-2)^2$; б) $x^2+x+\frac{1}{4}=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2$;

в) $x^2+\frac{b}{a}x+\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{a}\right)^2=\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

- Провери дали решение на равенката $x^2-2x-8=0$ е некој од броевите $-3,\ -2,\ 0,\ 1,\ 4$.

А 1 Разложи ги на множители полиномите:

а) x^2+x-6; б) x^2+2x-3.

Решение. а) $x^2+x-6=x^2+3x-2x-6=$
$=x(x+3)-2(x+3)=(x+3)(x-2)$.

б) Првите два члена дополни ги до полн квадрат со додавање и одземање на 1. Ќе добиеш:

$x^2+2x-3=(x^2+2x+1)-1-3=(x+1)^2-4=$
$=(x+1-2)(x+1+2)=(x-1)(x+3)$.

2 Равенката $x^2+3x+2=0$ реши ја на два начина:

а) со разложување на производ; б) со надополнување до полн квадрат.

Следи ја постапката.

а) $x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x^2+2x+x+2=0 \Leftrightarrow x(x+2)+(x+2)=0 \Leftrightarrow (x+2)(x+1)=0,$

$x+2=0$ или $x+1=0$, т.е. $x=-2$ или $x=-1$.

б) Линеарниот член $3x$ можеме да го запишеме како $2x\cdot\frac{3}{2}$, па имаме

$$x^2+3x+2=0 \Leftrightarrow x^2+2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\left(\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2+2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9-8}{4}=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow \left(x+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow (x+1)(x+2)=0 \Leftrightarrow x=-1$ или $x=-2$, па решенијата се $x_1=-1,\ x_2=-2$.

3 Што треба да се додаде на изразот за секој од нив да стане полн квадрат:

а) x^2+2x; б) x^2-4x; в) $x^2+\frac{b}{a}x$?

4 Реши ја потполната квадратна равенка $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$.

Решение. Равенката ја делиме со a и добиваме $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, т.е. $x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$.

На двете страни на последната равенка додаваме $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ и ја добиваме равенката

$x^2+2\cdot x\cdot\frac{b}{2a}+\left(\frac{b}{2a}\right)^2=\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{c}{a}$, т.е. равенката $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$. Според решението на равенката $ax^2+c=0$ имаме $x+\frac{b}{2a}=\pm\sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}}$, па $x_1=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ се решенија или корени на равенката $ax^2+bx+c=0$. Двете решенија заедно ги запишуваме со формулата $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

Запомни!

Решенијата на равенката $ax^2+bx+c=0,\ a\neq 0$ ги одредуваме со формулата

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

4 Реши ја квадратната равенка: а) $x^2+x-12=0$; б) $x^2=2x+1$ со примена на добиената формула.

Решение. а) Коефициентите $a=1,\ b=1,\ c=-12$ ги заменуваме во формулата $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ и добиваме $x_{1/2}=\frac{-1\pm\sqrt{1+48}}{2}$, т.е. $x_1=3,\ x_2=-4$.

б) Општиот вид на равенката е $x^2-2x-1=0$, па бидејќи $a=1,\ b=-2,\ c=-1$ добиваме

$x_{1/2}=\frac{2\pm\sqrt{4+4}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{8}}{2}$, т.е. $x_{1/2}=\frac{2\pm 2\sqrt{2}}{2}$, па $x_1=1-\sqrt{2},\ x_2=1+\sqrt{2}$.

Формулата за решавање на полни квадратни равенки може да се применува и за решавање на неполни квадратни равенки.

5 Со примена на формулата за решавање на квадратна равенка, реши ги равенките:
а) $7x^2=0$; б) $2x^2-8=0$; в) $7x^2-4x=0$; г) $2x^2+5x-12=0$.

Решение.

а) $a=7,\ b=c=0,$ па

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a},$$

$$x_{1/2}=\frac{0}{2\cdot 7},$$ т.е.

$$x_1=x_2=0.$$

б) $a=2,\ b=0,\ c=-8,$

$$x_{1/2}=\frac{\pm\sqrt{-4\cdot 2\cdot(-8)}}{2\cdot 2},$$

$$x_{1/2}=\frac{\pm\sqrt{64}}{4}=\frac{\pm 8}{4},$$

$$x_1=2,\ x_2=-2.$$

в) $a=7,\ b=-4,\ c=0,$

$$x_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{(-4)^2-4\cdot 7\cdot 0}}{2\cdot 7},$$

$$x_{1/2}=\frac{4\pm\sqrt{16}}{14},$$

$$x_1=\frac{4+4}{14}=\frac{4}{7},\quad x_2=\frac{4-4}{14}=0.$$

Воочи дека со примената на формулата имаме:

- Ако $b=c=0,$ тогаш решенијата на неполната равенка $ax^2=0$ се $x_1=0,\ x_2=0.$
- Ако $b=0$, тогаш решенијата на неполната равенка $ax^2+c=0$ се $x_{1/2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}.$
- Ако $c=0,$ тогаш решенијата на неполната равенка $ax^2+bx=0$ се $x_1=0,\ x_2=-\frac{b}{2a}.$

Потсети се!

- Одреди ја бројната вредност на изразот $b^2-4ac,$ ако $a,\ b$ и c се коефициентите на равенката $x^2-4x+3=0.$
- Дадена е равенката $(k-1)x^2-kx+1=0.$ Одреди ја вредноста на изразот $b^2-4ac,$ ако $a,\ b$ и c се коефициентите на дадената равенка.

Б Решенијата на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0\ \ (a,b,c\in\mathbb{R};\ a\neq 0)$ ги одредуваме со формулата

$$x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

- Поткореновиот израз b^2-4ac се означува со D, т.е. $D=b^2-4ac$ и се вика ***дискриминанта*** на квадратната равенка, па формулата $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ е, исто така, формула за одредување на решенијата на квадратна равенка.

- ***Корисно е да знаеш.*** **1)** Ако коефициентите $a,\ b,\ c$ на квадратната равенка се реални броеви, тогаш решавај со примена на формулата $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$

2) Ако некој од коефициентите $a,\ b$ или c е параметар или израз, тогаш решавај така што прво ќе ја одредиш дискриминантата $D=b^2-4ac,$ а потоа користи ја формулата $x_{1/2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}.$

На пример, равенката $x^2-\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)x+\sqrt{6}=0$ ќе ја решиме така што прво ќе ја одредиме дискриминантата, т.е. $D=b^2-4ac=\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{6}=\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{6}+\left(\sqrt{2}\right)^2-4\sqrt{6}=$

$=\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{6}+\left(\sqrt{2}\right)^2=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2$. Со замена во формулата $x_{1/2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ добиваме

$x_{1/2}=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}\pm\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{2}$, т.е. $x_1=\sqrt{3},\ x_2=\sqrt{2}.$

Задачи

Реши ја равенката $(1-6)$:

1 а) $6x^2+x-2=0;$ б) $4x^2-12x+9=0;$
в) $x^2-4x+13=0.$

2 а) $6z^2-7z+2=0;$
б) $y(y+3)+3(2-y)-5y=0.$

3 а) $2x^2-3x=0;$ б) $4x^2-25=0;$
в) $4x^2+1=0.$

4 а) $(x-2)(2x-3)=6;$
б) $(x+3)(x-2)+(x+2)^2=3x+10.$

5 а) $\dfrac{x(x+4)}{2}-3=\dfrac{7x}{4}-\dfrac{5x-4}{6};$
б) $\dfrac{x(x-2)}{4}-\dfrac{x-3}{3}=1.$

6 а) $(5x-2)(8x-1)-(3x+1)(4x-1)=9;$
б) $\dfrac{x+1}{3}-\dfrac{7-3x}{4}=(x-3)^2.$

7 За кои вредности на x, триномот:
а) x^2-7x+5 има вредност 5;
б) x^2+3x-7 има еднаква вредност со биномот $2x-1$?

Реши ја равенката $(8-9)$:

8 а) $x^2-2\sqrt{2}\,x-1=0;$
б) $x^2-\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)x+\sqrt{35}=0.$

9 а) $x^2-5ax+6a^2=0;$
б) $x^2-2mx+m^2-n^2=0;$
в) $ax^2-(a+1)x+1=0.$

4 ДИСКУСИЈА ЗА РЕШЕНИЈАТА НА КВАДРАТНАТА РАВЕНКА

Потсети се!

- Изразот $D=b^2-4ac$ се вика дискриминанта на квадратната равенка $ax^2+bx+c=0.$
- Одреди ја дискриминантата на равенката:
  а) $2x^2-3x+4=0;$ б) $x^2+4=0.$
- **Т, Е** Броевите $2-3i$ и $2+3i$ се конјугирано комплексни броеви.
- **Т, Е** Колку е: $\sqrt{4};\ \sqrt{-2}$?

А 1 Одреди ги решенијата на равенките со претходно одредување на дискриминантата:

а) $x^2-4x+3=0;$

б) $x^2-4x+4=0;$

в) $x^2-4x+5=0.$

Решение.

а) $D=16-4\cdot1\cdot3=4=2^2>0;$

$x_{1/2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\dfrac{4\pm2}{2},$

т.е. $x_1=3,\ x_2=1;$

$x_1,x_2\in\mathbb{R}$ и $x_1\neq x_2.$

б) $D=16-4\cdot1\cdot4=0;$

$x_{1/2}=\dfrac{4\pm0}{2},$ т.е.

$x_1=2,\ x_2=2;$

$x_1,x_2\in\mathbb{R}$ и $x_1=x_2.$

в) $D=16-4\cdot1\cdot5=-4<0;$

Равенката нема реални решенија.

Запомни!

1) Ако $D>0,$ тогаш решенијата на квадратната равенка се реални и различни.

2) Ако $D=0,$ решенијата на квадратната равенка се реални и еднакви, т.е. равенката има двоен корен.

Воопшто, ако $D\geq0,$ тогаш решенијата на квадратната равенка се реални броеви.

3) Ако $D<0,$ тогаш равенката нема реални решенија.

2 Без да ги решаваш равенките, одреди ја природата на нивните решенија:

а) $x^2-5x+7=0;$ б) $x^2+8x+16=0;$ в) $-x^2+x+4=0.$

Да се одреди природата на решенијата на дадена квадратна равенка значи да се одреди дали таа има реални и различни корени, реални и еднакви корени или нема реални корени.

Решение. а) $D=(-5)^2-4\cdot1\cdot7=25-28=-3<0,$ значи равенката нема реални корени.

б) $D=8^2-4\cdot1\cdot16=0,$ значи $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ и $x_1=x_2.$

в) $D=1^2-4\cdot(-1)\cdot4=17>0,$ значи $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ и $x_1\neq x_2.$

3 Во зависност од параметарот m, одреди ја природата на решенијата на равенките:

а) $x^2-2x-m=0;$ б) $(m-2)x^2+2x+3=0.$

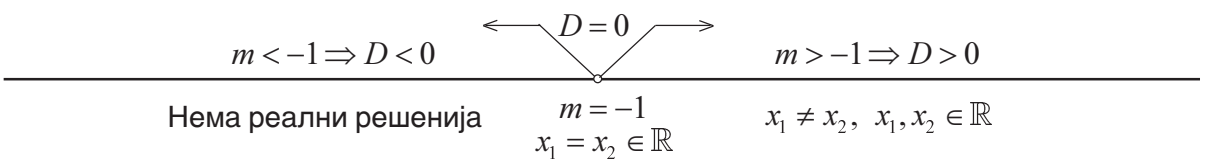
Решение. а) Ја одредуваме дискриминантата на равенката. $D=(-2)^2-4\cdot(-m)=4+4m,$ па корените се:

1) реални и различни ако $D>0,$ т.е. $4+4m>0,\ m>-1,$ или $m\in(-1,+\infty);$

2) реални и еднакви ако $D=0,$ т.е. $4+4m=0,\ m=-1;$

3) нема реални корени ако $D<0,$ т.е. $4+4m<0,\ m<-1,$ односно $m\in(-\infty,-1).$

Воочи го графичкото прикажување на оваа дискусија.



Задачи

1 Реши ја равенката: а) $x^2-8x+15=0$;

Т, Е б) $x^2+2x+5=0$; в) $x^2-x+\frac{1}{4}=0$.

2 Без да ги решаваш равенките, одреди ја природата на решенијата: а) $x^2+x-12=0$;
б) $4x^2-12x+9=0$; в) $x^2-6x+25=0$.

3 Одреди го параметарот k, така што равенката да има двоен корен.
а) $x^2+3x+k=0$; б) $3x^2-2kx+3=0$;
в) $x^2+2(3-k)x+2k-3=0$.

4 За кои вредности на параметарот m равенката има реални и различни корени:
а) $x^2-2x+3k=0$; б) $2x^2-8x+k+6=0$;
в) $kx^2-(2k+3)x+k-2=0$?

5 Одреди го параметарот m така што равенката да нема реални корени:
а) $(m-2)x^2-4x-1=0$;
б) $x^2+2x+m=0$;
в) $mx^2+(2m-3)x+m-1=0$.

6 За кои вредности на параметарот a равенката ќе има реални корени:
а) $x^2-2ax+a^2-a+3=0$;
б) $(a-1)x^2-2x-2=0$?

7 За која вредност на параметарот m триномот ќе биде полн квадрат:
а) $mx^2+6x+1=0$;
б) $mx^2-8x+9m=0$?

8 Во зависност од параметарот k одреди ја природата на корените на равенката:
а) $x^2-2x+k-3=0$; б) $3kx^2+8x-5=0$;
в) $(k-1)x^2+2(k+2)x+k-3=0$.

5 ВРСКА МЕЃУ РЕШЕНИЈАТА И КОЕФИЦИЕНТИТЕ НА КВАДРАТНАТА РАВЕНКА

Потсети се!

- Равенката $x^2-3x+4=0$ е запишана во нормален облик.
- Одреди ги p и q на равенката $x^2+4x-3=0$.
- Реши ја равенката $2x^2+3x-5=0$.

А Одреди ги збирот и производот на корените на равенката $2x^2+3x-5=0$.

Решение. $x_{1/2}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot2\cdot(-5)}}{2\cdot2}$, т.е.

$x_1=1$, $x_2=-\frac{5}{2}$, па $x_1+x_2=1+\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{3}{2}$,

а $x_1\cdot x_2=-\frac{5}{2}$.

- Дадената равенка запишана во нормален облик е $x^2+\frac{3}{2}x-\frac{5}{2}=0$, а коефициентите се $p=\frac{3}{2}$, $q=-\frac{5}{2}$. Воочи дека: $x_1+x_2=-\frac{3}{2}$, т.е. $x_1+x_2=-p$, а $x_1\cdot x_2=q=-\frac{5}{2}$.

1 Квадратните равенки: а) $2x^2+3x+7=0$, б) $3x^2-4x+1=0$ трансформирај ги во нормален вид, а потоа одреди ги нивните коефициенти, збирот и производот на нивните корени.

2 Одреди ги збирот и производот од корените на равенката $ax^2+bx+c=0,\ \ a\neq 0.$

Решение. Познато ти е дека $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ се решенија на равенката,

па $x_1+x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=-\dfrac{b}{a}$ и $x_1\cdot x_2=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\cdot\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{c}{a}.$

Запомни!

Ако x_1 и x_2 се корените на равенката $ax^2+bx+c=0, a\neq 0,$ тогаш важат формулите

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}\quad,\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Тие се викаат ***Виетови формули***.

- Виетовите формули за равенката во нормален облик $x^2+px+q=0$ се:

$$x_1+x_2=-p \quad \text{и} \quad x_1\cdot x_2=q.$$

3 Без да ја решаваш равенката: а) $3x^2-4x+5=0$ и б) $x^2+(m+1)x-2m+3=0,$ одреди ги збирот и производот на нејзините корени.

Твоето решение спореди го со следното. а) Коефициентите на равенката се $a=3,\ b=-4$ и $c=5,$ па $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{-4}{3}=\dfrac{4}{3},\quad x_1\cdot x_2=\dfrac{c}{a}=\dfrac{5}{3};$

б) Равенката е во нормален облик, па $x_1+x_2=-p=-(m+1),\ \ x_1\cdot x_2=q=-2m+3.$

4 Нека за броевите x_1 и x_2 важи $x_1+x_2=-p,\ \ x_1\cdot x_2=q.$ Докажи дека x_1 и x_2 се решенија на равенката $x^2+px+q=0.$

Решение. Од $x_1+x_2=-p$ следува $p=-(x_1+x_2),$ па равенката е од видот $x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2=0.$ За $x=x_1$ имаме: $x_1^2-(x_1+x_2)\cdot x_1+x_1\cdot x_2=0$ или $x_1^2-x_1^2-x_1\cdot x_2+x_1\cdot x_2=0,$ т.е. $0=0.$ Значи, за $x=x_1$ дадената равенка преминува во точно бројно равенство, т.е. x_1 е решение на равенката. На сличен начин покажи дека тврдењето е точно и за $x=x_2$. Со ова е докажана следната теорема:

Теорема. Броевите x_1, x_2 се решенија на равенката $ax^2+bx+c=0$ ако и само ако

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \text{ и } x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}.$$

Ако равенката е од видот $x^2+px+q=0,$ тогаш $x_1+x_2=-p,\ x_1\cdot x_2=q.$

5 Со примена на Виетовите формули утврди кои од дадените парови броеви се корени на соодветните равенки:

а) 3 и 4 за $x^2-7x+12=0$; б) 3 и -4 за $x^2+7x-12=0$; в) $1\pm\sqrt{2}$ за $x^2-2x-1=0$.

Решение. Дадените броеви се решенија на соодветната равенка ако ги задоволуваат Виетовите формули. а) $x_1+x_2=-p=7$; $x_1\cdot x_2=q=12$. Бидејќи $3+4=-(-7)=7$ и $3\cdot 4=12$, броевите 3 и 4 се корени на равенката $x^2-7x+12=0$.

6 Нека x_1 и x_2 се корени на равенката $x^2+px+q=0$. Докажи дека $x_1^2+x_2^2=p^2-2q$.

Доказ. Изразот $x_1^2+x_2^2$ го дополнуваме до полн квадрат на бином. Со додавање и одземање на $2x_1x_2$ добиваме $x_1^2+x_2^2=x_1^2+x_2^2+2x_1x_2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2$. Според Виетовите формули имаме $x_1+x_2=-p$ и $x_1\cdot x_2=q$, па $x_1^2+x_2^2=(-p)^2-2q=p^2-2q$.

Запомни ја формулата $\boxed{x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2,}$ т.е. $\boxed{x_1^2+x_2^2=p^2-2q.}$

7 Нека x_1 и x_2 се решенија на равенката $3x^2-2x+6=0$. Без да ја решаваш дадената равенка, одреди ја вредноста на секој од изразите:

а) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$; б) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}$; в) $2x_1-3x_2^2+2x_2-3x_1^2$.

Решение. Според Виетовите формули имаме: $x_1+x_2=-\frac{-2}{3}=\frac{2}{3}$ и $x_1\cdot x_2=\frac{6}{3}=2$. Секој од дадените изрази го трансформираме во израз што ќе ги содржи само збирот x_1+x_2 и производот $x_1\cdot x_2$.

а) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}=\frac{x_2+x_1}{x_1\cdot x_2}=\frac{\frac{2}{3}}{2}=\frac{1}{3}$; б) $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{x_1^2+x_2^2}{x_1\cdot x_2}=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1\cdot x_2}=\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^2-2\cdot 2}{2}=-\frac{16}{9}$.

в) $2x_1-3x_2^2+2x_2-3x_1^2=2(x_1+x_2)-3(x_1^2+x_2^2)=2\cdot\frac{2}{3}-3\cdot\left(-\frac{32}{9}\right)=\frac{36}{3}=12$.

Задачи

1 Дадената равенка запиши ја во нормален облик и одреди ги p и q:

а) $3x^2-6x+5=0$;

б) $mx^2-(m+2)x-5m=0$.

2 Напиши ги Виетовите формули за равенката:

а) $2x^2-7x+5=0$; б) $x^2-5x=0$;

в) $2x^2+4=0$;

г) $(m-2)x^2-(2m+3)x+1=0$;

д) $2mx^2-x+m-3=0$.

3 Користејќи ги Виетовите формули реши ја равенката:

а) $x^2+8x+15=0$; б) $x^2-8x+15=0$;

в) $x^2+7x+12=0$; г) $2x^2-7x+5=0$.

4 Со помош на Виетовите формули утврди дали дадениот пар броеви е решение на соодветната равенка:

а) 2 и 6, $x^2-8x+12=0$;

б) -3 и 5, $x^2-2x-15=0$;

в) -2 и 7, $x^2-9x+14=0$;

г) $3+\sqrt{2}$ и $3-\sqrt{2}$, $x^2+6x+7=0$.

5 Со примена на Виетовите формули одреди ги параметарот m и другиот корен на равенката:

а) $x^2-5x+m=0$, ако $x_1=-2$;

б) $2mx^2+mx-1=0$, ако $x_1=\frac{3}{2}$;

в) $x^2-2bx+m=0$, ако $x_1=b-a$.

6 За која вредност на параметарот k, корените на равенката $x^2+6x-k+3=0$ го задоволуваат условот $x_1-x_2=0$?

7 Одреди го параметарот m така што збирот од корените на равенката $x^2+(2m+1)x-5=0$ да биде еднаков на 4. За добиената вредност на m одреди ги корените на равенката.

8 Не решавајќи ја равенката $4x^2-3x+2=0$, одреди ја вредноста на изразот:

а) $x_1x_2^2+x_1^2x_2$; б) $\frac{3}{x_1}+\frac{3}{x_2}$;

в) $x_1^2+x_2^2$; г) $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}$.

6 ПРИМЕНА НА ВИЕТОВИТЕ ФОРМУЛИ

Потсети се!

- $x_1=3$, $x_2=4$ се нули на триномот $x^2-7x+12$, па $x^2-7x+12=(x-3)(x-4)$.
- $x_1=4$, $x_2=-3$ се нули на равенката $x^2-x-12=0$.
- Провери дали е точно равенството $(x-4)(x+3)=x^2-x-12$.

А Во досегашното изучување на квадратната равенка се запозна со: одредувањето на нејзините корени, видот на корените, врската меѓу корените на равенката и др.

Сега ќе поставиме обратна задача.

1 Состави квадратна равенка чии корени се x_1 и x_2.

Решение. Според претходната теорема, x_1 и x_2 се решенија на равенката $x^2+px+q=0$, каде што $p=-(x_1+x_2)$, $q=x_1\cdot x_2$.

2 Состави квадратна равенка чии корени се $x_1 = 2, \quad x_2 = -7.$

Решение. Бараната равенка е од видот $x^2 + px + q = 0,$ каде што $p = -(x_1 + x_2), \; q = x_1 \cdot x_2.$

Заменувајќи ги дадените вредности добиваме, $p = -(2 + (-7)) = 5, \; q = 2 \cdot (-7) = -14,$ па бараната равенка е $x^2 + 5x - 14 = 0.$

3 Состави квадратна равенка со реални коефициенти ако нејзините корени се:

а) $x_1 = -\frac{2}{3}, x_2 = 0,5;$ б) $x_1 = 3 - \sqrt{2}, x_2 = 3 + \sqrt{2};$

в) $x_1 = 5 - 4i, x_2 = \overline{x_1};$ г) $x_1 = a + b, x_2 = a - b.$

Решение. б) $p = -(x_1 + x_2) = -(3 - \sqrt{2} + 3 + \sqrt{2}) = -6, \quad q = x_1 \cdot x_2 = (3 - \sqrt{2})(3 + \sqrt{2}) = 7,$ па равенката е $x^2 - 6x + 7 = 0;$ в) $p = -(5 - 4i + 5 + 4i) = -10, \quad q = (5 - 4i)(5 + 4i) = 25 - 16i^2 = 41,$ па равенката е $x^2 - 10x + 41 = 0.$

Запомни!

Ако броевите x_1, x_2 се корени на квадратна равенка, тогаш равенката е од обликот

$x^2 + px + q = 0,$ каде што $p = -(x_1 + x_2), \quad q = x_1 \cdot x_2.$

- Ако $p = -(x_1 + x_2)$ и $q = x_1 \cdot x_2$ ги замениме во равенката $x^2 + px + q = 0$ чии решенија се $x_1, x_2,$ тогаш ја добиваме равенката $x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 \cdot x_2 = 0,$ т.е. равенката

$$(x - x_1)(x - x_2) = 0.$$

Значи, ако броевите x_1, x_2 се корени на квадратна равенка, тогаш равенката можеме да ја составиме и со примена на равенството $(x - x_1)(x - x_2) = 0.$ На пример, ако $x_1 = 3, x_2 = -7$ се корени на квадратна равенка, тогаш равенката е $(x - 3)(x + 7) = 0,$ т.е. $x^2 + 4x - 21 = 0.$

4 За која вредност на параметарот k, едниот корен на равенката $x^2 - 12x + k = 0$ е двапати поголем од другиот?

Решение. Од $x_1 = 2 \cdot x_2$ и $x_1 + x_2 = 12$ следува дека $2x_2 + x_2 = 12,$ т.е. $x_2 = 4,$ па $x_1 = 2 \cdot 4 = 8.$

Од $q = x_1 \cdot x_2$ и $q = k$ следува дека $k = 4 \cdot 8 = 32.$

5 Дадена е равенката $mx^2 - (2m + 2)x + 1 = 0.$ Одреди го параметарот m, така што корените x_1 и x_2 на дадената равенка да ја задоволуваат релацијата $x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2 = 4.$

Решение. Според Виетовите формули имаме: $x_1+x_2=-\frac{-(2m+2)}{m}=\frac{2m+2}{m}$; $x_1\cdot x_2=\frac{1}{m}, m\neq 0.$

Од $x_1^2x_2+x_1x_2^2=4$ следува $x_1x_2(x_1+x_2)=4,$ па со замена ја добиваме равенката

$\frac{1}{m}\cdot\frac{2m+2}{m}=4$ или $4m^2-2m-2=0,$ т.е. $2m^2-m-1=0,$ чии корени се $m=1$ или $m=-\frac{1}{2}.$

Ако се обидеш да ја решиш задачата на друг начин, т.е. прво да ги одредиш корените на равенките x_1 и x_2 кои ќе ги замениш во дадената релација, во тој случај ќе добиеш сложена равенка до чие решение тешко се доаѓа.

Задачи

1 Состави квадратна равенка со променлива x чии корени даваат збир p, а производ q, ако:

а) $p=-5,\ q=6;$ б) $p=\frac{1}{2},\ q=\frac{2}{3};$

в) $p=-1,\ q=-2\frac{1}{2}.$

Во задачите $(2-6)$ состави квадратна равенка со променлива x чии корени се:

2 а) -3 и $2;$ б) 5 и $-4;$ в) -6 и $-1.$

3 а) $\frac{1}{2}$ и $-\frac{2}{3};$ б) $-\frac{3}{4}$ и $\frac{1}{2};$ в) $-\frac{2}{3}$ и $-1\frac{1}{4}.$

4 **Т, Е** а) $-\sqrt{3}$ и $-4\sqrt{3};$ б) $-\sqrt{2}$ и $\sqrt{5};$

в) $5-\sqrt{2}$ и $5+\sqrt{2}.$

5 **Т, Е** а) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{1+\sqrt{3}}{2};$

б) $2-3i$ и $2+3i;$ в) $\frac{1-2i}{3}$ и $\frac{1+2i}{3}.$

6 а) $\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a};$ б) $\frac{a}{a+b}$ и $\frac{b}{a-b}.$

7 **Т, Е** Состави квадратна равенка со реални коефициенти и со променлива x ако еден нејзин корен е:

а) $3-2\sqrt{3};$ б) $3-2i;$ в) $\frac{2}{3+i}.$

8 За која вредност на параметарот k едниот корен на равенката $2x^2-3x+k-2=0$ е трипати помал од другиот?

9 Одреди го параметарот m ако корените на равенката $x^2-4x+m=0$ ја задоволуваат релацијата $x_1^2+x_2^2=12.$

10 Одреди го параметарот m во равенката $x^2-(m+1)x+m+3=0,$ така што едниот нејзин корен е двапати поголем од другиот.

7 ПРИМЕНА НА КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

Во различни области на науката и техниката, решавањето на голем број задачи се сведува на решавање на квадратни равенки. Во продолжение ќе покажеме како се решаваат некои проблеми со примена на квадратни равенки.

1 Бројот 65 раздели го на два собироци чиј производ е 966.

Решение. Нека едниот собирок е x. Тогаш другиот собирок е $65-x$, па според условот на задачата ја составуваме равенката $(65-x)\cdot x=966$, односно $x^2-65x+966=0$, чии решенија се $x_1=42$, $x_2=23$. Значи, бараните собироци се 42 и 23.

2 Збирот на цифрите на еден двоцифрен број е 9. Ако тој број се помножи со бројот напишан со истите цифри, но во обратен ред, ќе се добие 2268. Кој е тој број?

Решение. Ако цифрата на единици е x, тогаш цифрата на десетки е $9-x$, а броевите запишани во позициона форма се $\overline{(9-x)x}$ и $\overline{x(9-x)}$. Според условот на задачата имаме: $\overline{(9-x)x}\cdot\overline{x(9-x)}=2268$, односно $(10\cdot(9-x)+x)\cdot(10x+9-x)=2268$, т.е. $x^2-9x+18=0$, чии решенија се $x_1=3$, $x_2=6$. Бараниот двоцифрен број е 63 или 36. ***Упатство.*** Овде користевме запишување на број од позициона во полиномна форма. На пример, $79=10\cdot 7+9$.

3 Во кој многуаголник бројот на сите дијагонали е седумпати поголем од бројот на неговите страни?

Решение. Бројот на сите дијагонали во многуаголникот со n страни се пресметува со формулата $D_n=\frac{n(n-3)}{2}$. Од условот на задачата имаме $\frac{n(n-3)}{2}=7n$, т.е. $n^2-17n=0$. Решенијата на оваа равенка се $n_1=0$, $n_2=17$. Според тоа, бараниот многуаголник има 17 страни.

Потсети се!

- За одредување на најмал заеднички содржател на броеви или полиноми.
- НЗС$(x-1, x^2-1)=(x-1)(x+1)$.
- НЗС$(x^2-4, x+2, x-3)=$
  $=(x-2)(x+2)(x-3)$.
- Одреди НЗС на x^2+2x-1, x^2-1.

Решавањето на квадратните равенки овозможува решавање на равенки кои со одредени трансформации се сведуваат на квадратни.

4 Реши ја равенката:

а) $\frac{2(x+10)}{x+1}=3x+8$; б) $\frac{15}{x}+\frac{8}{x-5}=1$.

- Равенките кои барем во еден свој именител содржат непозната се викаат ***дробно рационални равенки***. Таквите равенки се дефинирани за вредностите на непознатата за коишто секој именител во равенката е различен од нула.

Решение. а) Равенката е дефинирана за $x+1\neq 0$, т.е. за $x\neq -1$, па дефиниционото множество е $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Равенката ја множиме со НЗС на нејзините именители и имаме:

$$\frac{2(x+10)}{x+1}=3x+8\,/\cdot(x+1),\quad 2(x+10)=(3x+8)(x+1),\quad x^2+3x-4=0.$$

Корените на добиената квадратна равенка се $x_1=1,\ x_2=-4$, а бидејќи тие припаѓаат на множеството D, следува дека двата корени се решенија на дадената равенка.

б) Равенката е дефинирана за $x\neq 0,\ x\neq 5$, т.е. $D=\mathbb{R}\setminus\{0,5\}$. Равенката ја множиме со НЗС $(x,x-5)=x(x-5)$, па $\frac{15}{x}+\frac{8}{x-5}=1/\cdot x(x-5)$, $15(x-5)+8x=x(x-5)$, т.е. $x^2-28x+75=0$. Решенијата на добиената и дадената равенка се $x_1=3,\ x_2=25$, бидејќи $3\in D$ и $25\in D$.

5 Реши ја равенката: а) $\frac{2x-3}{x+1}=\frac{3x-5}{2x-1}$; б) $\frac{6}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=\frac{x-2}{x+1}$.

Потсети се!

- Како гласат Виетовите формули на квадратната равенка?
- За равенката $2x^2-3x+4=0$ имаме:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a}=\frac{3}{2}\quad \text{и}\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}=2.$$

6 Квадратниот трином $x^2-7x+12$ разложи го на линеарни множители.

Решение. $x^2-7x+12=x^2-3x-4x+12=$
$=x(x-3)-4(x-3)=(x-3)(x-4)$.
Воочи дека $x_1=3,\ x_2=4$ се нули на дадениот квадратен трином.

- Ако x_1 и x_2 се нули на квадратниот трином ax^2+bx+c $(a\neq 0, b\neq 0, c\neq 0)$, тогаш

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1\cdot x_2=\frac{c}{a},\ \text{па}\ ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left(x^2-(x_1+x_2)\cdot x+x_1\cdot x_2\right)=$$

$$=a\left[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)\right]=a(x-x_1)(x-x_2),\ a\neq 0.$$

7 Разложи го на множители триномот: а) $2x^2-3x-5$; б) x^2-5x+6.

Решение. а) Ги одредуваме нулите на триномот: $x_{1/2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 2\cdot(-5)}}{2\cdot 2}=\dfrac{3\pm 7}{4}$,

$x_1=\dfrac{5}{2},\ x_2=-1,$ па $2x^2-3x-5=2\left(x-\dfrac{5}{2}\right)(x+1)=(2x-5)(x+1).$

б) $x_{1/2}=\dfrac{5\pm\sqrt{5^2-4\cdot 6}}{2},\ x_1=3,\ x_2=2;\ \ x^2-5x+6=(x-3)(x-2).$

Запомни!

Квадратниот трином ax^2+bx+c се разложува на линеарни множители според формулата $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\ a\neq 0,$ каде што x_1 и x_2 се нули на триномот.

8 Реши ја равенката $\dfrac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}-\dfrac{x-4}{2x-4}=0.$

Следај ги чекорите во решавањето.

1) Именителите ги разложуваме на множители: $x^2-3x+2=(x-x_1)(x-x_2),\ a=1;$

$x_{1/2}=\dfrac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 2}}{2},\ x_1=2,\ x_2=1;\ x^2-3x+2=(x-2)(x-1);\ \ 2x-4=2(x-2).$

2) НЗС$\big((x-2)(x-1),2(x-2)\big)=2(x-2)(x-1).$

3) Равенката е дефинирана за $x\neq 2,\ x\neq 1,$ т.е. $D=\mathbb{R}\setminus\{1,2\}.$

4) Равенката ја множиме со НЗС, $\dfrac{x^2-2x+3}{(x-2)(x-1)}-\dfrac{x+4}{2(x-2)}=0\,/\cdot 2(x-1)(x-2),$

$(x^2-2x+3)\cdot 2-(x+4)(x-1)=0.$ По средувањето се добива равенката $x^2-7x+10=0$ чии решенија се $x_1=5,\ x_2=2.$ Бидејќи $2\notin D,$ решение на дадената равенка е само $x=5.$

9 **T** Брзината на моторен чамец во мирна вода е $15\ \mathrm{km/h}$. Растојанието од $72\ \mathrm{km}$ чамецот го поминува по течението на реката за 2 часа помалку, отколку спроти течението. Одреди ја брзината на реката.

Решение. Нека $x\ \mathrm{km/h}$ е брзината на реката. Тогаш $15+x$ е брзината на чамецот по течението на реката, а $15-x$ спроти течението. Од $s=v\cdot t$ следува дека $72=(15+x)t_1$ и $72=(15-x)t_2.$

Оттука следува дека $t_1=\dfrac{72}{15+x}$ и $t_2=\dfrac{72}{15-x}.$ Од $t_2-t_1=2$ имаме $\dfrac{72}{15-x}-\dfrac{72}{15+x}=2.$

По ослободувањето од именителите, ја добиваме равенката $72(15+x)-72(15-x)=2(15+x)(15-x)$, т.е. равенката $x^2+72x-225=0$ чии решенија се $x_1=3,\ x_2=-75$. Според тоа, брзината на реката е $3\ \mathrm{km/h}$. (Внимавај, $x=-75$ е решение на равенката, но не е решение на задачата, бидејќи брзината не може да биде негативна).

10 **3** Два раствори, од кои првиот содржи $0{,}8$, а вториот $0{,}6$ концентрирана сулфурна киселина се помешани и притоа се добиени $10\ \ell$ нов раствор на сулфурна киселина. Пресметај ја количината на секој од растворите во новиот раствор, ако во концентрацијата првиот раствор е 10% повеќе.

Решение. Нека x е количината на првиот раствор. Тогаш количината на вториот раствор е $10-x$. Процентот на првиот раствор во мешавината е $p_1=\frac{0{,}8\cdot 100}{x}$, а на вториот раствор е $p_2=\frac{0{,}6\cdot 100}{10-x}$. Од условот $p_1-p_2=10$ имаме $\frac{0{,}8\cdot 100}{x}-\frac{0{,}6\cdot 100}{10-x}=10$. Оттука, по средувањето ја добиваме равенката $x^2-24x+80=0$ чии решенија се $x_1=20,\ x_2=4$. Решението $x_1=20$ не е решение на задачата, бидејќи вкупната количина на растворот е $10\ \ell$. Според тоа, од првиот раствор се земени $4\ \ell$, а од вториот $10\,\ell-4\,\ell=6\,\ell$.

11 **E** За извесна сума пари, орочени на една година, еден штедач добил 15 денари камата. Тој додава уште 85 денари и орочува уште на една година со иста камата. По истекот на таа година, банката на штедачот му исплатила вкупно 420 денари. Колкава била почетната сума пари и колкава е годишната камата?

Решение. Нека вложената сума е S денари, а каматата е $x\%$. Тогаш $\frac{S\cdot x}{100}=15$, т.е. $S=\frac{100\cdot 15}{x}$. Значи, штедачот на почетокот вложил $\frac{1500}{x}$ денари. Во почетокот на втората година тој на штедна книшка имал $\frac{1500}{x}+15+85=\frac{1500}{x}+100$ денари. На крајот на втората година тој имал $\left(\frac{1500}{x}+100\right)+\left(\frac{1500}{x}+100\right)\cdot\frac{x}{100}$ денари, а таа сума била 420 денари. Според тоа ја добиваме равенката $\frac{1500+100x}{x}+\frac{1500+100x}{x}\cdot\frac{x}{100}=420$, т.е. равенката

$x^2-305x+1500=0$ чии решенија се $x_1=5,\ x_2=300$. Според тоа, каматата е 5%, а вложената сума на почетокот била $\frac{1500}{5}=300$ денари.

- Зошто $x_2=300$ не може да биде решение на задачата?

Задачи

1 Бројот 123 раздели го на два собироци чиј производ е 3710.

2 Должините на страните на еден триаголник се 5 cm, 9 cm и 13 cm. За која иста должина треба да се продолжи секоја од нив, па да се добие правоаголен триаголник?

3 Збирот од квадратите на два последователни природни броеви е 685. Кои се тие броеви?

4 Може ли мерните броеви на страните на правоаголен триаголник да бидат:

а) три последователни природни броеви;

б) три последователни парни природни броеви;

в) три последователни непарни природни броеви?

5 Реши ја равенката:

а) $\frac{2x-3}{x+1}=\frac{3x-5}{2x-1}$; б) $\frac{6}{x^2-1}-\frac{2}{x-1}=\frac{x-2}{x+1}$.

6 Група ученици треба меѓу себе да соберат 6000 денари давајќи еднаква сума на пари. Двајца од нив се откажале, па затоа останатите морале да доплатат уште по 150 денари. Колку ученици имало во групата?

7 Еден работник работи сам на една работа 7 дена, а потоа му се придружил друг работник и работата ја завршиле уште за 8 дена. За колку дена секој од нив сам ќе ја заврши целата работа, ако вториот работник работата ја завршува за 5 дена помалку од првиот работник?

8 Еден воз растојанието од 650 km го поминува за три часа помалку од друг воз чија брзина е 15 km/h помала од брзината на првиот воз. Одреди ги брзините на двата воза.

8 ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1 Равенката $(k-1)x^2-3kx+1=0$ е квадратна само ако:

а) $k\neq 0$; б) $k=0$; в) $k\neq 1$; г) $k=1$.

2 Квадратната равенка $x^2-k+1=0$ има реални решенија ако $k\in$ _____.

3 Збирот од решенијата на квадратна равенка $4x^2-8x+5=0$ изнесува:

а) -8; б) -2; в) 2; г) 8.

4 Нека x_1, x_2 се решенија на квадратната равенка $x^2+px+q=0$. Тогаш вредноста на $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ е:

а) $\frac{p}{q}$; б) $\frac{q}{p}$; в) $-\frac{p}{q}$; г) $-\frac{q}{p}$.

5 Броевите -1 и 3 се корени на равенката $x^2-2x-3=0$. Оваа равенка е еквивалентна со равенката:

а) $(x-1)(x+3)=0$; б) $(x+1)(x+3)=0$; в) $(x+1)(x-3)=0$; г) $(x-1)(x-3)=0$.

6 Реши ја равенката: а) $x^2-4=0$; б) $x^2+bx=0$; в) $x^2-1=0$.

7 Одреди ги решенијата на равенката: а) $5x^2-3x=9x^2+7x$; б) $x^2-\frac{21}{5}x-4=0$.

8 Одреди ја природата на решенијата на квадратната равенка:

а) $x^2-8x+15=0;$ б) $x^2-10x+25=0;$ в) $x^2-2x+9=0.$

9 Состави квадратна равенка чии решенија се: а) $x_1=-5,\ x_2=-9;$ б) $x_1=\frac{5}{8},\ x_2=-\frac{3}{4}.$

10 Одреди ја вредноста на реалниот параметар m, така што равенката да е од обликот $ax^2+bx=0$:

а) $x^2+3mx+2m-6=0;$ б) $x^2+(m-2)x+3m-1=0?$

11 За која вредност на параметарот m равенката ќе има двоен корен:

а) $x^2+10x+m=0;$ б) $mx^2+6x+m=0?$

12 Реши ја равенката: а) $x+\frac{8}{x}=6;$ б) $\frac{8}{x-1}-\frac{6}{x+1}=1.$

13 Збирот од квадратите на три последователни непарни природни броеви е 251. Кои се тие броеви?

14 Дијагоналата на еден правоаголник е $30\ \text{cm}$, а неговите димензии се разликуваат за $6\ \text{cm}$. Колкава е страната на квадратот чија плоштина е трипати поголема од плоштината на правоаголникот?

15 **З** Низ две инфузиони игли A и B за три часа протекува извесно количество инфузионен раствор. За колку време ова количество раствор ќе протече само низ иглата A, ако се знае дека само низ иглата B истото количество раствор протекува за 8 часа помалку отколку низ иглата A?

16 **Т** Збирот од напонот и неговата реципрочна вредност што доаѓа во едно домаќинство е $\frac{40001}{200}$ волти. Одреди го напонот.

17 **Е** Едно земјоделско стопанство засеало жито на три парцели. Приносот од едната парцела е за три тони поголем од приносот на втората парцела, а за три тони помал од приносот на третата парцела. Одреди ги приносите жито на парцелите ако тие се Питагорова тројка броеви.

9 ЗАДАЧИ ЗА САМОПРОВЕРКА

1 Равенката $(3k-5)x^2-4kx=0$ не е квадратна ако вредноста на параметарот k е: 1

а) $\frac{3}{5};$ б) $-\frac{3}{5};$ в) $\frac{5}{3};$ г) $-\frac{5}{3}.$

2 Квадратната равенка $x^2-(k+1)x+2k-2=0$ има едно решение нула ако $k=$ _____. 2

3 Квадратната равенка $ax^2+bx+c=0$ $(a,b,c\in\mathbb{R}$ и $a\neq 0)$ нема реални решенија ако нејзината дискриминанта D е _____. 2

4 Ако едното решение на квадратната равенка $x^2+kx-6=0$ е $x=2$, тогаш другото решение е: а) -3; б) -2; в) 2; г) 3. 1

5 Броевите m и $\frac{1}{m}$ $(m\neq 0)$ се решенија на квадратната равенка: а) $x^2+mx+\frac{1}{m}=0$;

б) $x^2-\frac{1}{m}x+m=0$; в) $mx^2-(m^2+1)x+m=0$; г) $x^2+(m^2+1)x+m=0$. 1

Реши ја равенката $(6-7)$:

6 а) $3(x-2)(x+2)=x^2-10$; б) $(x+1)^2=(2x-1)(x-1)+5x+3$. 2

7 а) $\frac{x^2}{8}-3x=0$; б) $\frac{5x^2+7x}{4}-\frac{2x^2-9x}{2}=0$. 2

8 Реши ја равенката: а) $4x^2-4x+1=0$; б) $x^2+13x+12=0$. 2

9 Одреди ја природата на решенијата на равенката:

а) $3x^2+2x+1=0$; б) $4x^2-12x+9=0$; в) $x^2+x-3=0$. 3

10 Состави квадратна равенка чии решенија се: а) $x_1=16,\ x_2=-1$; б) $x_1=\frac{1}{2},\ x_2=\frac{2}{5}$. 2

11 Реши ја дробно рационалната равенка:

а) $1-\frac{15}{x}=\frac{8}{x-5}$; б) $1-\frac{1}{x-2}=\frac{3}{x+2}$; в) $\frac{5}{x-2}+\frac{x}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$. 4

12 Бројот 144 разложи го на два множители чиј збир е 30. 3

13 Колку натпреварувачи учествувале на еден шаховски турнир, ако се знае дека секој учесник одиграл само по една партија со секој од другите и дека вкупно се одиграни 120 партии? 3

14 Одреди ја вредноста на параметарот m, така што множеството решенија на дадената равенка да има само еден елемент: 3

а) $x^2+mx+36=0$; б) $x^2-3x+5m=0$. 3

ТЕМА 5 КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА. КВАДРАТНА НЕРАВЕНКА

за сите струки

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1 Поим за квадратна функција 108

2 График на функцијата $f(x)=ax^2$ и $f(x)=ax^2+c$ 112

3 График на функцијата $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ 116

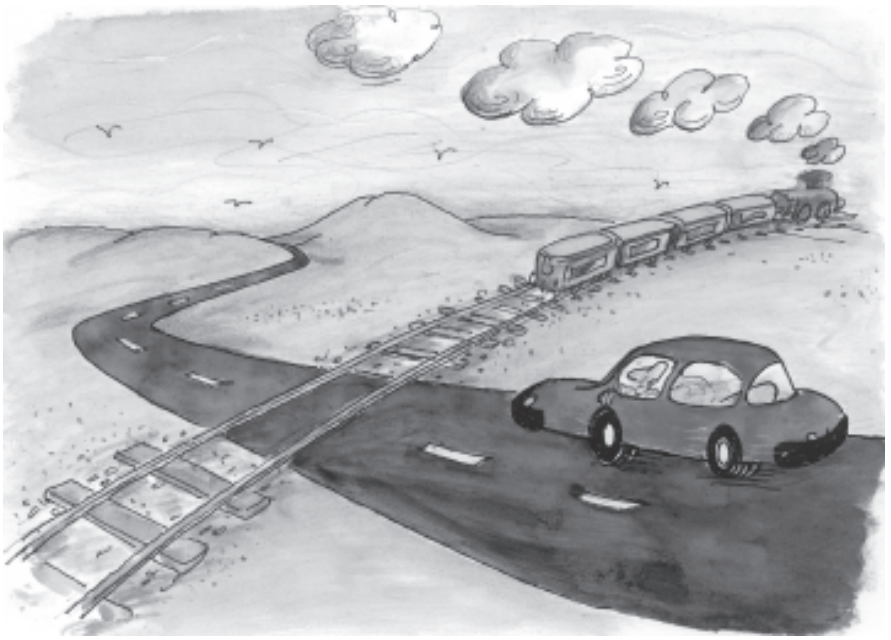
4 График на функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$ 120

5 Својства на квадратната функција 124

6 Квадратни неравенки 128

7 Задачи за повторување и утврдување 131

8 Задачи за самопроверка 132



1 ПОИМ ЗА КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

- Која од функциите $y=2x-5$, $y=\frac{1}{x}$ или $y=x^2-x$ е линеарна?
- Определи $f(0)$, $f(1)$ и $f\left(-\frac{2}{3}\right)$ ако $f(x)=3x-4$.
- На кои начини може да се претстави една функција?

А 1 Во ист координатен систем нацртај го графикот на линеарната функција:

а) $y=2x$, $y=2x+2$;

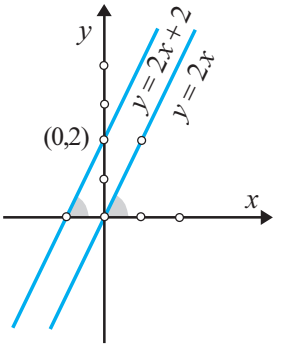
б) $y=x+2$, $y=-x+2$.

Согледај го решението.

а) Графикот на линеарната функција е права. Според тоа, за негово цртање доволно е да определиме две негови точки. За таа цел, во табелата избираме две произволни вредности за x и ги пресметуваме соодветните вредности за y. Потоа го цртаме графикот.

а)

x	0	1
$2x$	0	2
$2x+2$	2	4



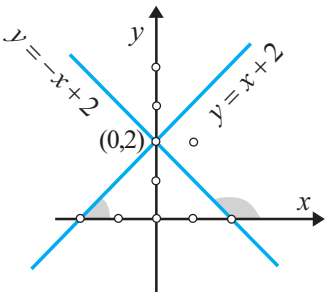
- Сигурно воочи дека функциите имаат еднакви коефициенти пред аргументот, а нивните графици се претставени со паралелни прави.

б) Постапуваме како под а).

- Воочи, слободните членови на дадените функции се еднакви, а нивните графици се прави што минуваат низ точката $A(0,2)$.

б)

x	0	1
$x+2$	2	3
$-x+2$	2	1



Треба да знаеш!

Функцијата $f(x)=ax+b$, каде што a и b се реални броеви (константи) се вика ***линеарна функција***. Дефиниционото множество е $D_f=\mathbb{R}$. Графикот на линеарната функција е множеството $G_f=\{(x,y)\mid x\in\mathbb{R},\ y=f(x)=ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}\}$. Множеството G_f претставено во координатна рамнина е ***права***.

Потсети се!

- Одреди ги вредностите $f(0), f(1), f(3)$ на функцијата $f(x)=x^2-2x$.
- Нека $f(x)=x^2+1$. Претстави ги во правоаголен координатен систем точките: $(1, f(1))$, $(0, f(0))$, $(-1, f(-1))$.

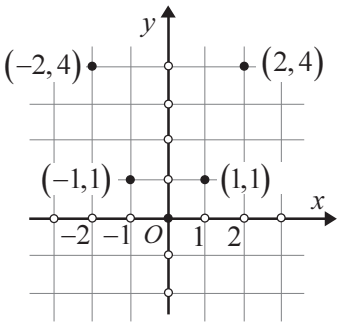
Графикот на функцијата е множеството $G_f=\{(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,4)\}$, а геометриски е претставен со зацрнетите точки во избраниот координатен систем на цртежот.

Множеството вредности на функцијата е $V_f=\{1,0,4,\}$, а тоа е множеството броеви што се ординати на точките од графикот.

Б **2** Претстави ја табеларно и графички функцијата $f(x)=x^2$, ако $D_f=\{-2,-1,0,1,2\}$. Определи го множеството вредности на функцијата.

Решение. Функцијата претставена табеларно е:

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4



Запомни!

Функцијата зададена со формулата $f(x)=ax^2+bx+c$, каде што a, b и c се дадени реални броеви и $a\neq 0$ се вика ***квадратна функција***. Нејзината дефениционa област е $D_f=\mathbb{R}$. Понекогаш наместо $f(x)=ax^2+bx+c$ пишуваме $y=ax^2+bx+c$. Графикот на квадратната функција е множеството $G_f=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{R},\ y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0\}$.

Потсети се!

- Одреди ја линеарната функција $f(x)=ax+b$, ако $f(0)=2$ и $f(2)=0$.
- Одреди го реалниот број c во квадратната функција $f(x)=2x^2-3x+c$, ако $f(0)=5$.

В **3** Дадена е функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$.

Одреди ги коефициентите a, b и c ако $f(0)=0$, $f(3)=45$, $f(2)=20$.

Решение. Според условите на задачата го формираме системот $\begin{cases} c=0 \\ 9a+3b+0=45 \\ 4a+2b+0=20 \end{cases}$, чие решение е: $a=5$, $b=0$ и $c=0$. Дадената функција е $f(x)=5x^2$.

4 Одреди ја квадратната функција $f(x)=x^2+bx+c$, така што нејзиниот график да ги содржи точките $A(2,0)$ и $B(-3,0)$.

- Ако $b = c = 0$, тогаш квадратната функција го добива обликот $f(x) = ax^2$, $a \neq 0$.

  Ако $a = 1$ се добива наједноставната квадратна функција $\boxed{y = x^2.}$

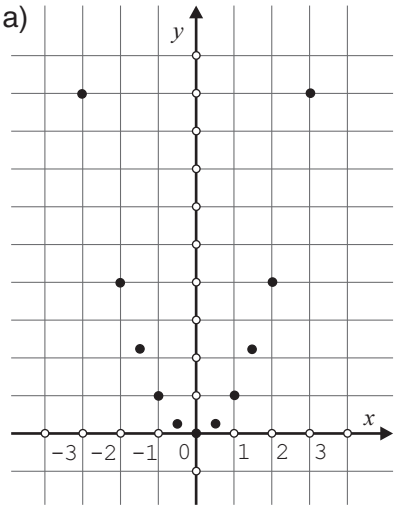
5 Дадена е функцијата $y = x^2$. Направи табела на вредностите на таа функција за $x \in \{0;\ 1;\ -1;\ 2;\ -2;\ 3;\ -3;\ 0,5;\ -0,5;\ 1,5;\ -1,5\}$ и нацртај ги соодветните точки од графикот во избран координатен систем. Потоа обиди се да го замислиш геометрискиот изглед на графикот.

Решение. Бараната табела е:

x	0	1	-1	2	-2	3	-3	0,5	$-0,5$	1,5	$-1,5$
x^2	0	1	1	4	4	9	9	0,25	0,25	2,25	2,25

Од табелата можеш да согледаш дека $(0,0), (1,1), (2,4), (-2,4), \ldots, (-1,5; 2,25)$ се точки од графикот на функцијата $y = x^2$; тие се внесени во избран координатен систем на цртежот а).

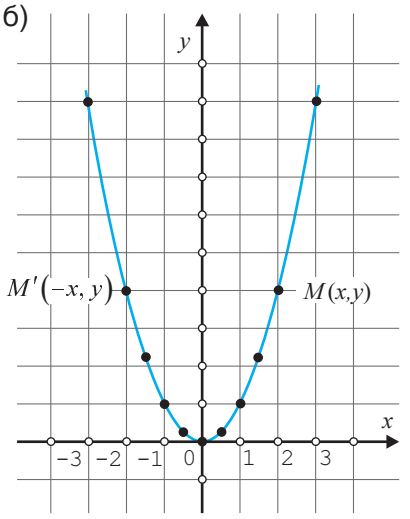
а)



- Воочи дека: колку повеќе точки од графикот на функцијата се внесени во координатниот систем, толку подобра претстава за геометрискиот изглед на графикот ќе добиеме.

- Да замислиме дека во избраниот координатен систем се внесени сите точки (x, y), $y = x^2$ и $x \in \mathbb{R}$ од графикот. Така наредените точки ќе формираат една крива линија, како на цртежот б), којашто се вика ***парабола***.

б)



- Координатниот почеток $O(0,0)$ е најниската точка од графикот и се вика ***теме*** на параболата.

- За секоја точка $M(x, y)$ од параболата $\{(x, y) \mid y = x^2 \text{ и } x \in \mathbb{R}\}$ постои точка $M'(-x, y)$ од таа парабола којашто е симетрична во однос на y-оската.

- y-оската е оска на симетрија (или само ***оска***) на таа парабола.

Задачи

1 Во ист координатен систем нацртај го графикот на функцијата $f(x)=ax-1$, ако:

а) $a=1,\ a=2,\ a=\frac{1}{2}$;

б) $a=-1,\ a=-2,\ a=-\frac{1}{2}$.

2 Одреди ја линеарната функција $f(x)=ax+b$, ако: а) $f(0)=1,\ f(-1)=-1$; б) $f(1)=2,\ f(2)=0$.

3 Која од дадените функции е квадратна:

а) $f(x)=5+2x-x^2$; б) $f(x)=x(x-1)$;

в) $f(x)=x^2-x^3$; г) $f(x)=3x^2$?

4 Одреди го множеството вредности на функцијата $f(x)=x^2-2x$, ако:

а) $D_f=\{-2,-1,0,1,2\}\subset\mathbb{Z}$;

б) $D_f=[-2,\ 2]\subset\mathbb{R}$.

5 Дадена е функцијата $f(x)=2x^2-5x+3$. Одреди ги вредностите:

а) $f(0)$; б) $f(1)$; в) $f(-2)$; г) $f(1{,}5)$.

6 Дадена е функцијата $f(x)=x^2$.

1) Пополни ја таблицата.

x	-3	-2	-1	$-0{,}5$	0	$0{,}5$	1	2	3
x^2									

2) Нацртај го графикот на функцијата.

3) Користејќи го графикот на дадената функција спореди ги вредностите:

а) $f(-3)$ и $f(-2)$; б) $f(-2)$ и $f(1)$;

в) $f(x_1)$ и $f(x_2)$ ако $x_1<x_2<0$;

г) $f(x_1)$ и $f(x_2)$ ако $0<x_1<x_2$.

7 Одреди го параметарот m, така што графикот на функцијата $f(x)=x^2+mx+4$ минува низ точката: а) $(1,2)$; б) $(-1,2)$; в) $(3,-2)$.

8 За кои вредности на параметарот m ќе биде квадратна функцијата:

а) $f(x)=(m+2)x^2+2x-5$;

б) $f(x)=2x^2+(m-2)x+3$;

в) $f(x)=(m^2-4)x^2+3x+1-m$?

9 Дадена е функцијата $f(x)=-2x^2+bx+c$. Одреди ги b и c, ако:

а) $f(0)=2,\ f(1)=3$;

б) $f(-1)=3,\ f(2)=-6$.

10 Одреди ја функцијата $f(x)=ax^2+bx+c$, ако $f(-1)=6,\ f(1)=2$ и $f(2)=3$.

11 Одреди ја функцијата $f(x)$, ако $f(x+1)=x^2-3x+2$.

12 Докажи дека за функцијата $f(x)=x^2+x+c$ важи $f(c-1)=c^2$.

2 ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $f(x)=ax^2$ И $f(x)=ax^2+c$

Потсети се!

- Како се вика графикот на функцијата $y=x^2$?
- Која точка е теме на параболата $y=x^2, x\in\mathbb{R}$?
- Која права е оска на симетрија (т.е. оска) на параболата $\{(x,y)\mid y=x^2,\ x\in\mathbb{R}\}$?

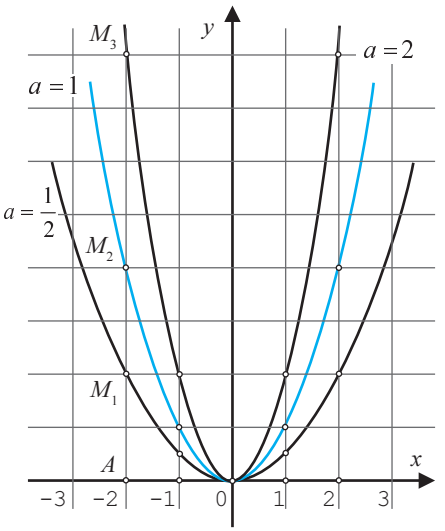
А 1 Нацртај го графикот на секоја од функциите:

а) $f(x)=x^2$, $f(x)=2x^2$, $f(x)=\frac{1}{2}x^2$; и

б) $f(x)=2x^2$, $f(x)=-2x^2$; во ист координатен систем. Што забележуваш?

Решение. а) Функциите ги претставуваме табеларно и имаме:

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	1	0	1	4
$2x^2$	8	2	0	2	8
$\frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2



Според податоците од табелата, функциите ги претставуваме графички (види цртеж).

Воочи ги координатите на точките M_1, M_2 и M_3 и спореди ги должините на отсечките AM_1, AM_2 и AM_3.

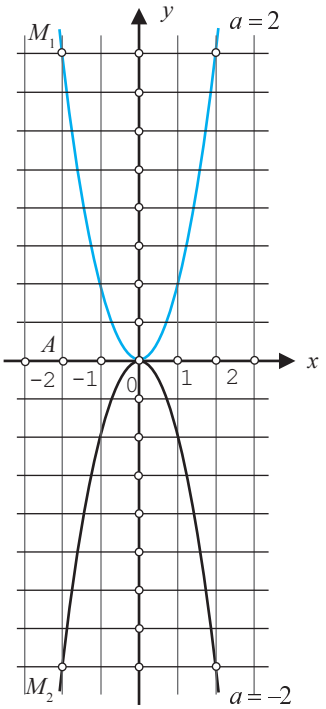
Сигурно воочи дека за поголеми вредности на коефициентот a се добиваат и поголеми ординати на споменатите точки и обратно.

- Ако $a>1$, тогаш со зголемувањето на вредноста на коефициентот a се зголемуваат и ординатите на точките за иста вредност на аргументот x, т.е. графикот на функцијата се доближува до y-оската.

б) Функциите ги претставуваме табеларно.

x	-2	-1	0	1	2
$2x^2$	8	2	0	2	8
$-2x^2$	-8	-2	0	-2	-8

На цртежот функциите се претставени графички Воочи дека ординатите на точките M_1 и M_2 се спротивни броеви. Тоа покажува дека графикот на функцијата $y=-2x^2$ може да се добие од графикот на функцијата $y=2x^2$ со рефлексија во однос на x-оската.



- Воочи дека графиците на функциите $y=2x^2$ и $y=-2x^2$ се симетрични во однос на x-оската.

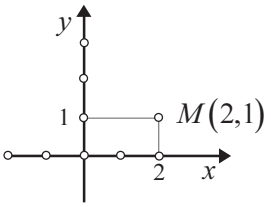
Запомни!

Графикот на функцијата $y=ax^2$, $a\neq 0$ е крива која се вика парабола. Најниската точка од графикот (кога $a>0$), односно највисоката точка од графикот (кога $a<0$) се вика теме на параболата и тоа се наоѓа во координатниот почеток. Ако $a>0$, тогаш параболата е свртена со отворот кон позитивната насока на y-оската, а ако $a<0$, тогаш параболата е со отворот кон негативната насока на y-оската.

- За функцијата $y=ax^2$, $a\neq 0$ важи: $f(-x)=f(x)$, а тоа значи дека графикот на функцијата е ***симетричен*** во однос на y-оската.

Потсети се!

- Дадена е точката $M(2,1)$ во координатниот систем на цртежот.



Со транслација на точката M во правец на y-оската се добиени точките M_1 и M_2.

- Одреди ги координатите на точките M_1 и M_2, ако:
а) M_1 - за 3 единици нагоре,
б) M_2 - за 4 единици надолу.

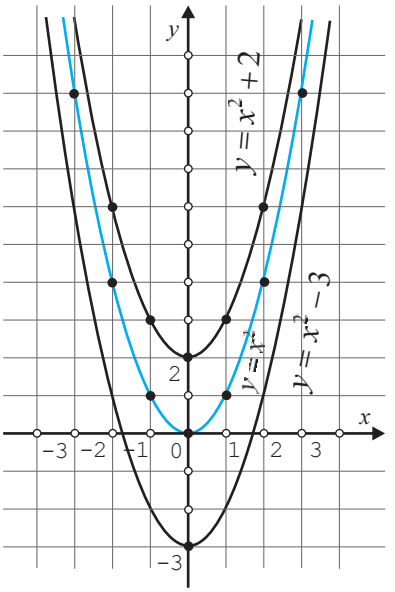
Б 2 Нацртај го графикот на секоја од функциите:
$f(x)=x^2$, $g(x)=x^2+2$ и $h(x)=x^2-3$ во ист координатен систем и согледај некои врски меѓу тие графици.

Решение. Прво направи табела на вредностите на дадените функции, како даденава.

x	$f(x)=x^2$	$f(x)=x^2+2$	$f(x)=x^2-3$
−2	**4**	**4** $+2=6$	**4** $-3=1$
−1	**1**	**1** $+2=3$	**1** $-3=-2$
0	**0**	**0** $+2=2$	**0** $-3=-3$
1	**1**	**1** $+2=3$	**1** $-3=-2$
2,5	**6,25**	**6,25** $+2=8,25$	**6,25** $-3=3,25$
3	**9**	**9** $+2=11$	**9** $-3=6$

Кога ќе ги споредиш вредностите на квадратните функции $f(x)=x^2$ и $g(x)=x^2+2$, можеш да видиш дека за секоја реална вредност на x, вредноста $g(x)$ ***е за 2 поголема од*** $f(x)$. Аналогно, вредноста $h(x)$ ***е за 3 помала од*** $f(x)$.

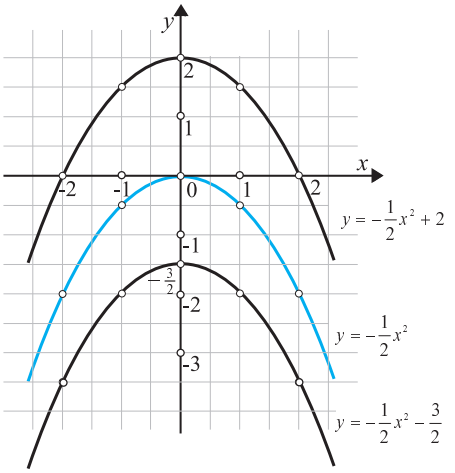
- Така, графикот на функцијата $g(x)=x^2+2$ може да се добие со поместување, т.е. со транслација на графикот на $f(x)=x^2$, а тоа е параболата $\{(x,x^2)\mid x\in\mathbb{R}\}$, нагоре за 2 единици, како на цртежот.
- Според тоа, графикот на функцијата $g(x)=x^2+2$ е парабола, којашто е симетрична во однос на y-оската. Најниската точка на графикот е точката $(0,\ 2)$ и таа е теме на параболата.
- За графикот на функцијата $h(x)=x^2-3$ важат аналогни заклучоци: графикот е парабола, поместена надолу за 3 единици со најниска точка $(0,-3)$ и y-оската како оска на симетрија.



3 Нацртај ги графиците на функциите $y=-\frac{1}{2}x^2+2$ и $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}$ во ист координатен систем и согледај некои нивни својства како во претходната задача.

Решение.

x	$-0,5x^2$	$-0,5x^2+2$	$-0,5x^2-1,5$
-2	-2	0	$-3,5$
-1	$-0,5$	$1,5$	-2
0	0	2	$-1,5$
1	$-0,5$	$1,5$	-2
2	-2	0	$-3,5$



Запомни!

Графикот на функцијата $f(x)=ax^2+c$ е парабола со теме $T(0,c)$, а се добива со транслација на параболата $y=ax^2$ за $|c|$ единици во позитивната насока по y-оската ако $c>0$, или за $|c|$ во негативната насока по y-оската ако $c<0$.
Оската на параболата се совпаѓа со y-оската.

B Да согледаме некои својства на функцијата $f(x)=ax^2+c,\ a\neq 0.$

1) Функцијата е дефинирана за сите реални броеви, т.е. $D_f=\mathbb{R}.$

2) Темето на параболата е во точката $T(0,c).$

3) Ако $a>0,$ тогаш темето $T(0,c)$ е најниската точка од графикот. Значи, за $x=0,\ f(x)=c$ е најмалата вредност на функцијата. Оттука следува дека множеството вредности на функцијата е $V_f=[c,\infty).$

Ако $a<0,$ тогаш темето е највисоката точка од графикот. Значи, $x=0,\ f(x)=c$ е најголемата вредност на функцијата. Според тоа, множеството вредности на функцијата е $V_f=(-\infty,\ c].$

4) Од претходното следува дека функцијата во темето има најмала или најголема (екстремна) вредност, т.е.

ако $a>0,\quad y_{\min}=c$ за $x=0,$

ако $a<0,\quad y_{\max}=c$ за $x=0.$

5) Оската на параболата се совпаѓа со y-оската.

4 Запиши ги својствата на функцијата $y=-\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}.$

Решение. Графикот на функцијата е прикажан на претходниот цртеж, а својствата се:

1) $D_f=\mathbb{R}.$

2) $T\left(0,-\frac{3}{2}\right).$

3) $a=-\frac{1}{2}<0,$ значи функцијата има максимум, $y_{\max}=-\frac{3}{2}$ за $x=0.$

4) Графикот на функцијата е симетричен во однос на ординатната оска.

5 Дадени се функциите $y=2x^2-1$ и $y=2x^2+2.$

а) Нацртај го графикот на секоја од функциите со помош на графикот на функцијата $y=2x^2.$ б) Испитај ги својствата на тие функции.

Задачи

Нацртај ги графиците на дадените функции $(1-3)$ во ист координатен систем:

1 а) $y=-2x^2,\ y=-x^2,\ y=-\frac{1}{2}x^2;$

б) $y=x^2,\ y=2x^2,\ y=\frac{1}{2}x^2;$

2 $y=-2x^2+1,\ y=-2x^2-1,\ y=-2x^2+3.$

3 $y=\frac{1}{2}x^2-2,\ y=\frac{1}{2}x^2+3,\ y=\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}.$

Нацртај ги графиците на функциите $(4-6)$, а потоа одреди ги темето, множеството вредности и екстремната вредност на секоја од тие функции:

4 а) $y=-x^2+2$; б) $y=x^2-3$.

5 а) $y=2x^2-4$; б) $y=-\frac{1}{2}x^2+3$.

6 а) $y=\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}$; б) $y=-\frac{3}{2}x^2-3$.

7 Одреди ја функцијата $f(x)=ax^2+c$, ако:

а) $f(0)=2,\ f(2)=0$;

б) $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1,\ f\left(-\frac{3}{2}\right)=3$.

8 Одреди ја квадратната функција ако: $f(-3)=f(3)=5,\ f(0)=-4$.

9 Која функција ќе се добие ако ординатата на секоја точка од графикот на функцијата $y=ax^2$ се: а) намали за 2; б) зголеми за 3?

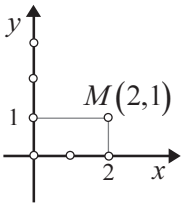
10 За колку единици и во која насока треба да се транслатира параболата $y=ax^2-1$, за да се добие параболата:

а) $y=ax^2$; б) $y=ax^2+2$; в) $y=ax^2-5$?

3 ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $y=a(x-\alpha)^2+\beta$

Потсети се!

- Дадена е точката $M(2,1)$ во координатниот систем на цртежот.
  Со транслација на точката M во правец на x-оската се добиени точките M_1 и M_2:
  а) M_1 - за 3 единици налево,
  б) M_2 - за 1 единица надесно.



- Одреди ги координатите на точките M_1 и M_2.

- Функцијата $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ и $a,b,c\in\mathbb{R}$ се вика квадратна функција.

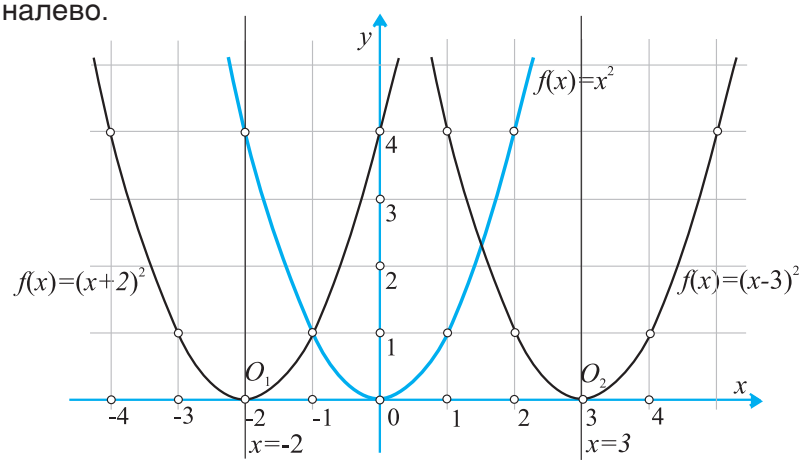
- Провери дали се квадратни следните функции:
  а) $y=2(x-1)^2$;
  б) $y=-(x+2)^2+x^2-1$;
  в) $y=3(x-1)^2+2$.

А 1 Нацртај го графикот на секоја од функциите $f(x)=x^2,\ g(x)=(x+2)^2$ и $h(x)=(x-3)^2$ во ист координатен систем и согледај некои врски меѓу тие графици.

Решение. Прво направи табела на вредностите на дадените функции, како даденава.

x	x^2	$(x+2)^2$	$(x-3)^2$
−2	4	0	25
−1	1	1	16
0	0	4	9
1	1	9	4
2	4	16	1

- Графикот на функцијата $y=(x+2)^2$ е добиен со транслација на графикот на функцијата $y=x^2$ по x-оската за 2 единици налево.
- Графикот на функцијата $y=(x-3)^2$ е добиен со поместување на параболата $y=x^2$ по x-оската надесно за 3 единици.
- Оска на симетрија е правата што минува низ темето на параболата и е паралелна со y-оската.



Запомни!

Графикот на функцијата $f(x)=a(x-\alpha)^2$ е парабола со теме во точката $T(\alpha,0)$, којашто може да се добие со транслација на параболата $f(x)=ax^2$ по x-оската за $|\alpha|$ единици налево ако $\alpha>0$, или $|\alpha|$ единици надесно ако $\alpha<0$.
Оска на симетрија на параболата $f(x)=a(x-\alpha)^2$ е правата $x=\alpha$, којашто минува низ темето на параболата и е паралелна со ординатната оска.

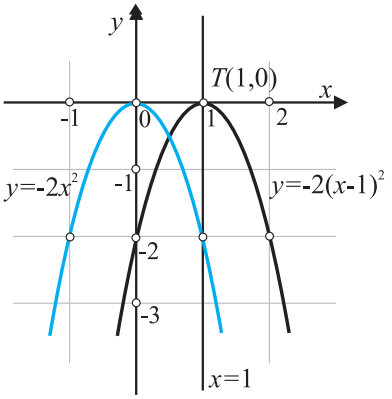
2 Нацртај го графикот на функцијата а) $f(x)=-\frac{1}{2}(x-1)^2$; б) $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2$.

3 Нацртај го графикот на функцијата $y=-2x^2+4x-2$ и испитај ги нејзините својства.

Решение. Функција ја трансформираме во каноничен вид $y=-2(x-1)^2$. Составуваме табела за функцијата $y=-2x^2$ и го цртаме нејзиниот график.

x	-2	-1	0	1	2
$-2x^2$	-8	-2	0	-2	-8

- Графикот на функцијата $y=-2(x-1)^2$ ќе го добиеме со транслација на параболата $y=-2x^2$ по x-оската за една единица надесно.



Воочи ги својствата на функцијата:

1) $D_f=\mathbb{R}$.

2) $T(1,0)$.

3) $a=-2<0$, функцијата има максимум $y_{max}=0$ за $x=1$.

4) $V_f=(-\infty,0]$.

5) Оска на симетрија е правата $x=1$.

Потсети се!

- Како ќе се променат координатите на точка добиена со транслација на дадена точка $M(x,y)$: надесно за 2, налево за 3 единици?
- Како се добива графикот на функцијата:
  а) $y_1 = a(x-\alpha)^2$; б) $y_2 = ax^2 + c$,
  од графикот на функцијата $y = ax^2$?

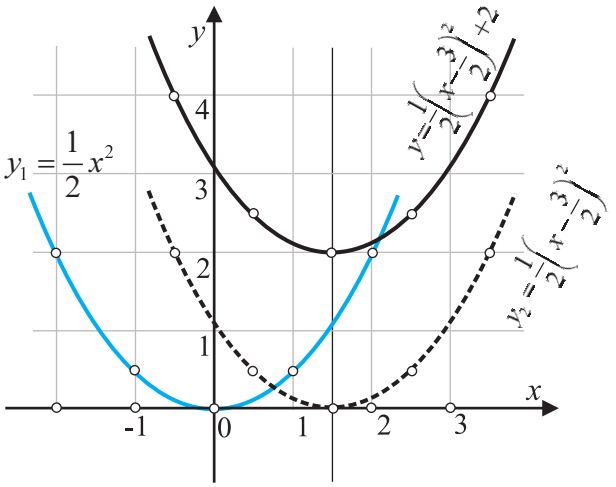
Да видиме, сега, како се црта графикот на квадратната функција од обликот $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

4 Ќе ја претставиме графички функцијата $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 2$.

x	-2	-1	0	1	2
$\frac{1}{2}x^2$	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2

Решение. Прво ќе направиме табела на вредности на функцијата $y_1 = \frac{1}{2}x^2$, а со помош на добиените точки во табелата, ќе го скицираме нејзиниот график (тоа е „сината парабола" на цртежот).

Потоа ќе го нацртаме графикот на функцијата $y_2 = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$ со транслација на графикот на $y_1 = \frac{1}{2}x^2$ по x-оската надесно за $\frac{3}{2}$ единици (тоа е параболата со „испрекинатата линија" на цртежот).



На крајот, со поместување на таа парабола за две единици во позитивната насока на y-оската, го добиваме графикот на функцијата $y = \frac{1}{2}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 2$ (параболата со „полна црна линија" на цртежот).

- Воочи дека графикот на дадената функција е парабола чие теме е во точката $T\left(\frac{3}{2}, 2\right)$, а е свртена во позитивната насока на y-оската, бидејќи $a = \frac{1}{2} > 0$.

Запомни!

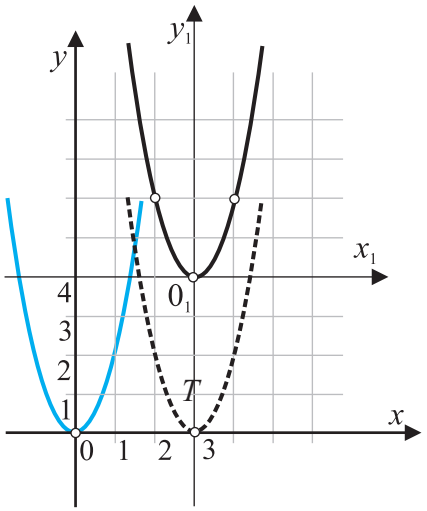
Записот $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ се вика ***каноничен облик*** на квадратната функција. Нејзиниот график е парабола. Темето на параболата е точката $T(\alpha, \beta)$, а оска на симетрија на параболата е правата $x = \alpha$.

5 Нацртај го графикот на функцијата $y=2(x-3)^2+4$.

Решение. Споредувајќи ја дадената функција со функцијата $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ следува дека $\alpha=3,\ \beta=4,$ па темето е $T(3,\ 4)$.

Функцијата $y_1=2x_1^2$ ја претставуваме табеларно и графички во координатниот систем.

x	-2	-1	0	1	2
$2x^2$	8	2	0	2	8



Потоа тој график го поместуваме надесно за 3 единици $(\alpha=3)$, и на крајот, вториот график го поместуваме во позитивната насока на y-оската за 4 единици $(\beta=4)$, со што го добиваме графикот на дадената функција.

Задачи

1 Одреди го темето на параболата:

а) $y=5(x-2)^2$; б) $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2$;

в) $y=(x-1)^2+2$; г) $y=-2(x+3)^2-2$.

2 Нацртај го графикот на функцијата:

а) $f(x)=2(x+3)^2$; б) $f(x)=\frac{1}{2}(x-2)^2$;

в) $f(x)=\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2$.

3 Нацртај го графикот на функцијата:

а) $y=-\frac{1}{2}(x+3)^2$; б) $y=-2(x+1)^2$;

в) $y=-\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$.

4 Нацртај ги графиците на функциите во ист координатен систем:

а) $f(x)=x^2,\ f(x)=(x-2)^2,\ f(x)=(x+3)^2$;

б) $f(x)=-x^2,\ f(x)=-(x-2)^2,\ f(x)=-(x+3)^2$;

5 Нацртај го графикот на функцијата:

а) $y=-(x-3)^2-4$; б) $y=-\frac{1}{2}(x+2)^2-1$;

в) $y=x^2-2x+4$.

6 Одреди ги темето, оската на симетрија и екстремната вредност на параболата определена со функцијата:

а) $f(x)=\frac{1}{2}(x-3)^2$; б) $y=-2(x+3)^2$;

в) $y=\frac{3}{2}(x-2)^2+3$.

7 За колку единици и во која насока треба да се помести параболата $y=2(x-1)^2$, за да се добие параболата: а) $y=2x^2$; б) $y=2(x+3)^2$; в) $y=2(x-4)^2$?

8 Во која насока и за колку единици треба да се помести параболата $y=2(x-3)^2$, за да се добие параболата: а) $y=2(x-3)^2+3$; б) $y=2(x-3)^2-5$; в) $y=2(x+1)^2+4$?

9 Одреди ги a и α на параболата $y=a(x-\alpha)^2$ ако таа минува низ точката:
а) $M(1,-4)$ и има теме во точката $T(3,0)$;
б) $M(-4,1)$ и има теме во точката $T(-2,0)$.

10 Одреди ја функцијата чиј график е симетричен во однос на x-оската со графикот на функцијата: а) $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$;
б) $f(x)=2x^2-5$; в) $f(x)=2(x+2)^2$.

4 ГРАФИК НА ФУНКЦИЈАТА $f(x)=ax^2+bx+c$

Потсети се!

- Ако равенката $ax^2+bx+c=0$ ја поделиме со $a\neq 0$, добиваме: $x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$, т.е.

$$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{c}{a}=0,$$

при што првите три члена определуваат бином на квадрат, $\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$.

- Функцијата $y=x^2-4x$ трансформирај ја во облик $y=a(x-\alpha)^2+\beta$.

А **1** Трансформирај ја во каноничен облик функцијата $y=2x^2-4x+6$ и одреди го темето на нејзиниот график.

Решение.

- Коефициентот на квадратниот член го извлекуваме пред заграда и имаме $y=2(x^2-2x+3)$.
- Првите два члена на изразот во заградата ги дополнуваме до полн квадрат:

$y=2(x^2-2x+1^2-1^2+3)$, $y=2\left[(x-1)^2+2\right]$, т.е. $y=2(x-1)^2+4$. Оттука следува дека $\alpha=1$, $\beta=4$, а темето е $T(1,\ 4)$.

2 Трансформирај ја во каноничен облик функцијата $y=ax^2+bx+c$ и одреди ги координатите на темето на нејзиниот график (т.е. параболата).

Решение.

- Коефициентот a го извлекуваме пред заграда и добиваме $y=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$.
- Линеарниот член $\frac{b}{a}x$ од изразот во заградата го запишуваме како $\frac{b}{a}x=2\cdot\frac{b}{2a}x$.
- Со додавање и одземање на изразот $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ имаме $y=a\left(x^2+2\cdot\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$,

т.е. $y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$. По споредувањето со функцијата $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ имаме

$$\alpha=-\frac{b}{2a},\quad \beta=\frac{4ac-b^2}{4a}.$$

Запомни!

1) Графикот на функцијата $y = ax^2 + bx + c$ е парабола.

2) Темето на параболата е $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$.

3) *Претходната трансформација се применува за сведување на квадратната функција* $y = ax^2 + bx + c$ *во каноничен облик* $y = a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$, т.е. $y = a(x-\alpha)^2 + \beta$.

4) Секоја квадратна функција може да се сведе во каноничен облик.

3 Нацртај го графикот на функцијата $y = x^2 - 2x - 3$.

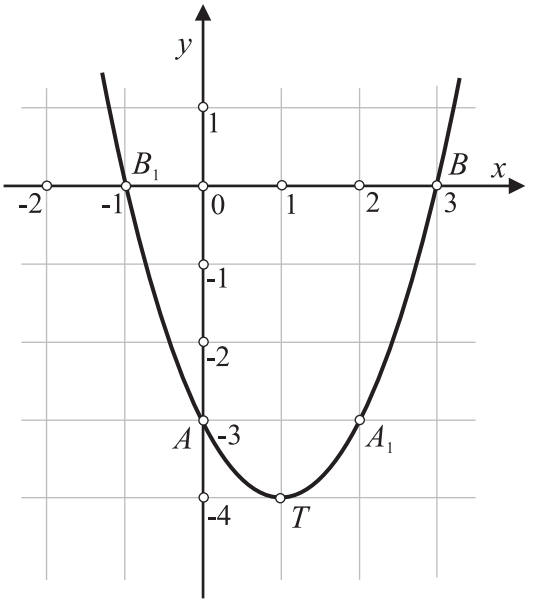
- За попрецизно цртање на параболата $y = ax^2 + bx + c$ потребно е да се одредат нејзините ***карактеристични точки.*** Тие се темето на параболата и пресечните точки на параболата со координатните оски.

Решение. Коефициентите на дадената функција се $a = 1$, $b = -2$ и $c = -3$, па од $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$ и $\beta = \frac{4ac-b^2}{4a} = \frac{4\cdot(-3)-(-2)^2}{4\cdot 1} = \frac{-12-4}{4} = -4$ следува дека темето е $T(1,-4)$.

- Параболата е симетрична во однос на правата $x = 1$.
- Ја определуваме пресечната точка на параболата со ординатната оска, па за $x = 0$ имаме $y = 0^2 - 2\cdot 0 - 3 = -3$. Значи, таа пресечна точка е $A(0,-3)$. Графички ја одредуваме точката A_1 што е симетрична со A во однос на оската на параболата.
- Ги определуваме пресечните точки на параболата со x-оската, па за $y = 0$ имаме:

$x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$, т.е.

$x_1 = 3$, $x_2 = -1$, а точките се $B(3,0)$, $B_1(-1,0)$.



Графикот е прикажан на цртежот.

Воочи, за цртање на параболата треба да се определат најмалку пет нејзини точки. Ако равенката $ax^2 + bx + c = 0$ нема реални решенија, значи дека параболата не ја сече x-оската. Во тој случај определуваме најмалку уште две други точки со произволен избор на вредности за аргументот.

Графикот на дадената функција можеме да го нацртаме и со поместување на графикот на функцијата $y = x^2$.

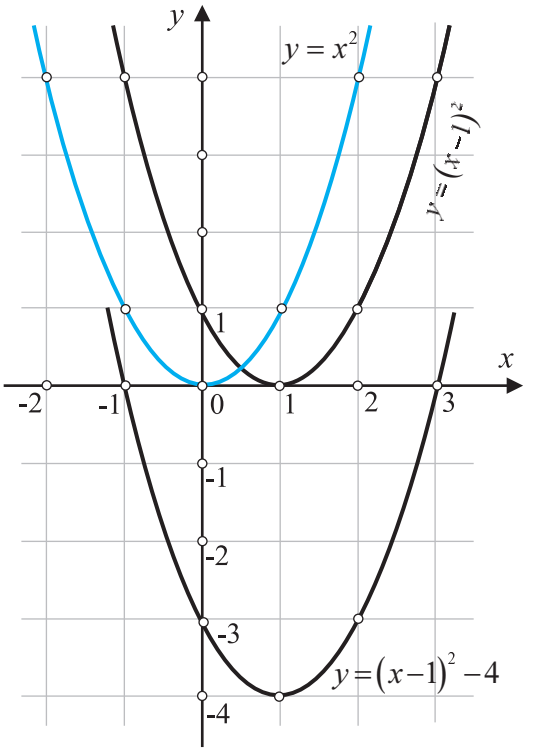
- Дадената функција ја трансформираме во каноничен облик и добиваме $y = (x-1)^2 - 4$, па $\alpha = 1,\ \beta = -4$.

- Функцијата $y = x^2$ ја претставуваме табеларно:

x	-2	-1	0	1	2
x^2	4	2	0	2	4

- Параболата $y = x^2$ ја поместуваме надесно по x-оската за една единица $(\alpha = 1)$.

- Втората парабола $y = (x-1)^2$ ја поместуваме за четири единици $(\beta = -4)$ по y-оската во негативната насока. Така добиената парабола е график на функцијата $y = x^2 - 2x - 3$.



4 Нацртај го графикот на функцијата со одредување на карактеристичните точки на параболата: а) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2}$; б) $y = 2x^2 + 4x + 3$.

Решение. а) Коефициентите се $a = -\frac{1}{2},\ b = 2,\ c = \frac{5}{2}$.

- $\alpha = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = 2,\quad \beta = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{5}{2} - 2^2}{4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{9}{2}$, а темето е $T\left(2, \frac{9}{2}\right)$.

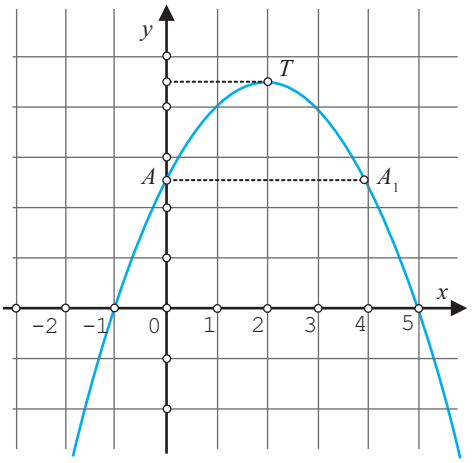
- Пресек со y-оската. За $x = 0$ имаме $f(0) = \frac{5}{2}$, па пресечната точка е $A\left(0, \frac{5}{2}\right)$.

- Пресек со x-оската. За $y = 0$ имаме $-\frac{1}{2}x^2 + 2x + \frac{5}{2} = 0$ или $x^2 - 4x - 5 = 0$, па $x_1 = -1,\ x_2 = 5$.

  Параболата ја сече x-оската во точките $B(-1, 0)$ и $C(5, 0)$.

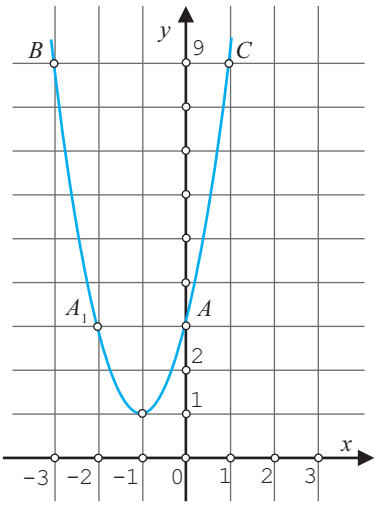
- Точката $A_1\left(4, \frac{5}{2}\right)$ е симетрична со точката $A\left(0, \frac{5}{2}\right)$ во однос на правата $x = 2$, којашто е оска на симетрија на параболата.

- $a=-\frac{1}{2}<0,$ параболата е со отворот надолу, т.е. кон негативната насока на y-оската.
- Графикот е прикажан на цртежот.



б) Коефициентите се $a=2,\ b=4,\ c=3.$

- $\alpha=-\frac{4}{2\cdot 2}=-1,\ \beta=\frac{4\cdot 2\cdot 3-4^2}{4\cdot 2}=1,$ а $T(-1,1).$
- За $x=0$ имаме $f(0)=3,$ па точката $A(0,3)$ е пресек на параболата со y-оската.
- Пресеци со x-оската. Равенката $2x^2+4x+3=0$ нема реални решенија бидејќи $D=-8<0.$ Значи, параболата не ја сече x-оската.
- За попрецизно цртање на графикот, одредуваме најмалку уште две точки. За $x=-3$ имаме $f(-3)=2\cdot(-3)^2+4\cdot(-3)+3=9,\ B(-3,9);$ за $x=1$ имаме $f(1)=9,\ C(1,9).$
- $a=2>0,$ параболата е свртена со отворот нагоре.
- $x=-1$ е оска на симетрија на параболата.
- Графикот е прикажан на цртежот.



Задачи

1 Одреди го темето на параболата:

а) $y=3x^2-6x+2;$ б) $y=-2x^2+8x;$

в) $y=\frac{1}{2}x^2-3x+1.$

2 Запиши ја функцијата во каноничен облик:

а) $f(x)=x^2-2x;$ б) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+2;$

в) $f(x)=x^2-5x+4;$ г) $f(x)=-2x^2-4x.$

3 Нацртај го графикот на функцијата дадена во каноничен облик:

а) $y=(x-2)^2+3;$ б) $y=-(x+2)^2+4;$

в) $y=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}.$

4 Нацртај го графикот на функцијата со помош на графикот на функцијата $y=ax^2,$ ако:

а) $y=x^2-2x;$ б) $y=-2x^2-4x;$

в) $y=\frac{1}{2}x^2+2x+8.$

5 Нацртај го графикот на функцијата со помош на карактеристични точки, ако:

а) $f(x)=-x^2+3x;$ б) $f(x)=2x^2+2x-4;$

в) $f(x)=-x^2+2x+5.$

6 Нацртај го графикот на функцијата:

а) $y=x^2-4x+4;$ б) $y=-\frac{1}{2}x^2-x+4;$

в) $y=x^2-2x+3.$

7 За кои вредности на p и q, точката $T(4,-7)$ ќе биде теме на параболата $y=x^2+px+q$?

8 Параболата $y=a(x-\alpha)^2$ минува низ точката $M(1,-1)$ и има теме во точката $T(3,0)$. Одреди ги a и α.

9 Параболата $y=a(x+2)^2+\beta$ минува низ точката $M(-4,1)$ и има теме во точката $T(-2,-3)$. Одреди ги a и β.

10 Параболата $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ минува низ точката $M(3,-1)$ и има теме во точката $T(4,2)$. Одреди ги a, α и β.

5 СВОЈСТВА НА КВАДРАТНАТА ФУНКЦИЈА

Потсети се!

- Одреди ја најмалата вредност на функцијата $y=\frac{1}{2}x^2-3$.
- Кои уште својства ги испитавме на квадратната функција $y=ax^2+c$?

А 1 Испитај ги својствата на квадратната функција

$$y=ax^2+bx+c.$$

1) *Дефиниционо област.* Квадратната функција е дефинирана за сите реални броеви, т.е. $D_f=\mathbb{R}$.

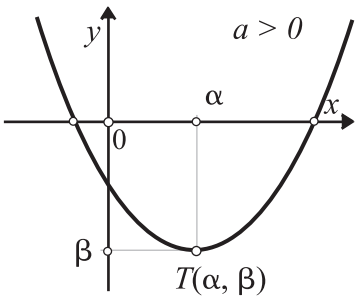
2) *Теме на параболата.* Функцијата ја сведуваме во каноничен вид

$y=a\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$, па темето на параболата е $T(\alpha,\beta)$; $\alpha=-\frac{b}{2a}$, $\beta=\frac{4ac-b^2}{4a}$.

3) *Екстремна вредност на функцијата.*

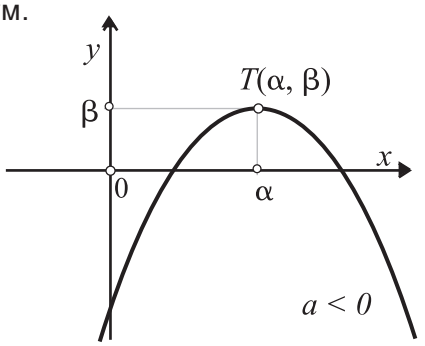
Функцијата достигнува најголема или најмала вредност во нејзиното теме во зависност од знакот на коефициентот a.

- За $a>0$ параболата е отворена кон позитивната насока на y-оската и има минимум.



$$y_{\min}=\frac{4ac-b^2}{4a} \text{ за } x=-\frac{b}{2a}.$$

- За $a<0$ параболата е отворена кон негативната насока на y-оската и има максимум.



$$y_{\max}=\frac{4ac-b^2}{4a} \text{ за } x=-\frac{b}{2a}.$$

2 Одреди ја екстремната вредност на функцијата $y=-2x^2-4x-5.$

Решение. Бидејќи $a=-2<0,$ параболата е со отворот кон негативната насока на y-оската па функцијата има максимум $y_{\max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ за $x=-\dfrac{b}{2a}$, т.е. $y_{\max}=-3$ за $x=-1.$

3 За која вредност на параметарот k, функцијата $y=kx^2-2x-5$ има максимум еднаков на -2?

Решение. Функцијата има максимум ако $k<0$, $y_{\max}=\dfrac{4ac-b^2}{4a}=-2,$ односно $\dfrac{4k(-5)-4}{4k}=-2,$ од каде $-20k-4=-8k,$ т.е. $k=-\dfrac{1}{3}.$

4) ***Множество вредности на функцијата.*** Екстремната вредност го определува множеството вредности на функцијата, кое го означуваме со V_f.

Ако $a>0,\quad V_f=[\beta,+\infty),$ а ако $a<0,\quad V_f=(-\infty,\beta].$

Во задачата **3** множеството вредности е $V_f=(-\infty,-2].$

4 Одреди ги екстремната вредност и множеството вредности на квадратната функција $y=\dfrac{1}{2}x^2-4x.$

Решение. Коефициентот $a=\dfrac{1}{2}>0,$ параболата е отворена кон позитивната насока на y-оската, па функцијата има минимум $y_{\min}=\dfrac{-b^2}{4a}=-8\ (c=0),$ за $x=4.$

Множеството вредности е $V_f=[-8,+\infty).$

5) ***Нули на функцијата.*** Нули на функцијата $y=ax^2+bx+c$ се вредностите на аргументот x за коишто $y=0$. Нули на функцијата се решенијата на равенката $ax^2+bx+c=0.$ Нулите на функцијата ги определуваат апсцисите на пресечните точки на графикот со x-оската.

5 Одреди ги нулите на функцијата:

а) $y=2x^2+3x-2;$ б) $y=x^2-4x+4;$ в) $y=2x^2-2x+5.$

Решение. а) Од $y=0$ следува дека $2x^2+3x-2=0.$ Решенијата се $x_{1/2}=\dfrac{-3\pm\sqrt{9+16}}{2\cdot 2},$ т.е. $x_1=\dfrac{1}{2},\ x_2=-2.$ Значи, графикот на функцијата ја сече x-оската во точките $A\left(\dfrac{1}{2},0\right)$ и $B(-2,0).$

Реши ги задачите б) и в). Што воочуваш?

- Ако равенката $ax^2+bx+c=0$ нема реални корени, тогаш графикот на функцијата $y=ax^2+bx+c$ не ја сече x-оската.

Запомни!

Нека е дадена квадратната функција $y = ax^2 + bx + c$ и нека $D = b^2 - 4ac$ е дискриминанта на квадратната равенка $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Ако $D > 0$, тогаш функцијата има две реални нули, т.е. параболата $y = ax^2 + bx + c$ ја сече x-оската во две точки.

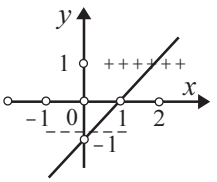
2. Ако $D = 0$, тогаш нула на функцијата е $x = -\frac{b}{2a}$, т.е. параболата ја допира x-оската во точката $T\left(-\frac{b}{2a}, 0\right)$.

3. Ако $D < 0$, тогаш функцијата нема реални нули, т.е. параболата нема заеднички точки со x-оската.

6 За кои вредности на p и q графикот на квадратната функција $f(x) = x^2 + px + q$ ја сече апсцисната оска во точките $A(1,0)$ и $B(3,0)$?

6) ***Знак на функцијата*** $y = ax^2 + bx + c$.

Потсети се!



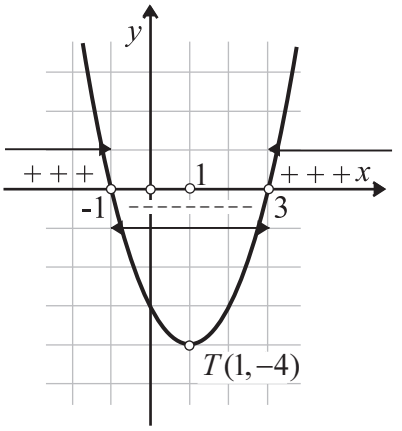
- Дадена е функцијата $y = x - 1$, чиј график е прикажан на цртежот.
- $x = 1$ е нула на функцијата.
- $y > 0$, ако $x \in (1, +\infty)$.
- $y < 0$, ако $x \in (-\infty, 1)$.

7 Одреди го знакот на квадратната функција $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

- Да се одреди знак на квадратна функција значи да се одредат интервалите во коишто функцијата е позитивна, односно негативна.

Решение.

- Темето на параболата е $T(1, -4)$.
- Од $y = 0$, т.е. $x^2 - 2x - 3 = 0$ следува дека $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, па параболата ја сече x-оската во точките $(-1, 0)$, $(3, 0)$.
- Со трите точки го цртаме графикот на функцијата и тој е прикажан на цртежот.
- Воочуваме дека: $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$, а $f(x) < 0$ за $x \in (-1, 3)$.



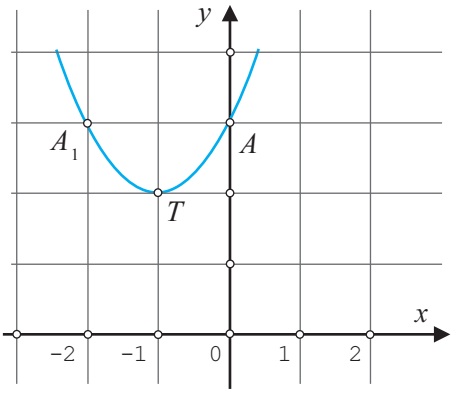
8 Одреди го знакот на функцијата: а) $y = x^2 + 2x + 3$; б) $y = -2x^2 - 6x$.

Решение. а) Темето на параболата е $T(-1,2)$. Од $y = 0$ следува равенката $x^2 + 2x - 3 = 0$ која нема реални нули, т.е. параболата не ја сече x-оската, бидејќи $D = -8 < 0$.

За $x = 0$, $y = 3$, па параболата ја сече y-оската во точката $A(0,3)$. Точката $A_1(-2,3)$ е симетрична со точката $A(0,3)$ во однос на правата $x = -1$. Графикот го цртаме со помош на точките T, A и A_1. Коефициентот $a = 1 > 0$, па параболата е свртена со отворот нагоре.

Оттука следува дека функцијата е позитивна за секој реален број, т.е.

$y > 0$ за секој $x \in (-\infty, +\infty)$.



Д Во врска со поимот квадратна функција многу често се поставува барањето: „Нацртај го графикот и одреди ги својствата на квадратната функција...".

- Како ќе постапиш?

Одговор.

1) Одреди ја дефиниционата област D_f на функцијата.

2) Одреди го темето на параболата.

3) Одреди ја оската на параболата.

4) Одреди ги пресеците на параболата со координатните оски.

- Со овие податоци може да го нацрташ графикот на функцијата, а потоа одреди ги:

5) Екстремната вредност на функцијата.

6) Множеството вредности V_f на функцијата.

7) Знакот на функцијата.

9 Нацртај го графикот и одреди ги својствата на функцијата $y = x^2 - 4x + 3$.

Решение.

1) Дефиниционата област е $D_f = \mathbb{R}$.

2) Темето е $T(\alpha, \beta)$ за $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 2, \beta = \dfrac{4ac - b^2}{4a} = -1$, т.е. $T(2,-1)$, а $y = (x-2)^2 - 1$.

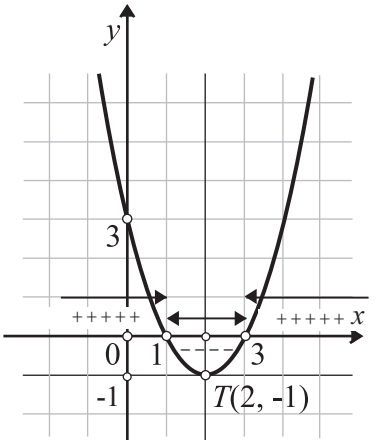
3) Оска на параболата е правата $x = 2$.

4) За $x = 0$, $y = 3$; за $y = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$; $A(0,3), B(1,0), C(3,0)$.

5) $a = 1 > 0$, $y_{\min} = -1$ за $x = 2$.

6) $V_f = [-1, +\infty)$.

7) $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, а $f(x) < 0$ за $x \in (1,3)$.



Задачи

1 Одреди ја екстремната вредност на функцијата: а) $f(x)=x^2-8x+13;$
б) $f(x)=-x^2+10x-21;$
в) $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x.$

2 Одреди го множеството вредности на функцијата: а) $f(x)=-2x^2+3x;$
б) $f(x)=\frac{1}{2}x^2+2x-1;$ в) $f(x)=2x^2-3.$

3 Одреди ги нулите на функцијата:
а) $f(x)=x^2-7x;$
б) $f(x)=-x^2-2x+15;$
в) $f(x)=2x^2+4x+2;$
г) $f(x)=-2x^2+3x-5.$

4 Дадена е функцијата $f(x)=2x^2+bx+c.$ Одреди ги b и c, ако $x_1=2,\ x_2=-3$ се нули на функцијата.

5 Дадена е функцијата $f(x)=ax^2+3x+c.$ Одреди ги a и c, ако $x_1=-1$ е нула на функцијата и ако $f(2)=0.$.

Одреди го знакот на функцијата $(6-7)$:

6 а) $f(x)=2x^2-7x+3;$
б) $f(x)=2x^2-x+1;$
в) $f(x)=-x^2+2x-5.$

7 а) $y=-x^2+6x-9;$ б) $y=2x^2-6x;$
в) $y=4x^2+4x+1.$

8 Во кој интервал е негативна функцијата:
а) $y=x^2-4x-5;$ б) $y=5x^2-3x-2;$
в) $y=3x-x^2$?

9 Нацртај го графикот на функцијата и одреди ги нејзините својства:
а) $f(x)=-x^2+x+6;$
б) $f(x)=2x^2+4x;$
в) $f(x)=x^2-4.$

10 За која вредност на x дропката $\frac{2}{-x^2+6x+2}$ има најмала вредност? Одреди ја таа вредност.

6 КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ

Потсети се!

- За која вредност на $x\in\{-1,3,5,0\}$ неравенката $x^2+x-1>0$ преминува во вистинит исказ?
- Производот $a\cdot b$ е позитивен ако двата множители се позитивни или двата негативни, т.е. $a\cdot b>0 \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ b>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} a<0 \\ b<0. \end{cases}$
- Што е решение на неравенка?
- Кое множество е решение на неравенката $x-5>0$?

А 1 Реши ја квадратната неравенка $x^2-3x-10<0.$

Решение. Неравенката ќе ја решиме со разложување на левата страна (квадратниот трином) во производ. За таа цел имаме:

$$x_{1/2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot(-10)}}{2},\ \text{па}\ x_1=5,\ x_2=-2.$$

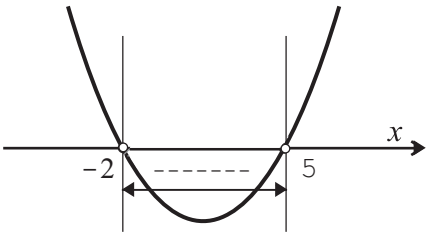
Според $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ добиваме $x^2-3x-10=(x+2)(x-5)$, па неравенката е $(x+2)(x-5)<0.$

Овој производ е еквивалентен со $\begin{cases} x+2>0 \\ x-5<0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x+2<0 \\ x-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ x<5 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<-2 \\ x>5. \end{cases}$

Решение на првиот систем е $M_1=(-2,5)$, а на вториот $M_2=\varnothing$, па решението на дадената неравенка е $M=M_1\cup M_2=(-2,5)\cup\varnothing=(-2,5)$.

Често пати при решавањето на неравенките се користи графикот на соодветната функција. Решавањето на квадратната неравенка $x^2-3x-10<0$ се сведува на одредување на вредностите на x за коишто квадратната функција $y=x^2-3x-10$ добива негативни вредности.

- Нулите на функцијата се $x_1=-2,\quad x_2=5.$
- Коефициентот на квадратниот член е позитивен, па параболата е отворена кон позитивната насока на y-оската.



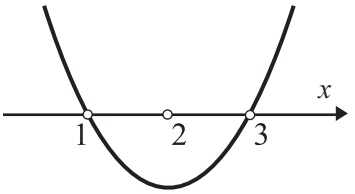
Од графикот ги читаме вредностите на аргументот x за коишто функцијата е негативна, т.е. нејзиниот график е под x-оската. Според тоа, $x^2-3x-10<0$ за $x\in(-2,\ 5)$.

Запомни!

Неравенката $ax^2+bx+c>(\geq,<,\leq)0$, каде што $a,b,c\in\mathbb{R}\wedge a\neq 0$ се вика ***квадратна неравенка***.

2 Одреди ги целобројните решенија на неравенката $\frac{(x-1)^2}{4}\leq 1-\frac{3-x}{2}$.

Решение. По средувањето ја добиваме неравенката $x^2-4x+3\leq 0$.
За $a=1>0,\quad D=4>0,\quad x_1=1,\quad x_2=3.$ Положбата на параболата е прикажана на цртежот.
Според тоа, решението е $M=\{1,2,3\}$.

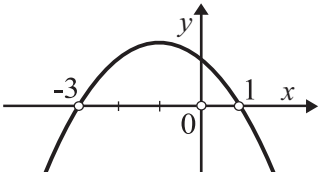


3 Реши ги неравенките:

а) $x^2-6x+9>0;$ б) $x^2-6x+9\leq 0;$ в) $x^2+2x+5<0;$ г) $-x^2+2x+5<0.$

4 Одреди ја дефиниционата област на функцијата $f(x)=\sqrt{3-2x-x^2}$.

Решение. Квадратниот корен има смисла, т.е. е реален број само ако поткореновиот израз е ненегативен број. Според тоа, бараната дефиниционa област е множеството решенија на неравенката $3-2x-x^2>0$.
Имаме: $a=-1<0,\ D=4-4\cdot 3\cdot(-1)=16>0,\ x_1=1,\ x_2=-3;$
$3-2x-x^2\geq 0$ за $x\in[-3,1],\ D_f=[-3,1]$.



5 Одреди ја дефиниционата област на функцијата:

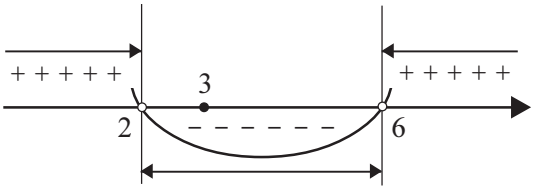
а) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$; б) $f(x)=\sqrt{x^2-3x+7}$.

6 Одреди ја вредноста на параметарот k, така што квадратниот трином $x^2-(k-2)x+k-2$ да има реални нули.

Решение. Квадратниот трином има реални нули ако дискриминантата е $D\geq 0$, т.е. $b^2-4ac\geq 0$. Со замена добиваме $k^2-8k+12\geq 0$. Нулите на триномот се $k_1=2$, $k_2=6$.

Бидејќи $a=1>0$, следува дека параболата е со отворот нагоре. Графикот е прикажан на цртежот. Оттука следува дека:

$$k^2-8k+12\geq 0 \text{ за } k\in(-\infty,\,2]\cup[6,+\infty).$$



Според тоа, дадениот квадратен трином има реални нули ако $k\in(-\infty,\,2]\cup[6,+\infty)$.

Задачи

Реши ги квадратните неравенки $(1-6)$:

1 а) $x^2-16<0$; б) $x^2-4\geq 0$;
в) $25-x^2>0$; г) $x^2-1\geq 0$.

2 а) $x^2-2x-15\leq 0$; б) $x^2-2x>0$;
в) $x^2+3x+4>0$.

3 а) $-2x^2+3x\geq 0$; б) $-x^2-2x+3<0$;
в) $-x^2+3x+4\leq 0$.

4 а) $-2x^2+2x\leq x-1$;
б) $x(2-x)+3>x^2-3x$.

5 а) $(x+5)^2\geq 0$; б) $(x+5)^2>0$;
в) $(x+5)^2\leq 0$; г) $(x+5)^2<0$.

6 а) $(x-2)(2x+3)\geq 0$;
б) $2x(1+x)\leq(x-3)^2$.

7 Одреди ја дефиниционата област на функцијата: а) $f(x)=\sqrt{2x-x^2}$;
б) $f(x)=\sqrt{x^2-9}$; в) $f(x)=\sqrt{36-x^2}$.

8 Реши ја неравенката сведувајќи ја на квадратна неравенка:

а) $\dfrac{x-2}{3-2x}\geq 0$; б) $\dfrac{2x-1}{x+2}<0$; в) $\dfrac{x-3}{x+2}\leq 0$.

9 За кои вредности на параметарот k, равенката $(k+1)x^2-2(k-1)x+2k-5=0$ ќе има реални нули?

10 За кои вредности на параметарот k, триномот $(3k-2)x^2+2kx+k$ ќе нема реални нули?

7 ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1 Која од следните функции е квадратна:

а) $y=\frac{3}{x}$; б) $y=2x-3$; в) $y=x(x-1)$; г) $y=\frac{x^3}{x}$ $(x\neq 0)$?

2 Графикот на квадратната функција претставен во координатната рамнина е _____.

3 Дефиниционата област на квадратната функција $y=2x^2+3$ е $D_f=$ _____.

4 Темето на параболата $y=-3(x+2)^2$ е во точката:

а) $T(-3,0)$; б) $T(2,-3)$; в) $T(-2,0)$; г) $T(-2,-3)$.

5 Оска на симетрија на параболата $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ е правата _____.

6 Квадратната функција $y=ax^2+bx+c$ постигнува максимум или минимум ако $x=\alpha=$ _____.

7 Нацртај го графикот на квадратната функција $f(x)=x^2+c$, ако: а) $c=1$; б) $c=-4$.

8 Одреди ги координатите на темето на параболата определена со квадратната функција:
а) $y=5(x-1)^2+4$; б) $y=-3(x+2)^2-3$.

9 Нацртај го графикот на квадратната функција: а) $y=(x-2)^2-1$; б) $y=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$.

10 Параболата $y=a(x-\alpha)^2+\beta$ минува низ точката M, а темето е во точката T. Одреди ги a, α, β, ако: а) $M(4,-1)$, $T(2,1)$; б) $M(1,-1)$, $T(-1,-5)$.

11 Запиши ја во каноничен вид функцијата: а) $f(x)=2x^2+4x+4$; б) $f(x)=x^2-2x$.

12 Нацртај го графикот на функцијата: а) $f(x)=-2x^2+6$; б) $f(x)=\frac{1}{4}x^2+x-3$.

13 Нацртај го графикот и одреди ги својствата на функцијата $y=-x^2+2x+3$.

14 Одреди ја екстремната вредност на функцијата: а) $f(x)=x^2-3x$; б) $f(x)=-3x^2-6x+8$.

15 Одреди го множеството вредности на функцијата: а) $f(x)=-x^2+2x-1$; б) $f(x)=2x(x+3)$.

16 Реши ги квадратните неравенки:

а) $x^2+x-6<0$; б) $6x^2+x-1\leq 0$; в) $x^2-16\geq 0$.

8 ЗАДАЧИ ЗА САМОПРОВЕРКА

1 Вредноста на функцијата $f(x)=x^2-x+1$ за $x=-1$ е: а) -3; б) -1; в) 1; г) 3. 1

2 Множеството вредности V_f на функцијата $y=3x^2-5$ е $V_f=$ _____. 2

3 Темето на параболата $y=\frac{1}{2}x^2+2x-3$ е точката:

а) $(-2,5)$; б) $(2,-5)$; в) $(2,5)$; г) $(-2,-5)$. 2

4 Оска на симетрија на параболата $y=-2(x+3)^2$ е правата определена со равенката:

а) $x=-3$; б) $x=-2$; в) $x=2$; г) $x=3$. 1

5 Познато е дека функцијата $y=x^2+3x-5$ има минимум $y_{\min}=\alpha^2-3\alpha-5$. Тој минимум го постигнува за: а) $x=-\alpha$; б) $x=-5$; в) $x=\alpha$; г) $x=3$. 1

6 Записот $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ претставува _____ на квадратната функција $f(x)=ax^2+bx+c$ чиј график е парабола со теме $T(\alpha,\beta)$. 2

7 Графикот на квадратната функција $y=2x^2-4x+3$ ја сече y-оската во точката:

а) $(6,-4)$; б) $(0,0)$; в) $(0,2)$; г) $(0,3)$. 1

8 Ако $T(\alpha,\beta)$ е теме на параболата што е график на функцијата $y=ax^2+bx+c$, тогаш вредноста $f(\alpha)$ на таа функција е $f(\alpha)=$ _____. 2

9 Одреди ја квадратната функција $f(x)=ax^2+c$ ако:

а) $f(0)=2$ и $f(2)=0$; б) $f\left(\frac{1}{2}\right)=-1$ и $f\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{11}{5}$. 3

10 Нацртај го графикот на функцијата: а) $f(x)=-2(x+1)^2+2$; б) $f(x)=(x+1)^2-2$. 3

11 Одреди ги a и β на функцијата $y=a(x-2)^2+\beta$, така што нејзиниот график да минува низ точките $M_1(0,-2)$ и $M_2(2,2)$. 3

12 Нацртај го графикот на функцијата: а) $f(x)=x^2-4x$; б) $f(x)=-2x^2+4x+6$. 2

13 Реши ја неравенката: а) $2x^2-3x>0$; б) $-x^2-5x+6\le 0$. 2

14 Одреди го знакот на функцијата $f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x$. 2

15 Одреди ја дефиниционата област на функцијата:

а) $f(x)=\sqrt{x^2+x-12}$; б) $f(x)=\sqrt{16-x^2}$. 4

ТЕМА 6 ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА

за сите струки

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1 Призма. Пресеци на призма со рамнина 134

2 Плоштина и волумен на призма 137

3 Пирамида. Пресеци на пирамида со рамнина 143

4 Плоштина и волумен на пирамида 146

5 Плоштина и волумен на потсечена пирамида 150

6 Цилиндар. Пресеци на цилиндар со рамнина 153

7 Плоштина и волумен на цилиндар 156

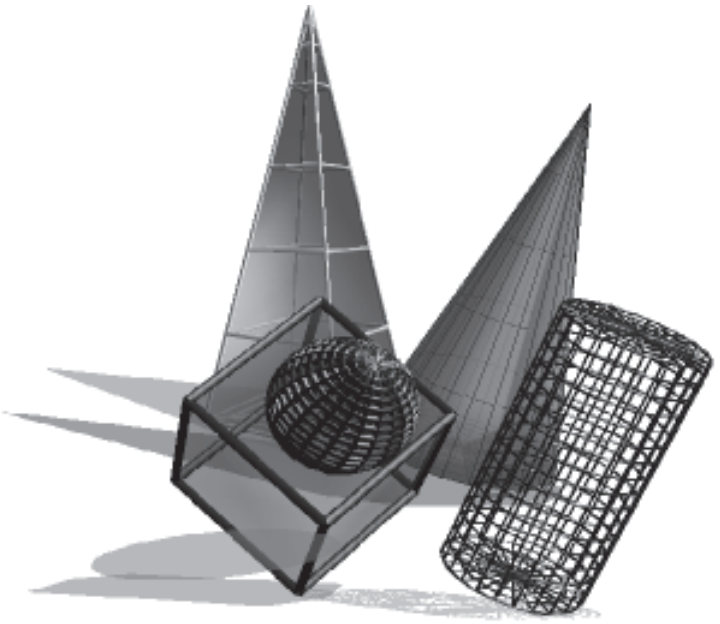
8 Конус. Пресеци на конус со рамнина 160

9 Плоштина и волумен на конус 164

10 Плоштина и волумен на потсечен конус 168

11 Задачи за повторување и утврдување 172

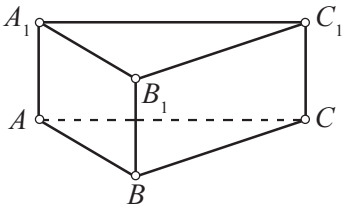
12 Задачи за самопроверка 173



1 ПРИЗМА. ПРЕСЕЦИ НА ПРИЗМА СО РАМНИНА

Потсети се!

- На цртежот е претставена права триаголна призма.

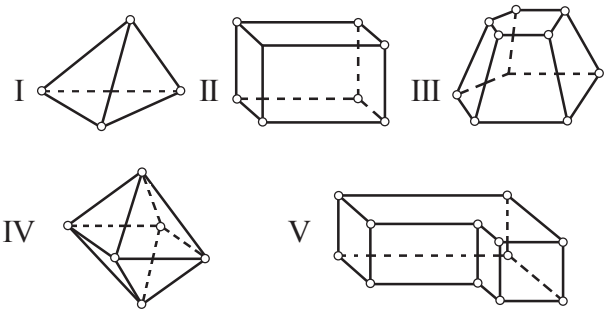


- Именувај ги основите. Каква заемна положба имаат рамнините на кои лежат основите?
- Кои се основни, а кои бочни рабови на призмата?
- Кој вид четириаголници се бочните ѕидови на призмата?

А Во осмо одделение учеше за призма и пирамида.

Тие се геометриски тела ограничени со површини коишто се составени само од многуаголници. Таквите геометриски тела се викаат ***рабести тела*** или ***полиедри***.

На цртежот се претставени неколку полиедри.

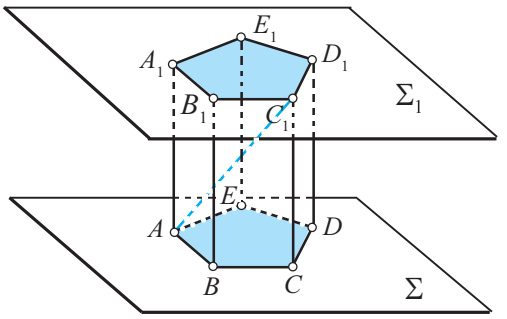


- Многуаголниците што ја образуваат површината (т.е. „границата”) на полиедарот се викаат ***ѕидови***, нивните страни - ***рабови***, а нивните темиња - ***темиња*** на полиедарот.
- Во секое теме на полиедарот се сретнуваат барем три негови рабови, а секој раб е страна на два и само на два негови ѕидови.

1 Дали е полиедар: а) коцката; б) цилиндарот; в) топката? Зошто?

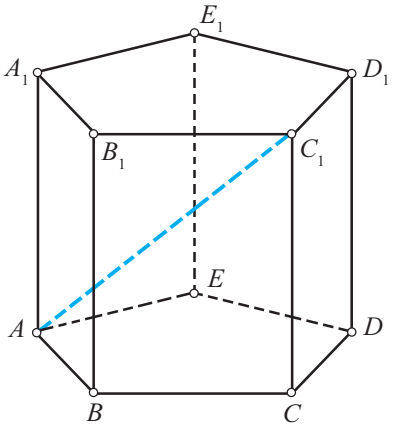
- Еден полиедар се вика ***конвексен полиедар*** ако тој е расположен на иста страна од рамнината на кој било негов ѕид.
- Кои од полиедрите I - V на цртежот погоре се конвексни, а кои не се конвексни?
- Натаму, „полиедар” ќе ни значи „конвексен полиедар”.

Б ***Призма*** е полиедар ограничен со два складни многуаголници што лежат на две паралелни рамнини, а другите ѕидови се паралелограми коишто имаат по една заедничка страна со секој од двата многуаголника.



- Двата ѕида што лежат на паралелните рамнини се викаат ***основи***, а другите - ***бочни ѕидови***; сите бочни ѕидови ја сочинуваат ***бочната површина*** на призмата. Страните на основите се викаат ***основни рабови***, а сите други - ***бочни рабови*** на призмата.
- Растојанието меѓу основите се вика ***висина*** на призмата.
- Отсечка чии крајни точки се две темиња на призмата кои не лежат на ист ѕид се вика ***просторна дијагонала*** или само ***дијагонала*** на призмата.

2 На цртежот е претставена петаголна призма.



- Основни рабови се: AB, BC, ..., A_1B_1, B_1C_1, ...; бочни рабови се: AA_1, BB_1, ...
- Соодветни рабови на основите се: AB и A_1B_1; BC и B_1C_1; итн. Какви се тие меѓу себе?
- Основите на призмата се складни многуаголници.
- Колку бочни ѕидови има една n-аголна призма?
- Каква заемна положба имаат и какви се меѓу себе бочните рабови на призмата?
- Отсечката AC_1 е дијагонала на призмата. Именувај уште неколку (барем две) дијагонали на призмата.

Ако бочните рабови на една призма се нормални на нејзините основи, тогаш таа призма се вика ***права призма***, а во спротивниот случај - ***коса призма***.

- Какви се меѓу себе бочните рабови и висината на права призма?

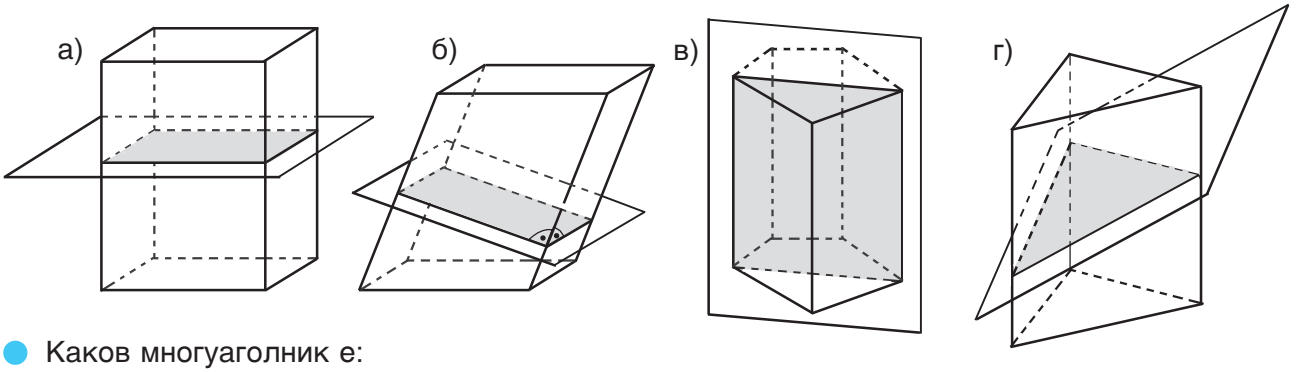
Права призма чиишто основи се правилни многуаголници се вика ***правилна призма***.

3 а) Кој вид четириаголници се бочните ѕидови кај права призма?
б) Какви се меѓу себе бочните ѕидови кај правилна призма?
в) Ако еден од бочните ѕидови на некоја призма е правоаголник, дали од тоа следува дека сите нејзини бочни ѕидови се правоаголници?

B Ако заедничкиот дел на едно геометриско тело и една рамнина содржи и внатрешни точки од телото, тогаш тој дел се вика ***пресек на геометриското тело со рамнина***.

- Во зависност од положбата на рамнината Σ во однос на призмата, разликуваме:

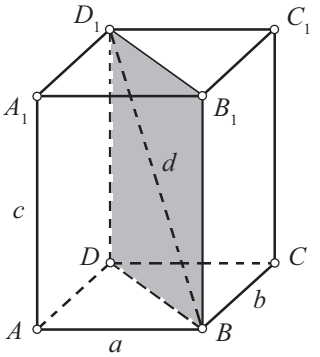
  - ***паралелен пресек***, ако Σ е паралелна со основите на призмата (црт. а);
  - ***нормален пресек***, ако Σ е нормална на бочните рабови на призмата (црт. б);
  - ***дијагонален пресек***, ако Σ минува низ два несоседни рабови на призмата (црт. в);
  - ***кос пресек***, ако Σ ги сече сите рабови на призмата и не е паралелна со основите (црт. г).



- Каков многуаголник е:
  а) паралелен пресек на призма и во каков однос е со основите;
  б) дијагонален пресек на права призма;
  в) дијагонален пресек на коса призма;
  г) нормален пресек на права призма?

4 Одреди ја должината на дијагоналата на квадар со димензии $a = 8\,\text{cm}$, $b = 6\,\text{cm}$ и $c = 24\,\text{cm}$.

Решение. Сите четири дијагонали на квадарот: се еднакви меѓу себе, се сечат во една точка и се преполовуваат со таа точка.



- Воочи ја дијагоналата BD_1 на квадарот од цртежот. Таа е дијагонала на дијагоналниот пресек BB_1D_1D, па според тоа $\overline{BD_1}^2 = \overline{BD}^2 + \overline{DD_1}^2$. Бидејќи $\overline{BD}^2 = a^2 + b^2$ и $\overline{DD_1}^2 = c^2$, добиваме дека $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$, т.е.

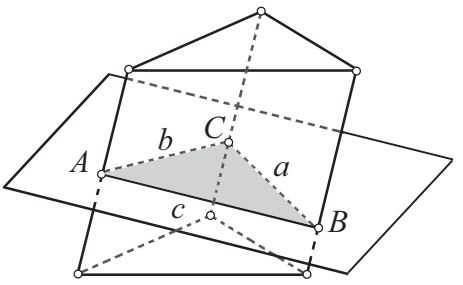
$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Значи, $d = \sqrt{8^2 + 6^2 + 24^2} = \sqrt{676} = 26\,\text{cm}$.

5 Одреди ја дијагоналата на коцка со раб $5\ \text{cm}$.

6 Растојанијата меѓу бочните рабови на коса триаголна призма се $9\ \text{cm}$, $10\ \text{cm}$ и $17\ \text{cm}$. Пресметај ја плоштината на еден нормален пресек на призмата.

Решение. Разгледај го цртежот. Бочните ѕидови на призмата се паралелограми. Дадените растојанија се висини на паралелограмите, па ΔABC е нормален пресек на призмата. Неговата плоштина ќе ја пресметаме со помош на Хероновата формула:



$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \qquad s = \frac{1}{2}(a+b+c);$$

$$s = \frac{1}{2}(9+10+17) = 18; \quad P = \sqrt{18 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 1} = 36\,\text{cm}^2.$$

7 Основните рабови на една коса триаголна призма се 10 cm, 17 cm и 21 cm. Пресметај ја плоштината на еден паралелен пресек на призмата.

Задачи

1 Колку најмалку ѕидови (s) може да има еден полиедар? Колку темиња (t) и колку рабови (r) има таквиот полиедар?

2 Колку темиња (t), ѕидови (s), рабови (r), бочни рабови (b) има:
а) триаголна призма;
б) четириаголна призма;
в) n-аголна призма?

3 Дијагоналата на правилна четириаголна призма е 25 cm, а дијагоналата на бочниот ѕид е 20 cm. Најди ја висината на призмата.

4 Правоаголен паралелопипед има димензии 3 cm, 5 cm и 7,5 cm. Најди ја должината на неговата дијагонала.

5 а) Колку просторни дијагонали има шестаголна призма?
б) Секој раб на шестаголна призма има должина a. Најди ги должините на дијагоналите на призмата.

6 Основата на коса призма е ромб со дијагонали 12 cm и 16 cm. Пресметај ги периметарот и плоштината на еден паралелен пресек на призмата.

7 Плоштината на бочниот ѕид на правилна шестаголна призма е еднаква на Q. Пресметај ја плоштината на секој нејзин дијагонален пресек.

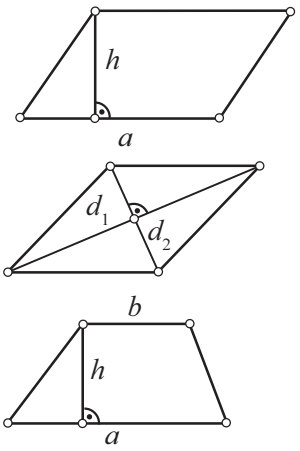
8 Низ дијагоналата на основата на една коцка е поставена рамнина. Какви многуаголници се пресеците на коцката, ако рамнината минува низ:
а) средините на две страни од горната основа;
б) едно теме на горната основа?

9 Коцка има раб 1 m. Нацртај пресек со рамнина што минува низ едната дијагонала на основата и низ средината на некој од рабовите на другата основа. Потоа одреди ја плоштината на пресекот.

2 ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ПРИЗМА

Потсети се!

■ Пресметување плоштини



Паралелограм

$$P = a \cdot h$$

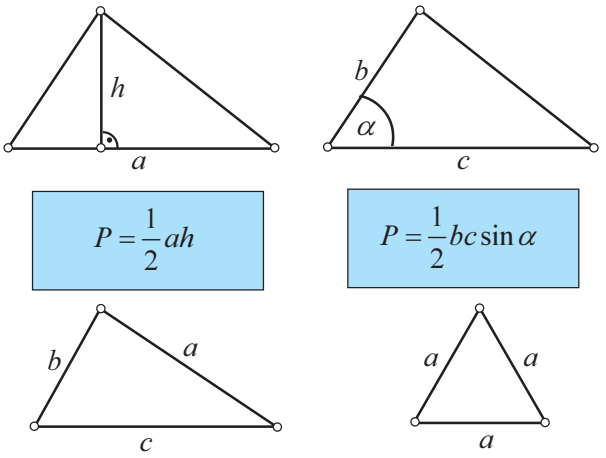
Ромб

$$P = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

Трапез

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

Триаголник



$$P = \frac{1}{2} ah$$

$$P = \frac{1}{2} bc \sin \alpha$$

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

А Површината на една n-аголна призма се состои од: две основи (тие се складни n-аголници) и од бочна површина (таа се состои од n паралелограми).

Збирот од плоштините на основите и на бочните ѕидови се вика ***плоштина на призмата***.

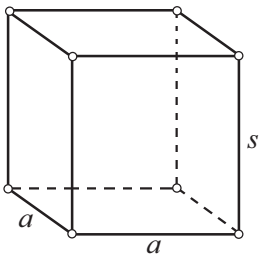
Запомни!

Плоштината P на призмата се пресметува со формулата

$$P = 2B + M,$$

каде што B е плоштината на основата, а M е плоштината на бочната површина (кратко, M се вика ***бочна плоштина***) на призмата.

1 Пресметај ја плоштината на правилна четириаголна призма со основен раб $a = 5\,\text{cm}$ и бочен раб $s = 12\,\text{cm}$.

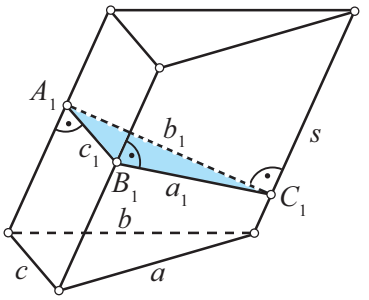


Решение. $P = 2B + M$; $B = a^2$; $M = 4as$; $P = 2a^2 + 4as$. За конкретните вредности на a и s имаме:

$$P = 2 \cdot 5^2 + 4 \cdot 5 \cdot 12, \qquad P = 290\,\text{cm}^2.$$

2 Запиши формула за пресметување на плоштината P на:
а) квадар со димензии a, b, c; б) коцка со раб а;
в) правилна шестаголна призма со основен раб a и висина H.

3 Нормалниот пресек на една коса триаголна призма е триаголник со страни $a_1 = 8\,\text{cm}$, $b_1 = 10\,\text{cm}$, $c_1 = 14\,\text{cm}$, а должината на бочниот раб е $s = 30\,\text{cm}$. Пресметај ја бочната плоштина M на призмата.



Решение. Бочните ѕидови на призмата се паралелограми. За основи на тие паралелограми да ги избереме бочните рабови; тогаш соодветни висини се страните на нормалниот пресек, $\Delta A_1B_1C_1$. Според тоа:

$$M = a_1 \cdot s + b_1 \cdot s + c_1 \cdot s = (a_1 + b_1 + c_1) \cdot s, \quad \text{т.е.} \quad M = L_1 \cdot s,$$

каде што L_1 е периметарот на нормалниот пресек. За дадените вредности на a_1, b_1, c_1 и s имаме: $M = L_1 \cdot s = (8 + 10 + 14) \cdot 30 = 960\,\text{cm}^2$.

Запомни!

Бочната плоштина M на која било n-аголна призма е еднаква на производот од периметарот L_1 на нормалниот пресек и должината s на бочниот раб,

$$M = L_1 \cdot s.$$

Нормален пресек на права призма е исто што и нејзин паралелен пресек, а тој е складен со основата. Според тоа, за бочната плоштина M на права призма важи:

$$M = L \cdot H,$$

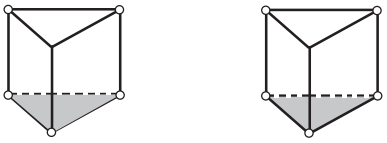
каде што L е периметарот на основата и H е висината на призмата.

4 Основата на една права призма е ромб чиишто дијагонали се $d_1 = 8\,\text{cm}$ и $d_2 = 6\,\text{cm}$. Одреди ја бочната плоштина на призмата ако нејзината висина е $H = 10\,\text{cm}$.

■ $M = 4a \cdot H; \quad a^2 = \left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 4^2 + 3^2 = 25, \quad a = 5\,\text{cm}; \quad M = 4 \cdot 5 \cdot 10 = 200\,\text{cm}^2.$

Пошети се!

- Која е основната мерна единица за волумен? Кои се помали, а кои поголеми мерни единици?
- Одреди го волуменот на квадар со димензии $a = 5\,\text{cm},\ b = 3\,\text{cm},\ c = 6\,\text{cm}.$
- За две тела велиме дека се ***складни*** ако може мисловно да се сместат едно во друго така што нивните површини да се совпаѓаат.
- На цртежот се претставени две призми со меѓусебно складни основи и еднакви висини.



Какви се тие призми меѓу себе?

Б

Со задачата за мерење волумени се запозна подетално во осмо одделение.

■ Слободно кажано, ***волумен на геометриско тело*** е големината на внатрешната (просторна) област, ограничена со неговата површина.

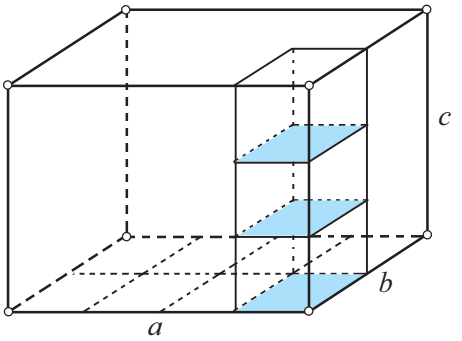
■ Задачата за мерење волумен на геометриски тела се состои во тоа што на секое тело да му се придружи определен број V, наречен ***волумен на телото***, така што да се исполнети следните својства:

1. Волуменот V е позитивен реален број.
2. Складните тела имаат еднакви волумени.
3. Ако телото е разделено на два или повеќе составни делови, тогаш волуменот на телото е еднаков на збирот од волумените на тие делови.
4. Единица за мерење волумен е волуменот на коцка со раб чија должина е единица за мерење должина.

■ Според меѓународниот SI систем мерки, волуменот на коцка со раб $1\ \text{m}$ се зема како основна мерна единица за волумен и се вика кубен метар, а се означува со $1\ \text{m}^3$.

5 Пресметај го волуменот на квадар со димензии $a = 4\,\text{cm},\ b = 2\,\text{cm},\ c = 3\,\text{cm}.$

Решение. Воочи дека на основата од квадарот (на цртежот) може да се претстават $a \cdot b = 4 \cdot 2 = 8$ квадрати со страна $1\ \text{cm}$. Ако на секој од тие квадрати се постави коцка со раб $1\ \text{cm}$, ќе се добие слој што содржи 8 волуменски единици. Во квадарот има $c = 3$ такви слоеви, па може да се наместат вкупно $(a \cdot b) \cdot c = (4 \cdot 2) \cdot 3 = 24$ волуменски единици. Според тоа, волуменот на квадарот е $V = a \cdot b \cdot c$; конкретно, $V = 4 \cdot 2 \cdot 3\left(\text{cm}^3\right) = 24\,\text{cm}^3$.



Формулата за пресметување волумен на квадар,

$$V = a \cdot b \cdot c$$

е точна и во случаите кога димензиите a, b и c се кои било позитивни реални броеви. (Точноста на ова тврдење нема да ја докажуваме.)

6 Покажи дека волуменот на коцка со раб a се пресметува со формулата $V = a^3$.

Запомни!

Волуменот V на која било призма е еднаков на производот од плоштината B на основата и висината H на призмата,

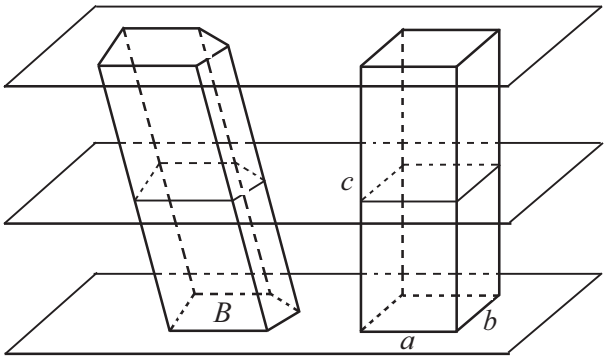
$$V = B \cdot H.$$

Точноста на оваа формула следува од едно тврдење на италијанскиот математичар *Бонавентура Кавалиери* (1599 - 1647), па затоа и денес го носи неговото име.

Принцип на Кавалиери. *Ако две тела може да се постават во таква положба што пресеците на обете тела со која било рамнина, паралелна со една дадена рамнина, да се фигури кои имаат еднакви плоштини, тогаш волумените на двете тела се еднакви.*

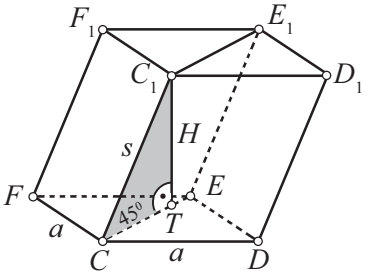
Споредувајќи произволна призма и квадар со димензии a, b, c, такви што имаат исти висини $H(=c)$ и еднакви плоштини $B(=ab)$ на основите (како на цртежот), ја добиваме формулата за волуменот V на дадената призма:

$$V = B \cdot H.$$



7 Основата на една коса призма е квадрат со страна $a = 10\,\text{cm}$. Ортогоналната проекција на еден од бочните рабови паѓа врз дијагоналата и со неа зафаќа агол од 45^0, а должината на бочниот раб е $s = 16\,\text{cm}$. Пресметај го волуменот на призмата.

Решение. ***Агол меѓу права и рамнина*** е аголот меѓу правата и нејзината ортогонална проекција врз рамнината (ако правата не е нормална на рамнината). На цртежот, аголот меѓу правата CC_1 и рамнината на која лежи основата $CDEF$ е $\measuredangle C_1CT$.



- За волуменот V треба да ја одредиме висината H на призмата; таа е и висина на паралелограмот CEE_1C_1 (на цртежот), којшто е дијагонален пресек на призмата.

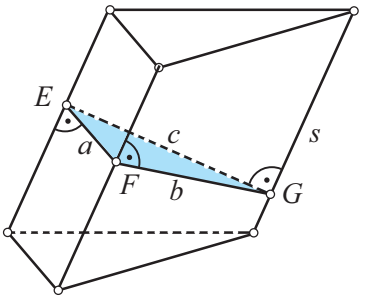
Од ΔCTC_1 имаме $\frac{H}{s} = \sin 45^0$, т.е. $\frac{H}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, па $H = 8\sqrt{2}\,\text{cm}$. Според тоа,

$V = B \cdot H = 10^2 \cdot 8\sqrt{2}, \quad V = 800\sqrt{2}\,\text{cm}^3.$

8 Бочните рабови на една коса триаголна призма се по $20\ \text{cm}$, а растојанијата меѓу нив се $13\ \text{cm}$, $14\ \text{cm}$ и $15\ \text{cm}$. Пресметај го нејзиниот волумен.

Решение. Волуменот V на коса призма може да се пресмета и по формулата

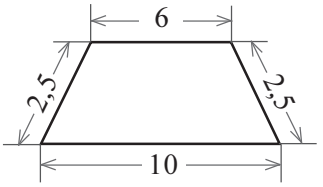
$$V = B_1 \cdot s,$$



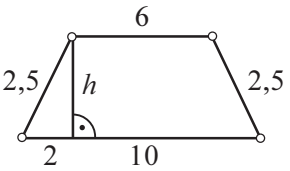
каде што B_1 е плоштината на еден нормален пресек, а s е должината на еден бочен раб на призмата.

На цртежот, ΔEFG е еден нормален пресек на призмата. Должините на неговите страни се растојанијата меѓу бочните рабови, т.е. $a = 13\,\text{cm}$, $b = 14\,\text{cm}$, $c = 15\,\text{cm}$, па плоштината B_1 на ΔEFG, според Хероновата формула е $B_1 = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84\,\text{cm}^2$. Значи, $V = 84 \cdot 20 = 1680\,\text{cm}^3$.

9 **T** Напречниот пресек на насип од железничка пруга е претставен на цртежот; димензиите се во метри. Пресметај колку кубни метри земја се потребни за $1{,}3\ \text{km}$ од насипот.



Решение. Согледај дека се работи за волуменот на права призма со основа рамнокрак трапез и висина $H = 1300\,\text{m}$. Плоштината на основата е $B = \frac{10+6}{2} \cdot h$, каде што $h^2 = 2{,}5^2 - 2^2$, т.е. $h = 1{,}5\,\text{m}$, па

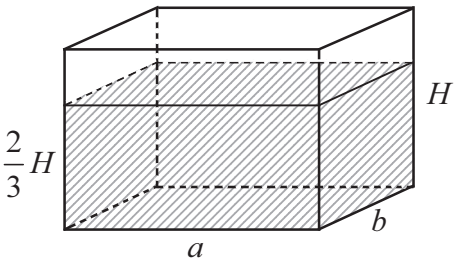


$B = 8 \cdot 1{,}5 = 12\,\text{m}^2; \quad V = B \cdot H = 12 \cdot 1300 = 15600\,\text{m}^3.$

10 **E** Во една дрводелска фирма се купени $1{,}5\ \mathrm{m}^3$ чамови штици. Секоја имала должина $3\ \mathrm{m}$, ширина $25\ \mathrm{cm}$ и дебелина $2\ \mathrm{cm}$. Колку штици купила фирмата?

Решение. Секоја штица имала форма на квадар со димензии $300\ \mathrm{cm}$, $25\ \mathrm{cm}$ и $2\ \mathrm{cm}$, па нејзиниот волумен изнесува: $300\cdot 25\cdot 2=15000\,\mathrm{cm}^3$. Бидејќи $1{,}5\,\mathrm{m}^3=1500000\,\mathrm{cm}^3$, добиваме дека $1500000:15000=100$, т.е. фирмата купила 100 штици.

11 **3** Еден амбар во форма на правоаголен паралелопипед, со основни рабови $a=2\,\mathrm{m}$, $b=1{,}5\,\mathrm{m}$ и висина $H=1{,}8\,\mathrm{m}$, има жито до $\frac{2}{3}$ од висината. Колку килограми жито има во амбарот, ако се смета дека $1\ \mathrm{dm}^3$ содржи $1\ \mathrm{kg}$ жито?



$V=a\cdot b\cdot\frac{2}{3}H=2\ \mathrm{m}\cdot 1{,}5\ \mathrm{m}\cdot 1{,}2\ \mathrm{m}=3{,}6\ \mathrm{m}^3=(3{,}6\cdot 1000)\ \mathrm{dm}^3=3600\ \mathrm{dm}^3$. Значи, во амбарот имало $3600\ \mathrm{kg}$ жито.

Задачи

1 За колку квадратни центиметри ќе се зголеми плоштината на коцка, ако нејзиниот раб со должина $1\ \mathrm{m}$ се зголеми за $1\ \mathrm{cm}$?

2 Основните рабови на една права триаголна призма се $25\ \mathrm{dm}$, $29\ \mathrm{dm}$ и $36\ \mathrm{dm}$, а плоштината е $1620\ \mathrm{dm}^2$. Пресметај ги бочната плоштина и висината на призмата.

3 Пресметај ги плоштината и волуменот на правилна четириаголна призма со дијагонала $15\ \mathrm{cm}$, а дијагоналата на еден бочен ѕид е $12\ \mathrm{cm}$.

4 Основата на права призма е ромб со дијагонали $18\ \mathrm{cm}$ и $24\ \mathrm{cm}$, а помалиот дијагонален пресек има еднаква плоштина со основата. Пресметај ги плоштината и волуменот на призмата.

5 Основните рабови на една триаголна призма се $3\ \mathrm{cm}$, $5\ \mathrm{cm}$ и $7\ \mathrm{cm}$, а еден бочен раб е $8\ \mathrm{cm}$, којшто со рамнината на основата образува агол од 60^0. Пресметај го волуменот на призмата.

6 **T** За да се сосида еден ѕид висок $2{,}8\ \mathrm{m}$ и дебел $40\ \mathrm{cm}$, потрошени се 2600 тули. Се знае дека за $1\ \mathrm{m}^3$ ѕид се потребни 400 тули. Колку е долг ѕидот?

7 **3;E** Една сточарска задруга порачала кај лимар 50 лимени канти, секоја канта да е отворена одозгора, со квадратна основа чија страна е $30\ \mathrm{cm}$, а кантата да собира $36\,\ell\ (=36\,\mathrm{dm}^3)$ млеко.

а) Колку dm^2 лим е потребен за една канта, ако имало 5% отпадок од употребениот лим?

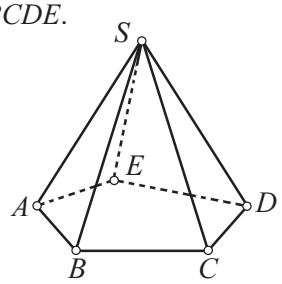
б) Колку денари платиле за лимот ако $1\ \mathrm{m}^2$ лим чини 400 денари?

8 **T;E** Колку вреќи цемент по $50\ \mathrm{kg}$ се потребни за да се направи брана (за вештачко езеро) долга $360\ \mathrm{m}$, висока $37{,}5\ \mathrm{m}$, со ширина на основата $25\ \mathrm{m}$, а на горниот крај е $5\ \mathrm{m}$, и ако за $1\ \mathrm{m}^3$ се употребени $250\ \mathrm{kg}$ цемент? Колку евра чини тоа количество цемент, ако една вреќа цемент чини 5 евра?

3 ПИРАМИДА. ПРЕСЕЦИ НА ПИРАМИДА СО РАМНИНА

Пошсеши се!

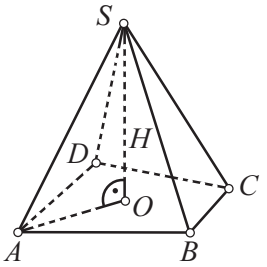
- На цртежот е претставена петаголна пирамида $SABCDE$.



- Каква фигура е основата, а какви фигури се бочните ѕидови?
- Бочните рабови SA и SB се соседни. Какви се SA и SC ?

А ***Пирамида*** е полиедар ограничен со еден конвексен многуаголник, а другите ѕидови се триаголници коишто имаат едно заедничко теме.

- Многуаголникот се вика ***основа***, триаголниците - ***бочни ѕидови***, а нивното заедничко теме - ***врв*** на пирамидата.
- Растојанието од врвот до рамнината на основата се вика ***висина*** на пирамидата и се означува со H. На цртежот: $H = \overline{SO}$.



- Според видот на основата, пирамидата е: триаголна, четириаголна, петаголна итн.
- Триаголна пирамида се вика и ***шешраедар***; за основа може да се земе кој било нејзин ѕид. Тетраедар чии ѕидови се рамностранни триаголници се вика ***правилен шешраедар***.

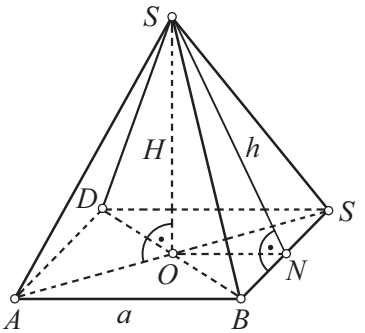
Запомни!

Пирамида чија основа е правилен многуаголник, а бочните рабови се еднакви меѓу себе се вика ***правилна пирамида***.

1 На цртежот е претставена правилна четириаголна пирамида $SABCD$.

а) Какви триаголници се бочните ѕидови и какви се тие меѓу себе?

б) Што претставува ортогоналната проекција O на врвот S за основата на правилна пирамида?



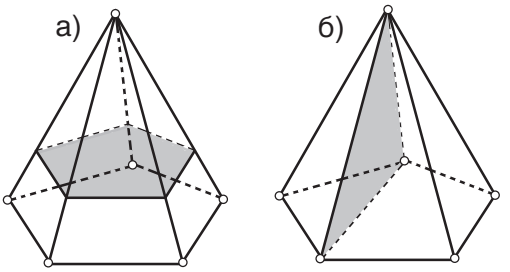
- Висината на бочен ѕид на правилна пирамида спуштена од врвот се вика ***апошема*** на пирамидата.
- Каква врска постои меѓу: апотемата h, висината H и основниот раб a?

(Воочи го ΔSON на цртежот погоре и согледај дека $h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2$.)

2 а) Дали правилен многуаголник може да биде основа на неправилна пирамида?
б) Дали секоја пирамида при која сите бочни рабови се еднакви меѓу себе е правилна пирамида?

Д Пресекот на пирамида со рамнина се вика:

- ***паралелен пресек***, ако рамнината е паралелна со основата (обоениот многуаголник на црт. а);
- ***дијагонален пресек***, ако рамнината минува низ два несоседни бочни рабови (обоениот триаголник на црт. б).



За паралелните пресеци важи следната теорема.

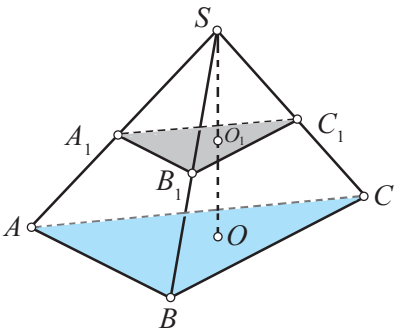
1⁰. Паралелниот пресек ги дели бочните рабови и висината на пропорционални отсечки.

2⁰. Паралелниот пресек и основата се слични многуаголници.

3⁰. Плоштината на паралелниот пресек и плоштината на основата се однесуваат како квадратите на нивните растојанија до врвот на пирамидата.

3 Висината на една пирамида е $H = 18\ \text{cm}$, а плоштината на нејзината основа е $Q = 675\ \text{cm}^2$. На кое растојание од основата се наоѓа паралелниот пресек што има плоштина $Q_1 = 75\ \text{cm}^2$?

Решение. Воочи дека видот на пирамидата, тука, не е битен. Поради тоа е даден цртеж на триаголна пирамида.



Според својството **3⁰** имаме:

$Q_1 : Q = H_1^2 : H^2$, каде што $H_1 = \overline{SO_1}$ и $H = \overline{SO}$.

Конкретно, $75 : 675 = H_1^2 : 18^2$, $H_1 = 6\ \text{cm}$, па $\overline{OO_1} = H - H_1 = 18 - 6 = 12\ \text{cm}$. Значи, пресекот е на растојание $12\ \text{cm}$ од основата.

Да забележиме дека:

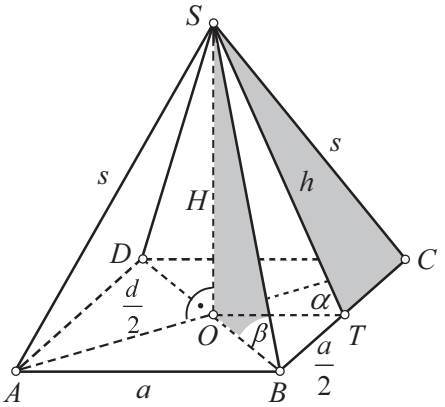
Делот од пирамидата што се наоѓа меѓу основата и еден паралелен пресек се вика ***потсечена пирамида***.

На цртежот погоре, делот $ABCA_1B_1C_1$ е потсечена пирамида.

4 Основниот раб на правилна четириаголна пирамида е $a = 6\sqrt{2}\ \text{cm}$, а висината е $H = 8\ \text{cm}$. Еден паралелен пресек на пирамидата има плоштина $Q_1 = 18\ \text{cm}^2$. Одреди ја должината на делот на бочниот раб од пресекот до врвот на пирамидата.

5 На цртежот е претставена правилна четириаголна пирамида $SABCD$ со основен раб a, дијагонала d на основата, висина H, апотема h, бочен раб s, агол α меѓу апотемата и основата, агол β меѓу бочниот раб и основата. Какви релации има меѓу спомнатите елементи на пирамидата?

Решение. Воочи ги на цртежот правоаголните триаголници: ΔABC, ΔSOT, ΔSOB, ΔSTC и примени ги: Питагоровата теорема и тригонометриската функција синус.



Од ΔABC: $\quad d^2 = a^2 + a^2, \quad d = a\sqrt{2}.$

Од ΔSOT: $\quad h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad h = \frac{H}{\sin\alpha}.$

Од ΔSOB: $\quad s^2 = H^2 + \left(\frac{d}{2}\right)^2, \quad s = \frac{H}{\sin\beta}.$

Од ΔSTC: $\quad s^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, т.е. $\quad h = s^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2.$

6 Основниот раб на правилна четириаголна пирамида е $a = 28$ cm, а бочниот раб е $s = 20$ cm. Пресметај ги плоштината Q на дијагоналниот пресек и апотемата h.

Задачи

1 Висината на правилна четириаголна пирамида е $H = 9\,\text{cm}$, а основниот раб е $a = 12\,\text{cm}$. Пресметај ја плоштината на паралелниот пресек којшто е на растојание $r = 3\,\text{cm}$ од врвот.

2 Плоштината на основата на една пирамида е $150\ \text{cm}^2$, плоштината на еден паралелен пресек е $54\ \text{cm}^2$, а растојанието меѓу нив е 14 cm. Пресметај ја висината на пирамидата.

3 Триаголна пирамида со основни рабови 6 cm, 11 cm и 15 cm е пресечена со рамнина што е паралелна со основата и минува низ средината на висината. Пресметај ја плоштината на пресекот.

4 Основниот раб на правилна шестаголна пирамида е $a = 5\,\text{cm}$, а бочниот раб со рамнината на основата зафаќа агол од 60^0. Пресметај ја плоштината на најголемиот дијагонален пресек.

5 Меѓу величините a (основен раб), H (висина), h (апотема) кај правилна четириаголна пирамида најди ја непознатата величина, ако се дадени (во дециметри): а) $a = 18,\ \ h = 15,\ \ H = ?$
б) $a = 10,\ \ H = 12,\ \ h = ?$
в) $H = 21,\ \ h = 29,\ \ a = ?$

6 Одреди ја плоштината на дијагоналниот пресек на правилна четириаголна пирамида со основен раб a, а бочниот раб образува агол β со основата на пирамидата.

7 Основата на една пирамида е квадрат. Еден од бочните рабови е нормален на рамнината на основата. Најголемиот бочен раб има должина $s\ (= 6\,\text{dm})$ и зафаќа агол од 45^0 со основата. Пресметај ја плоштината на основата.

4 ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ПИРАМИДА

Пошсети се!

- Кои рамнински фигури ја сочинуваат границата (т.е. површината) на една пирамида?
- Што е висина, а што апотема на правилна пирамида?

А ***Плоштина*** на една пирамида се дефинира како збир од плоштините на бочните ѕидови и плоштината на основата.

Запомни!

Плоштината P на пирамида се пресметува со формулата $P = B + M$, каде што B е плоштината на основата, а M е плоштината на бочната површина (кратко: бочна плоштина).

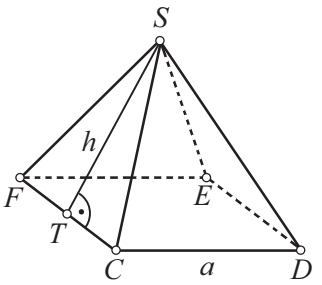
1 Правилна четириаголна пирамида има основен раб $a = 12\ \text{cm}$ и апотема $h = 8\ \text{cm}$. Пресметај ги: а) плоштината на пирамидата; б) бочниот раб на пирамидата.

Решение. а) Плоштината на основата е $B = a^2 = 144\ \text{cm}^2$;

бочната плоштина е $M = 4 \cdot \frac{ah}{2} = 2 \cdot 12 \cdot 8 = 192\ \text{cm}^2$;

$P = B + M = 336\ \text{cm}^2$.

б) Од ΔSTC: $s^2 = \overline{ST}^2 + \overline{TC}^2 = h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 100$; $s = 10\ \text{cm}$.



2 Покривот на некоја камбанарија е правилна четириаголна пирамида со основен раб $a = 5\,\text{m}$, а висините на бочните ѕидови се по $6\ \text{m}$. Колку ќе чини покривањето на камбанаријата со поцинкуван лим ако $1\ \text{m}^2$ чини 800 денари?

Пошсети се!

- Волуменот V на призма се пресметува со формулата $V = B \cdot H$, каде што B е плоштината на основата, а H е висината на пирамидата.
- Како се пресметува волуменот на пирамида?

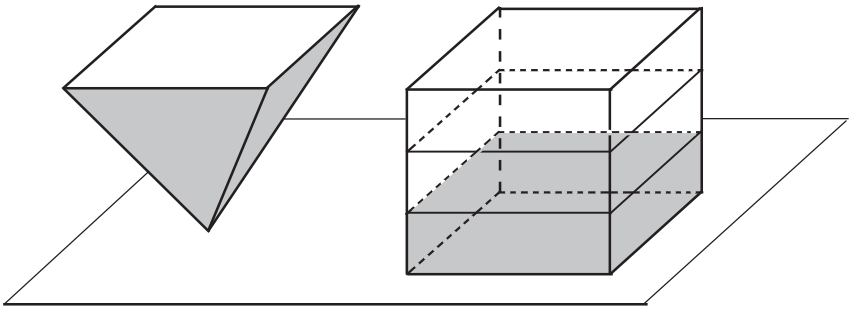
Б За да се добие формула за пресметување волумен на пирамида, најчесто се предлага следниот обид.

- Нека се направени два сада од лим или картон, едниот со форма на (каква било) призма, а другиот со форма на (каква било) пирамида, отворени одозгора, но да се натокмени така што да имаат еднаквоплошни (може: складни) основи и еднакви висини (на пример, како на цртежот).

- Ако садот со облик на призма го наполниме со ситен песок (или: ориз, шеќер,...) и пристапиме кон сипување во садот со облик на пирамида, ќе видиме дека со песокот од призмата точно трипати ќе се наполни пирамидата.

Тој обид укажува дека волуменот на пирамидата е трипати помал од волуменот на призмата.

Бидејќи волуменот на призмата е еднаков на $B \cdot H$, ќе имаме:



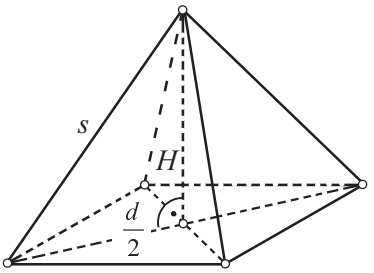
Запомни!

Волуменот V на (која било) пирамида е еднаков на една третина од производот на висината H и плоштината B на основата, т.е.

$$V = \frac{1}{3} B \cdot H.$$

Ова тврдење, коешто го установивме со обид, може да се докаже (но, ние тоа нема да го направиме).

3 Пресметај го волуменот на правилна четириаголна пирамида со дијагонала $d = 16$ cm на основата и бочен раб $s = 17$ cm.



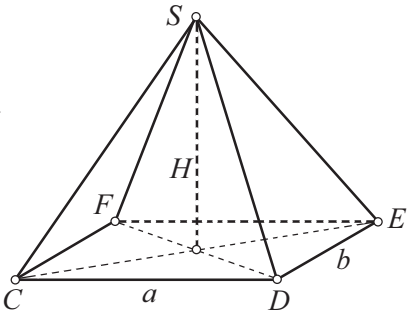
Решение. $V = \frac{1}{3} B \cdot H$; $\quad B = \frac{d^2}{2} = 128 \text{ cm}^2$;

$$H^2 = s^2 - \left(\frac{d}{2}\right)^2 = 289 - 64 = 225, \quad H = 15 \text{ cm}; \quad V = \frac{1}{3} \cdot 128 \cdot 15, \quad V = 640 \text{ cm}^3.$$

4 Пресметај го волуменот на триаголна пирамида со основни рабови 17 cm, 25 cm, 26 cm и висина $H = 20$ cm.

5 Основата на една пирамида е правоаголник со страни $a = 16$ cm и $b = 6$ cm, подножјето на висината е во пресекот на дијагоналите на основата и волуменот е 128 cm^3. Одреди ја бочната плоштина M на пирамидата.

Решение.

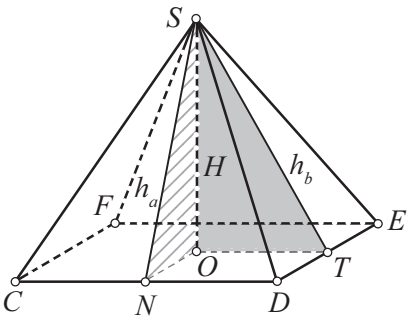


Разгледај го цртежот на кој е претставена пирамида $SCDEF$, чијашто основа е правоаголник со димензии a и b и висина чиешто подножје е во пресекот на дијагоналите.

Воочи дека спротивните бочни ѕидови пар по пар се складни рамнокраки триаголници. Според тоа,

$$M = 2\cdot\frac{ah_a}{2} + 2\cdot\frac{bh_b}{2},$$

каде што h_a е висина на ΔCDS, а h_b е висина на ΔDES (на вториот цртеж).



Од $V = \frac{1}{3}a\cdot b\cdot H$, т.е. $128 = \frac{1}{3}\cdot 16\cdot 6\cdot H$ се добива $H = 4\,\text{cm}$.

Од правоаголниот триаголник SON имаме:

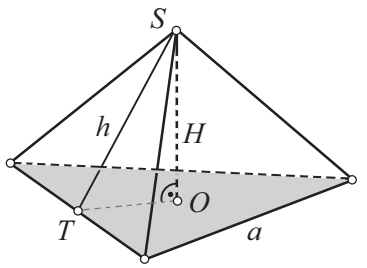
$h_a{}^2 = H^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, а од ΔSOT:

$h_b{}^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 4^2 + 8^2 = 80$. Значи, $h_a = 5\,\text{cm}$ и $h_b = 4\sqrt{5}\,\text{cm}$,

па $M = a\cdot h_a + b\cdot h_b = 16\cdot 5 + 6\cdot 4\sqrt{5} = \left(80 + 24\sqrt{5}\right)\text{cm}^2 \approx 133,7\,\text{cm}^2$.

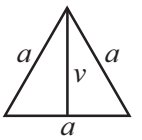
6 Пресметај го волуменот на пирамида чијашто основа е ромб со дијагонали $d_1 = 16\,\text{dm}$, $d_2 = 12\,\text{dm}$, помалиот дијагонален пресек има плоштина $Q = 18\,\text{dm}^2$, а подножјето на висината е во пресекот на дијагоналите.

7 Одреди ги плоштината и волуменот на правилна триаголна пирамида со основен раб a, а бочната плоштина е двапати поголема од плоштината на основата.



Решение. Имаме: $P = B + M = B + 2B = 3B = 3\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, а

$V = \frac{1}{3}B\cdot H = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H$. Висината H ќе ја пресметаме од правоаголниот триаголник SOT на цртежот: $H^2 = h^2 - \overline{TO}^2$. Притоа, отсечката TO е една третина од висината v на основата, т.е.



$v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\overline{TO} = \frac{1}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}$, а h ќе го одредиме од равенството $M = 2B$, т.е.

од $3\cdot\frac{ah}{2} = 2\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Значи, $H^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2 = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{12} = \frac{a^2}{4}$, па

$H = \frac{a}{2}$. Така, $P = \frac{3a^2\sqrt{3}}{4}$, а $V = \frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{a}{2}$, $V = \frac{a^3\sqrt{3}}{24}$.

Задачи

1 Пресметај ја плоштината на правилна четириаголна пирамида:
а) со висина $15\ \mathrm{dm}$ и плоштина на основата $256\ \mathrm{dm}^2$;
б) со бочен раб $37\ \mathrm{cm}$ и апотема $35\ \mathrm{cm}$.

2 Висината на една пирамида е поделена со еден паралелен пресек во однос $3:4$ (од врвот кон основата), а плоштината на пресекот е помала од плоштината на основата за $200\ \mathrm{cm}^2$. Најди ја плоштината B на основата.

3 Пресметај ја бочната плоштина на правилна триаголна пирамида со висина $H = 4\ \mathrm{cm}$ и апотема $h = 8\ \mathrm{cm}$.

4 Една пирамида чија основа е правоаголник со страни $a = 32\ \mathrm{cm}$ и $b = 10\ \mathrm{cm}$, а подножјето на висината е во пресекот на дијагоналите, има волумен $1280\ \mathrm{cm}^3$. Пресметај ја бочната плоштина на пирамидата.

5 Пресметај ги плоштината P и волуменот V на правилен тетраедар со раб:
а) $6\ \mathrm{cm}$; б) a.

6 **Т, Е** Колку грама маса има едно тело со форма на триаголна пирамида чијашто висина е $15\ \mathrm{cm}$, а основата е правоаголен триаголник со катета $5{,}5\ \mathrm{cm}$ и хипотенуза $7{,}3\ \mathrm{cm}$, ако се знае дека телото е направено од бакар (специфичната густина на бакарот е $8{,}9\ \mathrm{g/sm}^3$).

7 **Е, З** Колку денари чини платното што е употребено за да се направи шатор во форма на правилна четириаголна пирамида (без основа) со основен раб $3\ \mathrm{m}$ и висина $2\ \mathrm{m}$, ако $1\ \mathrm{m}^2$ чини 800 денари?

8 **Т, Е** Пресметај ја масата на тело направено од сребро, во форма на правилна четириаголна пирамида со основен раб $a = 3{,}4\ \mathrm{cm}$ и бочен раб $s = 7{,}5\ \mathrm{cm}$, ако специфичната густина на среброто е $10{,}51\ \mathrm{g/cm}^3$?

9 **Т** Покрив има форма на правилна четириаголна пирамида со основен раб $5\ \mathrm{m}$, а аголот меѓу бочниот ѕид и основата е 45^0. Колку правоаголни парчиња лим со димензии $70\ \mathrm{cm}$ и $140\ \mathrm{cm}$ се неопходни за да се покрие покривот, ако заради отпадоци треба да се додадат 10% од плоштината на покривот?

10 **Е, З** Арена за циркус има форма на правилна шестаголна призма со основен раб $a = 8\ \mathrm{m}$ и висина $3\ \mathrm{m}$, а покривот на арената е бочна површина на правилна шестаголна пирамида чија висина е $4\ \mathrm{m}$. а) Колку гледачи собира арената ако за секој гледач треба да се обезбеди најмалку $3{,}5\ \mathrm{m}^3$ простор? б) Колку метри квадратни платно е набавено за арената, ако 10% од употребеното платно е отпадок, а подот на арената е направен од друг материјал?

5 ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ПОТСЕЧЕНА ПИРАМИДА

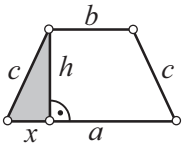
Потсети се!

- Што е паралелен пресек на пирамида?
- Какви многуаголници меѓу себе се основата и паралелниот пресек на пирамида?

- Плоштината на рамнокрак трапез со основи a и b, висина h и крак c е:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

$$h = \sqrt{c^2 - \left(\frac{a-b}{2}\right)^2}.$$

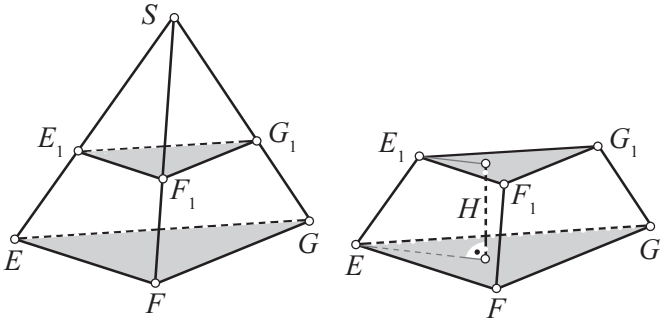


$$x = \frac{a-b}{2}$$

А Делот од пирамидата што се наоѓа меѓу еден нејзин паралелен пресек и основата се вика ***потсечена пирамида***.

Делот од пирамидата од пресекот до врвот се вика ***дополнение*** на потсечената пирамида.

- На цртежот а) е претставена триаголна пирамида $SEFG$ и еден нејзин паралелен пресек $E_1F_1G_1$, а на цртежот б) издвоено е претставена потсечената триаголна пирамида $EFGE_1F_1G_1$.
- Основата и паралелниот пресек на пирамидата се викаат ***основи*** на потсечената пирамида.



а) б)

- Растојанието меѓу рамнините на кои лежат основите се вика ***висина*** на потсечената пирамида и се означува со H.
- Ѕидовите што не се основи се викаат ***бочни ѕидови*** и тие ја сочинуваат ***бочната површина*** на потсечената пирамида.
- Каков вид четириаголници се бочните ѕидови на потсечената пирамида?
- Што е плоштина на потсечена пирамида и како се пресметува?

Запомни!

Плоштината P на потсечена пирамида се пресметува со формулата

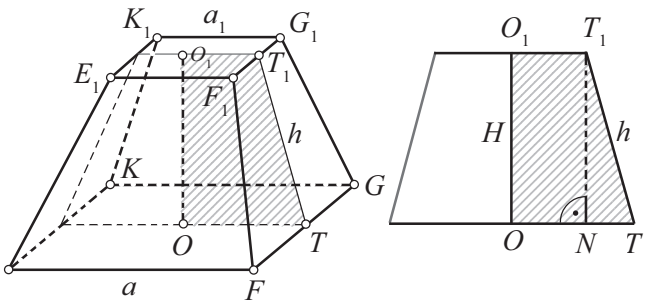
$$P = B + B_1 + M,$$

каде што B и B_1 се плоштините на основите, а M е плоштината на бочната површина (кратко, M се вика ***бочна плоштина*** на потсечената пирамида).

1 Пресметај ја плоштината на правилна четириаголна потсечена пирамида со основни рабови $a = 16\,\text{cm}$ и $a_1 = 6\,\text{cm}$ и висина $H = 12\ \text{cm}$.

Решение.

а) б)



$P = B + B_1 + M$; основите се квадрати, па $B = a^2 = 256\ \text{cm}^2$; $B_1 = a_1^2 = 36\ \text{cm}^2$, а сите четири бочни ѕидови се складни рамнокраки трапези со основи a и a_1 (црт. а), па

$$M = 4 \cdot \frac{a + a_1}{2} \cdot h,$$

каде што h е висината на трапезите.

На цртежот б) е издвоено претставен пресекот на потсечената пирамида што минува низ пресекот на дијагоналите на основите и низ средините на основните рабови. Од ΔTNT_1 имаме:

$$h^2 = \overline{TT_1}^2 = \overline{TN}^2 + \overline{NT_1}^2 = \left(\frac{a - a_1}{2}\right)^2 + H^2 = \left(\frac{16 - 6}{2}\right)^2 + 12^2 = 169, \quad h = 13\ \text{cm}.$$

Така, $M = 4 \cdot \frac{16 + 6}{2} \cdot 13 = 572\ \text{cm}^2$, па $P = 864\ \text{cm}^2$.

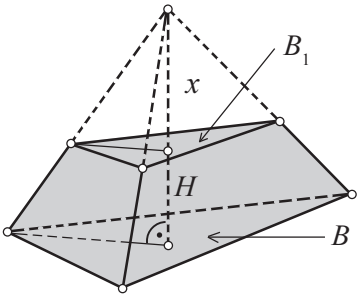
2 Основните рабови на правилна четириаголна потсечена пирамида се $a = 18\ \text{m}$ и $a_1 = 5{,}4\ \text{m}$, а бочниот раб е $s = 10{,}5\ \text{m}$. Пресметај ја плоштината на таа пирамида.

Потсети се!

- Кои се својствата на паралелните пресеци на пирамида?
- На што е еднаков волуменот на пирамида?
- Како се однесуваат плоштината B на основата и плоштината B_1 на паралелниот пресек на една пирамида?

Б Да најдеме, сега, формула за пресметување волумен на потсечена пирамида, со висина H и плоштини B и B_1 на основите.

- Потсечената пирамида (на цртежот) да ја дополниме до „цела” пирамида; висината на дополнението ќе ја означиме со x.



- Волуменот В на потсечената пирамида е еднаков на разликата од волуменот на „целата” пирамида и волуменот на дополнението,

$$V = \frac{1}{3} B \cdot (H + x) - \frac{1}{3} B_1 \cdot x, \text{ т.е. } V = \frac{1}{3}\left[B \cdot H + (B - B_1) \cdot x\right]. \quad (*)$$

Според својството **3⁰** од теоремата за паралелни пресеци на пирамида, имаме:

$B:B_1=(H+x)^2:x^2$ или $\sqrt{B}:\sqrt{B_1}=(H+x):x$, т.е. $x=\dfrac{H\sqrt{B_1}}{\sqrt{B}-\sqrt{B_1}}=\dfrac{H\sqrt{B_1}\cdot\left(\sqrt{B_1}+\sqrt{B}\right)}{B-B_1}$.

Заменувајќи го овој израз за x во формулата $(*)$, добиваме дека

$$V=\frac{H}{3}\cdot\left(B+B_1+\sqrt{BB_1}\right).$$

3 Плоштините на основите на една потсечена пирамида се $294\ \text{cm}^2$ и $150\ \text{cm}^2$, а висината на „целата" пирамида е $28\ \text{cm}$. Пресметај го волуменот на потсечената пирамида.

Решение. Од $B:B_1=(H+x)^2:x^2$, т.е. од $294:150=28^2:x^2$ добиваме $x=20\ \text{cm}$, па $H=28-20=8\ \text{cm}$. Така, $V=\frac{1}{3}\left(294+150+\sqrt{294\cdot150}\right)\cdot8=218\cdot8,\quad V=1744\ \text{cm}^3$.

4 Плоштините на основите на една потсечена пирамида се $B=36\ \text{cm}^2$ и $B_1=16\ \text{cm}^2$, а нејзината висина е $H=5\ \text{cm}$. Пресметај ги волуменот $V_д$ на нејзиното дополнение и волуменот $V_ц$ на „целата" пирамида.

Задачи

1 Пресметај ја плоштината на правилна четириаголна потсечена пирамида со основни рабови $30\ \text{cm}$ и $14\ \text{cm}$ и висина $15\ \text{cm}$.

2 Најди ја плоштината на правилна четириаголна потсечена пирамида со основни рабови $10\ \text{cm}$ и $8\ \text{cm}$ и бочен ѕид наклонет кон поголемата основа под агол од 60^0.

3 Одреди ја плоштината на бочната површина на правилна шестаголна потсечена пирамида со основни рабови $a=12\ \text{dm}$ и $a_1=8\ \text{dm}$ и висина $H=2\ \text{dm}$.

4 Пресметај го волуменот на потсечена пирамида, ако плоштините на основите се $B=128\ \text{cm}^2$ и $B_1=72\ \text{cm}^2$, а висината на соодветната „цела" пирамида е $12\ \text{cm}$.

5 Пресметај го волуменот на правилна четириаголна потсечена пирамида ако плоштините на основите се $72\ \text{dm}^2$ и $18\ \text{dm}^2$, а плоштината на дијагоналниот пресек е $45\ \text{dm}^2$.

6 Висината на триаголна потсечена пирамида е $H=20\ \text{cm}$. Рабовите на едната основа се $a=40\ \text{cm}$, $b=37\ \text{cm}$ и $c=13\ \text{cm}$, а периметарот на другата основа е $L_1=36\ \text{cm}$. Колку е волуменот?

7 **Т, Е** Постамент од леано железо има форма на правилна четириаголна потсечена пирамида со висина $1{,}5\ \text{m}$. Основните рабови се $2\ \text{m}$ и $1\ \text{m}$. а) Колкава маса има постаментот (специфичната густина на железото е $7{,}2\ \text{g/cm}^3$)? б) Колку е платено за употребеното железо, ако секој kg железо чини $0{,}5$ евра?

8 **Е** Еден лимен сад со форма на правилна четириаголна потсечена пирамида, со основни рабови $a=12\ \text{dm}$ и $a_1=30\ \text{dm}$ (поголемата основа е одозгора) е наполнет со брашно. Целото количество брашно било продадено за 140400 денари.

а) Колку dm^3 има садот ако се знае дека секој kg брашно е продаден за 25 денари и $1\ \text{dm}^3$ содржи приближно $1\ \text{kg}$ брашно?

б) Колку е длабок садот?

в) Колку dm^2 лим е употребен за да се направи садот, без капак (на поголемата основа)?

9 **3** Треба да се ископа јама за собирање отпадна вода во форма на правилна четириаголна потсечена пирамида којашто ќе собира 100 хектолитри. Ширината при врвот да биде 2,5 m, а при дното 2,2 m. Колку треба да биде длабока јамата?

6 ЦИЛИНДАР. ПРЕСЕЦИ НА ЦИЛИНДАР СО РАМНИНА

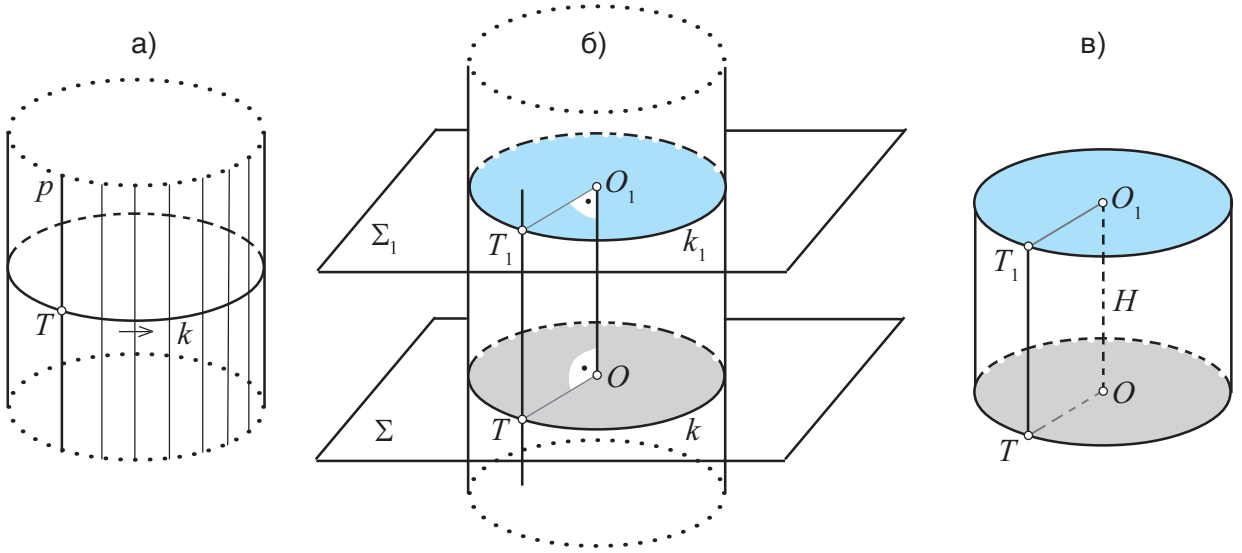
Потсети се!

- Во секојдневниот живот среќаваш предмети што имаат форма на цилиндар, како на пример: конзерва, буре за бензин и др.
- Наброј уште неколку предмети што имаат цилиндрична форма.

А Во основното училиште учеше за цилиндар. Да се потсетиме како може да се добие такво геометриско тело.

- Нека се дадени: кружница k и права p што минува низ една точка T од кружницата и е нормална на рамнината на која лежи кружницата.

Да замислиме дека правата k „се лизга" по кружницата останувајќи паралелна на својата првобитна положба, како на цртежот а).



- На тој начин подвижната права p опишува една крива површина што се вика ***цилиндрична површина***. Подвижната права се вика ***генератриса*** (или изводница), а кружницата по која се движи правата се вика ***директриса*** на цилиндричната површина.
- Да ја пресечеме цилиндричната површина со две рамнини, Σ и Σ_1, паралелни со рамнината на кружницата k (црт. б).

Круговите коишто цилиндричната површина ги отсекува од рамнините Σ и Σ_1, и делот од неа помеѓу рамнините, заградуваат дел од просторот, т.е. образуваат едно геометриско тело што се вика ***прав кружен цилиндар***, а ние ќе го викаме само ***цилиндар***.

На цртежот в) е претставен издвоено тој цилиндар.

За цилиндарот:

– двата кругови се викаат ***основи***;

– делот од цилиндричната површина зафатена меѓу основите се вика ***бочна површина***;

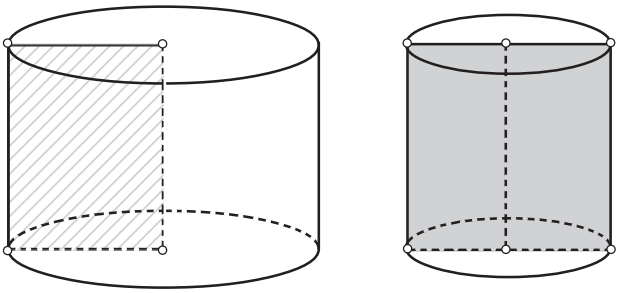
– правата што минува низ центрите O и O_1 на круговите се вика ***оска***;

– растојанието меѓу основите се вика ***висина*** и се означува со H;

– отсечката TT_1 што ја изведува бочната површина на цилиндарот се вика ***генератриса*** (или ***изводница***).

Цилиндар може да се добие и кога правоаголник ротира околу една своја страна или околу една своја оска на симетрија.

Според тоа, цилиндарот е ***ротационо тело***.



1 Правоаголник со страни a и b, ротира околу: **1)** страната a; **2)** страната b; **3)** симетралата на страната b. Која страна од правоаголникот е радиусот r на основата, а која - висината H на цилиндарот?

Потсети се!

- Какви се меѓу себе основата и кој било паралелен пресек на призма?
- Какви фигури се дијагоналните пресеци на права призма?

Запомни!

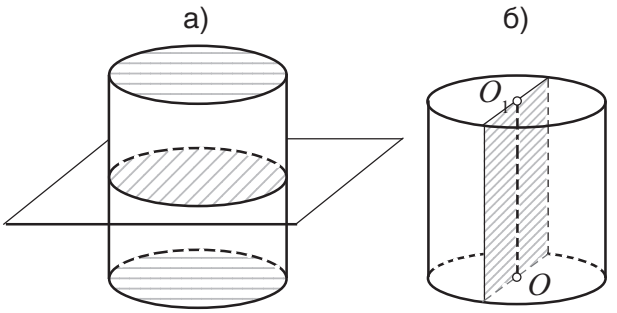
1. Секој паралелен пресек на цилиндар со рамнина е круг, складен со основите на цилиндарот.

2. Секој осен пресек на цилиндар е правоаголник чиишто страни се еднакви на дијаметарот на основата и висината на цилиндарот.

Д Пресекот на цилиндар со рамнина:

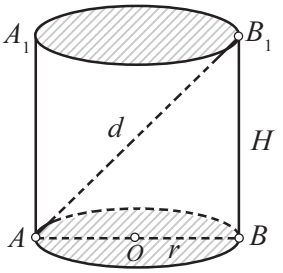
– што е паралелна со основите се вика ***паралелен пресек*** (црт. а);

– што минува низ оската на цилиндарот се вика ***осен пресек*** (црт. б).



2 Одреди го радиусот r на основата на цилиндар којшто има висина $H = 6$ cm и дијагонала на осниот пресек $d = 7,5$ cm.

Решение. Според цртежот: $r = \frac{1}{2}\overline{AB}$; $\overline{AB}^2 = \overline{AB_1}^2 - \overline{BB_1}^2$, т.е.



$(2r)^2 = d^2 - H^2 = 7{,}5^2 - 6^2 = 20{,}25$, $2r = 4{,}5$, $r = 2{,}25$ cm.

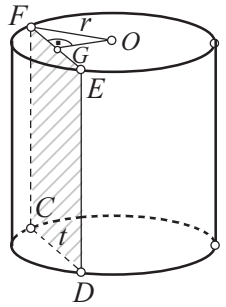
3 Осниот пресек на еден цилиндар е квадрат со плоштина $P = 25\ \text{cm}^2$. Одреди ги радиусот и висината на цилиндарот.

Запомни!

Цилиндар чиј осен пресек е квадрат, т.е. дијаметарот на основата е еднаков со висината, се вика ***рамностран цилиндар***.

4 Цилиндар со висина $H = 14\,\text{cm}$ е пресечен со рамнина паралелна со оската на цилиндарот, на растојание 4 cm од неа, при што плоштината на пресекот е 84 cm². Пресметај ја плоштината на основата.

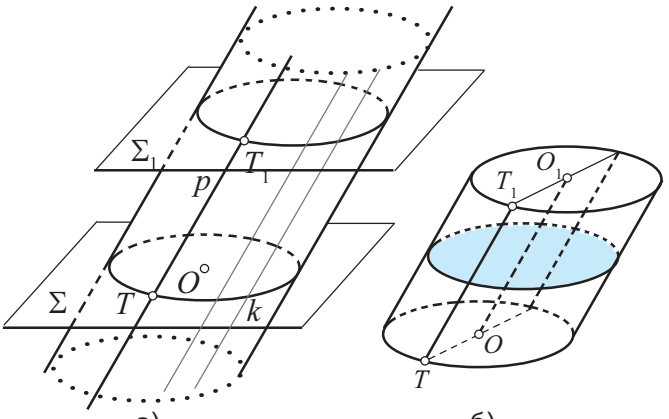
Решение. Плоштината на основата е $B = r^2\pi$. Бидејќи пресекот е правоаголник (на цртежот тоа е $CDEF$) со страни $H = 14$ cm и $t = \overline{CD}$, ќе имаме $14 \cdot t = 84$, $t = 6$ cm. Радиусот $r = \overline{OF}$ на основата ќе го најдеме од правоаголниот триаголник FGO, за кој знаеме дека $\overline{OG} = 4$ cm, $\overline{GF} = \frac{t}{2} = 3$ cm; $r^2 = 4^2 + 3^2 = 25$, $r = 5$ cm.



Значи, $B = 25\pi\ \text{cm}^2$.

5 Висината на еден цилиндар е 7 cm, а радиусот на основата е 5 cm. Пресметај ја плоштината на пресекот што е паралелен со оската на цилиндарот и е на растојание 3 cm од неа.

В ***Забелешка.*** На ист начин како што се добива прав кружен цилиндар, се добива и ***кос кружен цилиндар***, само што дадената „подвижна права" p не е нормална (ни паралелна) на рамнината од дадената кружница, црт. а) и црт. б).



а) б)

Кај кос кружен цилиндар секој паралелен пресек (т.е. пресек со рамнина паралелна на основите) е круг, складен со основите, а секој осен пресек (т.е. пресек со рамнина што минува низ центрите O и O_1 на основите) е ромбоид или ромб, (цртеж б).

Понатаму, „цилиндар" ќе ни значи „прав кружен цилиндар", ако не е поинаку нагласено.

Задачи

1 Колку е должината на дијагоналата на осниот пресек на цилиндар со радиус $7{,}5$ cm и висина 20 cm?

2 Каква форма има осниот пресек на цилиндар којшто е впишан во коцка? (Да се впише цилиндар во коцка значи: основите на цилиндарот да се впишат во два спротивни ѕида на коцката.)

3 Цилиндар со висина 24 cm и дијаметар 40 cm е пресечен со рамнина, паралелна со оската на цилиндарот, така што пресекот е квадрат. Пресметај го растојанието од рамнината до оската.

4 Која точка од оската на цилиндар е еднакво оддалечена од сите точки на кружниците од основите? Образложи го твојот одговор.

5 Цилиндар е опишан околу правилна триаголна призма (т.е. темињата на призмата лежат на кружниците од основите на цилиндарот) со основен раб 6 cm и висина 8 cm. Најди ја плоштината на осниот пресек на цилиндарот.

6 Во цилиндар со висина 3 dm е впишан правоаголен паралелопипед чија дијагонала е 34 cm. Одреди го радиусот на основата на цилиндарот.

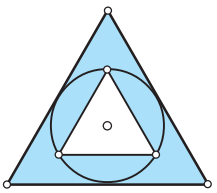
7 Во еден цилиндар, паралелно со оската, поставена е рамнина којашто од кружницата на основата отсекува лак што одговара на централен агол од 120^0. Висината на цилиндарот е 10 cm, а растојанието на оската до рамнината на пресекот е $d = 2$ cm. Пресметај ја плоштината на пресекот.

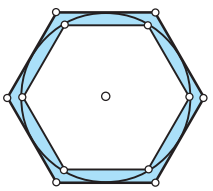
8 Плоштината на основата на еден цилиндар се однесува кон плоштината на осниот пресек како $\pi : 4$. Најди го аголот меѓу дијагоналите на осниот пресек.

7 ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ЦИЛИНДАР

Потсети се!

- Што значи да се впише многуаголник во круг?
- Како дојдовме до поимот плоштина на круг и до формулата за нејзиното пресметување?





- Што се случува со разликата меѓу плоштината на опишаниот и плоштината на впишаниот правилен n-аголник во кругот, кога бројот n се удвојува?

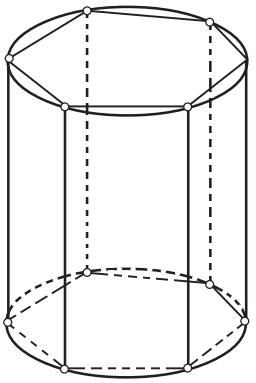
Периметарот L и плоштината P на круг со радиус r се пресметуваат со формулите:

$$L = 2r\pi, \qquad P = r^2\pi.$$

- Ако L е периметарот на основата, а H е висината на права призма, колку е бочната плоштина на призмата?

А Поимите плоштина и волумен на цилиндар се воведуваат аналогно како поимите периметар и плоштина на круг.

- За една призма велиме дека е ***впишана*** во цилиндар ако основите на призмата се впишани во основите на цилиндарот.
- Во цилиндарот (со радиус r и висина H) на цртежот е впишана правилна n-аголна призма.



Да претпоставиме дека бројот n на страните на основата на призмата сме го удвоиле, новиот број страни пак сме го удвоиле итн., добивајќи правилни многуаголници впишани во кружницата. Колку повеќе се зголемува бројот на страните, толку повеќе основата на призмата се приближува кон кружницата, а призмата се повеќе личи на цилиндарот во кој е впишана. Поради тоа, аналогно како за периметар и плоштина на круг, ќе прифатиме дека:

1⁰ Бочните плоштини на така впишуваните призми се стремат кон еден број и тој број го сметаме за ***бочна плоштина*** на цилиндарот.

2⁰ Волумените на така впишуваните призми се стремат кон еден број и тој број го сметаме за ***волумен*** на цилиндарот.

Користејќи го тоа, може да се изведе формула за плоштина и формула за волумен на цилиндар.

- Бочната плоштина на права призма е производ од периметарот L на основата и висината H на призмата, т.е. $L \cdot H$, а волуменот е производ од плоштината B на основата и висината H, т.е. $B \cdot H$.

Кога бројот на страните на основата на впишаната правилна призма „се стреми кон бесконечност”, тогаш периметарот на основата се стреми кон периметарот на кругот, $2r\pi$, а плоштината B кон $r^2\pi$. Според тоа,

бочната плоштина на цилиндар е $\boxed{M = 2r\pi H,}$

а волуменот е $\boxed{V = \pi r^2 H.}$

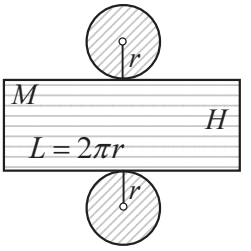
- Плоштината P на цилиндарот е еднаква на збирот од плоштините на двете основи и бочната плоштина: $P = 2B + M$. Бидејќи $B = \pi r^2$ и $M = 2\pi rH$, за плоштината на прав цилиндар ја добиваме формулата

$$\boxed{P = 2\pi r^2 + 2\pi rH, \text{ т.е. } P = 2\pi r\left(r + H\right).}$$

1 Даден е цилиндар со радиус на основата 1 cm и висина $2{,}5$ cm. Нацртај ја мрежата на цилиндарот и одреди ја нејзината плоштина.

Решение. Ако површината на цилиндарот се исече по една генератриса и по периферијата на секоја од основите, ќе се добие мрежата на цилиндарот.

Таа може „да се постави” во рамнината како на цртежот. Мрежата на цилиндарот е составена од два круга (основите) и еден правоаголник (бочната површина). Според тоа,



$P = 2B + M; \quad B = \pi r^2 = \pi \cdot 1^2 \approx 3{,}14 \text{ cm}^2, \quad 2B \approx 6{,}3 \text{ cm}^2;$

$M = 2\pi rH \approx 2 \cdot 3{,}14 \cdot 2{,}5 = 15{,}7 \text{ cm}^2; \quad P \approx 22 \text{ cm}^2.$

2 Цилиндар со висина $4\,\text{dm}$ има бочна плоштина $24\,\text{dm}^2$. Колку е радиусот на основата?

Д Во овој дел ќе разгледаме неколку задачи за плоштина и волумен на цилиндар.

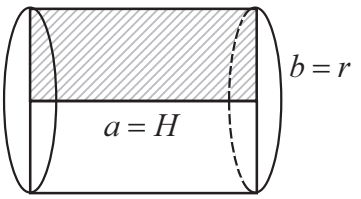
3 Пресметај ја плоштината на цилиндар со радиус на основата $r = 6\,\text{cm}$ и плоштина на осниот пресек $Q = 180 \text{ cm}^2$.

Решение. $P = 2\pi r(r + H); \quad Q = 2r \cdot H, \quad H = \dfrac{Q}{2r} = \dfrac{180}{12} = 15 \text{ cm}; \quad P = 2\pi \cdot 6(6 + 15) = 252\pi \text{ cm}^2.$

4 Колку квадратни метри железна ламарина е потребна за изработка на цилиндричен фабрички оџак, висок $24\,\text{m}$, ако дијаметарот му е $75\,\text{cm}$ и ако за шавовите се предвидува 10% зголемување?

5 Правоаголник со димензии $a = 10\,\text{cm}$ и $b = 6\,\text{cm}$ ротира околу поголемата страна. Пресметај ги плоштината и волуменот на така добиеното тело.

Решение. Така добиеното тело е прав цилиндар со радиус $r = b = 6 \text{ cm}$ и висина $H = a = 10 \text{ cm}$. Значи,



$P = 2\pi r(r + H) = 2\pi \cdot 6(6 + 10) = 192\pi \text{ cm}^2;$

$V = \pi r^2 H = \pi \cdot 6^2 \cdot 10 = 360\pi \text{ cm}^3.$

6 **Т** Бакарна жица долга $125\,\text{m}$ има маса $500\,\text{g}$. Пресметај го дијаметарот на жицата ако специфичната густина на бакарот е $8{,}9\,\text{g/cm}^3$.

7 **Е, 3** Едно буре во вид на цилиндар со дијаметар $80\,\text{cm}$ и висина $1{,}5\,\text{m}$ е полно со нафта. Колку денари е платено за нафтата во бурето ако $1\,\ell$ нафта чини 50 денари?

Решение. Волуменот на бурето е $V = \pi r^2 H; \quad r = 4 \text{ dm}, \quad H = 15 \text{ dm};$

$V = \pi \cdot 16 \cdot 15 \approx 753{,}982 \text{ dm}^3,$ што значи дека во бурето има (приближно) $754\,\ell$ нафта.

Целото количество нафта чинело $754 \cdot 50 = 37700$ денари.

8 **Т** Базен во вид на цилиндар собира $1000\ \mathrm{m}^3$ вода, а неговиот дијаметар е $25\ \mathrm{m}$.
а) Колку е длабок базенот?
б) Колку кубни метри бетон е потрошен за да се направи околниот ѕид и дното ако нивната дебелина е $50\ \mathrm{cm}$?

В ***Забелешка.*** Волуменот на кос кружен цилиндар со радиус r на основата и висина H (т.е. со растојание H меѓу рамнините на основите) се пресметува со истата формула како за цилиндар: $V = \pi r^2 H$. (Но, бочната плоштина не се пресметува со формулата $M = 2r\pi H$.)

Задачи

1 Од квадрат со страна $a\ (= 20\,\mathrm{cm})$ е свиткана бочна површина на цилиндар. Најди ја плоштината B на основата.

2 **Т** Цилиндричен парен котел има дијаметар $1\ \mathrm{m}$ и должина $4{,}5\ \mathrm{m}$. Колку е силата на пареата врз целата површина на котелот ако притисокот е $8\ \mathrm{kg/m3}$?

3 **Е, З** Колкаво количество нафта (во тони) собира цилиндрична цистерна со дијаметар $2\ \mathrm{m}$ и должина $6\ \mathrm{m}$ ако специфичната густина на нафтата е $0{,}85\ \mathrm{g/cm^3}$?

4 **Т, З** Во едно земјоделско стопанство изсидале бунар длабок $7\ \mathrm{m}$, со внатрешен дијаметар $1{,}2\ \mathrm{m}$ и дебелина на ѕидот $30\ \mathrm{cm}$. Со колку кубни метри камен е изсидан тој бунар?

5 **Т, З** Греда со форма на цилиндар со дијаметар $60\ \mathrm{cm}$ и должина $6{,}4\ \mathrm{m}$ треба да се обработи во правилна шестаголна призма, така што да има што е можно помалку отпадоци. Колку кубни метри отпадоци ќе има?

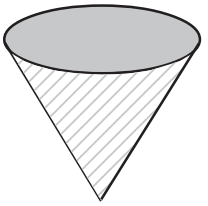
6 **З, Е** Еден силос со форма на цилиндар со висина $15\ \mathrm{m}$ и дијаметар на основата $4\ \mathrm{m}$ е наполнет со жито.
а) Колку тони жито има во силосот ако масата на $1\ \mathrm{dm}^3$ жито е $1{,}17\ \mathrm{kg}$?
б) Колку денари чини житото во силосот ако $1\ \mathrm{kg}$ жито чини 12 денари?

7 **Т, З** Од стебло со облик на цилиндар чиј дијаметар на основата е $28\ \mathrm{cm}$, а должината е $4{,}5\ \mathrm{m}$, изделкана е греда со пресек на квадрат со најголема можна страна. Колку проценти (од волуменот на стеблото) изнесува отпадокот?

8 **Т, Е** Железна цевка со дебелина на ѕидот $2\ \mathrm{cm}$ и надворешен дијаметар $440\ \mathrm{mm}$ е долга $1{,}5\ \mathrm{m}$, а специфичната густина на железото е $7{,}8\ \mathrm{g/cm^3}$.
а) Процени дали би можел да ја подигнеш цевката на раце (ти или некој твој силен другар од класот).
б) Пресметај ја масата на цевката.
в) Колку kg боја е потребна за да се обои целата површина на цевката (вклучувајќи ја и „внатрешната површина”) ако со $1\ \mathrm{kg}$ боја може да се премачкаат $4\ \mathrm{m}^2$?

8 КОНУС. ПРЕСЕЦИ НА КОНУС СО РАМНИНА

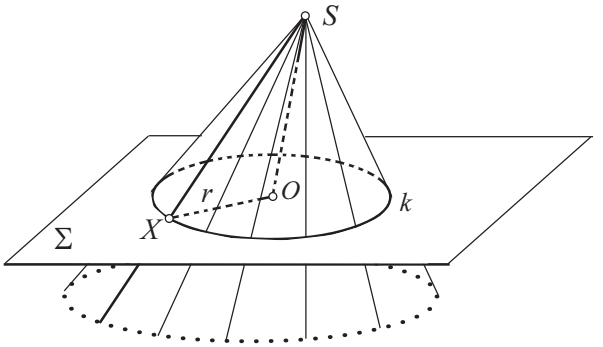
Потсети се!



- Во секојдневието често се среќаваат објекти со форма на конус.
- Наброј неколку предмети што имаат конусна форма.
- Како се добива цилиндрична површина?
- Што е генератриса, а што е директриса на цилиндричната површина?

А Геометриско тело со конусна форма, т.е. конус може да се добие на сличен начин како што се добива цилиндар.

- На цртежот е претставена кружница k со центар O и радиус r во рамнината Σ и точка S што не лежи на Σ.



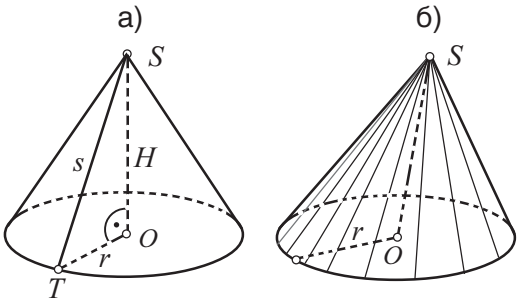
На кружницата k е избрана точка X и е повлечена полуправата SX. Да замислиме дека точката X се движи по кружницата (т.е. полуправата SX „се лизга по кружницата"), поминувајќи ја целата кружница.

- На тој начин се добива една површина што се вика ***конусна површина***. Подвижната полуправа се вика ***генератриса*** (или изводница), кружницата k - ***директриса***, точката S - ***врв***, а правата SO - ***оска*** на конусната површина.

Делот од просторот ограничен со кругот што го отсекува конусната површина од рамнината и со делот на конусната површина од врвот до кругот се вика ***конус***.

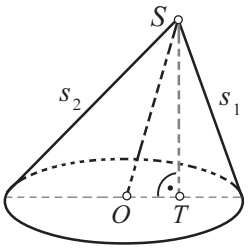
Кругот се вика ***основа***, а делот од конусната површина - ***бочна површина*** на конусот.

- Ако оската SO е нормална на основата, тогаш добиеното тело е ***прав конус*** (црт. а); во спротивниот случај тоа е ***кос конус*** (црт. б).
- Натаму „***конус***" ќе ни значи „***прав конус***", ако не е поинаку нагласено.



- Растојанието од врвот до основата (како и самата отсечка SO) се вика ***висина*** на конусот. Секоја отсечка чии крајни точки се врвот S и која било точка T од кружницата на основата се вика ***генератриса*** или ***изводница***. Сите генератриси на еден конус се еднакви меѓу себе.

- Изводниците кај кос конус не се еднакви меѓу себе. При цртањето на кос конус најчесто се прикажуваат најмалата изводница (s_1) и најголемата изводница (s_2).

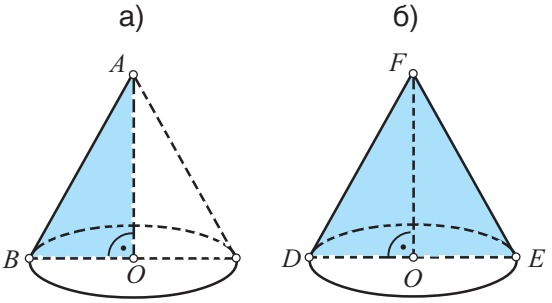


- Ако r е радиусот на основата, H висината и s должината на изводницата на прав конус, тогаш

$$r^2 + H^2 = s^2.$$

1 Висината на еден конус е $30\,\text{cm}$, а изводницата е $34\,\text{cm}$. Колку е дијаметарот на основата?

- Конус може да се добие и со ротација на правоаголен триаголник околу една негова катета (цртеж а) или со ротација на рамнокрак триаголник околу неговата оска на симетрија (цртеж б).



2 Рамнокрак триаголник со крак $9\,\text{cm}$ и висина $7\,\text{cm}$ кон основата ротира околу оската на симетрија. Пресметај ја плоштината B на основата на добиениот конус.

- $B = r^2\pi; \quad r^2 = 9^2 - 7^2 = 32; \quad B = 32\pi\,\text{cm}^2.$

Потсети се!

- Што подразбираме под пресек на цилиндар со рамнина?
- Кој пресек се вика паралелен, а кој осен пресек кај цилиндарот?
- Како гласи теоремата за паралелни пресеци кај пирамида?

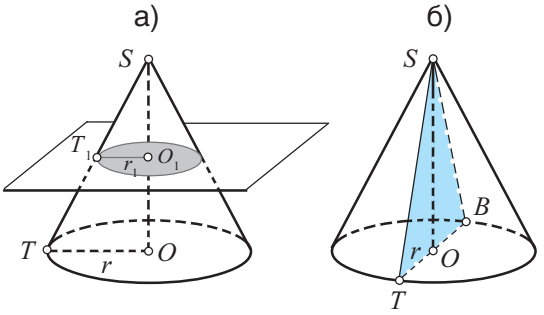
- Паралелните пресеци на конус (а и на кос конус) се кругови (цртеж а), а осните пресеци се триаголници (цртеж б).

- Каков вид триаголници се осните пресеци на конусот?
- Какви се меѓу себе осните пресеци на еден конус?

Б Пресекот на конус со рамнина се вика:

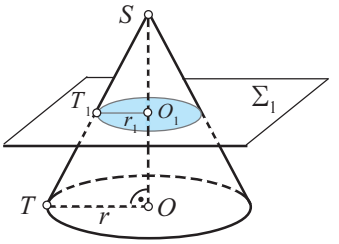
– ***паралелен пресек***, ако рамнината е паралелна со основата на конусот;

– ***осен пресек***, ако рамнината минува низ оската на конусот.



3 Конусот на цртежот е пресечен со рамнина Σ_1 паралелна со основата. Во врска со паралелниот пресек покажи дека:

а) $\overline{ST}:\overline{ST_1}=\overline{SO}:\overline{SO_1}=\overline{TO}:\overline{T_1O_1}$; б) $r^2\pi : r_1^2\pi = \overline{SO}^2 : \overline{SO_1}^2$.



Решение. Разгледај го цртежот и воочи ги правоаголните триаголници TOS и T_1O_1S. Тие се слични (зошто?), па соодветните страни им се пропорционални, т.е. важат равенствата под а).

Од $r=\overline{TO}$, $r_1=\overline{T_1O_1}$ и равенството $\overline{TO}:\overline{T_1O_1}=\overline{SO}:\overline{SO_1}$ од а), по квадрирањето следува дека $r^2 : r_1^2 = \overline{SO}^2 : \overline{SO_1}^2$ и $r^2\pi : r_1^2\pi = \overline{SO}^2 : \overline{SO_1}^2$, т.е. точно е равенството б).

- Последното равенство може да се запише и вака: $\boxed{B : B_1 = \overline{SO}^2 : \overline{SO_1}^2,}$

каде што B е плоштината на основата, а B_1 е плоштината на паралелниот пресек.

Со тоа ја докажавме следнава теорема (за паралелните пресеци на конус).

Теорема. Ако конусот се пресече со рамнина што е паралелна со основата, тогаш:

1⁰. Генератрисата и висината се поделени со пресекот во ист однос.

2⁰. Плоштината на основата и плоштината на паралелниот пресек се однесуваат како квадратите на нивните растојанија до врвот на конусот.

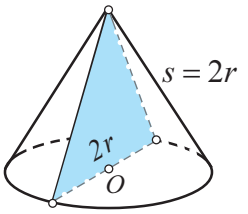
- Оваа теорема важи и за кос конус.

4 Плоштината на основата на еден конус е $B=54\ \text{cm}^2$, а паралелниот пресек што е на растојание $H_1=8\ \text{cm}$ од врвот има плоштина $B_1=24\ \text{cm}^2$. Одреди ја висината H на конусот.

Решение. Според **2⁰**, од $B:B_1=H^2:H_1^2$ се добива дека $H=\sqrt{\dfrac{B\cdot H_1^2}{B_1}}=\sqrt{\dfrac{54\cdot 8^2}{24}}=12,\ H=12\ \text{cm}.$

5 Пресметај ја плоштината Q на осниот пресек на конус со висина $H=20\ \text{cm}$ и генератриса $s=25\ \text{cm}$.

- Конус чиј осен пресек е рамностран триаголник, т.е. $s=2r$ се вика ***рамносшран конус***.



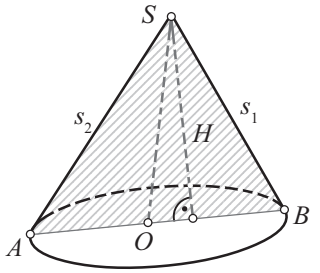
- Каков вид триаголник е осниот пресек на рамностран конус?

6 Пресметај ја плоштината Q на осниот пресек на рамностран конус ако периметарот на пресекот е $L=24\ \text{cm}$.

Решение. Од $L = 24\ \text{cm}$, т.е. $3s = 24\ \text{cm}$, се добива дека $s = 8\ \text{cm}$, па $P = \frac{s^2\sqrt{3}}{4} = 16\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

7 Одреди ги плоштината и висината H на оној осен пресек на кос конус што минува низ најмалата изводница $13\ \text{dm}$ и најголемата $15\ \text{dm}$, ако радиусот на основата е $7\ \text{dm}$.

Решение. Осниот пресек за кој станува збор во задачата е ΔSAB (на цртежот). Неговата плоштина Q ќе ја одредиме со Хероновата формула:



$$Q = \sqrt{s(s-2r)(s-s_1)(s-s_2)}, \qquad s = \frac{2r+s_1+s_2}{2} = \frac{14+13+15}{2} = 21,$$

$Q = \sqrt{21\cdot 7\cdot 8\cdot 6} = 84, \qquad Q = 84\,\text{dm}^2$. Од $Q = \frac{2r\cdot H}{2}$ следува дека

$$H = \frac{Q}{r} = \frac{84}{7} = 12\,\text{dm}.$$

Задачи

1 Еден конус има дијаметар $2r\,(=12\,\text{cm})$ и осен пресек правоаголен триаголник (правиот агол е при врвот на конусот). Пресметај ја плоштината Q на пресекот.

2 Рамнокрак правоаголен триаголник со хипотенуза $s\left(=5\sqrt{2}\,\text{cm}\right)$ ротира околу едната катета. Пресметај ја плоштината Q на осниот пресек на така добиениот конус.

3 Односот меѓу плоштината на основата на еден конус и плоштината на осниот пресек е π. Пресметај го аголот α под кој е наклонета генератрисата кон основата.

4 Пресметај ја плоштината Q на осниот пресек на конус со радиус $r\,(=15\,\text{cm})$ и генератриса наклонета кон основата под агол $\alpha = 30^0$.

5 Висината на конусот е $15\ \text{cm}$, а периметарот на осниот пресек е $90\ \text{cm}^2$. Одреди го радиусот на конусот.

6 Висината на конусот е $18\ \text{cm}$, радиусот на основата е $6\ \text{cm}$, а плоштината на еден паралелен пресек на конусот е $16\pi\,\text{cm}^2$. Одреди го растојанието на пресекот до основата. Кој резултат ќе се добие ако наместо „конус" стои „кос конус"?

7 Висината на еден конус е H. На кое растојание H_1 од врвот на конусот треба да се постави рамнина паралелна со основата за да биде плоштината P_1 на пресекот петтина од плоштината на основата?

8 Радиусот на основата на еден конус е $r\,(=6\,\text{cm})$. Низ точката што ја дели висината во однос $2:1$ (од врвот кон основата) поставена е рамнина паралелна со основата. Пресметај ја плоштината B_1 на добиениот пресек.

9 Одреди ја висината на кос конус со радиус $5\ \text{dm}$ и плоштината на оној негов осен пресек што минува низ најголемата изводница $8\ \text{dm}$ и најмалата $6\ \text{dm}$. Кој вид триаголник е осниот пресек?

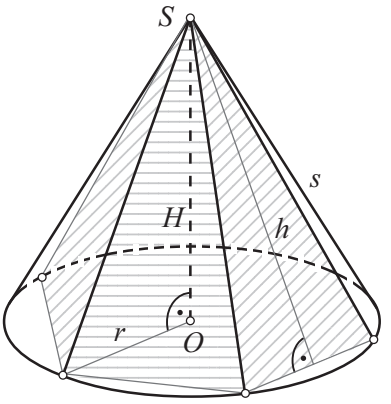
9 ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА КОНУС

Пошсеши се!

- Како дојдовме до поимот плоштина на цилиндар и до формулата за нејзиното пресметување?
- Периметарот на основата на правилна n-аголна пирамида е $L_n = 24$ cm, апотемата е $h_n = 5$ cm.
  Колку изнесува бочната плоштина M_n?

А Поимите плоштина и волумен на конус се воведуваат аналогно како за цилиндар.

- За една пирамида велиме дека е ***впишана*** во конус ако основата на пирамидата е впишана во основата на конусот, а врвовите им се совпаѓаат.



- Во конусот со радиус r и изводница s (на цртежот) е впишана правилна n-аголна пирамида.

Да замислиме дека бројот на страните на основата на пирамидата сме го удвоиле, новиот број пак сме го удвоиле итн., добивајќи правилни многуаголници впишани во кружницата што е периферија на основата од конусот.

- Што се случува со периметарот L_n на основата и со апотемата h_n на впишаната пирамида?
- На тој начин основата на пирамидата „се приближува кон кругот" во кој е впишана, апотемата h_n се приближува кон изводницата s на конусот, па пирамидата „преминува" во конусот во кој е впишана. Затоа ќе ги прифатиме следните два става.

1⁰ Бочните плоштини на така впишуваните пирамиди се стремат кон еден број (да го означиме со M); тој број ќе го сметаме за ***бочна плоштина*** на конусот.

2⁰ Волумените на така впишаните призми се стремат кон еден број (да го означиме со V); тој број го сметаме за ***волумен*** на конусот.

Врз основа на тоа, можеме да изведеме формула за пресметување плоштина на бочната површина и формула за волуменот на конус.

- Плоштината на бочната површина на правилна n-аголна пирамида впишана во конус (со радиус r и изводница s) е:

$$M_n = \frac{1}{2} L_n \cdot h_n,$$

каде што L_n е периметарот на основата, а h_n е апотемата на пирамидата.

Кога n неограничено расте (т.е. кога n „се стреми кон бесконечност”), L_n се стреми кон периметарот на основата од конусот, т.е. $L_n \to 2\pi r$, а $h_n \to s$, па

$$M_n = \frac{1}{2} L_n \cdot h_n \to \frac{1}{2} 2\pi rs = \pi rs.$$

Според тоа, бочната плоштина на конус со радиус r и изводница s е

$$\boxed{M = \pi rs.}$$

1 Пресметај ја бочната плоштина на конус со радиус $r = 8$ cm и висина $H = 15$ cm.

Решение. $M = r\pi s$; $s^2 = r^2 + H^2 = 8^2 + 15^2 = 289$; $s = 17$ cm; $M = \pi \cdot 8 \cdot 17 = 136\pi$ cm^2.

Запомни!

Плоштината P на конус е збир од плоштината B на основата и бочната плоштина M:

$$P = \pi r^2 + \pi rs, \text{ т.е. } P = \pi r(r+s).$$

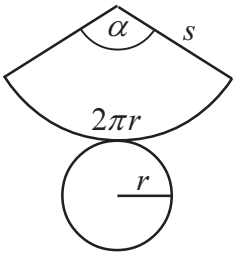
2 Пресметај ја плоштината на конус со висина $H = 30$ cm и изводница $s = 34$ cm.

Решение. $P = \pi r(r+s)$; $r^2 = s^2 - H^2 = 34^2 - 30^2 = 256$; $r = 16$ cm;

$P = \pi \cdot 16(16+34) = 16 \cdot 50\pi = 800\pi$ cm^2.

3 Висината на еден конус е 1,4 dm, а периметарот на основата е $9{,}6\pi$ dm. Пресметај ја плоштината на конусот.

- Ако површината на конус со радиус r и изводница s се расече по една генератриса и по кружницата на основата, може да се воочи дека ***мрежата на конусот*** е составена од еден круг (основата) и еден кружен исечок (бочната површина).
- Користејќи ја формулата за должина на кружен лак, покажи дека за централниот агол α (на цртежот) важи: $\alpha = \frac{2\pi r}{s}$ rad.



Потсети се!

- Како дојдовме до формулата за пресметување волумен на цилиндар?
- Колку е волуменот на пирамида со висина H и плоштина B на основата?

Формулата за пресметување волумен на конус се добива аналогно како за цилиндар.

Како што спомнавме, со зголемувањето на бројот n на основните рабови, пирамидата „се приближува кон конусот” и разликата меѓу нивните волумени се стреми кон нула кога n „се стреми кон бесконечност”. Од тоа што волуменот на пирамидата е $\frac{1}{3}B\cdot H$, а B се стреми кон πr^2, следува дека волуменот на конусот е

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2 H.$$

(Со оваа формула се пресметува волуменот и на кос конус.)

4 Пресметај го волуменот V на конус со радиус $r=7\ \text{cm}$ и бочна плоштина $M=175\pi\ \text{cm}^2$.

$V=\frac{1}{3}\pi r^2 H;\quad H^2=s^2-r^2;\quad M=\pi rs,\ 175\pi=\pi\cdot 7\cdot s,\quad s=25\ \text{cm};$

$H=\sqrt{25^2-7^2}=\sqrt{576}=24\,\text{cm},$ па $V=\frac{1}{3}\pi\cdot 7^2\cdot 24,\qquad V=392\pi\ \text{cm}^3.$

5 а) Изведи ги формулите за пресметување плоштина и волумен на рамностран конус.
б) Пресметај го волуменот на рамностран конус со плоштина $36\pi\ \text{cm}^2$.

Решение. а) Бидејќи $s=2r$ и $H=\sqrt{s^2-r^2}=\sqrt{4r^2-r^2}=r\sqrt{3},$ имаме:

$P=\pi r(r+s)=\pi r(r+2r)=3\pi r^2;\quad V=\frac{1}{3}\pi r^2 H=\frac{1}{3}\pi r^2\cdot r\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3.$ Значи:

За рамностран конус важат формулите

$$P=3\pi r^2;\qquad V=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3.$$

б) $V=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi r^3;$ од $P=36\pi\,\text{cm}^2,$ т.е. $3\pi r^2=36\pi$ добиваме $r=2\sqrt{3}\,\text{cm},$ па

$V=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi\cdot\left(2\sqrt{3}\right)^3=24\pi\,\text{cm}^3.$

6 Пресметај ги плоштината и волуменот на конус чијашто генератриса е за $2\ \text{cm}$ поголема од висината, а дијаметарот на основата е $1{,}6\ \text{dm}$.

Задачи

1 Во каков однос се бочната плоштина и плоштината на основата на конус со изводница s и радиус r? Во кој конус тој однос е $2:1$?

2 **Е, 3** Покривот на еден силос има облик на конус. Висината на покривот е $2{,}5\ \mathrm{m}$, а дијаметарот е $6\ \mathrm{m}$. Колку листови лим се потребни за покривање на покривот, ако листот има правоаголна форма со димензии $0{,}8\ \mathrm{m}$ и $1{,}5\ \mathrm{m}$ и ако на шавовите отишле 10% од потребниот лим?

3 **Е, 3** Еден шатор во вид на конус со висина $3{,}2\ \mathrm{m}$ и со периметар на основата $15{,}1\ \mathrm{m}$ е покриен со некое дебело платно. Колку денари е платено за платното ако $1\ \mathrm{m}^2$ платно чинело 160 денари?

4 Во каков однос се волумените на два конуса со еднакви висини ако дијаметрите на основите им се соодветно $68\ \mathrm{cm}$ и $1{,}36\ \mathrm{m}$?

5 **Т** Колкава е масата на рамностран конус од сребро со радиус на основата $3\ \mathrm{cm}$ (ако специфичната густина на среброто е $10{,}51\ \mathrm{g/cm^3}$)?

6 **3** Колку кубни метри има една копа сено во вид на конус ако периметарот на основата е $12\ \mathrm{m}$, а изводницата е $10\ \mathrm{m}$?

7 Еден паралелен пресек на прав цилиндар е земен за основа на конус чијшто врв се совпаѓа со центарот на горната основа на цилиндарот. Најди во каков однос се разделува висината со паралелниот пресек ако бочната површина на конусот го разделува цилиндарот на два дела со еднакви волумени.

8 Колку чаши со форма на конус со радиус $r = 4\,\mathrm{cm}$ и $s = 6\,\mathrm{cm}$ може да се наполнат од сад што содржи $5\ \ell$ вода?

9 Рамностран конус и рамностран цилиндар немаат заеднички внатрешни точки, а имаат заедничка основа со дијаметар $6\ \mathrm{dm}$. Одреди ги а) плоштината P и б) волуменот V на тоа геометриско тело.

10 Правоаголен триаголник со катети $a = 15\,\mathrm{cm}$ и $b = 20\,\mathrm{cm}$ ротира околу хипотенузата. Пресметај ги плоштината и волуменот на така добиеното тело.

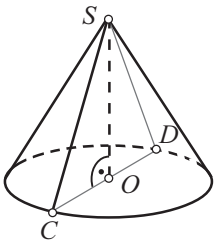
11 **Т** Треба да се превезат 20 еднакви купови песок во вид на конус. Периметарот на основата на секој куп е $9{,}5\ \mathrm{m}$, а висината на купот е $2\ \mathrm{m}$. Масата на $1\ \mathrm{m}^3$ песок е $1{,}5\ \mathrm{t}$. Колку петтонски камиони се потребни за тој превоз?

12 Најмалата изводница на еден кос конус е $9\ \mathrm{cm}$, а најголемата $12\ \mathrm{cm}$. Одреди го волуменот на тој конус ако осниот пресек е правоаголен триаголник чии катети се дадените изводници.

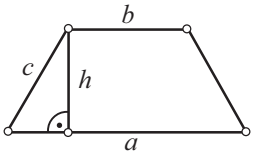
10 ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ПОТСЕЧЕН КОНУС

Пошсеши се!

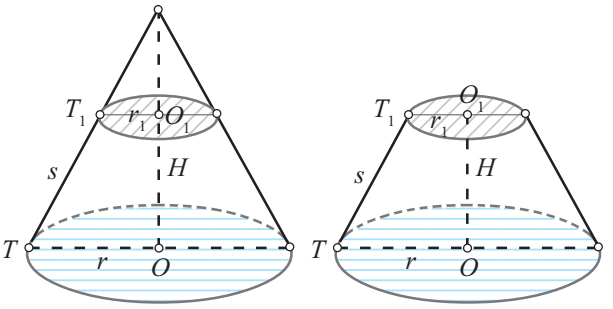
- На цртежот е претставен конус. Што е: основа, врв, генератриса, бочна површина и висина на конус?
- Што е паралелен, а што осен пресек на конус?



- Пресметај ја плоштината на рамнокрак трапез со основи $a = 14$ cm, $b = 8$ cm и крак $c = 5$ cm.

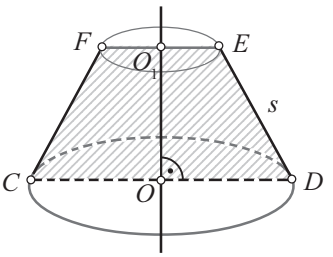


А На цртежот а) е претставен конус со еден негов паралелен пресек, а на цртежот б) е претставен издвоено делот меѓу основата и пресекот.



а) б)

- Делот од конусот зафатен меѓу основата и еден паралелен пресек на конусот се вика ***пошсечен конус***. Делот на конусот од врвот до паралелниот пресек се вика ***дополнение*** на потсечениот конус.
- Основата и паралелниот пресек на конусот се викаат ***основи***, отсечката чии крајни точки се центрите на основите се вика ***оска***, растојанието меѓу основите - ***висина***, делот од генератрисата на конусот зафатен меѓу основите се вика ***генератриса*** (или ***изводница***) на потсечениот конус.
- Секој осен пресек на потсечен конус е рамнокрак трапез.
- Потсечен конус може да се добие и со ротација на правоаголен трапез околу помалиот крак (на цртежот трапезот $ODEO_1$) или со ротација на рамнокрак трапез околу оската на симетрија (на цртежот трапезот $CDEF$).

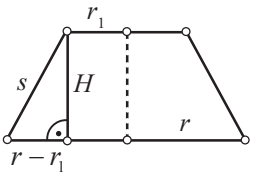


- Кои отсечки при ротацијата ги формираат основите, а која отсечка ја формира бочната површина?

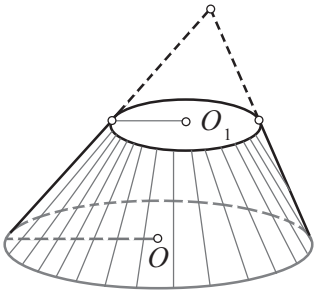
1 Пресметај ја плоштината Q на осниот пресек на потсечен конус со радиуси на основите $r = 11$ cm, $r_1 = 5$ cm и должина на генератрисата $s = 10$ cm.

Решение. $Q = \dfrac{2r + 2r_1}{2} \cdot H$; $H^2 = s^2 - (r - r_1)^2 = 10^2 - 6^2 = 64$,

$H = 8$ cm; $Q = (r + r_1) \cdot H = 16 \cdot 8$, $Q = 128$ cm^2.



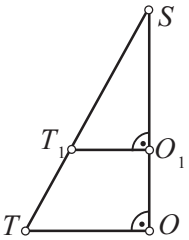
2 Висината на потсечен конус е $12\ \text{cm}$, радиусот на поголемата основа е $7\ \text{cm}$, а плоштината на осниот пресек е $108\ \text{cm}^2$. Пресметај го радиусот на помалата основа.



Забелешка. Делот од кос конус што се наоѓа меѓу еден паралелен пресек и основата на конусот се вика ***кос потсечен конус***.

Потсети се!

- Објасни зошто се слични триаголниците TOS и T_1O_1S (на цртежот). Какви се меѓу себе соодветните страни на слични триаголници?



- Со која општа формула се пресметува:
  а) плоштина на потсечена пирамида;
  б) волумен на потсечена пирамида?

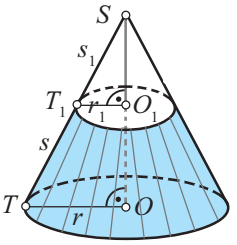
Б Плоштината на потсечен конус е еднаква на збирот од плоштините на основите и плоштината на бочната површина:

$$P = B + B_1 + M,$$

каде што $B = \pi r^2$, $B_1 = \pi r_1^2$ се плоштини на основите, а M е бочната плоштина.

3 Бочната плоштина M на потсечен конус е разлика меѓу бочната плоштина на целиот конус и бочната плоштина на дополнението. Користејќи го тоа, одреди ја бочната плоштина M на потсечен конус со дадени радиуси r и r_1 на основите и изводница s.

Решение. Разгледај го цртежот и следи го решението.



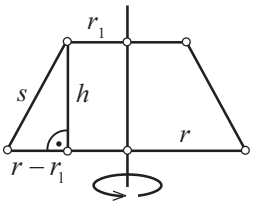
$M = \pi r \cdot \overline{ST} - \pi r_1 \cdot \overline{ST_1} = \pi r\left(s + s_1\right) - \pi r_1 s_1 = \pi r s + \pi r s_1 - \pi r_1 s_1$, т.е. $M = \pi r s + \pi\left(r - r_1\right) \cdot s_1$. Триаголниците SOT и SO_1T_1 се слични, поради што нивните соодветни страни се пропорционални, па $\dfrac{r}{r_1} = \dfrac{s_1 + s}{s_1}$, од каде што $s_1 = \dfrac{s \cdot r_1}{r - r_1}$. Заменувајќи го ова во последното равенство за M, се добива $M = \pi r s + \pi\left(r - r_1\right) \cdot \dfrac{s r_1}{r - r_1} = \pi r s + \pi r_1 s$, т.е. $M = \pi\left(r + r_1\right) s.$

Запомни!

Плоштината на потсечен конус, $P = B + B_1 + M$, при дадени r, r_1 и s_1 може да се пресмета со формулата

$$P = \pi r^2 + \pi r_1^2 + \pi\left(r + r_1\right) s, \quad \text{т.е.} \quad P = \pi\left(r^2 + r_1^2 + \left(r + r_1\right) \cdot s\right).$$

4 Пресметај ја плоштина P на потсечениот конус што се добива со ротација на рамнокрак трапез (околу оската на симетрија), чии основи се $a = 14\,\text{cm}$, $b = 8\,\text{cm}$, а висината е $h = 4\,\text{cm}$.

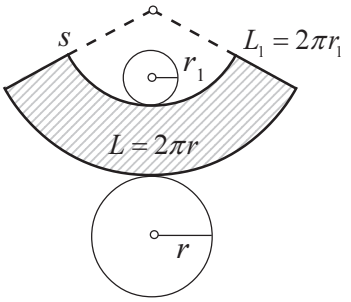


Решение. $P = \pi\left(r^2 + r_1^2 + (r + r_1)\cdot s\right)$, каде што $r = 7\,\text{cm}$, $r_1 = 4\,\text{cm}$,

$s = \sqrt{(r - r_1)^2 + h^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,\text{cm}$; $P = \pi\left(7^2 + 4^2 + 11\cdot 5\right)$, $P = 120\pi\ \text{cm}^2$.

Бочната површина на потсечен конус може „да се развие” и да се положи на рамнина, како на цртежот. Тогаш таа личи на „криволиниски рамнокрак трапез” со „основи” $L = 2\pi r$, $L_1 = 2\pi r_1$ и „висина” s, па

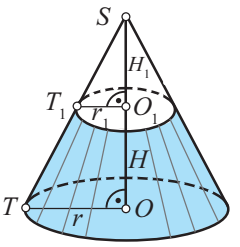
$$\frac{L + L_1}{2}\cdot s = \pi\left(r + r_1\right)\cdot s = M.$$



5 Пресметај ја бочната плоштина M, а потоа и целата плоштина P на потсечен конус со радиуси на основите $10\ \text{cm}$ и $5\ \text{cm}$, а изводницата е $7\ \text{cm}$.

6 Пресметај ја плоштината на потсечен конус, ако $r = 20\,\text{cm}$, $r_1 = 13\,\text{cm}$ и $H = 24\,\text{cm}$.

В Волуменот на потсечен конус (види цртеж) е еднаков на разликата од волуменот на целиот конус и волуменот на дополнението.



7 Изведи формула за пресметување волумен V на потсечен конус, со дадени r, r_1 на основите и висина H.

Решение. Воочи го цртежот.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2\cdot\overline{SO} - \frac{1}{3}\pi r_1^2\cdot\overline{SO_1} = \frac{1}{3}\pi r^2\left(H + H_1\right) - \frac{1}{3}\pi r^2\cdot H_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 H + \frac{1}{3}\pi\left(r^2 - r_1^2\right)\cdot H_1.$$

Од сличноста на триаголниците SOT и SO_1T_1 имаме: $\dfrac{r}{r_1} = \dfrac{H + H_1}{H_1}$, од каде што $H_1 = \dfrac{r_1 H}{r - r_1}$,

па $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 H + \dfrac{1}{3}\pi\left(r - r_1\right)\left(r + r_1\right)\cdot\dfrac{r_1 H}{r - r_1}$, т.е.

$$\boxed{V = \frac{H\pi}{3}\left(r^2 + r_1^2 + r\,r_1\right).}$$

Забелешка. Волуменот на кос потсечен конус се пресметува со помош на истата формула.

8 Колку литри течност може да се смести во сад што има форма на потсечен конус, чии дијаметри на основите се $0{,}8$ m и $1{,}9$ m, а висината е 1 m?

Решение. $V=\frac{H\pi}{3}\left(r^2+r_1^2+r\,r_1\right)$; $r=0{,}95$ m, $r_1=0{,}4$ m, $H=1$ m;

$V=\frac{\pi}{3}\left(0{,}9025+0{,}16+0{,}38\right)=\frac{\pi}{3}\cdot 1{,}4425\approx\frac{4{,}52}{3}$, $V\approx 1{,}51$ m^3. Значи, садот може да собере околу $1510\,\ell$ течност.

9 Пресметај ги плоштината и волуменот на потсечен конус со висина $H=4{,}8$ cm, плоштина на поголемата основа $B=100\pi$ cm^2 и $r:r_1=5:4$.

Задачи

1 Радиусите на основите на потсечен конус се $r=7$dm и $r_1=4$dm. Пресметај ја бочната плоштина на тој потсечен конус ако неговата генератриса е наведната кон рамнината на основата под агол од 60^0.

2 Правоаголен трапез со основи $a=14$cm, $b=9$cm и помалиот крак $c=12$cm, ротира околу помалиот крак. Пресметај ја плоштината на така добиениот потсечен конус.

3 Пресметај ја плоштината на потсечен конус со радиуси на основите 9 cm и 6 cm, а висина на дополнението 8 cm.

4 Во еден потсечен конус радиусите на основите се 1 dm, 5 dm и изводницата е 5 dm. Одреди го радиусот на цилиндар што има еднаква висина и еднаква бочна плоштина како потсечениот конус.

5 **3** Боров труп долг $15{,}5$ m има дијаметри на двата краја 22 cm и 28 cm. За да му го пресметаат волуменот, ја помножиле плоштината на средниот паралелен пресек со должината на трупот. Одреди ја грешката што е направена со таквото пресметување.

6 Рамнокрак трапез со основи 20 cm и 12 cm и плоштина 48 cm^2 ротира околу оската на симетрија. Пресметај ги плоштината и волуменот на добиеното тело.

7 **E** Една фигура со форма на потсечен конус со дијаметри на основите $6{,}4$ cm и 4 cm и изводница $3{,}7$ cm, направена е од злато.
а) Колкава е масата на фигурата?
б) Колку денари чини златото од таа фигура ако 1 g злато чини 750 денари, а специфичната густина на златото е $19{,}3$ g/cm^3?

8 **T** Една кофа, направена од лим, има форма на потсечен конус со дијаметри на основите 24 cm и 40 cm и висина 35 cm.
а) Колку литри вода собира кофата?
б) Колку квадратни метри лим е набавен за изработка на 50 такви кофи ако се знае дека 15% од употребениот лим е отпадок?

9 Радиусите на основите на потсечен конус и изводницата се однесуваат како $11:4:25$, а неговиот волумен е 181π cm^3. Пресметај ја плоштината на потсечениот конус.

11 ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1 Дијагоналата на основата на правилна четириаголна призма има должина $a = 6\sqrt{2}\,\text{cm}$, а дијагоналата на бочниот ѕид има должина $b = 8\,\text{cm}$. Пресметај ја должината d на дијагоналата на призмата.

2 Бочниот раб на една коса призма е $b = 20\,\text{cm}$ и со рамнината на основата зафаќа агол $\alpha = 45^0$. Одреди ја висината на призмата.

3 Основниот раб на правилна шестаголна призма е $a = 3\,\text{m}$, а дијагоналата на бочниот ѕид е $d = 6\,\text{m}$. Пресметај го волуменот на призмата.

4 **Т, 3** Базен во форма на квадар има димензии $15\ \text{m}$, $6\ \text{m}$ и $2{,}5\ \text{m}$. За колку време ќе се наполни базенот ако во него се влеваат $25\,\ell$ вода во секунда?

5 На кое растојание од врвот на дадена пирамида е направен паралелен пресек ако висината на пирамидата е $15\ \text{cm}$, плоштината на основата е $18\ \text{dm}^2$, а плоштината на пресекот е $8\ \text{dm}^2$?

6 Висината на правилна четириаголна пирамида е $14\ \text{cm}$, а плоштината на дијагоналниот пресек е $112\sqrt{2}\,\text{cm}^2$. Пресметај ги должината на бочниот раб и плоштината на основата.

7 Пресметај ја плоштината на бочната површина на правилна шестаголна пирамида со основен раб $1{,}8\ \text{m}$ и бочен раб $4{,}1\ \text{m}$.

8 **Е, 3** Од $12{,}8\ \text{m}^2$ платно треба да се направи шатор во облик на правилна четириаголна пирамида со плоштина на основата $10{,}24\ \text{m}^2$ (основата не треба да се обложи со платно). Колкави ќе бидат: висината H, основниот раб a и волуменот V на шаторот?

9 Основните рабови на една правилна триаголна потсечена пирамида се $6\ \text{dm}$ и $12\ \text{dm}$, а висината е $1\ \text{dm}$. Пресметај ги: а) бочната плоштина; б) волуменот на потсечената пирамида.

10 Пресметај го волуменот на правилна четириаголна потсечена пирамида ако нејзината дијагонала е $9\ \text{cm}$, а основните рабови се $7\ \text{cm}$ и $5\ \text{cm}$.

11 Плоштината на осниот пресек на еден прав цилиндар е $240\ \text{cm}^2$, а висината е $16\ \text{cm}$. Одреди го радиусот на основата.

12 Еден пресек на цилиндар, паралелен со оската и на растојание $4\ \text{cm}$ од неа, на кружницата од основата отсекува лак чиј централен агол е 120^0. Пресметај ги плоштината Q на пресекот и плоштината B на основата ако висината на цилиндарот е $5\sqrt{3}\,\text{cm}$.

13 **Т** Цилиндричен парен котел има висина $3{,}5\ \text{m}$ и бочна плоштина $11\ \text{m}^2$. Одреди го притисокот што пареата го врши на дното од котелот (т.е. на основата).

14 **Т, 3** Дебелината на ѕидот на еден бунар со форма на цилиндар е $40\ \text{cm}$, внатрешниот дијаметар е $13\ \text{dm}$, а бунарот е длабок $12\ \text{m}$.

а) Колку кубни метри земја се ископани?

б) Колку вода има во бунарот ако висината на водениот столб е $4{,}5\ \text{m}$?

15 Генератрисата на еден конус е наклонета кон основата под агол од 60^0 и има должина $10\ \text{cm}$. Пресметај ја плоштината Q на осниот пресек.

16 Висината на еден конус е H. На кое растојание h од основата на конусот треба да се постави рамнина паралелна со основата, за плоштината B_1 на паралелниот пресек да биде деветпати помала од плоштината B на основата?

17 Плоштината на конусниот врв на една кула - светилник е $250\ \text{m}^2$, а периметарот на основата е $28{,}28\ \text{m}$. Пресметај ја висината на тој конусен врв.

18 **Е, 3** Стог сено има форма на цилиндар со конусен врв. Пресметај колку чини сеното од тој стог ако се знае дека: висината на цилиндричниот дел е $2{,}5\ \text{m}$, периметарот на основата е $18{,}85\ \text{m}$, целата висина на стогот е $4{,}5\ \text{m}$, масата на $1\ \text{m}^3$ сено е $30\ \text{kg}$ и 1 тон сено чини 5000 денари.

19 **3** Колку литри вода ќе собере сад што има форма на потсечен конус со дијаметри на основите $22\ \text{cm}$ и $40\ \text{cm}$ и висина $35\ \text{cm}$?

20 Во еден потсечен конус висината е $H = 63\,\text{dm}$, изводницата е $s = 65\,\text{dm}$ и бочната плоштина е $M = 26\pi\,\text{m}^2$. Пресметај ги радиусите на основите.

12 ЗАДАЧИ ЗА САМОПРОВЕРКА

1 Ако работ на коцката се зголеми двапати, тогаш нејзината плоштина ќе се зголеми:

а) 2 пати; б) 4 пати; в) 6 пати; г) 12 пати. 1

2 Ако основниот раб на правилна четириаголна пирамида се зголеми трипати, а висината се намали двапати, тогаш волуменот на пирамидата ќе се зголеми:

а) 2 пати; б) три и пол пати; в) четири и пол пати; г) 7 пати. 1

3 Осниот пресек на еден цилиндар е квадрат чијашто плоштина е Q. Плоштината на основата е: а) Q; б) $\frac{Q\pi}{2}$; в) $\frac{Q\pi}{4}$; г) $\frac{3Q}{2}$. 1

4 Плоштината на осниот пресек на еден цилиндар со висина $6\ \text{dm}$ е $36\ \text{dm}^2$. Волуменот на цилиндарот е: а) $216\pi\,\text{dm}^2$; б) $54\pi\,\text{dm}^2$; в) $36\pi\,\text{dm}^2$; г) $18\pi\,\text{dm}^2$. 1

5 Плоштината на рамностран конус е $48\pi\ \text{dm}^2$. Изводницата на конусот е долга:

а) $12\ \text{dm}$; б) $16\ \text{dm}$; в) $4\ \text{dm}$; г) $8\ \text{dm}$. 1

6 Радиусите на еден потсечен конус се $1\ \mathrm{m}$ и $2\ \mathrm{m}$, а висината е $3\ \mathrm{m}$. Волуменот на тој конус е: а) $7\pi\,\mathrm{m}^3$; б) $9\ \mathrm{m}^3$; в) $15\ \mathrm{m}^3$; г) $21\pi\,\mathrm{m}^3$. 1

7 Висина на права призма се вика _____ меѓу _____ на кои лежат основите. 2

8 Паралелниот пресек на пирамида ги дели бочните рабови и _____ на _____ отсечки. 2

9 Плоштината на основата на конус и плоштината на неговиот паралелен пресек се однесуваат како _____ на нивните _____ до _____. 2

10 Секој осен пресек на потсечен конус е _____ чиишто основи се _____, а кракот е _____ на потсечениот конус. 2

11 Напречниот пресек на канал долг $2\ \mathrm{km}$ има форма на рамнокрак трапез со основи $4\ \mathrm{m}$ и $8\ \mathrm{m}$, а крак $2{,}9\ \mathrm{m}$. Колку m^3 земја се исфрлени при неговото копање? 3

12 Одреди ги висината H и плоштината P на правилна четириаголна пирамида чиј основен раб е $a = 4{,}5\,\mathrm{dm}$, а волуменот е $V = 67{,}50\,\mathrm{dm}^3$. 3

13 Колку проценти ќе нарасне волуменот на цилиндар ако висината нарасне 20% и радиусот нарасне 25%? 3

14 Течноста со која е наполнет еден конусен сад (со $r = 12\,\mathrm{cm}$, $H = 18\,\mathrm{cm}$) е претурена во цилиндричен сад со дијаметар на основата $10\ \mathrm{cm}$. До која висина достигнала течноста во цилиндарот? 3

15 Една лимена кофа собира $15{,}1\,\ell$, а дијаметрите на дното и отворот се $18\ \mathrm{cm}$ и $32\ \mathrm{cm}$, соодветно. Пресметај:

а) колкава е длабочината на кофата?

б) колку dm^2 лим е набавен за да се направи кофата, ако на отпадок отишле 12% од употребениот лим? 3

ТЕМА 7

РЕШАВАЊЕ НА КОСОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК

Т

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1 Синус и косинус за агли од 0^0 до 360^0 156

2 Дефиниција на тригонометриските функции тангенс и котангенс за аглите од 0° до 360° 182

3 Основни тригонометриски зависности 186

4 Сведување на тригонометриски функции од произволен агол на тригонометриски функции од остар агол..... 190

5 Решавање на правоаголен триаголник 196

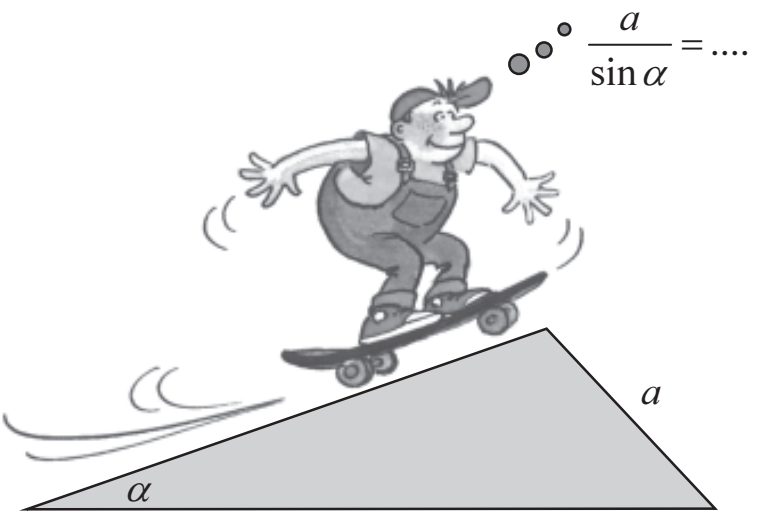
6 Синусна теорема 198

7 Косинусна теорема 203

8 Примена на синусната и косинусната теорема 206

9 Задачи за повторување и утврдување 210

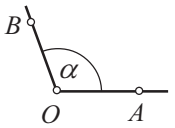
10 Задачи за самопроверка 211



1 СИНУС И КОСИНУС ЗА АГЛИ ОД 0^0 ДО 360^0

Пошсеши се!

- На цртежот е претставен аголот $\alpha = 110°$



- Полуправите OA и OB се краци на аголот.
- Внатрешната област на аголот е означена со кружен лак.
- Аголот α можеме да го означиме и со $\measuredangle AOB = 110°$ или $\measuredangle BOA = 110°$.
- Аголот може да се мери во степени и радијани.
- Радијан е централен агол што му одговара на кружен лак чија должина е еднаква на радиусот на кружницата.
- $1\,\text{rad} = 57°17'44,8''$;

  $\pi = 180°;\ 2\pi = 360°;\ \frac{\pi}{2} = 90°;\ \frac{\pi}{3} = 60°;\ \frac{\pi}{6} = 30°.$

A Во оваа тема ќе ги дефинираме тригонометриските функции за агли од 0^0 до 360^0 кои наоѓаат голема примена во тригонометријата, физиката, механиката и други науки.

За таа цел, аголот AOB ќе го дефинираме како фигура при која краците се сметаат како подреден пар (OA, OB).

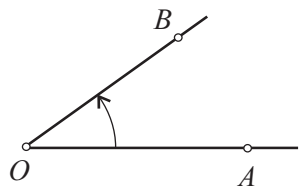
Запомни!

Агол при кој едниот крак е земен за почетен (т.е. за прв), а другиот за краен (т.е. за втор) се вика ***насочен*** или ***ориентиран*** агол.

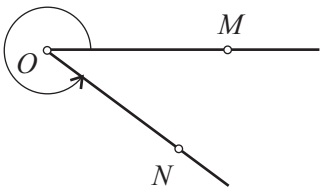
- ***Насочен*** или ***ориентиран агол*** може да се добие кога една полуправа ротира околу почетната точка од некоја почетна положба, земена како прв крак на аголот, до крајната положба, земена како втор крак на аголот.
- Ако ротацијата на полуправата OA е во спротивна насока од движењето на стрелките на часовникот, тогаш таа опишува ***позитивно насочен агол*** (или ***позитивен агол***).

На цртежот се прикажани позитивни агли:

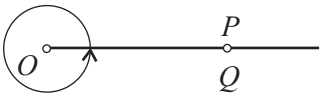
а)



б)



в)



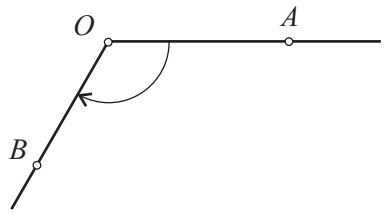
- При геометриско претставување на ориентираните агли, насоката на аголот ја назначуваме со стрелка од првиот кон вториот крак на аголот.

● Кој е прв, а кој втор крак на аглите дадени на цртежот.

- На цртежот в) полуправата OP по ротацијата се поклопила со својата почетна положба, со што е определен позитивен агол $\measuredangle POQ = +360° = 360° = 2\pi$.

  (*Знакоѿ „+" ѿонаѿаму нема да ѓо заѿишуваме.*)

- Ако полуправата OA ротира во насоката на движењето на стрелките на часовникот, тогаш таа ќе опише негативен агол. На цртежот е претставен негативен агол $\measuredangle AOB = \alpha = -120° = -\frac{2\pi}{3}$.



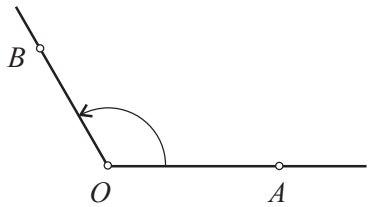
- На нултиот агол нема да му припишуваме никаква насока.

Забелешка. *Во оваа тема ќе зборуваме само за позитивно насочени агли.*

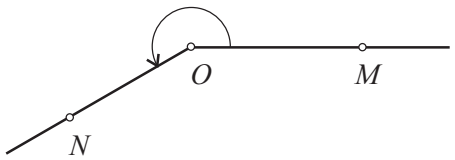
1 Нацртај ги ориентираните агли: а) $30°$; б) $120°$; в) $210°$; г) $270°$; д) $310°$.

Решение.

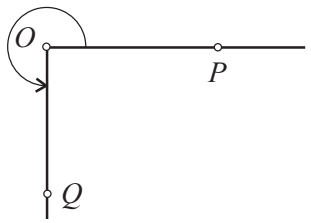
б)



в)



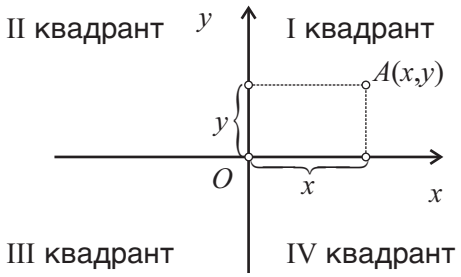
г)



Натаму, под агол ќе подразбираме позитивно ориентиран агол што е добиен со ротација на полуправата OA околу почетната точка O.

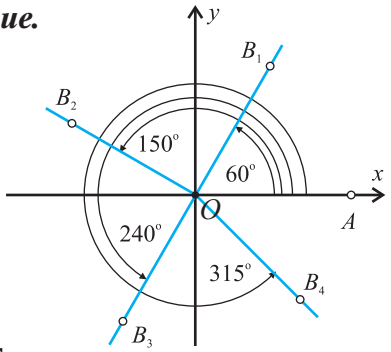
Потсети се!

- Координатниот систем xOy ја дели рамнината на четири квадранти
- Секоја точка A во рамнината е определена со своите координати, т.е. подредениот пар реални броеви (x, y).



Б **2** Нацртај ги аглите: 60^0, 150^0, 240^0 и 315^0 во координатен систем xOy, така што темето на аголот да е во координатниот почеток, а првиот (т.е. почетниот) крак да се совпадне со позитивниот дел на x-оската.

Решение.



Првиот крак на аголот, т.е. позитивниот дел на x-оската, го опишува бараниот агол.

$\measuredangle AOB_1 = 60°$; $\measuredangle AOB_2 = 150°$; $\measuredangle AOB_3 = 240°$; $\measuredangle AOB_4 = 315°$

Воочи, вториот крак (т.е. крајниот крак) на аголот од $60°$ е во првиот квадрант, на аголот $150°$ е во вториот квадрант итн.

- Воопшто, ориентираниот агол чие теме е во координатниот почеток, а првиот крак се совпаѓа со позитивниот дел на x-оската велиме дека е во оној квадрант во кој и квадрант се наоѓа вториот крак, при услов тој да не лежи на x-оската, односно на y-оската.

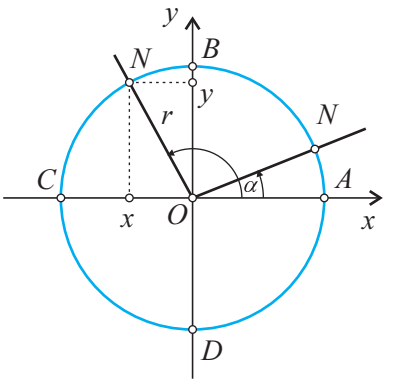
- Аголот од $60°$ е во првиот квадрант, аголот од $150°$ е во вториот квадрант, аголот од $240°$ е во третиот квадрант и аголот од $315°$ е во четвртиот квадрант.

3 Одреди го интервалот на аголот што го опишува подвижниот крак во:
а) I-квадрант; б) II-квадрант; в) III-квадрант; г) IV-квадрант.

4 Колкав е аголот ако вториот крак е на:
а) делот од симетралата на првиот и третиот квадрант што е во првиот, односно третиот квадрант;
б) делот од симетралата на вториот и четвртиот квадрант што е во вториот, односно четвртиот квадрант?

Да нацртаме кружница чиј центар е во координатниот почеток со радиус $r = 1$, единичната отсечка на бројната оска.

- Ако темето на аголот е во координатниот почеток, а првиот крак се совпаѓа со позитивниот дел на x-оската, тогаш вториот крак на аголот ја сече кружницата само во една точка. Важи и обратното, ако M е произволно избрана точка од кружницата, тогаш може да се определи агол α чиј еден крак е позитивниот дел на x-оската, а другиот крак е определен со точките O и M.



- Ако аголот α се менува од 0^0 до 360^0 тогаш меѓу точките од кружницата и аглите може да се воспостави обратно еднозначно соодветство.

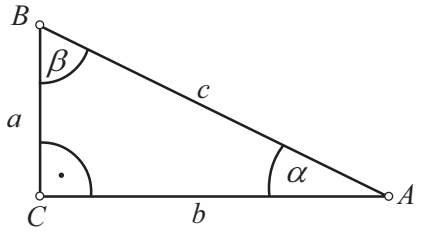
На пример координатите на точките во кои кружницата ги сече координатните оски се: $A(1,0)$, $B(0,1)$, $C(-1,0)$ и $D(0,-1)$.

Запомни!

Кружницата со центар во координатниот почеток и радиус со должина 1 се вика ***тригонометриска кружница***.

Потсети се!

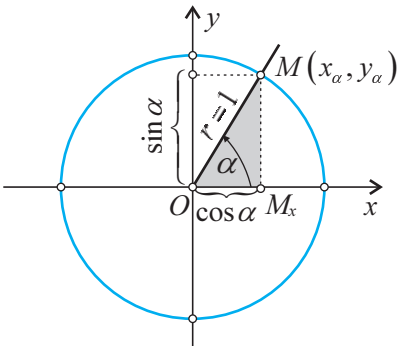
- На цртежот ΔABC е правоаголен. Страните $\overline{AC}=b$, $\overline{BC}=a$ се катети, а $\overline{AB}=c$ е хипотенуза на триаголникот.



- $\sin\alpha=\dfrac{a}{c}=\dfrac{\text{спротивната катета}}{\text{хипотенузата}}$.
- $\cos\alpha=\dfrac{b}{c}=\dfrac{\text{налегнатата катета}}{\text{хипотенузата}}$.

В Тригонометриската кружница ни овозможува да ги дефинираме тригонометриските функции од произволен агол.

Нека аголот α е во првиот квадрант, а неговиот втор крак ја сече кружницата во точката M со координати $M(x_\alpha, y_\alpha)$.



Од ΔOM_xM имаме: $\sin\alpha=\dfrac{\overline{M_xM}}{\overline{OM}}=\dfrac{y_\alpha}{1}=y_\alpha$; $\cos\alpha=\dfrac{\overline{OM_x}}{\overline{OM}}=\dfrac{x_\alpha}{1}=x_\alpha$.

Според тоа координатите на точката M, во која вториот крак од аголот α ја сече тригонометриската кружница се $M(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Запомни!

Синусот од произволен агол е еднаков на ординатата на точката во која вториот крак на аголот ја сече тригонометриската кружница, т.е. $\sin\alpha=y_\alpha$.
Косинусот од произволен агол е еднаков на апсцисата на точката во која вториот крак на аголот ја сече тригонометриската кружница, т.е. $\cos\alpha=x_\alpha$.

Од дефиницијата следува дека функциите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ се дефинирани за секој агол α, $0^0\le\alpha\le360^0$.

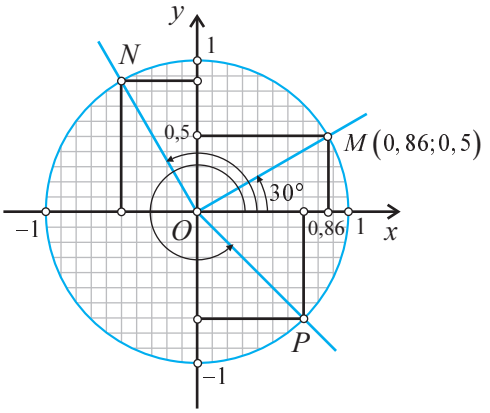
5 Претставувајќи ја тригонометриската кружница на милиметарска хартија одреди ги вредностите на функциите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ ако аголот α е: а) 30^0; б) 120^0; в) 315^0.

Решение. Воочи ги координатите на точките во кои вториот крак од аголот ја сече тригонометриската кружница.

а) За аголот $\alpha = 30^0$, точката $M(0,86;0,5)$, значи $\sin 30^0 = 0,5$; $\cos 30^0 = 0,86$.

б) За аголот $\alpha = 120^0$, точката $N(-0,5;0,86)$, па $\cos 120^0 = -0,5$; $\sin 120^0 = 0,86$.

в) За аголот $\alpha = 315^0$, точката P е со координати $P(0,71;-0,71)$, значи $\cos 315^0 = 0,71$, а $\sin 315^0 = -0,71$.



Вредностите на функциите од некои кои што ги читаме од тригонометриската кружница се приближни броеви.

6 Одреди ги вредностите на функциите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ ако аголот α е: а) 0^0; б) 90^0; в) 180^0; г) 270^0; д) 360^0.

Потсети се!

Нека е дадена точката M со координати $M(x,y)$.

- Апсцисата $x > 0$ ако точката M е во I или IV квадрант, а $x < 0$ ако точката M е во II или III квадрант.
- Ординатата $y > 0$ ако точката M е во I или II квадрант, а $y < 0$ ако точката M е во III или IV квадрант.
- Во кој квадрант се наоѓаат точките: $M(-3,2)$, $N(-2,-3)$, $P(3,-1)$ и $Q(3,2)$.

Т Решавајќи ги претходните две задачи забележа дека тригонометриските функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ за некои агли се позитивни, а за некои негативни.

7 Одреди го знакот на функцијата $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ ако аголот α е:
а) 60^0; б) 135^0; в) 270^0; г) 300^0.

Решение. Нацртај ги аглите во тригонометриска кружница:

а) Аголот $\alpha = 60^0$ е во првиот квадрант, а бидејќи координатите на точките во првиот квадрант се позитивни, т.е. $x > 0$ и $y > 0$, значи $\cos 60^0 > 0$ и $\sin 60^0 > 0$.

б) Аголот $\alpha = 135^0$ е во вториот квадрант, па $x < 0$, $y > 0$, т.е. $\cos 120^0 < 0$, а $\sin 120^0 > 0$.

в) Вториот крак на аголот $\alpha = 270^0$ се совпаѓа со негативниот дел на y-оската, па точката $M(0,-1)$ е пресечна точка на овој крак со тригонометриската кружница. Значи $\cos 270^0 = 0$, а $\sin 270^0 = -1 < 0$.

8 Одреди во кој квадрант е аголот ако:
а) $\sin\alpha < 0$; б) $\sin\alpha > 0$ и $\cos\alpha < 0$; в) $\sin\alpha < 0$ и $\cos\alpha < 0$.

- Знаците на тригонометриските функции најчесто ги претставуваме во табела.

	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+

Задачи

1 Нацртај ориентиран агол α:
а) 65^0; б) 110^0; в) 180^0;
г) 290^0; д) 360^0.

2 Во кој квадрант е аголот:
а) 85^0; б) 175^0; в) 280^0;
г) 185^0; д) 359^0?

3 Ако $0<\alpha<90^0$, во кој квадрант е аголот:
а) $90^0+\alpha$; б) $180^0-\alpha$; в) $90^0-\alpha$;
г) $270^0-\alpha$; д) $360^0-\alpha$?

4 Во правоаголен координатен систем дадени се точките:
$A(-1,3)$; $B(2,-3)$; $C(2,0)$; $D(0,-3)$ и $E(-1,-5)$. Нацртај ориентиран агол чиј втор крак минува низ дадените точки. Во кој квадрант е секој од добиените агли?

5 Одреди ги вредностите на тригонометриските функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, ако вториот крак од аголот α минува низ точката:
а) $A(3,0)$; б) $B(-3,0)$; в) $C(0,2)$;
г) $D(0,-3)$; д) $E(-1,0)$.

6 На милиметарска хартија нацртај тригонометриска кружница и одреди ги вредностите на функциите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ за аголот α:
а) 45^0; б) 150^0; в) 210^0; г) 225^0;
д) 310^0; ѓ) 360^0.

7 Одреди го знакот на функцијата без да ја одредиш нејзината вредност:
а) $\sin 35^0$; б) $\cos 125^0$; в) $\sin 170^0$;
г) $\cos 250^0$; д) $\cos 300^0$; ѓ) $\sin 320^0$.

8 Одреди го знакот на изразот:
а) $\sin 130^0\cdot\cos 210^0$; б) $\sin 30^0\cdot\cos 180^0$;
в) $\sin 90^0\cdot\cos 100^0$; г) $\dfrac{\sin 309^0\cdot\sin 90^0}{\cos 205^0\cdot\cos 180^0}$;
д) $\dfrac{\sin 120^0\cdot\cos 100^0}{\cos 200^0\cdot\cos 300^0}$.

9 Во кој квадрант е аголот α, ако:
а) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha<0$; б) $\cos\alpha\cdot\sin\alpha>0$?

10 Ако аголот $0<\alpha<90^0$, одреди го знакот на изразот:
а) $\sin(180^0+\alpha)$;
б) $\cos(360^0-\alpha)$;
в) $\cos(90^0+\alpha)\cdot\sin(90^0+\alpha)$;
г) $\cos(180^0+\alpha)\cdot\sin(270^0+\alpha)$.

2 ТАНГЕНС И КОТАНГЕНС ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ

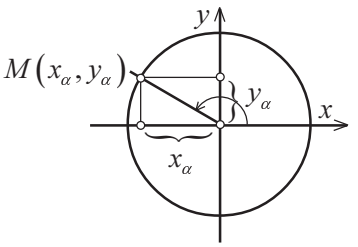
Потсети се!

Нека a и b се катети, а c хипотенуза на правоаголен триаголник.

- ***Тангенс*** од остар агол α во правоаголен триаголник е односот на спротивната и налегнатата катета на тој агол, т.е. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$.
- ***Котангенс*** од остар агол α во правоаголен триаголник е односот на налегнатата и спротивната катета на тој агол, т.е. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$.
- $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, ако α е остар агол.

А Во прва година ги дефиниравме функциите тангенс и котангенс од остар агол (види во потсети се). Во оваа лекција ќе ги дефинираме функциите тангенс и котангенс за аглите од 0^0 до 360^0.

Нека аголот α е во вториот квадрант, а вториот крак од аголот ја сече тригонометриската кружница во точката M со координати $M(x_\alpha, y_\alpha)$.



Запомни!

Тангенс од произволен агол α $(\alpha \neq 90^0,\ \alpha \neq 270^0)$ е еднаков на количникот од ординатата и апсцисата на точката M што е во пресек на вториот крак од аголот α со тригонометриската кружница, т.е. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha},\ x_\alpha \neq 0.$

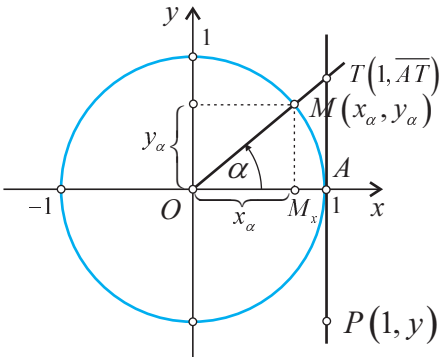
Котангенс од произволен агол α, $(\alpha \neq 0^0,\ \alpha \neq 180^0,\ \alpha \neq 360^0)$ е еднаков на количникот од апсцисата и ординатата на точката M што е во пресек на вториот крак од аголот α со тригонометриската кружница, т.е. $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_\alpha}{y_\alpha},\ y_\alpha \neq 0.$

- Од дефиницијата за функциите синус и косинус од произволен агол $(\sin\alpha = y_\alpha,\ \cos\alpha = x_\alpha)$ следува дека

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \neq 90^0,\ \alpha \neq 270^0, \quad \text{а} \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq 0^0,\ \alpha \neq 180^0,\ \alpha \neq 360^0.$$

- Вредноста на количникот $\frac{y_\alpha}{x_\alpha}$, односно $\frac{x_\alpha}{y_\alpha}$ не се менува ако наместо точката M се земе друга точка M_1 која лежи на вториот крак од аголот и е различна од темето на аголот.

- Тангента на тригонометриската кружница во пресечната точка со позитивната насока на x-оската чија насока се совпаѓа со насоката на ординатната оска се вика ***тангенсна оска***.



- На цртежот правата AT е тангенсна оска.
- Точките на тангенсната оска се со координати $(1, y)$.
- Вториот крак OT на аголот α не лежи на ординатната оска, па тој (или неговото продолжение) ја сече тангенсната оска само во една точка (во нејзиниот позитивен или негативен дел).

Од ΔOM_xM имаме: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{M_xM}}{\overline{OM_x}} = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}$. Од сличноста на ΔOAT и ΔOM_xM имаме $\frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{M_xM}}{\overline{OM_x}}$,

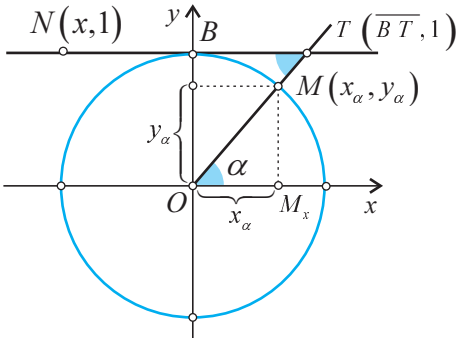
т.е. $\frac{\overline{AT}}{1} = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}$ односно $\overline{AT} = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}$. Од $\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}$ и $\overline{AT} = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}$ следува $\operatorname{tg}\alpha = \overline{AT}$, т.е. $\operatorname{tg}\alpha$ е еднаков на ординатата на точката во која вториот крак од аголот ја сече тангенсната оска.

Запомни!

Тангенс од произволен агол $\alpha\left(\alpha \neq 90^\circ \text{ и } \alpha \neq 270^\circ\right)$ е ординатата y_t на точката во која вториот крак на аголот α или неговото продолжение ја сече тангенсната оска, т.е.

$$\operatorname{tg}\alpha = y_t.$$

На сличен начин ќе постапиме и за функцијата котангенс од произволен агол помеѓу 0^0 и 360^0.



- Тангентата на тригонометриската кружница во пресечната точка со позитивната насока со y-оската чија насока се совпаѓа со насоката на апсцисната оска се вика ***котангенсна оска***.
- На цртежот правата BT е котангенсна оска.
- Точките на котангенсната оска се со координати $(x, 1)$.
- Вториот крак OT на аголот α не лежи на апсцисната оска, па тој (или неговото продолжение) ја сече котангенсната оска само во една точка (во нејзиниот позитивен или негативен дел).
- Од ΔOM_xM имаме $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{OM_x}{M_xM} = \frac{x_\alpha}{y_\alpha}$. Од сличноста на ΔOM_xM и ΔOTB имаме

$\frac{\overline{OM_x}}{\overline{MM_x}} = \frac{\overline{BT}}{\overline{OB}}$, т.е. $\frac{x_\alpha}{y_\alpha} = \frac{\overline{BT}}{1} = \overline{BT}$. Од $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_\alpha}{y_\alpha}$ и $\frac{x_\alpha}{y_\alpha} = \overline{BT}$ следува дека $\operatorname{ctg}\alpha = \overline{BT}$.

Значи, $\operatorname{ctg}\alpha$ е еднаков на апсцисата на точката во која вториот крак од аголот α ја сече котангенсната оска.

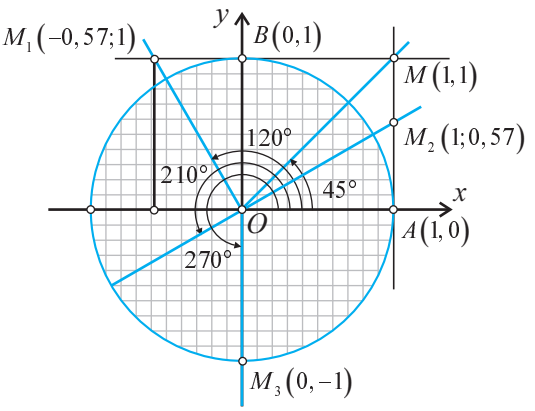
Запомни!

Котангенс од произволен агол $\alpha\left(\alpha \neq 0°,\ \alpha \neq 180°,\ \alpha \neq 360°\right)$ е апсциса на точката во која вториот крак на аголот или неговото продолжение ја сече котангенсната оска, т.е. $\operatorname{ctg}\alpha = x_t$.

1 Одреди ги вредностите на:

а) $\operatorname{tg} 0°$; б) $\operatorname{ctg} 45°$; в) $\operatorname{tg} 135°$;

г) $\operatorname{ctg} 120°$; д) $\operatorname{tg} 210°$; ѓ) $\operatorname{ctg} 270°$.



Решение. Кружницата ќе ја нацртаме на милиметарска хартија. Одреди ги координатите на точките во кои вториот крак од аголот или неговото продолжение ја сече тангенсната, односно котангенсната оска.

а) Вториот крак на аголот $\alpha = 0°$ ја сече тангенсната оска во точката $A(1,0)$, па според дефиницијата $\operatorname{tg} 0° = 0$.

б) Вториот крак на аголот $\alpha = 45°$ ја сече котангенсната оска во точката $M(1,1)$, бидејќи четириаголникот $OAMB$ е квадрат со страна $r = 1$, следува $\operatorname{ctg} 45° = 1$.

в) За аголот $\alpha = 120°$, $M_1(-0,57;1)$, па $\operatorname{ctg} 120° = -0,57$. г) $\operatorname{tg} 210° = 0,57$. д) $\operatorname{ctg} 270° = 0$.

2 Со помош на тригонометриската кружница нацртана на милиметарска хартија одреди ги вредностите на функциите:

а) $\operatorname{ctg} 90°$; б) $\operatorname{tg} 45°$; в) $\operatorname{tg} 150°$; г) $\operatorname{ctg} 240°$; д) $\operatorname{tg} 315°$; ѓ) $\operatorname{ctg} 315°$.

Воочи, вредностите на функциите $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ за некои агли се позитивни, а за некои агли се негативни.

- Знакот на функциите $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ зависи од тоа во кој квадрант е аголот α, т.е. точката во која вториот крак на аголот или неговото продолжение ја сече тангенсната, односно котангенсната оска.

Запомни!

Функцијата $\operatorname{tg}\alpha$ (односно $\operatorname{ctg}\alpha$) не е дефинирана за аглите чијшто втор крак на аголот е паралелен со y-оската (односно x-оската).

3 Одреди го знакот на изразот без да ја определуваш неговата бројна вредност:

а) $\operatorname{tg}130°$; б) $\operatorname{tg}220°$; в) $\operatorname{ctg}300°$; г) $\operatorname{ctg}200°$;

д) $\operatorname{tg}320° : \operatorname{ctg}120°$; ѓ) $\operatorname{ctg}220° \cdot \operatorname{tg}60°$.

Во следната табела е прикажан знакот на тригонометриските функции во секој од квадрантите.

	I квадрант $\alpha \in (0, 90°)$	II квадрант $\alpha \in (90°, 180°)$	III квадрант $\alpha \in (180°, 270°)$	IV квадрант $\alpha \in (270°, 360°)$
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\operatorname{tg}\alpha$	+	−	+	−
$\operatorname{ctg}\alpha$	+	−	+	−

4 Одреди го знакот на изразите:

а) $\sin120° \cdot \operatorname{ctg}130°$; б) $\operatorname{tg}200° \cdot \cos320°$; в) $\dfrac{\sin100° \cdot \cos200°}{\operatorname{tg}300° \cdot \operatorname{ctg}150°}$.

Решение. а) Аглите $120°$ и $130°$ се во вториот квадрант, а $\sin120° > 0$, $\operatorname{ctg}130° < 0$, па $\sin120° \cdot \operatorname{ctg}130° < 0$; б) $\operatorname{tg}200° > 0$, $\cos320° > 0$, па $\operatorname{tg}200° \cdot \cos320° > 0$.

5 Во кој квадрант е аголот, ако: а) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \cos\alpha > 0$; б) $\operatorname{ctg}\alpha \cdot \sin\alpha < 0$; в) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{\sin\alpha} < 0$?

Задачи

1 Одреди ја вредноста на функцијата со помош на тригонометриската кружница:

а) $\operatorname{tg}60°$; б) $\operatorname{ctg}150°$; в) $\operatorname{tg}180°$;

г) $\operatorname{tg}240°$; д) $\operatorname{ctg}300°$.

2 Одреди го знакот на функцијата без да ја одредиш нејзината вредност:

а) $\operatorname{tg}70°$; б) $\operatorname{ctg}30°$; в) $\operatorname{tg}150°$;

г) $\operatorname{ctg}225°$; д) $\operatorname{tg}350°$.

3 Одреди го знакот на производот:

а) $\sin15° \cdot \operatorname{tg}150°$; б) $\cos100° \cdot \operatorname{ctg}100°$;

в) $\operatorname{tg}200° \cdot \sin300°$.

4 Ако $0 < \alpha < 90°$, одреди го знакот на изразот:

а) $\sin(180° - \alpha) \cdot \operatorname{tg}(180 + \alpha)$;

б) $\cos(180° + \alpha) \cdot \operatorname{ctg}(360° - \alpha)$;

в) $\dfrac{\sin(270° - \alpha) \cdot \cos(180 - \alpha)}{\operatorname{tg}(270° - \alpha)}$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg}(\alpha + 180°) \cdot \cos(\alpha + 270°)}{\operatorname{ctg}(180° - \alpha)}$.

5 Во кој квадрант е аголот ако:

а) $\operatorname{tg}\alpha \cdot \sin\alpha < 0$; б) $\cos\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha > 0$;

в) $\dfrac{\sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha} > 0$?

3 ОСНОВНИ ТРИГОНОМЕТРИСКИ ЗАВИСНОСТИ

Потсети се!

- Што е: а) синус; б) косинус; в) тангенс; г) котангенс од произволен агол?
- Висина на рамностран триаголник со страна a, е $h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

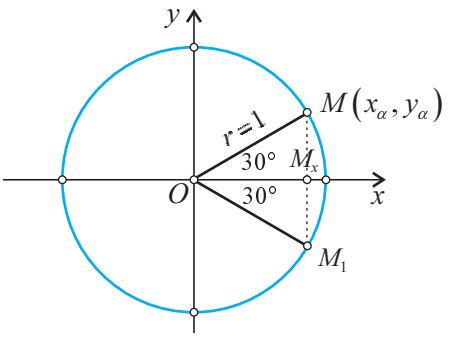
- Аголот $\alpha=30°$, $\left(\alpha=\frac{\pi}{6}\right)$ е во I квадрант, па точката M е со координати $M\left(x_\alpha, y_\alpha\right)$.

Според дефиницијата на тригонометриските функции од произволен агол имаме $\sin\alpha=y_\alpha$, а $\cos\alpha=x_\alpha$.

А **1** Одреди ги вредностите на тригонометриските функции од $30°, 45°$ и $60°$.

Решение.

Задачата ќе ја решиме со помош на тригонометриската кружница.



Триаголникот OM_1M е рамностран, $\overline{OM_1}=\overline{M_1M}=\overline{OM}=1$, па $y_\alpha=\frac{1}{2}\overline{MM_1}=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$.

Бидејќи $\overline{OM_x}=x_\alpha$ е висина на ΔOM_1M, имаме $x_\alpha=\frac{\overline{OM}\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{1\cdot\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Според тоа: $\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$. Од дефиницијата за функциите $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ од произволен агол имаме: $\operatorname{tg} 30°=\frac{y_\alpha}{x_\alpha}=\frac{\sin 30°}{\cos 30°}=\frac{\sqrt{3}}{3}$, а $\operatorname{ctg} 30°=\frac{x_\alpha}{y_\alpha}=\frac{\cos 30°}{\sin 30°}=\sqrt{3}$.

2 Со помош на тригонометриската кружница одреди ги вредностите на тригонометриските функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, ако: а) $\alpha=60^0$; б) $\alpha=45^0$.

3 Пресметај: а) $2\sin 30°-\cos 60°+\operatorname{tg} 45°$; б) $3\cos 30°+\sin 60°-\operatorname{tg} 60°$.

Решение.

а) $2\sin 30^0-\cos 60^0+\operatorname{tg} 45^0=2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1=\frac{3}{2}$; б) $3\cos 30^0+\sin 60^0-\operatorname{tg} 60^0=3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=\sqrt{3}$.

4 Одреди ја бројната вредност на изразите: а) $3\sin 45°\cdot\cos 45°-2\operatorname{tg} 45°$;

б) $\cos 180°-2\sin 60°+\operatorname{ctg} 30°$; в) $\frac{\operatorname{tg}\pi-\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\alpha}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}+\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}$, ако $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

Потсети се!

- За остар агол α во правоаголен триаголник важат равенствата:

  а) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$

  б) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha};$

  в) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,$

  кои се викаат основни тригонометриски зависности, односно идентитети.

Б 5 Докажи дека за произволен агол α важат равенствата:

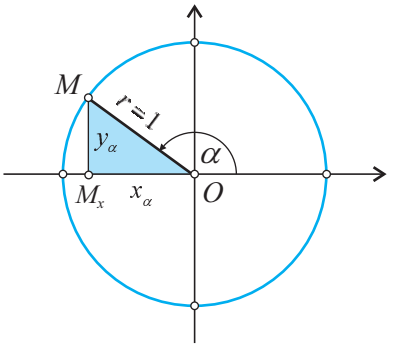
а) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$

б) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha\notin\{90°,270°\};$

в) $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha\notin\{0°,180°,360°\};$

г) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1,\ \alpha\notin\{0°,90°,180°,270°,360°\}.$

Решение. Нека аголот α е кој било агол од $0°$ до $360°$.



а) Нека $M(x_\alpha,y_\alpha)$ е точка во која вториот крак од аголот α ја сече тригонометриската кружница, па $\sin\alpha=y_\alpha$, а $\cos\alpha=x_\alpha$. Од ΔOMM_x имаме:

$(y_\alpha)^2+(x_\alpha)^2=\overline{OM}^2$, т.е. $(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1$, па

$$\boxed{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.}$$

б) Од дефиницијата $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y_\alpha}{x_\alpha}$, следува дека $\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha};}$

в) Од дефиницијата $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{x_\alpha}{y_\alpha}$, следува дека $\boxed{\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha};}$

г) $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=1$, т.е. $\boxed{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1.}$

Воочи, основните тригонометриски идентитети од остар агол важат и за произволен агол, за кој се дефинирани функциите.

- Од $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, следува $\boxed{\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha,\quad \sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha.}$

Од $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$, следува дека $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ од ист агол за кој двете функции се дефинирани се реципрочни, т.е. $\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\alpha};\quad \operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.}$

5 Ако е $\cos\alpha=-\dfrac{5}{13}$, $180°<\alpha<270°$ одреди ги вредностите $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$.

Решение. Од $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, следува $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$; $\sin^2\alpha=1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2=1-\frac{25}{169}=\frac{144}{169}$,

па $\sin\alpha=-\sqrt{\frac{144}{169}}=-\frac{12}{13}$, (бидејќи $180^0<\alpha<270^0$ и $\sin\alpha<0$);

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\frac{12}{13}:\left(-\frac{5}{13}\right)=\frac{12}{5}$, а $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{5}{12}$.

Забелешка. *При решавањето на задачите од овој вид задолжително се задава условот во кој квадрант е аголот. Изборот на знакот „плус" или „минус" пред коренот зависи од знакот на бараната функција во соодветниот квадрант.*

7 Одреди ги вредностите на другите тригонометриски функции, ако:

а) $\sin\alpha=-\frac{8}{17}$, $\alpha\in\left(\frac{3\pi}{2},2\pi\right)$; б) $\sin\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha\in(90°,180°)$; в) $\cos\alpha=-\frac{1}{2}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

8 Нека е $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$, $90°<\alpha<180°$. Одреди ги вредностите на останатите тригонометриски функции.

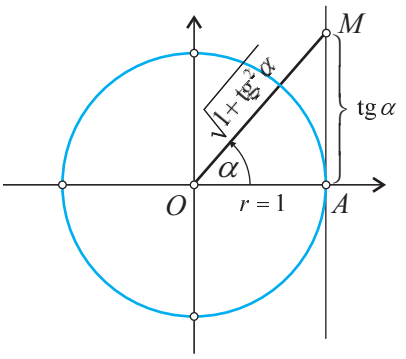
Решение. Од $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1$, следува $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$, т.е. $\operatorname{ctg}\alpha=-\frac{4}{3}$.

Ако двете страни на идентитетот $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ ги поделиме со $\cos^2\alpha\neq0$,

имаме $\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+\frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, т.е. $\operatorname{tg}^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$, а оттука следува $\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$,

$\cos^2\alpha=\frac{1}{1+\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{16}{25}$ или $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$. Од $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ следува $\sin^2\alpha=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2$, $\sin\alpha=\frac{3}{5}$.

- Ако е дадена вредноста на функцијата $\operatorname{tg}\alpha$ или $\operatorname{ctg}\alpha$, тогаш функциите $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ може да се одредат со формулите (види цртеж):



$$\sin\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}};\quad \cos\alpha=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}$$

Пред коренот се зема знак соодветен на знакот на функцијата за дадениот агол.

9 Ако е $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{24}{7}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$, одреди ја вредноста на изразот $\frac{10\cos\alpha+5\sin\alpha}{7\operatorname{ctg}\alpha-6\operatorname{tg}\alpha}$.

Со примена на основните тригонометриски идентитети некои изрази може да се упростат.

10 Упрости го изразот: а) $\dfrac{\sin\alpha-\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}$; б) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha-1}$.

Решение. а) $\dfrac{\sin\alpha-\sin^3\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha\left(1-\sin^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin\alpha\cdot\cos^2}{\cos^2\alpha}=\sin\alpha.$

б) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha-1}=\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\dfrac{\sin\alpha(1-\cos\alpha)+\sin\alpha(1+\cos\alpha)}{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}=\dfrac{2\sin\alpha}{1-\cos^2\alpha}=\dfrac{2\sin\alpha}{\sin^2\alpha}=\dfrac{2}{\sin\alpha}.$

Ваквите равенства се викаат ***тригонометриски идентитети***. Тие важат за аголот α за кој изразите од левата и десната страна на равенството се дефинирани.

11 Докажи го идентитетот:

а) $(\sin\alpha-\cos\alpha)^2+(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=2;$ б) $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha;$

в) $\dfrac{1}{1+\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}.$

Решение. Со примена на некои основни идентитети и алгебарски трансформации имаме:

б) $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}-\sin^2\alpha=\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha\left(1-\cos^2\alpha\right)}{\cos^2\alpha}=\dfrac{\sin^2\alpha\cdot\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\sin^2\alpha.$

в) $\dfrac{1}{1+\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1-\sin^2\alpha}=\dfrac{1}{1+\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}=\dfrac{1-\sin\alpha+\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}.$

Задачи

1 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $2\sin30^\circ\cdot\cos60^\circ-\mathrm{tg}\,45^\circ;$

б) $\mathrm{tg}\,60^\circ\cdot\sin30^\circ-\mathrm{ctg}\,30^\circ;$

в) $\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{3}+\sin^2\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{ctg}^2\dfrac{\pi}{3};$ г) $\dfrac{\mathrm{tg}\,45^\circ-\cos\pi}{\sin\dfrac{3\pi}{2}+\cos\dfrac{\pi}{3}}.$

2 Одреди ја бројната вредност на изразот:

а) $\dfrac{2\sin2\alpha}{1-\cos2\alpha}$ за $\alpha=\dfrac{\pi}{6}$; б) $\dfrac{\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha}{1+\cos\alpha}$ за $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$.

3 Одреди ги вредностите на другите тригонометриски функции, ако:

а) $\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \alpha\in\left(\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right);$

б) $\cos\alpha=-\dfrac{20}{29},\ \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$

4 Одреди ја вредноста на другите функции ако: а) $\mathrm{tg}\,\alpha=-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi;$

б) $\mathrm{ctg}\,\alpha=-\dfrac{9}{40},\ \dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi.$

5 Пресметај ја вредноста на изразот $\dfrac{3\cos\alpha+\sin\alpha}{3\,\mathrm{ctg}\,\alpha-4\,\mathrm{tg}\,\alpha}$, ако $\sin\alpha=\dfrac{3}{5},\ 90^\circ<\alpha<180^\circ.$

6 Упрости го изразот: а) $\dfrac{1-\sin^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$;

б) $\dfrac{\sin\alpha-\cos^2\alpha+1}{\sin\alpha+1}$;

в) $\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha-1}{\mathrm{tg}\,\alpha+1}-\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha-1}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}.$

7 Докажи го идентитетот водејќи сметка за допуштените вредности на аголот α:

а) $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$;

б) $\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$;

в) $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=1-2\sin^2\alpha$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\sin^2\alpha$.

8 Докажи го идентитетот:

а) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha=(1+\cos\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)$;

б) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}+\dfrac{\cos\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=1-\cos\alpha$;

г) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\dfrac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{\operatorname{ctg}\alpha}=1$.

4 СВЕДУВАЊЕ НА ТРИГОНОМЕТРИСКИ ФУНКЦИИ ОД ПРОИЗВОЛЕН АГОЛ НА ОСТАР АГОЛ

Пошети се!

- Во табелата се дадени вредностите на тригонометриските функции за 30^0, 45^0 и 60^0.

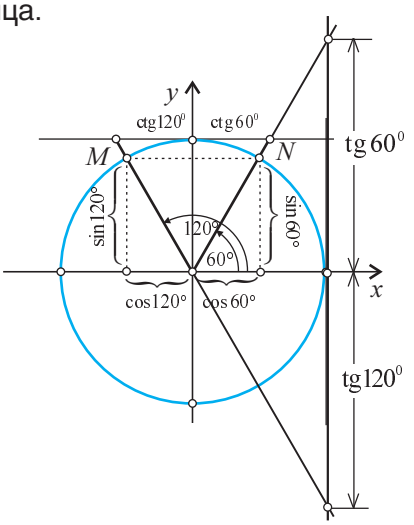
	30^0	45^0	60^0
$\sin a$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos a$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\operatorname{tg} a$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$
$\operatorname{ctg} a$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$

- Знакот на секоја тригонометриска функција за секој квадрант е даден во табелата.

	I кв.	II кв.	III кв.	IV кв.
$\sin a$	+	+	−	−
$\cos a$	+	−	−	+
$\operatorname{tg} a$	+	−	+	−
$\operatorname{ctg} a$	+	−	+	−

А 1 Одреди ги вредностите на тригонометриските функции за аголот од 120^0, без да користиш калкулатор.

Решение. Бараните вредности ќе ги одредиме со помош на тригонометриската кружница.



- Вторите краци на аглите од 60^0 и 120^0 ја сечат тригонометриската кружница во точките N и M. Тие се симетрични во однос на y-оската, т.е. имаат еднакви ординати, па

$$\sin 120^0=\sin 60^0=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Од симетричноста на точките M и N во однос на y-оската следува дека нивните апсциси се спротивни, т.е. $\cos 120^0 = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2}$.

Функциите $\operatorname{tg} 120^0$ и $\operatorname{tg} 60^0$, односно $\operatorname{ctg} 120^0$ и $\operatorname{ctg} 60^0$, исто така, имаат спротивни вредности (види го цртежот), па $\operatorname{tg} 120^0 = -\operatorname{tg} 60^0 = -\sqrt{3}$, а $\operatorname{ctg} 120^0 = -\operatorname{ctg} 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Бидејќи $120^0 = 180^0 - 60^0$, имаме:

$$\sin 120^0 = \sin\left(180^0 - 60^0\right) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos 120^0 = \cos\left(180^0 - 60^0\right) = -\cos 60^0 = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 120^0 = \operatorname{tg}\left(180^0 - 60^0\right) = -\operatorname{tg} 60^0 = -\sqrt{3} \text{ и } \operatorname{ctg} 120^0 = \operatorname{ctg}\left(180^0 - 60^0\right) = -\operatorname{ctg} 60^0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

- Кој било агол што е во вториот, третиот или четвртиот квадрант може соодветно да се запише како $180^0 - \alpha$ (или $\pi - \alpha$), $180^0 + \alpha$ (или $\pi + \alpha$) и $360^0 - \alpha$ (или $2\pi - \alpha$), каде што α е остар агол, т.е. $0^0 < \alpha < 90^0$ $\left(0^0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. На пример, $150^0 = 180^0 - 30^0$ или $150^0 = \pi - \frac{\pi}{6}$; $240^0 = 180^0 + 60^0$ или $240^0 = \pi + \frac{\pi}{3}$ итн.

2 Пресметај $\cos 210^0$, $\sin 210^0$, $\operatorname{tg} 210^0$, $\operatorname{ctg} 210^0$.

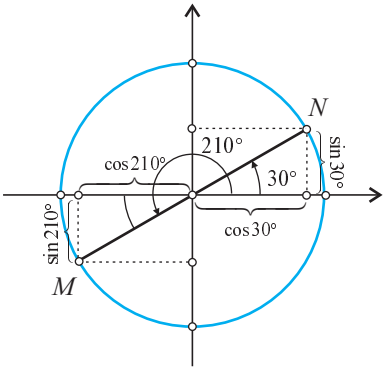
- Вториот крак на дадениот агол е во третиот квадрант, па $210^0 = 180^0 + 30^0$.

Решение. Точките M и N се симетрични во однос на координатниот почеток, па нивните координати се спротивни, т.е. $\cos 210^0 = \cos\left(180^0 + 30^0\right) = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$$\sin 210^0 = \sin\left(180^0 + 30^0\right) = -\sin 30^0 = -\frac{1}{2},$$

$$\operatorname{tg} 210^0 = \operatorname{tg}\left(180^0 + 30^0\right) = \frac{\sin\left(180^0 + 30^0\right)}{\cos\left(180^0 + 30^0\right)} = \frac{-\sin 30^0}{-\cos 30^0} = \operatorname{tg} 30^0 = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

$$\operatorname{ctg} 210^0 = \operatorname{ctg}\left(180^0 + 30^0\right) = \operatorname{ctg} 30^0 = \sqrt{3}.$$



Запомни!

$\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha$	$\cos(180^0-\alpha)=-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(180^0-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(180^0-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha,$
$\sin(180^0+\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(180^0+\alpha)=-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(180^0+\alpha)=\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(180^0+\alpha)=\mathrm{ctg}\,\alpha,$
$\sin(360^0-\alpha)=-\sin\alpha$	$\cos(360^0-\alpha)=\cos\alpha$	$\mathrm{tg}(360^0-\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}(360^0-\alpha)=-\mathrm{ctg}\,\alpha,$

каде што α е остар агол, т.е. $0^0<\alpha<90^0$ $\left(0^0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$.

За примена на овие формули доволно е да го запомниш следното правило.

- При сведувањето тригонометриска функција од агол што е од видот $180^0\pm\alpha$ или $360^0\pm\alpha$ на функција од остриот агол α, функцијата останува иста, земена со знакот „$+$" или „$-$" соодветно на знакот на дадената функција за дадениот агол, односно во дадениот квадрант.

На пример,

$\mathrm{tg}\,135^0=\mathrm{tg}(180^0-45^0)=-\mathrm{tg}\,45^0=-1$ (аголот од 135^0 е во II квадрант, па $\mathrm{tg}\,135^0<0$);

$\mathrm{ctg}\,340^0=\mathrm{ctg}(360^0-20^0)=-\mathrm{ctg}\,20^0$ (IV квадрант, $\mathrm{ctg}\,340^0<0$);

$\cos 150^0=\cos(180^0-30^0)=-\cos 30^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin 160^0=\sin(180^0-20^0)=\sin 20^0$.

3 Упрости го дадениот израз ако $0^0<\alpha<90^0$:

а) $\mathrm{tg}(180^0-\alpha)-\mathrm{tg}(360^0-\alpha)+\sin(180^0+\alpha)$; б) $\dfrac{\cos(180^0-\alpha)+\sin(180^0-\alpha)}{\cos(360^0-\alpha)+\sin(180^0+\alpha)}$.

Решение. а) $\mathrm{tg}(180^0-\alpha)-\mathrm{tg}(360^0-\alpha)+\sin(180^0+\alpha)=-\mathrm{tg}\,\alpha-(-\mathrm{tg}\,\alpha)-\sin\alpha=-\sin\alpha$;

б) $$\frac{\cos(180^0-\alpha)+\sin(180^0-\alpha)}{\cos(360^0-\alpha)+\sin(180^0+\alpha)}=\frac{-\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{-(\cos\alpha-\sin\alpha)}{\cos\alpha-\sin\alpha}=-1.$$

Потсети се!

- Два агли чиј збир е 90^0 се викаат комплементни агли.
- На секој остар агол α, комплементниот агол е $90^0-\alpha$.
- $\sin\alpha=\cos\left(90^0-\alpha\right)$, $\cos\alpha=\sin\left(90^0-\alpha\right)$, $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{ctg}\left(90^0-\alpha\right)$, $\operatorname{ctg}\alpha=\operatorname{tg}\left(90^0-\alpha\right)$.
- $\sin 30^0=\cos 60^0$, $\operatorname{tg} 50^0=\operatorname{ctg} 40^0$.

Ако α е остар агол, тогаш кој било друг агол од 0^0 до 360^0 можеме да го запишеме на еден од следните начини:

$90^0\pm\alpha$ $\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)$ или $270^0\pm\alpha$ $\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)$.

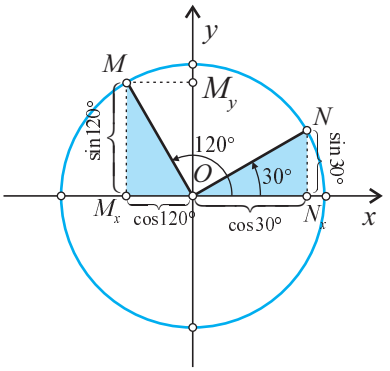
На пример,

$120^0=90^0+30^0$, $210^0=270^0-60^0$,

$315^0=270^0+45^0$ итн.

4 Одреди ги вредностите на тригонометриските функции од 120^0, сведувајќи ги на остар агол запишан како збир 90^0+30^0.

Решение. На тригонометриската кружница се претставени аглите $120^0=90^0+30^0$ и 30^0. Од складноста на триаголниците OM_xM и ON_xN следува дека $\overline{OM_y}=\overline{ON_x}$ и $\overline{OM_x}=\overline{N_xN}$.



Од $\sin 120^0>0$, $\cos 120^0<0$, следува дека:

$$\sin 120^0=\overline{OM_y}=\overline{ON_x}=\cos 30^0=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 120^0=-\overline{OM_x}=-\overline{N_xN}=-\sin 30^0=-\frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg}120^0=\frac{\sin 120^0}{\cos 120^0}=\frac{\cos 30^0}{-\sin 30^0}=-\operatorname{ctg}30^0=-\sqrt{3};\quad \operatorname{ctg}120^0=\frac{\cos 120^0}{\sin 120^0}=\frac{-\sin 30^0}{\cos 30^0}=-\operatorname{tg}30^0=-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Воочи дека ако аголот е од видот $90^0\pm\alpha$ или $270^0\pm\alpha$, тогаш при сведувањето функција преминува во кофункција на остриот агол α (т.е. синус во косинус и обратно, а тангенс во котангенс и обратно).

На пример, $\cos 150^0=\cos\left(90^0+60^0\right)=-\sin 60^0=-\frac{\sqrt{3}}{2}$, бидејќи $\cos 150^0<0$;

$\operatorname{tg}240^0=\operatorname{tg}\left(270^0-30^0\right)=\operatorname{ctg}30^0=\sqrt{3}$, бидејќи $\operatorname{tg}240^0>0$.

Воопшто.

Ако аголот е од видот $90^0\pm\alpha$ или $270^0\pm\alpha$, тогаш при сведување функцијата преминува во кофункција на остриот агол α со знак „$+$" или „$-$" соодветно на знакот на дадената функција за дадениот агол, односно во дадениот квадрант.

5 Одреди ја вредноста: а) $\sin 330^0$; б) $\cos 225^0$; в) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$.

Решение. Бараната вредност ќе ја одредиме со сведување на дадената функција од произволен на остар агол. Аголот можеме да го изразиме како 360^0-30^0 или 270^0+60^0. Сосема е сеедно како ќе го изразиме дадениот агол, резултатот е ист.

а) $\sin 330^0=\sin\left(360^0-30^0\right)=-\sin 30^0=-\frac{1}{2}$ или $\sin 330^0=\sin\left(270^0+60^0\right)=-\cos 60^0=-\frac{1}{2}$;

б) $\cos 225^0=\cos\left(270^0-45^0\right)=-\sin 45^0=-\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}=\operatorname{tg}135^0=\operatorname{tg}\left(90^0+45^0\right)=-\operatorname{ctg}45^0=-1$.

6 Сведи ги на остар агол функциите $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, ако аголот α е:
а) 115^0; б) 200^0; в) 320^0.

■ а) $\cos 115^0=\cos\left(90^0+25^0\right)=-\sin 25^0$; $\sin 115^0=\sin\left(180^0-65^0\right)=\sin 65^0$.

7 Без калкулатор, одреди ја вредноста на функцијата:

а) $\operatorname{tg}150^0$; б) $\operatorname{ctg}210^0$; в) $\sin 225^0$; г) $\cos\frac{4\pi}{3}$.

8 Функциите $\sin 75^0$, $\cos 35^0$, $\operatorname{tg}83^0$, $\operatorname{ctg}23^0$ изрази ги преку соодветните функции од комплементниот агол.

■ $\sin 75^0=\sin\left(90^0-15^0\right)=\cos 15^0$; $\operatorname{ctg}23^0=\operatorname{ctg}\left(90^0-67^0\right)=\operatorname{tg}67^0$.

9 Упрости го изразот $\left(0<\alpha<90^0\right)$:

а) $\sin\left(90^0+\alpha\right)+\cos\left(180^0+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(270^0-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(360^0-\alpha\right)$;

б) $\dfrac{\cos(\pi-\alpha)+\sin(\pi-\alpha)}{1+\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)}$; в) $\dfrac{\sin\left(360^0-\alpha\right)}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\left(90^0+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(90^0+\alpha\right)}\cdot\dfrac{\operatorname{tg}\left(270^0-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\left(90^0+\alpha\right)}$.

Решение. а) $\sin\left(90^0+\alpha\right)+\cos\left(180^0+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(270^0-\alpha\right)+\operatorname{ctg}\left(360^0-\alpha\right)=$
$=\cos\alpha+\left(-\cos\alpha\right)+\operatorname{ctg}\alpha+\left(-\operatorname{ctg}\alpha\right)=0$;

б) $$\frac{\cos(\pi-\alpha)+\sin(\pi-\alpha)}{1+\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)}=\frac{-\cos\alpha+\sin\alpha}{1+\left(-\operatorname{tg}\alpha\right)}=\frac{-\cos\alpha+\sin\alpha}{\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha}}=-\cos\alpha;$$

в) $$\frac{\sin\left(360^0-\alpha\right)}{\cos\alpha}\cdot\frac{\sin\left(90^0+\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(90^0+\alpha\right)}\cdot\frac{\operatorname{tg}\left(270^0-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}\left(90^0+\alpha\right)}=\frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{-\operatorname{ctg}\alpha}\cdot\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{-\operatorname{tg}\alpha}=-\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}=-\cos\alpha.$$

10 Докажи го идентитетот $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)\right]^2+\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(2\pi-\alpha)\right]^2=2.$

Решение. $\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)\right]^2+\left[\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(2\pi-\alpha)\right]^2=$

$=[\cos\alpha+\sin\alpha]^2+[-\sin\alpha+\cos\alpha]^2=$

$=\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha+\sin^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=$

$=2\sin^2\alpha+2\cos^2\alpha=2\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)=2\cdot1=2.$

Задачи

1 Одреди ја вредноста на тригонометриската функција: а) $\cos135^0$; б) $\operatorname{ctg}240^0$; в) $\operatorname{tg}315^0$.

2 Пресметај ја вредноста на изразот: а) $\sin330^0+\cos210^0-\operatorname{tg}225^0-\operatorname{ctg}150^0$;

б) $\sin\frac{5\pi}{6}+\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}-\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}-\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}$; в) $2\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}-2\operatorname{ctg}\frac{7\pi}{4}+\cos\frac{5\pi}{3}-\sin\frac{11\pi}{6}$.

3 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\frac{2\sin\alpha-\sin2\alpha}{2\sin\alpha+\sin2\alpha}$, ако $\alpha=\frac{2\pi}{3}$; б) $\frac{\operatorname{tg}\beta-\sin\alpha}{\cos\beta+\operatorname{ctg}\alpha}$, ако $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

Упрости го изразот $(4-7)$:

4 а) $2\sin40^0+\cos130^0-\sin160^0-\cos110^0$; б) $\sin160^0\cdot\cos110^0+\sin250^0\cdot\cos340^0+\operatorname{tg}110^0\cdot\operatorname{tg}340^0$.

5 $\frac{\cos^2\left(360^0-\alpha\right)+\sin^2\left(270^0+\alpha\right)}{\operatorname{tg}^2\left(90^0+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}^2\left(270^0+\alpha\right)}$, $0<\alpha<90^0$.

6 $\frac{\sin\left(360^0-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(90^0+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(270^0-\alpha\right)}{\cos\left(360^0-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(180^0+\alpha\right)}$.

7 $\frac{\sin\left(180^0+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}130^0\cdot\cos320^0\cdot\sin90^0}{\cos\left(90^0+\alpha\right)\cdot\sin140^0\cdot\operatorname{ctg}50^0\cdot\cos180^0}$.

Докажи го идентитетот $(8-10)$:

8 $\frac{\cos\left(270^0+\alpha\right)\cdot\sin\left(180^0-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(90^0-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(270^0+\alpha\right)\cdot\operatorname{ctg}\left(90^0-\alpha\right)\cdot\sin\left(90^0-\alpha\right)}=\sin\alpha.$

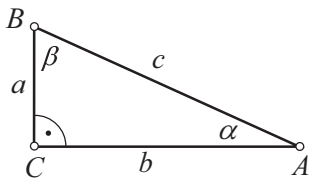
9 $\frac{\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(2\pi-\alpha)}{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}=-\cos\alpha.$

10 $\frac{\cos\left(180^0+\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(180^0-\alpha\right)}{\cos\left(270^0-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(270^0+\alpha\right)}=\operatorname{tg}\alpha.$

5 РЕШАВАЊЕ НА ПРАВОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК

Потсети се!

- Да се реши правоаголен триаголник значи да се најдат сите негови основни елементи: страни и агли.
- За правоаголниот триаголник ABC на цртежот имаме:



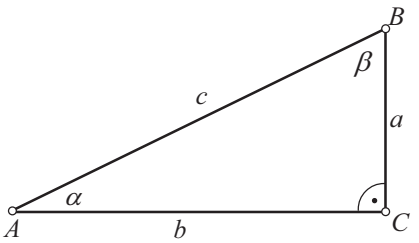
$$\alpha+\beta=90^0$$

$$a^2+b^2=c^2$$

- $\sin\alpha=\frac{a}{c},\quad \cos\alpha=\frac{b}{c},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{a}{b},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{b}{a}.$

А Решавањето на правоаголен триаголник ќе го покажеме на следните задачи.

1 Реши го правоаголниот триаголник ако се дадени: хипотенуза $c=36,5$ cm и агол $\alpha=33^0 25'$.



Решение. Од ΔABC (на цртежот) имаме:

$\sin\alpha=\frac{a}{c}$, па $a=c\cdot\sin\alpha=36,5\cdot\sin 33^0 25'$, $\quad a=36,5\cdot 0,5507=20,10055\approx 20,10$ cm.

$\cos\alpha=\frac{b}{c}$, а $b=c\cdot\cos\alpha=36,5\cdot\cos 33^0 25'=36,5\cdot 0,83468=30,46610\approx 30,47.$

$\beta=90^0-\alpha,\quad \beta=90^0-33^0 25'=56^0 35'.$

Забелешка. *Катетата b може да се одреди и од* $b^2=c^2-a^2$ *или од* $b=a\cdot\operatorname{tg}\beta$, *меѓутоа во тој случај користиме пресметан елемент со приближна вредност. Од тие причини, бараните елементи треба да се одредуваат со дадените елементи. Конечниот резултат го заокружуваме. Вредноста* $\sin 33^0 25'$ *ја одредуваме со калкулатор на следниот начин:*

1. *На дисплејот избираме* ***DEG*** (*аголот* α *изразен во степени*).

2. *Внесуваме* $33.25\rightarrow$ ***DEG*** $\rightarrow\sin$ и добиваме 0,55072. Значи, $\sin 33^0 25'=0,55072.$

Ако на калкулаторот нема ***DEG*** (*опција што минутите ги претвора во степени*), *тогаш*

$33^0 25'=33^0+\left(\frac{25}{60}\right)^0=33^0+0,41666^0=33,41666^0\rightarrow\sin$ и добиваме 0,55072.

Значи, $\sin 33^0 25'=0,55072.$

2 Реши го правоаголниот триаголник ако $b=13,2$ и $\beta=40^0 45'$.

3 Реши го правоаголниот триаголник ако $b=43,5$ cm, $\quad c=62,4$ cm.

Решение. Од ΔABC (на цртежот во задача 1) имаме: $a^2 = 62,4^2 - 43,5^2 = 2001,51;$

$a = \sqrt{2001,51}$, т.е. $a = 44,73824 \approx 44,74$ cm.

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \frac{43,5}{62,4} = 0,69712, \quad \alpha = 45^0 48'. \quad \beta = 90^0 - 45^0 48' = 44^0 12'.$$

Аголот α го одредуваме на следниот начин:

$\cos\alpha = 0,69712 \to 2nd \to \cos^{-1} \to 2nd \to DMS$ и добиваме $45^0 48' 13''$. *Значи,* $\alpha = 45^0 48' 13''$.

Понатаму, аголот ќе го одредуваме само во степени и минути. Ако на калкулаторот нема DMS (што децималниот дел од степеното го претвора во минути и секунди), тогаш

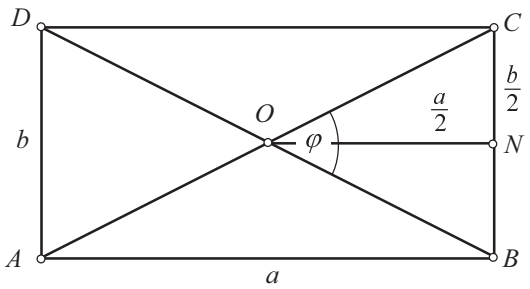
$$45,8096045 = 45^0 + 0,8096045^0 = 45^0 + (0,8096045 \cdot 60)' = 45^0 + 48,21645' =$$
$$= 45^0 48' + (0,216715 \cdot 60)'' = 45^0 48' 12,976'' = 45^0 48' 13''.$$

4 Реши го правоаголниот триаголник ако $a = 35$ cm, $b = 42$ cm.

Решавањето на правоаголниот триаголник ни овозможува да решаваме и многу други задачи од геометрија, физика или други технички науки.

5 Пресметај го периметарот на правоаголникот чија дијагонала е $d = 28,5$ cm, а помалиот агол што го зафаќаат дијагоналите е $\varphi = 65^0 30'$.

Решение. Ако a и b се страни на правоаголникот, тогаш $L = 2(a+b)$. Нека точката О е пресек на дијагоналите (цртеж). Тогаш $\measuredangle NOC = \frac{\varphi}{2} = 32^0 45'$.



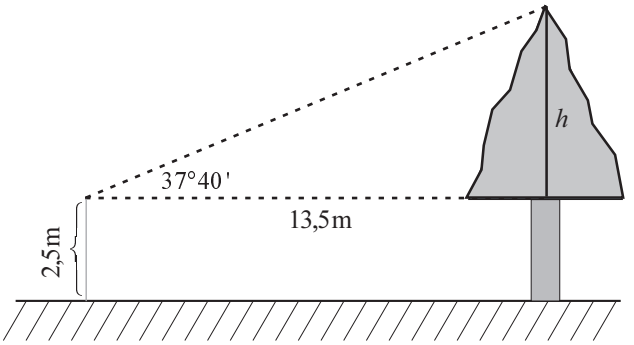
Од ΔONC: $\cos\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{a}{d}$, па $a = d\cos\frac{\varphi}{2} =$

$= 28,5 \cdot \cos 32^0 45' = 28,5 \cdot 0,84104;$ $a = 23,97$ cm; $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{\frac{d}{2}} = \frac{b}{d}$, а $b = d\sin\frac{\varphi}{2} = 28,5 \cdot \sin 32^0 45';$

$b = 15,42$ cm, а $L = 2(23,97 + 15,42) = 78,78$ cm.

6 Одреди го периметарот на рамнокракиот триаголник со основа $a = 18,6$ cm и агол при врвот $\gamma = 37^0 40'$.

7 Одреди ја висината на дрвото според податоците дадени на цртежот.



Решение. $\operatorname{tg} 37^0 40' = \dfrac{h}{13,5}$, $h = 13,5 \cdot \operatorname{tg} 37^0 40'$,

$h = 13,5 \cdot 0,7719 = 10,42$ m, а

$H = h + 2,5 = 12,92$ m. Значи, висината на дрвото е $12,92$ m.

Задачи

Реши го правоаголниот триаголник $(1-5)$:

1 а) $a = 15$ cm, $\beta = 38^0$;
б) $b = 25$ cm, $\alpha = 35^0 40'$.

2 а) $c = 27$ cm, $\alpha = 40^0 50'$;
б) $c = 63$ cm, $\beta = 65^0 30'$.

3 а) $c = 25$ cm, $b = 13$ cm;
б) $a = 23$ cm, $b = 35$ cm.

4 а) $b : c = 12 : 13$, $a = 15$ cm;
б) $a : b = 21 : 20$, $c = 58$ cm.

5 а) $P_\Delta = 63$ cm^2, $b = 12$ cm;
б) $P_\Delta = 180$ cm^2, $a = 40$ cm.

6 Одреди ги аглите на рамнокракиот триаголник со основа $a = 48$ cm и крак $b = 30$ cm.

7 Основите на рамнокрак трапез се $15,2$ cm и $8,4$ cm, а кракот е $10,5$ cm. Одреди ги аглите на трапезот.

8 Одреди ги аглите на трапезот со основи 20 cm и 6 cm, а краци 13 cm и 15 cm.

9 До која висина ќе допре пожарникарската скала долга 20 m кога ќе се постави на земјата под агол од 55^0?

10 Фабричкиот оџак од точката M што е на растојание 76 m од неговото подножје се гледа под агол (во однос на земјата) од 28^0. Одреди ја висината на оџакот.

6 СИНУСНА ТЕОРЕМА

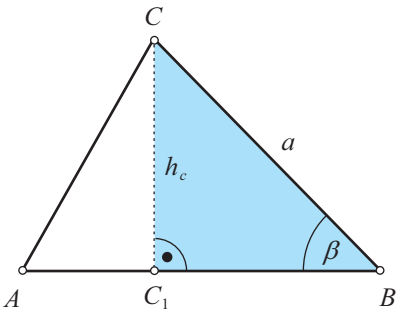
Потсети се!

Плоштината на кој било триаголник е еднаква на полупроизводот од страната и соодветната висина, т.е.

$$P = \frac{1}{2} a \cdot h_a = \frac{1}{2} b \cdot h_b = \frac{1}{2} c \cdot h_c.$$

A 1 Пресметај ја плоштината на ΔABC ако се дадени страните $a = 12,5$, $c = 16,2$ и аголот $\beta = 50^0 26'$.

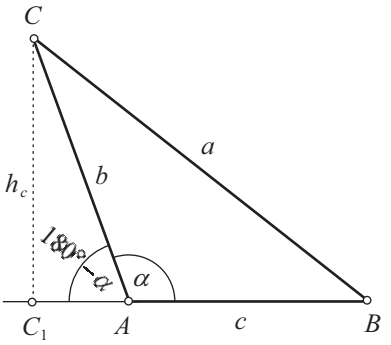
Решение. Според дадените елементи, плоштината е:



$P = \frac{1}{2} c \cdot h_c$. Од ΔCC_1B: $\sin\beta = \dfrac{h_c}{a}$, $h_c = a \sin\beta$, па

$\boxed{P = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin\beta}$, т.е. $P = \frac{1}{2} \cdot 12,5 \cdot 16,2 \cdot \sin 50^0 26' = 78,05$ cm^2.

- Воопшто, плоштината на кој било триаголник е еднаква на полупроизводот од кои било две страни и синусот од аголот меѓу нив.



Истата формула важи и ако дадениот агол е тап (како на цртежот). Од ΔACC_1 : $\sin\left(180^0-\alpha\right)=\frac{h_c}{b}$, т.е.

$h_c=b\cdot\sin\left(180^0-\alpha\right)=b\cdot\sin\alpha$, па

$$P=\frac{1}{2}c\cdot b\cdot\sin\alpha.$$

На сличен начин се изведува и формулата

$$P=\frac{1}{2}a\cdot b\cdot\sin\gamma.$$

Од $P=\frac{1}{2}a\cdot c\sin\beta=\frac{1}{2}b\cdot c\sin\alpha=\frac{1}{2}a\cdot b\sin\gamma$ следува дека:

$a\cdot c\sin\beta=b\cdot c\sin\alpha$ и $c\cdot b\sin\alpha=a\cdot b\sin\gamma$ или $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$ и $\frac{c}{\sin\gamma}=\frac{a}{\sin\alpha}$, т.е.

$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$. Ова равенство е познато како

Синусна теорема. Страните на триаголникот се пропорционални со синусите од спротивните агли, т.е.

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}.$$

Синусната теорема се применува при решавањето на следните две ***основни задачи***:

1. Решавање на триаголник ако е дадена една страна и два агли.

2. Решавање на триаголник ако се дадени две страни и аголот што лежи наспроти едната од нив..

Освен двете основни, постојат и други задачи во кои дадените елементи се од посложен вид, како на пример: $a,\ \alpha,\ b+c;\quad a,\ R,\ b+c;\quad b,\ \beta,\ a-c;\quad R,\ a+b+c,\ \alpha$ итн.

Потсети се!

- При решавање на триаголник треба да се има предвид дека:
  Во кој било триаголник спроти поголема страна лежи поголем агол и обратно.

2 Реши го триаголникот зададен со:
$a=63,25\text{ cm},\quad \alpha=37^0 20',\quad \beta=85^0 30'.$

Решение. Од $\alpha+\beta+\gamma=180^0$ следува дека $\gamma=180^0-(\alpha+\beta)$, т.е. $\gamma=57^0 10'$. Со примена на синусната теорема $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ имаме $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$, $b=\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin\beta$,

$b=\frac{63,25}{\sin 37^0 20'}\cdot\sin 85^0 30'$, $b=\frac{63,25}{0,60645}\cdot 0,99668$, $b=103,95$ cm. Страната c ќе ја одредиме со синусната теорема. Од $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$ следува дека $c=\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin\gamma=\frac{63,25}{0,60645}\cdot\sin 57^0 10'$,

$c=87,63$ cm.

- Со дадени два агли на триаголник чиј збир е помал од 180^0 и една страна, задачата секогаш има единствено решение.

3 Реши го триаголникот ако: $a=20,6$, $\beta=47^0 30'$, $\gamma=80^0 25'$.

Пошети се!

- Ако се дадени две страни и аголот спроти поголемата страна, тогаш триаголникот е еднозначно определен.
- Ако се дадени две страни и аголот спроти помалата страна, тогаш триаголникот не е еднозначно определен. Во тој случај, задачата може да има едно решение, две решенија или да нема решение.

Б **4** Реши го триаголникот зададен со:

а) $a=12$, $b=15$, $\beta=55^0 30'$;
б) $a=4$, $c=13$, $\alpha=14^0 15'$;
в) $b=5$, $c=3$, $\gamma=45^0$.

Решение. а) Од $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}$ следува дека

$b\sin\alpha=a\sin\beta$, т.е. $\sin\alpha=\frac{a\sin\beta}{b}$,

$\sin\alpha=\frac{12\cdot\sin 55^0 30'}{15}$, $\sin\alpha=\frac{12\cdot 0,824126}{15}=0,65930$, па $\alpha=41^0 14'$.

- Од условот $\sin(180^0-\alpha)=\sin\alpha$ следува дека постои агол $\alpha_1=180^0-\alpha=$ $=180^0-41^0 14'=138^0 46'$, така што $\sin\alpha_1=\sin\alpha$. Аголот α_1 не може да биде агол на триаголникот, бидејќи во тој случај $\alpha_1>\beta$, а $a<b$ што е невозможно. Значи, задачата има единствено решение.

$\gamma=180^0-(\alpha+\beta)$, $\gamma=180^0-(41^0 14'+55^0 30')$, $\gamma=83^0 16'$. Од $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$ следува дека

$c=\frac{a}{\sin\alpha}\cdot\sin\gamma$, $c=\frac{12\cdot\sin 83^0 16'}{\sin 41^0 14'}$, $c=\frac{12\cdot 0,9931}{0,65913}=18,08$.

б) Од $\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{c}{\sin\gamma}$ следува дека $a\cdot\sin\gamma=c\cdot\sin\alpha$, $\sin\gamma=\frac{c\sin\alpha}{a}=\frac{13\cdot\sin 14^0 15'}{4}=0,799998$,

па $\gamma=53^0 8'$.

- Аголот $\gamma > \alpha$, а и $c > a$, па од $\sin\left(180^0 - \gamma\right) = \sin\gamma$ следува дека аголот $\gamma_1 = 180^0 - \gamma$ може да биде и тап агол, т.е. $\gamma_1 = 180^0 - \gamma = 180^0 - 53^0 8' = 126^0 52'$. Бидејќи $\gamma_1 > \alpha$ го задоволува условот $c > a$, значи задачата има две решенија.

- За $\gamma = 53^0 8'$, $\beta = 180^0 - (\alpha + \gamma) = 180^0 - \left(14^0 15' + 53^0 8'\right)$, $\beta = 112^0 37'$. Од $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta}$ имаме

$$b = \frac{a\sin\beta}{\sin\alpha}, \quad b = \frac{4\cdot\sin 112^0 37'}{\sin 14^0 15'}, \quad b = 15.$$

- За $\gamma_1 = 126^0 52'$, $\beta_1 = 180^0 - (\alpha + \gamma_1) = 38^0 53'$, а $b_1 = \dfrac{a\sin\beta_1}{\sin\alpha} = \dfrac{4\cdot\sin 38^0 53'}{\sin 14^0 15'} = \dfrac{4\cdot 0,6277}{0,2462} = 10,19.$

Според тоа, едното решение на задачата е $b = 15$, $\beta = 112^0 37'$, $\gamma = 53^0 8'$, а второто:

$b_1 = 10,19$, $\beta_1 = 38^0 53'$, $\gamma_1 = 126^0 52'$.

- Конструирај триаголник со страни $a = 4$ cm, $c = 13$ cm и агол $\alpha = 14^0$. Колку решенија има задачата?

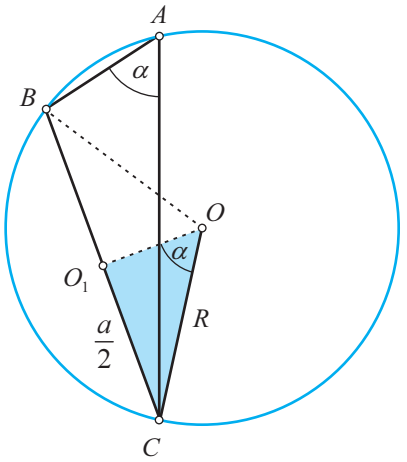
в) Од $\dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ следува дека $c\sin\beta = b\sin\gamma$, а $\sin\beta = \dfrac{b\sin\gamma}{c} = \dfrac{5\cdot\sin 45^0}{3} = 1,1785 > 1$. Задачата нема решение, бидејќи $\sin\alpha \in [-1,1]$.

- За да се увериш дека задачата нема решение, обиди се да конструираш триаголник со страни $b = 5$ cm, $c = 3$ cm и агол $\gamma = 45^0$.

5 Реши го триаголникот ако: а) $a = 12$, $\alpha = 77^0$, $\gamma = 55^0 30'$;
б) $a = 45$, $b = 53$, $\alpha = 53^0 48'$; в) $b = 6$, $c = 4$, $\gamma = 60^0$,

6 Докажи дека во кој било триаголник страната е еднаква на производот од дијаметарот на опишаната кружница и синусот од спротивниот агол.

Решение. Нека R е радиус на опишаната кружница околу произволниот триаголник ABC (на цртежот). Од својството за централен и периферен агол следува дека $\measuredangle BOC = 2\alpha$, т.е. $\measuredangle O_1OC = \alpha$, па од триаголникот COO_1 имаме:

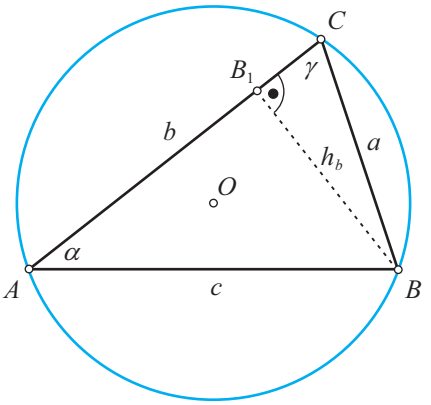


$\sin\alpha = \dfrac{\frac{a}{2}}{R} = \dfrac{a}{2R}$, т.е. $a = 2R\sin\alpha$. Аналогно докажуваме дека $b = 2R\sin\beta$ и $c = 2R\sin\gamma$. Оттука следува дека

$$\boxed{\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.}$$

- Покажи дека синусната теорема важи и за правоаголен триаголник.

7 Реши го триаголникот ABC ако: $R = 8{,}125, \quad a = 13, \quad h_b = 12.$



Решение. Од триаголникот B_1BC имаме: $\sin\gamma = \dfrac{h_b}{a}$,

$$\sin\gamma = \frac{12}{13} = 0{,}92308, \quad \gamma = 67^0 22'.$$

Од $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2R$ имаме: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$, т.е.

$$\sin\alpha = \frac{a}{2R} = \frac{13}{2\cdot 8{,}125} = 0{,}8, \quad \alpha = 53^0 7'; \quad \frac{c}{\sin\gamma} = 2R, \text{ т.е.}$$

$$c = 2R\sin\gamma = 2\cdot 8{,}125\cdot\sin 67^0 22', \quad c = 15.$$

$$\beta = 180^0 - (\alpha+\gamma), \quad \beta = 180^0 - \left(53^0 7' + 67^0 22'\right) = 59^0 31';$$

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2R, \quad b = 2R\sin\beta = 2\cdot 8{,}125\cdot\sin 59^0 31' = 14.$$

Задачи

1 Реши го триаголникот ABC зададен со една страна и два агли:

а) $a = 17, \quad \alpha = 48^0 20', \quad \beta = 56^0 36';$

б) $b = 12, \quad \alpha = 77^0, \quad \gamma = 57^0 34'.$

2 Реши го триаголникот ABC зададен со две страни и агол спроти едната од нив:

а) $a = 12, \quad b = 15, \quad \beta = 48^0 35';$

б) $b = 25{,}4, \quad c = 15{,}8, \quad \gamma = 74^0;$

в) $a = 14{,}5, \quad c = 18, \quad \alpha = 48^0 30'.$

3 Реши го триаголникот ABC зададен со:

а) $a = 16, \quad c = 9{,}53, \quad \gamma = 23^0 30';$

б) $a = 5{,}7, \quad c = 9{,}5, \quad \alpha = 72^0.$

4 Реши го триаголникот ABC ако се дадени:

$b = 4{,}8, \quad c = 7{,}2, \quad \gamma = 85^0 45'.$

5 Реши го триаголникот ABC зададен со:

а) $R = 25, \quad \alpha = 70^0, \quad \beta = 85^0;$

б) $R = 8, \quad a = 13, \quad \beta = 48^0 36'.$

6 Реши го триаголникот ABC зададен со:

а) $R = 23, \quad a = 31, \quad b = 28;$

б) $R = 7\sqrt{3}, \quad b = 24, \quad h_c = 12\sqrt{3}.$

7 Пресметај ги периметарот и плоштината на паралелограмот $ABCD$ ако:

$\overline{AB} = 8, \quad \overline{BD} = 13, \quad \alpha = 60^0.$

7 КОСИНУСНА ТЕОРЕМА

Потсети се!

- **1.** Конструирај триаголник ABC со дадени страни a, b и c.
- **2.** Конструирај триаголник ABC со дадени страни b и c и агол α.

- Првата задача има решение ако страните го задоволуваат условот $|b-c|<a<b+c$.
- Втората задача секогаш има решение.

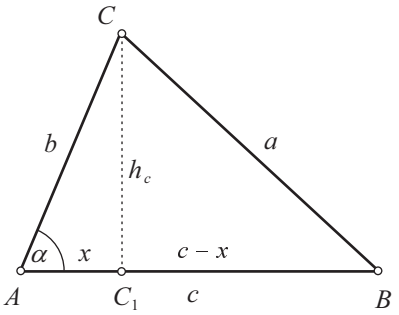
А 1 Одреди ја плоштината на триаголникот ABC чии страни се:

$a=20$ cm, $b=13$ cm, $c=21$ cm.

Решение. Бараната плоштина можеме да ја одредиме со Хероновата формула или со формулата

$$P=\frac{c\cdot h_c}{2}.$$

Нека $\overline{AC_1}=x$. Тогаш $\overline{C_1B}=c-x$, па од ΔAC_1C имаме $h_c^2=b^2-x^2$, а од ΔCC_1B имаме $h_c^2=a^2-(c-x)^2$. Оттука следува дека



$b^2-x^2=a^2-(c^2-2cx+x^2)$, т.е. $b^2=a^2-c^2+2cx$ или

$x=\dfrac{c^2+b^2-a^2}{2c}$, $x=\dfrac{21^2+13^2-20^2}{2\cdot 21}=5$, па $h_c^2=13^2-5^2$,

$h_c^2=144$, т.е. $h_c=12$; $P=\dfrac{1}{2}\cdot 21\cdot 12=126$ cm^2.

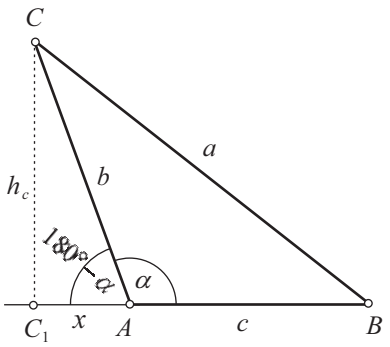
- Да го разгледаме уште еднаш равенството $b^2=a^2-c^2+2cx$.

Од ΔAC_1C, $\cos\alpha=\dfrac{x}{b}$, т.е. $x=b\cos\alpha$, па $b^2=a^2-c^2+2cb\cos\alpha$, а оттука следува

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

- Ова равенство важи и ако аголот α е тап, т.е. $90^0<\alpha<180^0$.

Нека $\overline{C_1A}=x$. Тогаш $\overline{C_1B}=x+c$ (црт.) Од ΔC_1AC имаме:



$h_c^2=b^2-x^2$, а од ΔC_1BC имаме $h_c^2=a^2-(x+c)^2$. Оттука,

$a^2-(x^2+2cx+c^2)=b^2-x^2$, т.е. $a^2=b^2+c^2+2cx$.

Од ΔC_1AC: $\cos(180^0-\alpha)=\dfrac{\overline{C_1A}}{b}=\dfrac{x}{b}$, $x=b\cos(180^0-\alpha)$.

Од $\cos(180^0-\alpha)=-\cos\alpha$ следува дека $x=-b\cos\alpha$, па

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha.$$

Ова тврдење е познато како

Косинусна теорема. Квадратот на која било страна на триаголник е еднаков на збирот од квадратите на другите две страни намален за двојниот производ на тие две страни и косинусот од аголот меѓу нив, т.е.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha, \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta, \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Доказот на второто и третото равенство се изведува на ист начин.

- Ако еден од аглите на триаголникот е прав, на пример $\beta = 90^0$, тогаш $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos 90^0$, односно $b^2 = a^2 + c^2$, бидејќи $\cos 90^0 = 0$. Значи, косинусната теорема важи и за правоаголен триаголник.

Косинусната теорема се применува при решавањето на следните две основни задачи:

1. Решавање на триаголник ако се дадени две страни и аголот меѓу нив.

2. Решавање на триаголник ако се дадени трите негови страни.

Со примена на косинусната и синусната теорема може да се решаваат и други задачи во кои е дадена некоја релација меѓу елементите на триаголникот.

2 Реши го триаголникот ABC зададен со: $a = 17, \quad c = 22, \quad \beta = 56^0 35'$.

Решение. Даден е аголот β, па ја одредуваме страната b. Имаме: $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$,

$b^2 = 17^2 + 22^2 - 2\cdot 17\cdot 22\cdot\cos 56^0 35', \quad b^2 = 298 + 484 - 748\cdot 0,550723, \quad b = \sqrt{361,05877} = 19.$

- Ако се дадени трите страни на триаголникот, тогаш од $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ следува дека

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \quad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.}$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \quad \cos\alpha = \frac{19^2 + 22^2 - 17^2}{2\cdot 19\cdot 22}, \quad \cos\alpha = \frac{556}{836}, \quad \cos\alpha = 0,66507177, \quad \alpha = 48^0 18'.$$

$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{17^2 + 19^2 - 22^2}{2\cdot 17\cdot 19} = \frac{166}{646} = 0,25697; \quad \alpha = 75^0 6'.$$

Забелешка. *По одредувањето на третата страна (или аголот ако се дадени трите страни), за одредување на другите елементи на триаголникот може да се користи и синусната теорема.*

3 Реши го триаголникот ABC зададен со:

а) $b = 42,5, \quad c = 52,4, \quad \alpha = 110^0 25';$ б) $b = 15, \quad a = 23, \quad \gamma = 60^0.$

4 Реши го триаголникот ABC зададен со:

а) $a=17,\quad b=15,\quad c=8;$ б) $a=13,2\quad b=17,2\quad c=23.$

Решение. Дадени се трите страни, па:

б) $\cos\gamma=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{17,2^2+13,2^2-23^2}{2\cdot 17,2\cdot 13,2}=\dfrac{295,84+174,24-529}{454,08}=\dfrac{-58,92}{454,08}=-0,129756871,$ а

$\gamma=97^0 27'$. Аголот α ќе го одредиме со синусната теорема. Од $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{c}{\sin\gamma}$ следува дека

$\sin\alpha=\dfrac{a\cdot\sin\gamma}{c}=\dfrac{13,2\cdot\sin 97^0 27'}{23}=\dfrac{13,2\cdot 0,991558}{23}=0,569068,\ \alpha=34^0 41'.$

Аголот β ќе го одредиме од условот $\alpha+\beta+\gamma=180^0$, па $\beta=180^0-(\alpha+\gamma)$,

$\beta=180^0-132^0 48',\quad \beta=47^0 12'.$

5 Реши го триаголникот ABC зададен со:

а) $a=17,\ b=12,\ c=9;$ б) $a=2,3,\ b=1,7,\ c=1,5.$

6 Реши го триаголникот ABC зададен со страни $a=14,\ c=12$ и тежишна линија $t_c=10.$

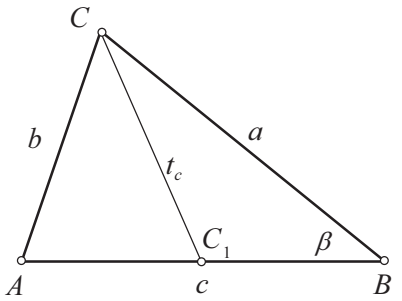
Решение. Триаголникот C_1BC е одреден со страните $\dfrac{c}{2},\ a$ и t_c, па $\cos\beta=\dfrac{a^2+\left(\dfrac{c}{2}\right)^2-t_c^{\,2}}{2\cdot a\cdot\dfrac{c}{2}}$,

$\cos\beta=\dfrac{14^2+6^2-10^2}{2\cdot 14\cdot 6}=0,785714,\quad \beta=38^0 12'.$

Од ΔABC: $b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta=75,952;\ \ b=8,72.$

$\cos\alpha=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=0,11486;\ \ \alpha=83^0 24'.$

$\gamma=180^0-(\alpha+\beta)=58^0 24'.$



Задачи

1 Одреди ја, без калкулатор, третата страна на триаголникот ABC, ако:

а) $a=5,\quad c=7,\quad \beta=60^0;$

б) $a=13,\quad b=8,\quad \gamma=120^0.$

Реши го триаголникот ABC:

2 а) $a=17,\quad b=15,\quad \gamma=35^0 40';$

б) $b=13{,}5,\quad c=15,\quad \alpha=54^0 40'.$

3 а) $a=12,\quad b=13,\quad c=5;$

б) $a=13{,}5,\quad b=17,\quad c=21.$

4 $a^2+b^2=34,\quad c=7,\quad \gamma=120^0.$

5 $b=16,\quad c=13,\quad t_b=11.$

6 Без употреба на калкулатор, пресметај ги непознатите страни на триаголникот ABC, ако:

а) $a+b=20,\quad c=15,\quad \beta=60^0;$

б) $c-a=30,\quad b=33,\quad \gamma=120^0.$

7 Без употреба на калкулатор, пресметај го аголот α на триаголникот ABC, ако меѓу неговите страни постои релацијата:

а) $a^2=b^2+c^2-bc;$

б) $a^2=b^2+c^2+bc\sqrt{2}.$

8 Пресметај ја должината на тежишната линија t_c на триаголникот ABC, ако:

а) $a=8,\quad c=6,\quad \beta=60^0;$

б) $b=12{,}3,\quad c=18{,}5,\quad \alpha=57^0 30'.$

9 Пресметај ги аглите и плоштината на паралелограмот $ABCD$, ако:

$a=7,\quad b=5,\quad d_1=6.$

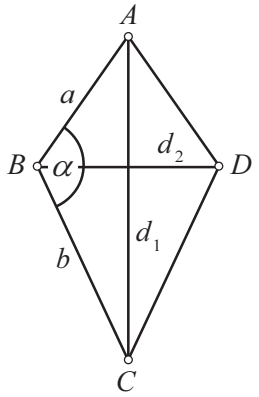
10 Пресметај ги острите агли на трапезот со основи $a=10,\quad b=3$ и краци $c=5,\quad d=4.$

8 ПРИМЕНА НА СИНУСНА И КОСИНУСНА ТЕОРЕМА

Тригонометријата се применува во математиката, физиката и во сите технички науки. Од тие причини, невозможно е да се дадат сите примери каде што тригонометријата наоѓа примена. Во следните задачи ќе ја покажеме примената на тригонометријата во некои области.

1 Пресметај ги дијагоналите на делтоидот со страни $a=70,\ b=80$ и агол меѓу нив $\alpha=120^0.$

Решение. Нека $\measuredangle ABC = 120^0$, $\overline{AC} = d_1$, $\overline{BD} = d_2$. Со примена на косинусната теорема имаме:



$d_1^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos 120^0$; $d_1^2 = 70^2 + 80^2 - 2\cdot 70\cdot 80\cdot\cos\left(180^0 - 60^0\right)$;

$d_1^2 = 4900 + 6400 - 2\cdot 70\cdot 80\cdot\left(-\cos 60^0\right)$;

$d_1^2 = 4900 + 6400 + 2\cdot 70\cdot 80\cdot\frac{1}{2} = 16900$; $d_1 = \sqrt{16900} = 130$.

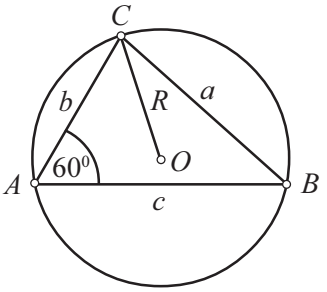
Плоштината P на делтоидот е $P = 2\cdot P_{\Delta ABC}$; $P = 2\cdot\frac{1}{2}ab\sin 120^0$;

$P = 70\cdot 80\cdot 0{,}866 = 4849{,}74$. Од $P = \frac{1}{2}d_1\cdot d_2$ следува дека $4849{,}74 = \frac{1}{2}\cdot 130\cdot d_2$, т.е.

$d_2 = 74{,}61$.

2 Во една кружница се дадени тетивите $\overline{AB} = 8$ и $\overline{AC} = 5$ кои образуваат агол од 60^0. Одреди го радиусот на кружницата.

Решение. Радиусот на опишаната кружница околу триаголникот



ABC е $R = \frac{a\cdot b\cdot c}{4P}$. Плоштината на ΔABC е $P = \frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin 60^0$;

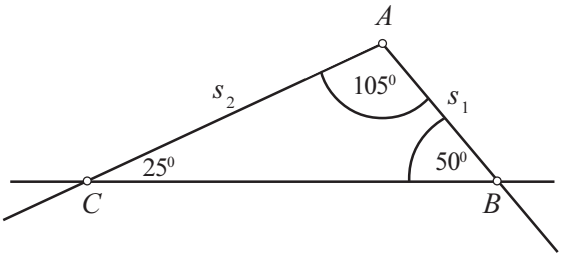
$P = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot 5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$. Страната a ќе ја одредиме со примена на

косинусната теорема и имаме: $a^2 = b^2 + c^2 - 2b\cdot c\cdot\cos 60^0$;

$a^2 = 5^2 + 8^2 - 2\cdot 5\cdot 8\cdot\frac{1}{2} = 49$, т.е. $a = \sqrt{49} = 7$. Според тоа, $R = \frac{7\cdot 5\cdot 8}{4\cdot 10\sqrt{3}} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$.

3 Двајца велосипедисти тргнуваат истовремено од исто место, возат со иста брзина, но во различни правци кои образуваат агол од 105^0. Двете места до кои треба да стигнат велосипедистите се наоѓаат во пресеците на правците со правата која со правецот на првиот велосипедист образува агол од 50^0. Ако првиот велосипедист на целта стигнал за 70 минути, тогаш за колку време на својата цел ќе стигне вториот велосипедист?

Решение. Нека A е појдовната точка, а B и C се крајните точки на првиот, односно на вториот велосипедист (цртеж). Од ΔABC имаме:



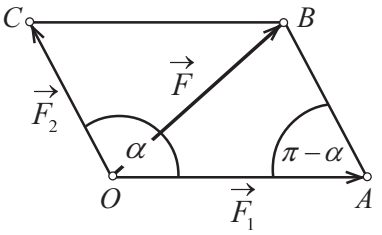
$\measuredangle C = 180^0 - \left(105^0 + 50^0\right) = 25^0$. Изминатиот пат на првиот велосипедист е $\overline{AB} = s_1 = v \cdot 70$, а на вториот $\overline{AC} = s_2 = v \cdot t_2$, каде што t_2 е времето на движење на вториот велосипедист. Со примена на синусната теорема имаме:

$\frac{s_1}{\sin 25^0} = \frac{s_2}{\sin 50^0} = \frac{\overline{BC}}{\sin 105^0}$. Од $\frac{s_1}{\sin 25^0} = \frac{s_2}{\sin 50^0}$ следува дека $s_2 = \frac{s_1}{\sin 25^0} \cdot \sin 50^0$, т.е.

$vt_2 = \frac{70v}{\sin 25^0} \cdot \sin 50^0$, па $t_2 = \frac{70}{0,422618} \cdot 0,766044 = 126,88$ минути. Значи, вториот велосипедист до својата цел ќе стигне за 126 минути и 53 секунди.

4 Одреди ја големината на силата $\vec{F}$ што е резултанта на силите $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$ чии насоки образуваат агол α.

Решение. Ги собереме силите $\vec{F_1}$ и $\vec{F_2}$ по правило на паралелограм. Резултантната сила е $\vec{F}$ (цртеж) и нејзината големина е $\overline{OB}$. Од ΔOAB со примена на косинусна теорема наоѓаме: $|\vec{F}|^2 = |\vec{F_1}|^2 + |\vec{F_2}|^2 - 2 \cdot |\vec{F_1}| \cdot |\vec{F_2}| \cdot \cos\left(180^0 - \alpha\right)$.

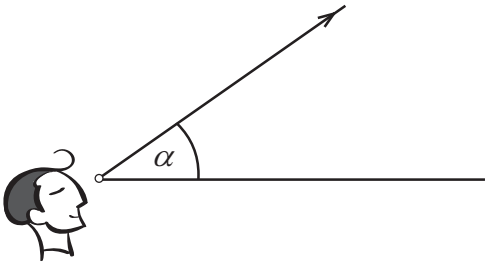


$$|\vec{F}|^2 = |\vec{F_1}|^2 + |\vec{F_2}|^2 + 2 \cdot |\vec{F_1}| \cdot |\vec{F_2}| \cdot \cos\alpha.$$

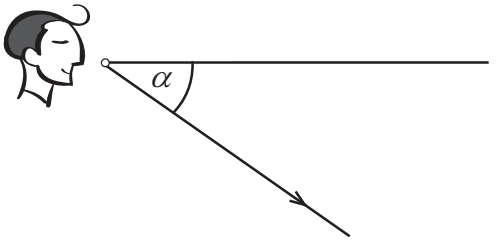
5 На врвот на еден рид, висок H m, поставен е радиопредавател висок 80 m. Од точката A што лежи на подножната хоризонтална рамнина на ридот, врвот на предавателот се гледа под агол на елевација од $39^0 30'$, а врвот на ридот се гледа под агол од $31^0 30'$. Одреди ја висината на ридот.

Забелешка.

- Остриот агол α формиран од хоризонтална права и полуправата во која набљудувачот гледа некој објект над хоризонталната права се вика ***аго̄л на елевација***.



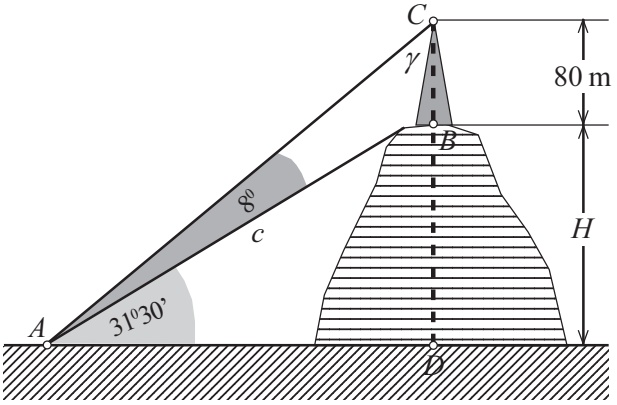
- Аголот α формиран од хоризонтална права и полуправата што е под хоризонтална права се вика ***аго̄л на деӣресија***.



Решение. Од ΔADB имаме $\sin 31^0 30' = \dfrac{H}{c}$, т.е. $H = c \cdot \sin 31^0 30'$, а од ΔADC имаме $\gamma = 90^0 - 39^0 30' = 50^0 30'$. Од ΔABC:

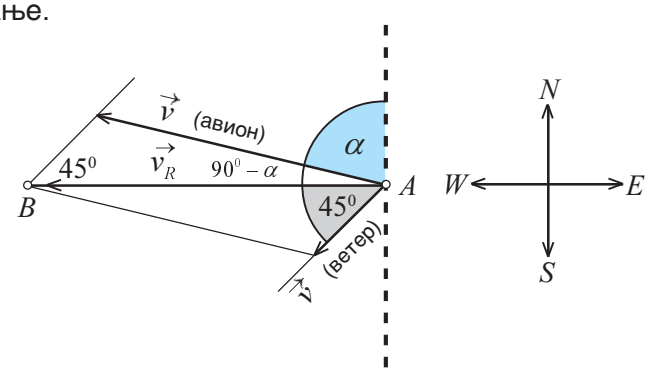
$$\frac{c}{\sin\gamma} = \frac{80}{\sin 8^0},\ c = \frac{80 \cdot \sin 50^0 30'}{\sin 8^0},\ c = 443{,}5 \text{ m},$$

па $H = 443{,}55 \cdot \sin 31^0 30'$, $H = 231{,}55$ m.



6 Авион лета од местото A кон местото B кое е оддалечено 300 km, а се наоѓа на запад од местото на поаѓање. Ветер дува од североисток со брзина 40 km/h. Авионот треба да стигне до целта за 30 минути. Пресметај ја брзината со која треба да лета авионот и одреди го правецот на неговото летање.

Решение. Ако не дува ветерот, тогаш авионот треба да лета со брзина од 600 km/h. Поради дејството на силата на ветерот, брзината на авионот ќе биде помала, па со примена на косинусната теорема (според цртежот) имаме:



$$v_A^{\ 2} = v_V^{\ 2} + v_R^{\ 2} - 2 \cdot v_V \cdot v_A \cos 45^0,$$

$$v_A^{\ 2} = 40^2 + 600^2 - 2 \cdot 40 \cdot 600 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2},\quad v_A^{\ 2} = 1600 + 360000 - 33941, \text{ а } v_A = 572{,}41 \text{ km/h}.$$

Со повторна примена на косинусната теорема имаме $v_V^{\ 2} = v_A^{\ 2} + v_R^{\ 2} - 2 \cdot v_A \cdot v_R \cos\left(90^0 - \alpha\right)$, т.е.

$$v_V^{\ 2} = v_A^{\ 2} + v_R^{\ 2} - 2 \cdot v_A \cdot v_R \sin\alpha, \text{ па } \sin\alpha = \frac{v_A^2 + v_R^2 - v_V^2}{2 v_A v_R} = \frac{686059}{686892} = 0{,}998787, \text{ а } \alpha = 87^0 10'.$$

Задачи

1 Пресметај ги плоштината и периметарот на паралелограмот со дадени:
а) $a = 16,\ d_1 = 19,\ \beta = 120^0$;
б) $b = 12{,}3\ \ d_1 = 31,\ \alpha = 73^0 20'$.

2 Пресметај ги должините на краците c и d и плоштината на трапезот $ABCD$ ако: $a = 13,\ b = 3,\ \alpha = 82^0 25'$ и $\beta = 46^0 40'$.

3 Докажи дека за страните a и b и дијагоналите d_1 и d_2 на паралелограмот важи:
$d_1^{\ 2} + d_2^{\ 2} = 2\left(a^2 + b^2\right)$.

4 Должините на тежишните линии кон катетите во правоаголен триаголник се $t_a = 45$ cm и $t_b = 30$ cm. Пресметај го аголот меѓу нив.

5 Две сили $\vec{F_1} = 25$ kN и $\vec{F_2} = 17$ kN дејствуваат на иста точка A под агол $\alpha = 98^0 48'$. Одреди ја нивната резултанта и пресметај ги аглите што резултантата ги образува со секоја од дадените сили.

6 На наведена рамнина под агол $\alpha = 36^0 52'$ поставен е товар со тежина $Q = 220\,\text{N}$. Со колкава сила треба да се дејствува на товарот за да се спречи неговото лизгање по наведената рамнина?

7 Набљудувачот се наоѓа на еден морски брег висок $168{,}5\ \text{m}$. Во рамнината на висината на брегот се гледаат два усидрени брода, едниот под агол на депресија $\alpha = 24^0 18'$, а другиот под агол $\beta = 8^0 12'$. Одреди го растојанието меѓу бродовите.

8 Во моментот кога висиномерот во авионот покажува висина $927\ \text{m}$, од авионот се гледа основата на една кула под агол на депресија $\alpha = 42^0 37'$, а нејзиниот врв под агол $\beta = 39^0 54'$. Одреди ја висината на кулата.

9 Од точката А, која е оддалечена $14\ \text{cm}$ од едно рамно огледало, паѓа светлосен зрак на огледалото под агол $\alpha = 44^0 25'$, истиот се одбива од точката B и се рефлектира во точката C. Одреди го растојанието меѓу точките A и C, ако $\overline{BC} = 18\ \text{cm}$.

9 ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1 Аглите: $\frac{4\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}$ и $\frac{5\pi}{3}$ изрази ги во степени.

Одреди го знакот на изразот $(2-3)$:

2 а) $\text{tg}\,72^0$; б) $\text{ctg}\,352^0$; в) $\sin\frac{5\pi}{6}$; г) $\cos\frac{7\pi}{4}$.

3 а) $\sin 120^0 \cos 120^0$; б) $\sin 130^0 \cos\frac{7\pi}{6}$; в) $\text{ctg}\frac{3\pi}{4}\,\text{tg}\frac{5\pi}{3}$; г) $\text{tg}\,250^0\,\text{tg}\,100^0$.

Упрости го изразот ако $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ $(4-5)$:

4 а) $\sin(180^0+\alpha)\cos(180^0-\alpha)$; б) $\sin(180^0-\alpha)\,\text{tg}(270^0-\alpha)$; в) $\text{ctg}(\pi-\alpha)\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$.

5 а) $\dfrac{\sin(270^0-\alpha)\cdot\text{tg}(180^0+\alpha)}{\cos(270^0+\alpha)}$; б) $\dfrac{\text{ctg}(90^0+\alpha)\cdot\cos(90^0-\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\text{tg}(\pi+\alpha)}$.

Пресметај ја вредноста на изразот $(6-7)$:

6 а) $2\sin 30^0 \cos 60^0 + \sin 90^0$; б) $\text{tg}\frac{\pi}{6} - \text{ctg}\frac{\pi}{3} + \cos\pi$; в) $4\,\text{ctg}\frac{\pi}{2} - 2\sin\frac{\pi}{2} - 3\cos\pi$.

7 а) $\dfrac{\cos 30^0 + \cos\frac{\pi}{3}}{\cos\frac{\pi}{6} - \cos 60^0}$; б) $\dfrac{\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{6}}{\text{tg}\frac{\pi}{3} + \text{ctg}\frac{\pi}{6}}$.

8 Одреди ја вредноста на останатите тригонометриски функции ако: а) $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

б) $\cos\alpha = \frac{20}{21}$, $270^0 < \alpha < 360^0$; в) $\text{tg}\,\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, $90^0 < \alpha < 180^0$; г) $\text{ctg}\,\alpha = -\frac{2\sqrt{5}}{15}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

9 Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $\dfrac{3\cos\alpha+\sin\alpha}{3\operatorname{ctg}\alpha-4\operatorname{tg}\alpha}$, ако $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$; б) $\dfrac{3\cos\alpha-8\sin\alpha}{5\operatorname{ctg}\alpha-6\operatorname{tg}\alpha}$, ако $\operatorname{tg}\alpha=-\dfrac{5}{12}$, $90^0<\alpha<180^0$.

10 Упрости ги следните изрази водејќи сметка за допуштените вредности на аргументот во нив:

а) $\sin^3\alpha+\sin\alpha\cos^2\alpha$; б) $\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha$; в) $\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^4}{\cos^2\alpha-\cos^4\alpha}$;

г) $\dfrac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{1+\sin\alpha}$; д) $(1+\operatorname{tg}\alpha)^2+(1-\operatorname{tg}\alpha)^2$; ѓ) $\dfrac{1+\cos\beta-\sin^2\beta}{1+\cos\beta}$.

11 Докажи го идентитетот:

а) $\sin^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha=1$; б) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}=\sin^2\alpha$; в) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

г) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}=2$; д) $\dfrac{\cos\beta-\operatorname{ctg}\beta}{\sin\beta-1}=\operatorname{ctg}\beta$.

Пресметај ја вредноста на изразите без да користиш калкулатор $(12-13)$:

12 а) $\cos 210^0$; б) $\sin\dfrac{3\pi}{4}$; в) $\operatorname{tg}225^0$; г) $\operatorname{ctg}\dfrac{11\pi}{6}$.

13 а) $\sin 210^0\cdot\cos 150^0\cdot\operatorname{tg}60^0\cdot\operatorname{ctg}135^0$; б) $\sin 120^0-2\cos 240^0+\operatorname{tg}240^0+\operatorname{ctg}330^0$.

14 Докажи го идентитетот ако $0^0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$:

а) $\sin(180^0-\alpha)+\cos(270^0-\alpha)-\operatorname{tg}(180^0+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$;

б) $\dfrac{\cos(270^0-\alpha)\cdot\sin(270^0+\alpha)\cdot\operatorname{tg}(270^0-\alpha)}{\sin(180^0-\alpha)\cdot\operatorname{ctg}(180^0+\alpha)}=\cos\alpha$.

15 Реши го триаголникот ABC зададен со:

а) $a=12{,}5$, $\alpha=43^0 25'$, $\beta=65^0 40'$; б) $R=12$, $\alpha=48^0$, $\beta=64^0$.

16 Реши го триаголникот ABC зададен со:

а) $a=27$, $b=13{,}2$, $\gamma=67^0 25'$; б) $a=30$, $b=20$, $c=25$.

17 Две точки, кои се на меѓусебно растојание од $10\ \text{cm}$, од едно рамно огледало се оддалечени за $5\ \text{cm}$ и $7\ \text{cm}$. Одреди го упадниот агол на светлосниот зрак кој минува низ едната точка, а се одбива низ другата точка.

10 ЗАДАЧИ ЗА САМОПРОВЕРКА

1 $\sin 120^0$ е: а) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\dfrac{1}{2}$; в) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. 1

2 $\cos 210^0$ е: а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\frac{1}{2}$. 1

3 $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$ е: а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $-\sqrt{3}$; в) -1; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 1

4 Ако α е остар агол, тогаш $\sin\left(180^0+\alpha\right)$ е: а) $\sin\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $-\sin\alpha$; г) $-\cos\alpha$. 1

5 Ако α е остар агол, тогаш $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)$ е: а) $-\sin\alpha$; б) $-\cos\alpha$; в) $\sin\alpha$; г) $\cos\alpha$. 1

6 $\sin\frac{3\pi}{2}-\cos\pi$ е: а) -2; б) 0; в) 1; г) 2. 1

7 Во тригонометриска кружница синус од произволен агол е _____ на точката во која вториот крак на аголот ја сече _____. 2

8 Тангентата на тригонометриската кружница повлечена низ пресечната точка со позитивната насока на x-оската се вика _____. 2

9 Косинусот од произволен агол во тригонометриска кружница е позитивен ако вториот крак од аголот е во _____ или _____ квадрант. 2

10 Неравенството $\sin\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha<0$ е точно ако аголот α е во _____ или _____ квадрант на тригонометриската кружница. 2

11 Тврдењето: „Страните на триаголник се пропорционални со синусите од спротивните агли" се вика _____. 2

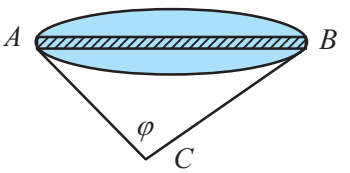
12 Нека $\cos\alpha=-\frac{5}{13}\left(\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}\right)$. Пресметај ја вредноста на $\sin\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$. 3

13 Пресметај ја вредноста на изразот: а) $\frac{2\sin\pi-2\sin 30^0}{\operatorname{tg}\pi-\operatorname{ctg}45^0}$; б) $\sin 150^0+\cos 240^0-\operatorname{tg}315^0$. 6

14 Докажи го идентитетот $\frac{\sin\left(270^0-\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(180^0+\alpha\right)}{\cos\left(360^0-\alpha\right)}=-\operatorname{tg}\alpha$. 3

15 Реши го триаголникот ABC зададен со: $a=23{,}5$, $R=12{,}5$, $\gamma=37^0 30'$ и одреди ја плоштината P на триаголникот. 3

16 Одреди ја должината на мостот преку вештачкото езеро на цртежот, ако $\overline{AC}=35$ m, $\overline{BC}=48$ m, $\varphi=100^0$. 3



ТЕМА 8

КОМБИНАТОРИКА

Е

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1 Варијации со повторување 214

2 Варијации без повторување 217

3 Пермутации 221

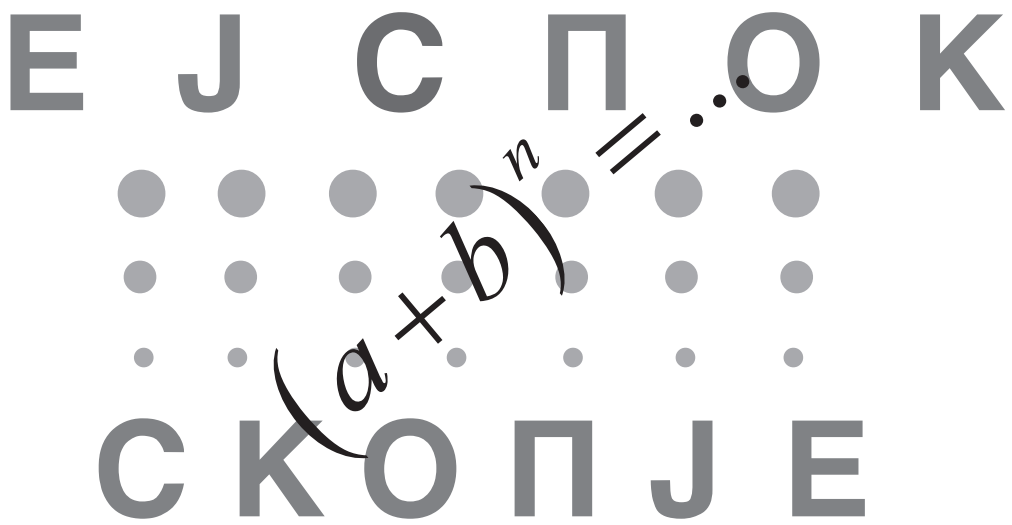
4 Комбинации 225

5 Некои комбинирани задачи 229

6 Биномна формула 234

7 Задачи за повторување и утврдување 238

8 Задачи за самопроверка 240



1 ВАРИЈАЦИИ СО ПОВТОРУВАЊЕ

Потсети се!

- Декартов (директен) производ на множествата A и B е множеството $A\times B$ кое се состои од сите подредени парови (a,b), каде што $a\in A$ и $b\in B$, т.е.

$$A\times B=\{(a,b)\mid a\in A \text{ и } b\in B\}.$$

A **1** Одреди го множеството $A\times B$, ако $A=\{1,2,3\}$ и $B=\{3,4\}$.

Решение.

$$A\times B=\{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}.$$

2 Ако $A=\{1,2,3\}$, определи го декартовиот производ $A\times A$. Колку елементи има овој декартов производ?

Решение: $A\times A=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$.

Бројот на елементите во $A\times A$ е 9 $(=3\cdot 3=3^2)$.

Запомни!

Нека A е множество со n елементи. Секој елемент од декартовиот производ $A\times A$ се вика ***варијација со повторување од n елементи од класа*** 2.

- Нека A е множество со n елементи. Колку елементи има во директниот производ $A\times A$, односно колку подредени парови (a,b) постојат, ако a и b се елементи од множеството A?

Воочи го следното:

- Елементот a може да биде кој било елемент од множеството A (во A има вкупно n елементи).
- Ако a го фиксираме, елементот b може да биде повторно кој било елемент од множеството A, односно и b може да го избереме на n начини.
- Оттука, бројот на елементи во директниот производ $A\times A$ е $n\cdot n=n^2$.

Запомни!

Бројот на сите варијации со повторување од n елементи од класа 2 се означува со $\overline{V}_n^2$ и тој е еднаков на $\overline{V}_n^2=n^2$.

- Нека A е дадено множество. Декартов производ на три фактори A е множеството $A\times A\times A$, составено од сите подредени тројки (a_1,a_2,a_3), каде $a_1,a_2,a_3\in A$ т.е.

$$A\times A\times A=\{(a_1,a_2,a_3)\mid a_1,a_2,a_3\in A\}.$$

3 Нека $A=\{1,2\}$. Запиши го во табеларна форма декартовиот производ $A\times A\times A$. Колку елементи има во ова множество?

Решение. $A\times A\times A=\{(1,1,1),(1,1,2),(1,2,1),(1,2,2),(2,1,1),(2,1,2),(2,2,1),(2,2,2)\}$.

Множеството $A\times A\times A$ има 8 елементи ($=2\cdot 2\cdot 2=2^3$).

Запомни!

Ако A е множество со n елементи, тогаш секој елемент од декартовиот производ $A\times A\times A$ се вика ***варијација со повторување од n елементи од класа*** 3.
Бројот на сите варијации со повторување од n елементи од класа 3 се означува со $\overline{V}_n^3$ и тој број е еднаков на $\overline{V}_n^3=n^3$.

Б Декартовиот производ $A\times A\times\ldots\times A$ (A се јавува k пати како фактор) е множеството од сите подредени n-торки $(a_1,a_2,\ldots,a_k)$, каде што $a_1,a_2,\ldots,a_k$ се елементи од множеството A; значи, $A\times A\times\ldots\times A=\{(a_1,a_2,\ldots,a_k)\mid a_1,a_2,\ldots,a_k\in A\}$.

4 Нека $A=\{c,d\}$. Запиши го множеството $A\times A\times A\times A$ во табеларна форма. Колку елементи има ова множество?

Решение. $A\times A\times A\times A=\{(c,c,c,c),(c,c,c,d),(c,c,d,c),(c,c,d,d),(c,d,c,c),(c,d,c,d),(c,d,d,c),$
$(c,d,d,d),(d,c,c,c),(d,c,c,d),(d,c,d,c),(d,c,d,d),(d,d,c,c),(d,d,c,d),(d,d,d,c),(d,d,d,d)\}$

Бројот на елементите во $A\times A\times A\times A$ е $16=2^4$. Воочи дека 2 е бројот на елементите во множеството A, а 4 е бројот на појавувањата на множеството A во декартовиот производ.

Запомни!

Ако A е множество со n елементи, тогаш секој елемент од декартовиот производ $A\times A\times\ldots\times A$ (A се јавува k пати како фактор) се вика ***варијација со повторување од n елементи од класа*** k.
Бројот на сите варијации со повторување од n елементи од класа k се означува со $\overline{V}_n^k$ и тој е еднаков на $\overline{V}_n^k=n^k$.

Воочи!

- $(1,2,3)$ и $(1,3,2)$ се различни подредени тројки, иако тие се составени од исти елементи. Според тоа, распоредот на елементите во една k-торка е битен, т.е. различни распореди на елементите даваат различни k-торки.

Запомни!

Распоредот (редоследот) на елементите во една варијација со повторување од n елементи од класа k е битен, т.е. со промена на редоследот на елементите во една варијација со повторување се добива друга варијација.

Во понатамошниот текст варијациите со повторување ќе ги пишуваме без загради и запирки. Така, варијацијата (c, c, c, d) ќе ја запишуваме како cccd.

5 Колку трицифрени броеви може да се формираат со цифрите 1, 2, 3, 4? Кои се тие?

Решение.

- Воочи дека позицијата на една цифра во број со повеќе цифри е битна. Имено, 321 и 213 се составени од исти цифри, но се различни броеви.
- Секој k-цифрен број може да се разгледува како подредена k-торка, т.е. како варијација со повторување од класа k.
- Оттука, бројот на сите трицифрени броеви составени со четирите цифри 1, 2, 3, 4 е, всушност, број на сите варијации со повторување од 4 елементи од класа 3, т.е. $\overline{V}_4^3 = 4^3 = 64$.

Тие броеви се:

111	112	113	114	121	122	123	124	131	132	133	134	141	142	143	144
211	212	213	214	221	222	223	224	231	232	233	234	241	242	243	244
311	312	313	314	321	322	323	324	331	332	333	334	341	342	343	344
411	412	413	414	421	422	423	424	431	432	433	434	441	442	443	444

6 а) Колку четирицифрени броеви може да се формираат од цифрите 1,2,3,4,5,6,7,8,9?

б) Колку од нив почнуваат со цифрата 6?

в) Колку од формираните четирицифрени броеви се парни?

Решение. а) Бараните четирицифрени броеви се варијации со повторување од 9 елементи од класа 4. Нивниот број е $\overline{V}_9^4 = 9^4 = 6561$.

б) Ако на прва позиција (илјади) се фиксира бројот 6, останатите 3 позиции може да се разгледуваат како варијации со повторување од 9 елементи од класа 3. Нивниот број е $\overline{V}_9^3 = 9^3 = 729$.

в) Еден број е парен ако завршува на парна цифра. Ако на последната позиција (единици) се фиксира цифрата 2, останатите 3 позиции може да се разгледуваат како варијации со повторување од класа 3 од 9 елементи. Исто како претходно, нивниот број е $\overline{V}_9^3 = 9^3 = 729$.

- Истиот број варијации се добива и ако на последната позиција се фиксира бројот 4 или 6 или 8.
- Значи, на последната позиција може да е која било од четирите парни цифри $2,4,6$ или 8 и за секој избор на парна цифра на последната позиција (единици), останатите позиции во бројот можат да се пополнат на $\overline{V}_9^3 = 9^3 = 729$ начини.
- Така, вкупниот број на парни четирицифрени броеви, формирани со цифрите $1,2,3,4,5,6,7,8$ и 9 е $4 \cdot \overline{V}_9^3 = 4 \cdot 9^3 = 4 \cdot 729 = 2916$.

Задачи

1 Дадени се множествата $A = \{a,b,c,d\}$ и $B = \{1,2,3\}$. Формирај го декартовиот производ $A \times B$.

2 Дадено е множеството $A = \{a,b\}$. Запиши ги сите варијации со повторување од класа 5 од елементите од множеството A.

3 Колкав е бројот на сите трицифрени броеви во кои не се појавуваат цифрите 0 и 2?

4 Одреди го бројот на сите парни четирицифрени броеви кои може да се запишат со цифрите 1, 3, 4, 6 и 7.

5 На колку начини може да се пополни тикет спортска прогноза со 10 парови? (За секој пар постојат 3 можности: 1 – победа на првата екипа, 2– победа на втората екипа, 0 – нерешено.)

6 На ѕид се наоѓаат 3 закачалки. На колку начини на нив може да се обесат 4 палта, ако на една закачалка може да се обеси и повеќе од едно палто?

7 На приземјето од една четирикатница во лифтот се качиле 6 луѓе. На колку начини тие може да го напуштат лифтот? (Секој може да излезе на некој од четирите ката.)

8 На колку начини 5 писма може да се распределат во 4 различни сандачиња? (Во едно сандаче може да се стават и повеќе писма.)

9 Поштенскиот број на населените места во САД се состои од 5 цифри, а во Канада се состои од 6 знаци, и тоа: буква, цифра, буква, цифра, буква, цифра. Колку различни поштенски броеви се можни во секоја држава? (Бројот на букви во абецедата, којашто се користи во САД и Канада е 26.)

2 ВАРИЈАЦИИ БЕЗ ПОВТОРУВАЊЕ

Потсети се!

- Ако A е множество со n елементи, тогаш секој елемент од множеството $A \times A \times \ldots \times A$, каде што A се јавува k пати како фактор се вика варијација со повторување од n елементи од класа k.

А 1 Кои трицифрени броеви со различни цифри може да се формираат од цифрите 1, 2, 3, 4? Колкав е нивниот број?

Решение.

Броевите ги формираме на следниот начин:

123	124	132	134	142	143
213	214	231	234	241	243
312	314	321	324	341	342
412	413	421	423	431	432

- Вкупниот број на трицифрени броеви составени од цифрите 1,2,3,4 во кои сите цифри се различни е 24.

- Претходно заклучивме дека секој број може да се разгледува како варијација од n елементи од класа k, каде што n е вкупниот број на цифри од кои се формираат броевите, а k е бројот на цифрите во секој од формираните броеви.

Запомни!

Варијација од n елементи од класа k, во која сите елементи се различни се вика ***варијација без повторување од n елементи од класа k.***

За да бидат различни сите елементи во една варијација со повторување од n елементи од класа k, треба да биде исполнет условот $k \leq n$.

Б Нека A е множество со n елементи од кое се формираат варијациите. Секоја варијација од n елементи од класа k може да се претстави во облик $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, каде што $a_1, a_2, \ldots, a_k \in A$. Бројот на сите варијации без повторување од n елементи од класа k се означува со V_n^k и се определува на следниот начин.

- Елементот a_1 може да биде кој било елемент од множеството A (вкупно n можности).
- За секој избран елемент a_1 на првата позиција, елементот a_2 на втората позиција може да се избере од преостанатите $n-1$ елементи. Имено, тоа може да биде кој било елемент од преостанатите $n-1$ елементи.
- Значи, првите две цифри може да се изберат на $n(n-1)$ начини.
- За избор на елементот a_3 постојат $n-2$ можности, секој елемент од A од преостанатите $n-2$ елементи.
- Оттука, првите три цифри може да се изберат на $n(n-1)(n-2)$ начини итн.
- Може да се заклучи дека вкупниот број на можни избори, односно вкупниот број на варијации без повторување од n елементи од класа k е

$$V_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(k-1)).$$

Запомни!

Производот на првите n природни броеви се вика „ен–факториел” и се означува со $n!$.

Значи, $n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1$, за $n = 2,3,\ldots$. Притоа, $0! \overset{def}{=} 1$, $1! \overset{def}{=} 1$.

На пример, $2! = 2\cdot 1$, $3! = 3\cdot 2\cdot 1$, $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$ итн.

Со користење на горенаведената ознака, бројот $V_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))$ може да се трансформира на следниот начин:

$$V_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1))\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}{(n-k)\cdot(n-k-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Запомни!

Вкупниот број варијации без повторување од n елементи од класа k $(n \le k)$ може да се пресмета со формулата:

$$V_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-(k-1)) \quad \text{или} \quad V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

2 Колку четирицифрени броеви може да се формираат со користење на цифрите од 1 до 9, ако броевите се составени од различни цифри?

Решение. Бидејќи броевите треба да се составени од различни цифри, вкупниот број на вакви четирицифрени броеви составени од цифрите 1 до 9, е бројот на сите варијации од 9 елементи од класа 4, односно

$$V_9^4 = \frac{9!}{(9-4)!} = \frac{9!}{5!} = 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6 = 3024.$$

3 Колку петцифрени броеви може да се формираат со користење на цифрите од 0 до 9, ако броевите се составени од различни цифри?

Решение.

- Треба да се води сметка дека бројот не смее да започнува со 0. На пример, 01234 е четирицифрен, а не петцифрен број. За таа цел, од вкупниот број варијации без повторување од 10 елементи од класа 5, се одзема бројот на оние варијации кои започнуваат со 0.
- Вкупниот број варијации од 10 елементи од класа 5 е $V_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!} = \frac{10!}{5!} = 30240.$
- Бројот на оние варијации кои започнуваат со 0 ќе го добиеме ако на првата позиција фиксираме 0, а останатите четири позиции ги пополниме со елементите 1 до 9. Вкупниот број на можности е $V_9^4 = 3024$.

- Значи, со цифрите 0 до 9, може да се формираат вкупно $V_{10}^5 - V_9^4 = 30240 - 3024 = 27216$ петцифрени броеви со различни цифри.

4 На 9 различни карти се запишани цифрите 1 до 9, така што на секоја карта има по една цифра. Картите добро се промешуваат, а потоа од нив се извлекуваат 4 карти, една по една и се поредуваат по редот на извлекувањето. На колку начини може да се изврши извлекувањето за да се добие парен четирицифрен број?

Решение.

- Со секое извлекување на 4 карти и поредување по редоследот на нивното извлекување, се добива една варијација без повторување од 9 елементи од класа 4. Но, потребни се само оние варијации кои завршуваат на парна цифра: 2, 4, 6 или 8.
- Ако на последната позиција се фиксира цифрата 2, претходните три позиции може да се пополнат со останатите 8 цифри $\{1,3,4,5,6,7,8,9\}$ на $V_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = 336$ начини.
- Ако на последната позиција се фиксира цифрата 4, претходните три позиции може да се пополнат со останатите 8 цифри, исто така, на 336 начини.
- Истиот број се добива и ако на последната позиција се фиксира една од цифрите 6 или 8.
- Значи, имаме вкупно 4 можности за избор на цифра на последната позиција (позиција единици) и за секој избор на една цифра на таа позиција, претходните три може да се пополнат на 336 начини. Оттука, вкупниот број на парни четирицифрени броеви со различни цифри, формирани со цифрите 1 до 9 ќе биде $4 \cdot V_8^3 = 4 \cdot 336 = 1344$.

5 Колку различни трицифрени броеви може да се формираат од цифрите 3 до 7 ако:
а) цифрите може да се повторуваат;
б) броевите се составени од различни цифри?

Задачи

1 Пресметај: а) $5!$; б) $7!$; в) $\frac{10!}{2!}$.

2 Пресметај: а) V_{12}^3; б) V_{15}^5.

3 Реши ја равенката по непознатата n:
а) $V_n^2 = 72$; б) $9 \cdot V_n^3 = 5 \cdot \overline{V}_n^3$;
в) $V_n^{10} + V_n^9 = 9 \cdot V_n^8$; г) $5 \cdot V_n^2 = \overline{V}_n^2$.

4 Во автобус во кој има 7 празни седишта влегуваат 5 лица. На колку начини тие може да седнат на празните седишта?

5 На една географска карта се претставени 4 држави и секоја од нив може да се обои со некоја од 9 дадени бои. На колку различни начини може да се направи боењето ако секоја држава се бои со различна боја?

6 Колкав е бројот на сите петцифрени броеви составени од различни цифри кои завршуваат на 67?

7 Колку тричлени делегации може да се формираат од 12 луѓе, ако секоја делегација се состои од претседател, секретар и благајник?

8 На една забава има 5 девојки и 8 момчиња. За играње валцер девојките бираат по едно момче. На колку различни начини може да се формираат парови за валцер?

3 ПЕРМУТАЦИИ

Потсети се!

- Што е варијација со повторување од n елементи од класа k, а што варијација без повторување од n елементи од класа k?

А 1 Кои трицифрени броеви со различни цифри може да се формираат од цифрите 1, 2, 3? Колкав е нивниот број?

Решение. Воочи дека бараните трицифрени броеви се сите варијации без повторување од 3 елементи од класа 3. Нивниот број е $V_3^3 = \frac{3!}{(3-3)!} = 6.$ Тоа се следните броеви:

$$123 \quad 132 \quad 213 \quad 231 \quad 312 \quad 321$$

Запомни!

Варијација без повторување од n елементи од класа n се вика ***пермутација без повторување од n елементи***.

2 Формирај ги сите пермутации без повторување од елементите a, b, c и d.

Согледај ја постапката на формирање на пермутациите:

abcd	*abdc*	*acbd*	*acdb*	*adbc*	*adcb*
bacd	*badc*	*bcad*	*bcda*	*bdac*	*bdca*
cabd	*cadb*	*cbad*	*cbda*	*cdab*	*cdba*
dabc	*dacb*	*dbac*	*dbca*	*dcab*	*dcba*

- Воочи дека пермутациите се поредени по абецеден (лексикографски) редослед. Исто така, еднаков број на пермутации (по 6 пермутации) започнуваат со секој од дадените елементи.

Воочи!

Пермутациите се специјален вид варијации, па бидејќи распоредот (редоследот) на елементите е битен кај варијациите, тој е битен и кај пермутациите, односно различни распореди на елементите даваат различни пермутации.

- Бројот на пермутациите од n елементи се означува со P_n и се пресметува со формулата

$$P_n = V_n^n, \quad \text{т.е.} \quad P_n = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

Запомни!

Бројот на пермутациите од n елементи е $P_n = n!$.

3 На колку начини може да се наредат 4 различни книги на една полица ако редоследот на книгите на полицата е битен?

Решение. Станува збор за пермутации без повторување од 4 елементи (книги). Нивниот број е $P_4 = 4! = 24$.

4 Во една кошница има едно јаболко, една круша, една праска, една банана, еден ананас, еден лимон и еден портокал. На колку начини може овошјето да се подели на 7 деца без да се сече?

Решение. Има 7 деца и 7 овошки, така што секое дете треба да добие по една овошка. Распоредот на елементите е битен (децата може да се разгледуваат како позиции на кои ќе се доделуваат овошките). Оттука, бројот на можни поделби е $P_7 = 7! = 5040$.

5 а) Колку четирицифрени броеви со различни цифри може да се формираат од цифрите 3,4,5 и 6?

б) Колку од нив започнуваат со цифрата 4?

в) Кај колку од нив 4 е прва, а 3 втора цифра?

Согледај ја постапката.

а) Бројот на сите четирицифрени броеви со различни цифри од 3, 4, 5 и 6 е, всушност, бројот на сите пермутации без повторување од 4 елементи, т.е. $P_4 = 4! = 24$.

б) Ако цифрата 4 се фиксира на првата позиција, останатите три позиции треба да се пополнат со другите три цифри, а бројот на можности е $P_3 = 3! = 6$.

в) Ако се фиксираат 4 на прва и 3 на втора позиција, останатите две позиции може да се пополнат со другите две цифри, па $P_2 = 2! = 2$.

6 Која е 243-та по ред пермутација составена од елементите a, b, c, d, e, f?

Решение. Воочивме дека пермутациите се формираат по абецеден редослед и еднаков број на пермутации започнуваат со секој од наведените 6 елементи. Вкупниот број на пермутации е $P_6 = 6! = 720$. Значи, со секој елемент започнуваат точно 120 пермутации. Така, со a започнуваат првите 120 пермутации, со b започнуваат следните 120 пермутации, односно пермутациите со реден број 121 до 240, со c започнуваат следните 120 пермутации. Значи, прва пермутација која започнува со c е 241-та. Таа е $cabdef$. По неа следуваат $cabdfe$, $cabedf$. Бараната пермутација е $cabedf$.

7 Запиши ги сите пермутации со елементите a, a, a, b, c.

Решение. Воочи дека елементот a се појавува 3 пати. Ако се запишат сите пермутации на начин кој го наведовме претходно, некои од нив ќе бидат еднакви.

- Пермутациите во кои некои елементи се јавуваат повеќе од еднаш се нарекуваат ***пермутации со повторување.***
- Ако сите елементи се различни, вкупниот број на пермутации ќе биде $P_5 = 5! = 120$. Но, бројот a се појавува 3 пати, па $P_3 = 3! = 6$ пермутации од дадените се, всушност, иста пермутација.
- Согласно претходното, вкупниот број на различни пермутации од елементите a, a, a, b, c е $\frac{120}{6} = 20$. Тие се следните:

aaabc	*aaacb*	*aabac*	*aabca*	*aacab*	*aacba*
abaac	*abaca*	*abcaa*	*acaab*	*acaba*	*acbaa*
baaac	*baaca*	*bacaa*	*bcaaa*	*caaab*	*caaba*
cabaa	*cbaaa*				

Запомни!

Бројот на пермутациите со повторување од n елементи од кои еден елемент се повторува k пати, а сите останати елементи се појавуваат точно еднаш се означува со $P_n(k, 1,\ldots,1)$ и тој број се пресметува со формулата

$$P_n(k,1,\ldots,1) = \frac{n!}{k!}.$$

- Нека е дадено множеството $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Ќе го определиме бројот на оние пермутации во кои елементот a_1 се повторува k_1 пати, a_2 се повторува k_2 пати итн. a_m се повторува k_m пати, каде што $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$.
- Ако сите елементи се различни, вкупниот број на пермутации ќе биде $P_n = n!$.
- Но, елементот a_1 се повторува k_1 пати и $P_{k_1} = k_1!$; елементот a_2 се повторува k_2 пати и $P_{k_2} = k_2!$, итн., а елементот a_m се повторува k_m пати и $P_{k_m} = k_m!$.
- Бројот на различни пермутации се добива кога вкупниот број $P_n = n!$ на пермутации ќе се намали за $k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!$ пати.

Запомни!

Нека $a_1, a_2, \ldots, a_m$ се m различни елементи. Секоја подредена n-торка во која a_1 се појавува k_1 пати, a_2 се појавува k_2 пати итн. a_m се појавува k_m пати $(k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n)$ се вика ***пермутација со повторување од n елементи од тип*** $(k_1, k_2, \ldots, k_m)$. Бројот на таквите пермутации се пресметува со формулата $P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$.

8 Колку различни пермутации може да се формираат од буквите на зборот ПАРАЛЕЛА?

Решение. Овој збор има 8 букви, од кои буквите П, Р и Е се појавуваат по еднаш, буквата А се појавува 3 пати, а буквата Л се појавува 2 пати. Оттука, бараниот број на пермутации е

$$P_8(1,1,1,3,2) = \frac{8!}{1!\,1!\,1!\,3!\,2!} = 3360.$$

9 а) Колку шестцифрени броеви може да се формираат од цифрите 2, 5 и 9, ако цифрата 2 се јавува 3 пати, цифрата 5 се јавува 2 пати, а цифрата 9 еднаш?

б) Колку од тие броеви започнуваат со 5?

в) Колку од тие броеви започнуваат со 25?

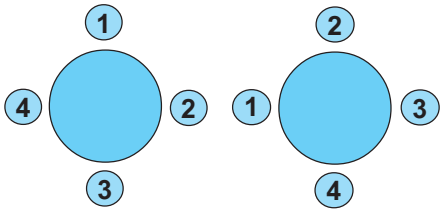
Решение. а) Вкупниот број на шестцифрени броеви составени од 3 двојки, 2 петки и 1 деветка е $P_6(3,2,1) = \dfrac{6!}{3!\,2!\,1!} = 60.$

б) Ако на првата позиција се фиксира бројот 5, останатите пет позиции треба да се пополнат со 3 двојки, 1 петка и 1 деветка. Бројот на можности е $P_5(3,1,1) = \dfrac{5!}{3!\,1!\,1!} = 20.$

в) $P_4(2,1,1) = \dfrac{4!}{2!\,1!\,1!} = 12.$

10 На колку начини може да се распоредат околу кружна маса 4 луѓе, ако не е битно кој на кој стол седи, туку само редоследот по кој тие се распоредени?

Решение. Воочи дека двата распореди дадени на сликата се еднакви.



- За да се добијат сите различни распореди, доволно е да се фиксира еден човек на еден стол, а останатите тројца да се распоредат на сите можни начини на другите столови.
- Бројот на сите пермутации со 3 елементи е $P_3 = 3! = 6$.

- Воочи дека k луѓе може да се распоредат на кружна маса на $(k-1)!$ начини. Имено, еден се фиксира на еден стол, а останатите се распоредуваат на сите можни начини.

Задачи

1. Пет патници ноќеваат во еден град во кој има 5 хотели. На колку начини тие може да отседнат во хотелите, ако во еден хотел не отседнува повеќе од еден патник?

2. Во првиот ред на една училишна претстава има 7 места за седење резервирани за директорот и 6 наставници од раководниот тим на училиштето. На колку начини тие може да седнат на резервираните столови ако директорот секогаш седи на средниот стол?

3. Со секое подредување на четири свеќи (црвена, сина, зелена и жолта) на маса одлево надесно се задава еден сигнал. Колку различни сигнали може да бидат зададени?

4. Колку различни зборови може да се формираат од буквите на зборот КНИГА?

5. Најди ја 52-та по ред пермутација од буквите на зборот КНИГА, ако почетната пермутација се добива со азбучно подредување на буквите од овој збор.

6. Колку различни зборови може да се формираат од буквите на зборот:
а) МАТЕМАТИКА; б) КОМБИНАТОРИКА?

7. Колку шестцифрени броеви може да се формираат од цифрите 1, 3, 3, 3, 4, 5?

8. На колку начини може 4 црвени, 2 сини и 3 зелени балони да се поделат на 9 деца така што секое дете да добие по еден балон?

9. Во група од 6 луѓе само двајца се познаници. На колку начини може да се смести оваа група на кружна маса така што познаниците секогаш да седат еден до друг?

4 КОМБИНАЦИИ

А 1 Дадено е множеството $A=\{a,b,c,d\}$. Определи ги сите негови подмножества кои имаат по три елементи.

Одговор. Подмножествата на множеството A коишто имаат по 3 елементи се:

$$\{a,b,c\},\ \{a,b,d\},\ \{a,c,d\} \text{ и } \{b,c,d\}.$$

- Потсети се дека распоредот на елементите во едно множество не е битен. Така, на пример, $\{a,b,c\}$ и $\{b,a,c\}$ се едно исто множество.

Запомни!

Секое подмножество со k елементи од едно множество со n елементи се вика ***комбинација без повторување од*** n ***елементи од класа*** k.

Воочи!

- Секоја комбинација од n елементи од класа k е едно подмножество од дадено множество.
- Распоредот (редоследот) на елементите во една комбинација ***не е битен***, односно различен распоред на елементите не дава различна комбинација.

2 Колку различни букети од по три различни цвета може да се аранжираат од цветови на роза, кала, гербер, лале и хризантема ако букетите содржат најмногу по еден цвет од секој вид?

Проследи го решението.

- Распоредот на елементите во еден букет не е битен и букетите треба да се составени од три различни цветови, па затоа станува збор за комбинации без повторување од 5 елементи од класа 3.
- Ако ги користиме кратките ознаки: Р (роза), К (кала), Г (гербер), Л (лале), Х (хризантема), ги добиваме следните букети:

$$\{Р,К,Г\},\{Р,К,Л\},\{Р,К,Х\},\{Р,Г,Л\},\{Р,Г,Х\},\{Р,Л,Х\},\{К,Г,Л\},\{К,Г,Х\},\{К,Л,Х\},\{Г,Л,Х\}.$$

- Значи, вкупниот број на различни букети, односно вкупниот број на комбинации без повторување од 5 елементи од класа 3 е 10.

Во задачата 2 може да се воочи следното:

- Бројот на варијации од класа 3 од елементите на множеството $\{Р,К,Г,П,Х\}$ е $V_5^3 = 5\cdot 4\cdot 3 = 60$, а бројот на пермутации на елементите на множеството $\{Р,К,Г\}$ е $P_3 = 3! = 6$.
- Воочи дека, бројот на комбинации $C_5^3 = 10$ се добива кога бројот на варијации $V_5{}^3$ се подели со P_3.
- Ова следува од тоа што ако од множеството $\{Р,К,Г,П,Х\}$ се избере подмножество $\{Р,К,Г\}$, од тоа подмножество може да се формираат 6 различни варијации, а само една комбинација, т.е. бројот на варијации од 5 елементи класа 3 е $6\,(=P_3)$ пати поголем од бројот на комбинации од 5 елементи класа 3.
- Ова важи и во општ случај.

Запомни!

Вкупниот број на комбинации без повторување од n елементи од класа k се означува со C_n^k и се определува со формулата

$$C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k}, \quad \text{т.е.} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3 Од 6 момчиња и 8 девојчиња треба да се формира екипа која ќе се состои од 7 члена. На колку начини може да се направи изборот ако:

а) нема ограничувања на бројот на кандидати од секој пол;

б) во екипата треба да има точно три момчиња;

в) во екипата треба да има барем шест девојчиња?

Решение. Сите членови во екипата се со ист ранг, па затоа не е битен распоредот на членовите, т.е. станува збор за комбинации.

а) Ако нема ограничувања за полот, тоа се комбинации од 14 елементи класа 7, па нивниот број е $C_{14}^{7}=\frac{14!}{7!(14-7)!}=3432$ различни можности за формирање на екипата.

б) Ако во екипата треба бројот на момчиња да е точно 3, тогаш бројот на девојчиња треба да е точно 4. Од 6 момчиња може да се изберат 3 на $C_{6}^{3}=\frac{6!}{3!\,3!}=20$ различни начини. За секој избор на 3 момчиња, 4 девојчиња од вкупно 8 може да се изберат на $C_{8}^{4}=\frac{8!}{4!\,4!}=70$ начини. Оттука, вкупниот број на можни избори е $C_{6}^{3}\cdot C_{8}^{4}=20\cdot 70=1400$.

в) Во екипата ќе има барем 6 девојчиња во следните два случаи:

i) 6 девојчиња и 1 момче (бројот на можности е $C_{8}^{6}\cdot C_{6}^{1}=\frac{8!}{6!(8-6)!}\cdot\frac{6!}{1!(6-1)!}=28\cdot 6=168$);

ii) 7 девојчиња и ниедно момче (вкупниот број на можности е $C_{8}^{7}=8$).

Оттука, вкупниот број на различни екипи со барем 6 девојчиња е $C_{8}^{6}\cdot C_{6}^{1}+C_{8}^{7}=168+8=176$.

Запомни!

Бројот на комбинации C_n^k се означува со $\binom{n}{k}$, се чита „n над k"; Значи, $C_n^k=\binom{n}{k}$, $k\le n$.

За секој природен број n точни се следните равенства:

$$C_n^0=\frac{n!}{0!(n-0)!}=1,\qquad C_n^n=\frac{n!}{n!(n-n)!}=1,\qquad C_n^1=\frac{n!}{1!(n-1)!}=\frac{n\cdot(n-1)!}{(n-1)!}=n.$$

4 Покажи дека $C_n^k=C_n^{n-k}$.

Решение. $C_n^k=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!}=C_n^{n-k}$.

5 Во една цвеќарница има цветови од роза и хризантема. Колку различни букети со по три цвета може да се формираат ако во букетите може да се јават и повеќе цветови од ист вид? Кои се тие букети?

Решение. Секој букет може да се разгледува како група од 3 цвета. Можните групи се:

Р Р Р Р Р Х Р Х Х Х Х Х

Вкупниот број на вакви групи (букети) е 4.

Запомни!

Секоја група од k елементи од множеството со n елементи, во која елементите може да се повторуваат, се вика ***комбинација со повторување од*** n ***елементи од класа*** k.

Во една група, распоредот на елементите не е битен, па оттука и во комбинација со повторување од n елементи од класа k, распоредот на елементите ***не е битен***, односно различен распоред не дава различна комбинација со повторување.

Бројот на сите различни комбинации со повторување од n елементи од класа k се означува со $\overline{C}_n^k$ и се пресметува со формулата

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \binom{n+k-1}{k},$$

За претходната задача имаме: $\overline{C}_2^3 = C_{2+3-1}^3 = C_4^3 = 4.$

6 Во една слаткарница има сладолед од ванила, чоколада, јагода, орев и лешник. Колку различни порции сладолед од по три топки може да се направат ако:

а) сите топки во една порција се со различен вкус;

б) во порција може да има и топки со ист вкус?

Решение. Редоследот на топките сладолед во порцијата не е битен, па затоа станува збор за комбинации од 5 елементи од класа 3. Во првиот случај, тоа се комбинации без повторување, а во вториот случај – комбинации со повторување.

а) $C_5^3 = \dfrac{5!}{3!(5-3)!} = 10.$

б) $\overline{C}_5^3 = C_{5+3-1}^3 = C_7^3 = \dfrac{7!}{3!4!} = 35.$

Задачи

1. Напиши ги сите комбинации без повторување од 6 елементи од класа 4 од елементите од множеството $A=\{a,b,c,d,e,f\}$.

2. Пресметај: а) C_6^2; б) C_{10}^6

   в) $C_6^2 \cdot C_5^4$; г) $\dfrac{C_{12}^9}{C_8^4}$.

3. На колку начини од 7 книги може да се изберат 3?

4. На колку различни начини може од 24 луѓе да се формираат две групи по 12 луѓе?

5. На колку начини 16 ученици и 20 ученички може да се распоредат во две одделенија така што во секое одделение да има 8 ученици и 10 ученички?

6. Шест момчиња и шест девојчиња се номинирани за избор на мис и мистер на една матурска забава. На колку начини може да се избере мис, мистер и двајца придружници, ако придружниците може да бидат од кој било пол?

7. На колку начини од 8 ученици може да се изберат барем 4?

8. Колку комбинации на лото 7 од 37 треба да се уплатат за да се обезбеди сигурна добивка?

9. Напиши ги сите комбинации со повторување од класа 4 од елементите на множеството $A=\{a,b,c\}$.

10. Во една цвеќарница има цветови во пет различни бои: црвена, сина, жолта, розова и бела. На колку начини може да се формира букет со 5 цветови, ако:
    а) сите цветови се со различна боја;
    б) во букетот може да има цветови и со иста боја?

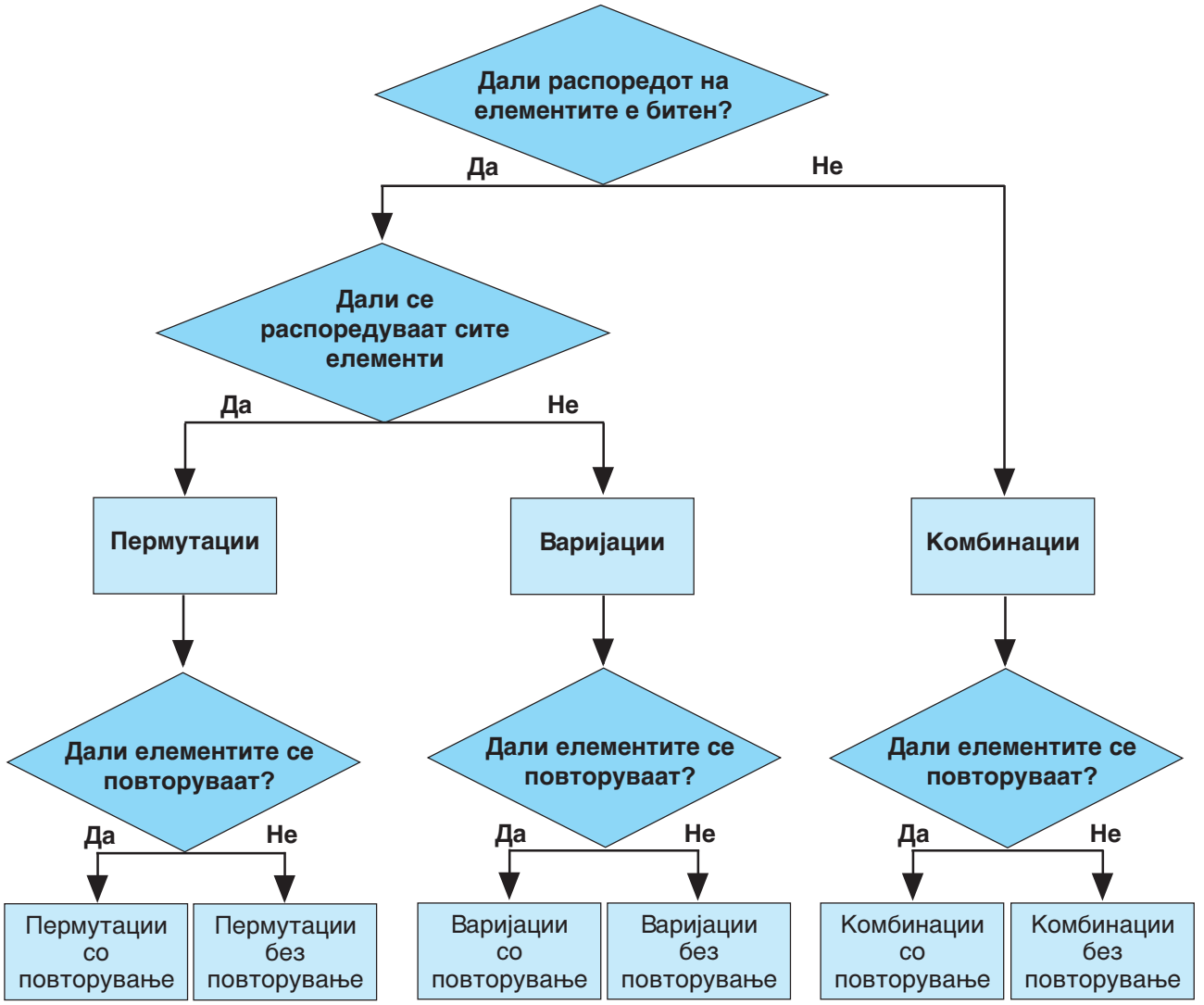
5 НЕКОИ КОМБИНИРАНИ ЗАДАЧИ

Потсети се!

- Што е: варијација, пермутација, комбинација?
- Распоредот (редоследот) на елементите кај комбинациите не е битен, а кај варијациите и пермутациите распоредот на елементите е битен.

- Најголем проблем при решавање задачи од комбинаторика е да се утврди за која категорија (комбинација, варијација или пермутација) станува збор при решавањето на конкретна задача.

- Одговорот на ова прашање може да се добие ако се следи алгоритамот, зададен со следниот дијаграм.



Значи, ако се следи шематски претставениот алгоритам, постапката за распознавање на комбинации, варијации и пермутации оди на следниот начин.

- Најпрво се поставува прашањето: „Дали распоредот на елементите е битен?”
- Ако одговорот е „Не”, веднаш може да се заклучи дека станува збор за комбинации.
- Ако одговорот е „Да”, тогаш се работи или за варијации или за пермутации, зависно од тоа дали се распоредуваат сите елементи или не.
- Ако се распоредуваат сите елементи, тогаш станува збор за пермутации, а во спротивно, за варијации.

1 На колку начини може од кутија со 12 моливи да се изберат 3?

Решение. Дали распоредот на елементите е битен? Не!

Значи, станува збор за комбинации. Елементите не се повторуваат (не може еден молив да се избере повеќе од еднаш), па затоа се бара бројот на сите комбинации без повторување од 12 елементи од класа 3. Тој број е

$$C_{12}^{3}=\frac{12!}{3!(12-3)!}=220.$$

2 Наставникот по математика испрашал четворица ученици и ги оценил со оценките 2, 3, 4, 5. На колку начини може да се распоредат оценките ако:

а) сите се оценат со различна оценка;

б) ученикот A добива секогаш повисока оценка од ученикот B (повторно сите ученици се оценуваат со различна оценка);

в) учениците се оценуваат само со 4 или со 5?

Решение. Распоредот на оценките е битен (различен распоред на оценките на учениците дава различна можност). Значи, станува збор или за варијации или за пермутации.

а) Во овој случај 4 оценки се распределуваат на 4 ученици, па станува збор за пермутации без повторување од 4 елементи. Нивниот број е $P_4=4!=24$.

б) За да се определи бројот на можностите кога ученикот A ќе добие секогаш повисока оценка од ученикот B, може да се постапи на следниот начин.

- Најпрво, од множеството од 4 оценки $\{2,3,4,5\}$ се избира подмножество од 2 оценки: повисоката се доделува на ученикот A, а пониската на B. Бројот на подмножества со 2 елементи од множество со 4 елементи е број на комбинации без повторување од 4 елементи од класа 2. Тој број е

$$C_4^2=\frac{4!}{2!2!}=6.$$

- За секој ваков избор на две оценки за A и B, останатите две оценки може да се распоредат на другите двајца ученици на $P_2=2!=2$ начини.

  Оттука, вкупниот број начини кога ученикот A ќе добие повисока оценка од ученикот B е $C_4^2\cdot P_2=6\cdot 2=12.$

в) Ако сите ученици се оценуваат само со 4 или со 5, тогаш бројот на сите вакви оценувања е број на варијации со повторување од 2 елементи (4 и 5) од класа 4, т.е. тој број е

$$\overline{V}_2^4=2^4=16.$$

3 До крајот на првенството во првата фудбалска лига, еден клуб требало да одигра уште 6 натпревари. Според пресметката на тренерот на тимот било потребно да се освојат 7 поени за да се обезбеди потребниот минимум за опстанок во лигата. На колку начини може да се обезбеди тој минимум ако победа носи 3 поени, нерешен резултат – еден поен, а пораз – нула поени?

Решение. Потребниот минимум може да се освои на следните два начини:

а) 2 победи, 1 реми и 3 порази; б) 1 победа, 4 реми и 1 пораз.

- Воочи дека распоредот на елементите е битен. Различен распоред на победи, нерешени и порази, носи различна можност.
- Притоа, се распоредуваат 6 елементи од кои некои се повторуваат. Затоа, станува збор за пермутации со повторување од 6 елементи.

  Вкупниот број можни исходи е збир од бројот на можни исходи во првиот и вториот случај, т.е.

$$P_6(2,1,3)+P_6(1,4,1)=\frac{6!}{2!1!3!}+\frac{6!}{1!4!1!}=90.$$

4 На еден турнир се одиграни 45 партии шах. Според правилата на турнирот секој шахист одиграл со секого по една партија шах. Колку учесници имало на турнирот?

Решение.

- Дали распоредот на елементите е битен?
- Не, бидејќи секои двајца одиграле само по една, а не по две партии шах. Значи, станува збор за комбинации од n елементи од класа 2.
- Бројот на учесници n не е познат, но дадено е дека $C_n^2=45$. Оттука имаме

$\frac{n!}{2!(n-2)!}=45$ или $\frac{n(n-1)}{2}=45$, т.е. $n^2-n-90=0$. Значи, се добива квадратна равенка, а

нејзините решенија се $n_{1/2}=\frac{1\pm\sqrt{1+4\cdot 90}}{2}=\frac{1\pm 19}{2}$, т.е. $n_1=10$, $n_2=-9$. Второто решение отпаѓа

бидејќи бројот на учесници не може да биде негативен. Значи, вкупниот број на учесници на турнирот е 10.

5 Се разгледуваат шесторки составени од цифрите 0, 1, 2. Да се определи бројот на оние шесторки кај кои 0 стои на прва позиција.

Решение. Со оглед дека станува збор за шесторки составени од само 3 цифри, јасно е дека тоа се варијации со повторување од 3 елементи од класа 6. Бројот на оние шесторки кои започнуваат со 0, може да се определи на следниот начин: на прва позиција се фиксира 0; останатите пет позиции може да се пополнат со кој било од елементите 0, 1, 2.Такви пополнувања може да се направат на $\overline{V}_3^5 = 3^5 = 243$ начини.

6 Колку дијагонали може да се повлечат во еден десетаголник?

Решение. Да го разгледаме множеството темиња на десетаголникот. Ако се поврзе секое теме со сите останати ќе се добијат сите дијагонали и сите страни на десетаголникот. Секое поврзување на две темиња може да се разгледува како една комбинација од 10 елементи од класа 2 (редоследот на елементите не е битен, две темиња определуваат точно една дијагонала или една страна).

Вкупниот број на дијагонали и страни ќе биде $C_{10}^2 = \frac{10!}{2!8!} = 45$. Бидејќи десетаголникот има 10 страни, бројот на дијагоналите ќе биде

$$C_{10}^2 - 10 = 45 - 10 = 35.$$

Задачи

1 Од петте непарни цифри се формираат четирицифрени броеви.
а) Колку четирицифрени броеви може да се формираат?
б) Кај колку од нив сите цифри се различни?
в) Колку завршуваат на цифра која е делива со 3?
г) Колку почнуваат и завршуваат со иста цифра?

2 На светското првенство во фудбал учествуваат 16 репрезентации. На колку начини може да се доделат трите медали (златен, сребрен и бронзен)?

3 Колку различни пермутации има од цифрите $0,1,2,\ldots,9$ во кои $1,2,3,4$ се четири последователни цифри:
а) во растечки редослед;
б) во произволен редослед?

4 Три момчиња и три девојчиња се поредуваат во редица. На колку начини може да се изврши поредувањето ако:
а) трите момчиња треба да стојат еден до друг;
б) одредени две девојчиња треба да стојат заедно?

5 Од стандарден шпил карти издвоени се картите со слики (џандари, дами и попови). Од издвоените карти се избираат 3. На колку начини може да се изберат барем две карти со црвена боја?

6 На полица во една книжарница се наоѓаат 9 книги од кои 7 се математички, а 2 се информатички. На колку начини може да се изврши избор на 4 од овие книги така што помеѓу нив да има барем една информатичка книга?

6 БИНОМНА ФОРМУЛА

Потсети се!

- Бројот на комбинации без повторување од n елементи од класа k е

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \text{ за } k=0, 1,..., n.$$

- За секој природен број n, точни се следните равенства:

$$C_n^0 = \binom{n}{0} = 1; \quad C_n^n = \binom{n}{n} = 1; \quad C_n^1 = \binom{n}{1} = n.$$

А За секој природен број n, броевите $\binom{n}{k}$ $(k=0, 1,\ldots, n)$ се викаат ***биномни коефициенти*** и тие ги имаат следните својства:

$$i)\ \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k};$$

$$ii)\ \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$$

- Својството $i)$ следи директно од задачата 4 во лекцијата за комбинации. Имено, таму е покажано дека $C_n^k = C_n^{n-k}$.
- За да се утврди точноста на $ii)$ се поаѓа од десната страна на равенството и со соодветни трансформации се доаѓа до левата страна. Имено:

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} =$$

$$= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = (n-1)!\frac{k+(n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{(n-1)!n}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

- Од биномните коефициенти може да се состави една таблица која се вика ***Паскалов триаголник***.

За секој n $(n = 0,1,2,...)$ n-тата редица во табелата се состои од биномните коефициенти $\binom{n}{k}$, за $k = 0,1,2,...,n$.

- Поради точноста на равенството $ii)$, може да се воочи дека секој биномен коефициент е збир на двата коефициенти кои се непосредно над него.

$$\binom{0}{0}$$

$$\binom{1}{0} \quad \binom{1}{1}$$

$$+$$

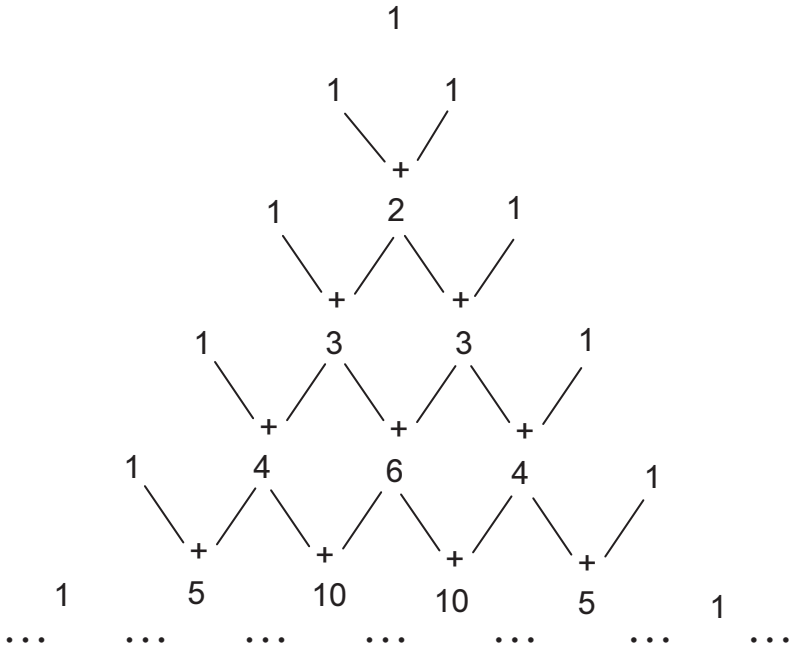
$$\binom{2}{0} \quad \binom{2}{1} \quad \binom{2}{2}$$

$$+ \quad +$$

$$\binom{3}{0} \quad \binom{3}{1} \quad \binom{3}{2} \quad \binom{3}{3}$$

$$\ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots$$

- Ако се пресметаат биномните коефициенти, Паскаловиот триаголник го добива следниот облик.



- Воочи дека Паскаловиот триаголник е рамнокрак.
- Во секој ред, првиот и последниот коефициент се еднакви на 1.
- Коефициентите кои се еднакво оддалечени од крајните коефициенти се еднакви, т.е. коефициентите во триаголникот се симетрични во однос на висината на триаголникот повлечена кон основата. Тоа следува директно од својството *i*).

Потсети се!

- $(a+b)^0 = 1,\ a+b \neq 0;$
- $(a+b)^1 = a+b;$
- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2;$
- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3;$
- $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4;$ итн.

Од претходните примери за степенот на биномот може да се воочи следното.

- Развиената форма на степенот на биномот е полином.
- Бројот на мономи во полиномот е за 1 поголем од степенот на биномот.
- Степенот на секој моном е еднаков на степенот на биномот.

- Имајќи ги предвид биномните коефициенти претставени во Паскаловиот триаголник, може да се воочи следното:

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0}$$

$$(a+b)^1 = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$$

$$(a+b)^2 = \binom{2}{0}a^2 + \binom{2}{1}ab + \binom{2}{2}b^2$$

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0}a^3 + \binom{3}{1}a^2b + \binom{3}{2}ab^2 + \binom{3}{3}b^3$$

итн.

- Може да се заклучи дека коефициентите од развојот на степените на биномот $a+b$ се броевите, т.е. биномните коефициенти кои се јавуваат во Паскаловиот триаголник.
- На пример, коефициентите во развојот на $(a+b)^3$ се наоѓаат во четвртиот ред на Паскаловиот триаголник.

Оваа формула може да се обопшти и да се изведе формула за развојот на $(a+b)^n$ за секој природен број n.

Запомни!

За секој природен број n, важи следното равенство:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n.$$

Оваа формула се вика ***биномна формула*** или ***Њутнова формула***.

1 Со примена на биномната формула, да се пресмета $(x+2)^5$.

Решение. $(x+2)^5 = \binom{5}{0}x^5 + \binom{5}{1}x^4 \cdot 2 + \binom{5}{2}x^3 \cdot 2^2 + \binom{5}{3}x^2 \cdot 2^3 + \binom{5}{4}x \cdot 2^4 + \binom{5}{5} \cdot 2^5.$

- Биномните коефициенти може да се пресметаат или да се прочитаат од шестиот ред на Паскаловиот триаголник. Се добива следното:

$$\begin{aligned}(x+2)^5 &= x^5 + 5 \cdot x^4 \cdot 2 + 10 \cdot x^3 \cdot 2^2 + 10 \cdot x^2 \cdot 2^3 + 5 \cdot x \cdot 2^4 + 2^5 \\ &= x^5 + 10x^4 + 40x^3 + 80x^2 + 80x + 32.\end{aligned}$$

- За големи вредности на n, не е практично да се испишуваат $n+1$ редови на Паскаловиот триаголник.

Во такви случаи, подобро е да се пресметаат биномните коефициенти

$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}$, користејќи притоа дека $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

2 За даден природен број n, да се определи збирот $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}$.

Решение.

Во биномната формула $(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots+\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n}b^n$,

заменуваме $a=b=1$. Се добива $2^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}$, па збирот на коефициентите во

n-тата редица на Паскаловиот триаголник е 2^n.

Запомни!

За секој природен број n, точно е равенството $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\ldots+\binom{n}{n}=2^n$.

3 Определи го третиот член во развојот на степенот на биномот $(x+\sqrt{x})^6$.

Решение.

Воочи дека првиот член има биномен коефициент $\binom{6}{0}$, вториот $\binom{6}{1}$, а третиот $\binom{6}{2}$.

Значи, третиот член ќе биде $T_3=\binom{6}{2}x^{6-2}\left(\sqrt{x}\right)^2=15x^4\cdot x=15x^5$.

Запомни!

Во развојот на степенот $(a+b)^n$ има $n+1$ членови и $(k+1)$-от по ред член е еднаков на

$$T_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}\cdot b^k,\quad k=0,1,\ldots,n.$$

4 Одреди го оној член во развојот на степенот на биномот $\left(x+\frac{1}{x^2}\right)^{12}$ кој не зависи од x.

Решение. Се бара k, за кое T_{k+1} не зависи од x. $T_{k+1}=\binom{12}{k}x^{12-k}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)^k=\binom{12}{k}x^{12-k-2k}=\binom{12}{k}x^{12-3k}$.

T_{k+1} не зависи од x ако $12-3k=0$, т.е. $k=4$. Оттука следува дека $T_5=\binom{12}{4}=495$.

5 Одреди го коефициентот пред $a^{10}b^3$ во развојот на $(a-b)^{13}$.

Решение. Бидејќи $(a-b)^{13}=(a+(-b))^{13}$, во развојот на степенот на овој бином ќе се појави:

$\binom{13}{3}a^{13-3}(-b)^3=(-1)^3\binom{13}{3}a^{10}b^3$. Значи, коефициентот пред $a^{10}b^3$ е $-\frac{13\cdot12\cdot11}{3\cdot2\cdot1}=-286$.

Задачи

Примени ја биномната формула во развојот на степенот на биномот $(1-2)$:

1 а) $(2x+3y)^6$; б) $(x-3y)^7$; в) $\left(\frac{x}{2}-4y\right)^4$.

2 а) $\left(x-\frac{1}{x}\right)^5$; б) $(x+\sqrt{x})^8$.

3 Одреди го коефициентот пред x^9y^3 во развојот на степенот на биномот:

а) $(x+y)^{12}$; б) $(x+2y)^{12}$; в) $(2x-3y)^{12}$.

4 Одреди го коефициентот пред x^4 во развојот на степенот на биномот $\left(x+\frac{3}{x}\right)^8$.

5 Пресметај ја сумата на сите биномни коефициенти во:

а) $(x+y)^3$; б) $(x+y)^{12}$.

6 Коефициентот пред x^2 во развојот на $(1+2x)^n$ е 264. Одреди го коефициентот пред x^5.

7 Одреди го членот што не содржи y во развојот на $\left(2y^2-\frac{1}{y^2}\right)^n$ ако збирот на сите биномни коефициенти е 1024.

8 Збирот на првите три коефициенти во развојот на биномот $\left(x^2-\frac{2}{x^2}\right)^n$ е 97. Одреди го коефициентот пред x^8.

7 ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1 На колку начини може да се пополни тикет спортска прогноза со 10 парови, ако 3 парови се фиксирани, а за други 3 доаѓаат предвид само две можности?

2 Колкав е бројот на сите шестцифрени броеви со различни цифри во кои парните и непарните цифри доаѓаат наизменично?

3 Колку шестцифрени броеви може да се формираат од цифрите $0,1,3,5,7,8,9$ во кои ниту една цифра не се повторува?

4 Во автобус има 6 празни места. На колку начини може да седнат:
а) 6 патници; б) двајца патници; в) 8 патници (2 секогаш стојат)?

5 На колку начини 3 момчиња и 3 девојчиња може да се распоредат на 6 места во еден ред така што момчињата да седат на непарните позиции?

6 Колку различни петнаесетцифрени броеви може да се формираат со 2 двојки, 3 тројки, 4 четворки и 6 шестки? Колку од нив се непарни?

7 Од 4 брачни парови треба да се избере тричлена комисија. На колку начини може да се изврши изборот ако
а) во комисијата може да влезат кои било 3 од 8-те луѓе;
б) комисијата треба да се состои од 2 жени и 1 маж;
в) во комисијата не може да бидат маж и жена кои се во брак?

8 Во рамнина има 20 точки. Од нив 6 лежат на иста права. Притоа, ако се изберат кои било три точки, од кои барем една не лежи на правата, тогаш тие три точки не се колинеарни. Колку различни прави се определени во рамнината?

9 За група од 8 деца се предвидени 16 чоколади. На колку начини може да се поделат чоколадите така што:

а) секое дете добива барем по една чоколада;

б) не е важно дали сите деца ќе добијат чоколада?

10 Одреди го членот кој не зависи од x во развојот на степенот $\left(2x-\frac{3}{x^2}\right)^9$.

11 Збирот на биномните коефициенти при развојот на $(1+x)^n+(1+x)^{n+1}$ е 1536. Одреди го коефициентот пред x^6.

12 а) Одреди го седмиот член во развојот на биномот $\left(x+\sqrt{2}\right)^{10}$;

б) Одреди го средниот член во развојот на биномот $\left(\frac{a}{x}-\sqrt{x}\right)^{14}$.

13 Одреди го шестиот член во развојот на биномот: а) $\left(2\sqrt{3}+\frac{1}{3}\right)^{11}$; б) $\left(\sqrt[3]{11}-\frac{1}{\sqrt[5]{11}}\right)^{14}$.

14 Одреди го петтиот член во развојот на биномот: а) $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^7$; б) $\left(\sqrt{a}+2b^2\right)^8$.

8 ЗАДАЧИ ЗА САМОПРОВЕРКА

1 Секоја варијација со повторување од елементите од множеството $A=\{1,2,3,4,5\}$ класа 3 е:
а) подмножество од множеството A; б) подредена петорка од три елементи;
в) подредена тројка од елементите од множеството A. 1

2 Нека $A=\{a,b,c\}$ и $B=\{1,2,3,4\}$. Заокружи ги оние парови кои припаѓаат на декартовиот производ $A \times B$: а) $(1,3)$; б) $(2,a)$; в) $(a,2)$; г) $(c,1)$; д) (b,c). 1

3 Бројот на варијации со повторување од 8 елементи класа 3 е:
а) 336; б) 40320; в) 512. 1

4 Кај кои од наведените категории е битен распоредот (редоследот) на елементите:
а) комбинации; б) пермутации; в) варијации? 1

5 Биномниот коефициент пред петтиот по ред член во развојот на $(a+c)^{12}$ се определува со: а) $\binom{12}{5}$; б) $\binom{12}{4}$; в) 5; г) $\binom{12}{6}$. 1

6 Бројот на варијации без повторување од n елементи од класа k се пресметува со формулата _____ 1

7 Пермутација од n елементи е _____ 1

8 Комбинација без повторување од n елементи од класа k е _____ 1

9 Бројот на комбинации со повторување од n елементи од класа k се пресметува со формулата _____ 1

10 Напиши ја биномната формула на степенот на биномот $(a+b)^n$.
_____ 1

11 Кодот на еден вид производи се состои од 5 букви од англиската абецеда која има вкупно 26 букви и по нив низа од 4 цифри. Колку различни кодови за дадениот вид производи може да се направат? 5

12 На еден јарбол се наредени 9 знамиња. Секој распоред на знамињата претставува одреден сигнал. Колку различни сигнали може да се зададат ако има 3 бели, 4 жолти и 2 црвени знамиња? 5

13 На аудиција за улоги во една театарска претстава се пријавиле 3 актери и 4 актерки. На колку начини може да се изврши изборот така што да бидат избрани 4 личности од кои барем 3 актерки? 5

14 Одреди го коефициентот пред a^3b^2 во развојот на биномот $(3a-5b)^5$. 5

ТЕМА 9 ВЕРОЈАТНОСТ Е И СТАТИСТИКА Е, З

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1 Е Случајни настани и веројатност 242

2 Е Множество елементарни настани. Случајни настани 245

3 Е Операции со случајни настани 249

4 Е Класична дефиниција на веројатност 254

5 Е Својства на веројатноста 259

6 Е Условна веројатност 262

7 Е Независност на случајни настани 265

8 Е, З Популација, обележје, примерок 269

9 Е, З Елементарна обработка на податоци со мал број вредности на обележјето 271

10 Е, З Елементарна статистичка обработка со групирање на податоците во интервали 274

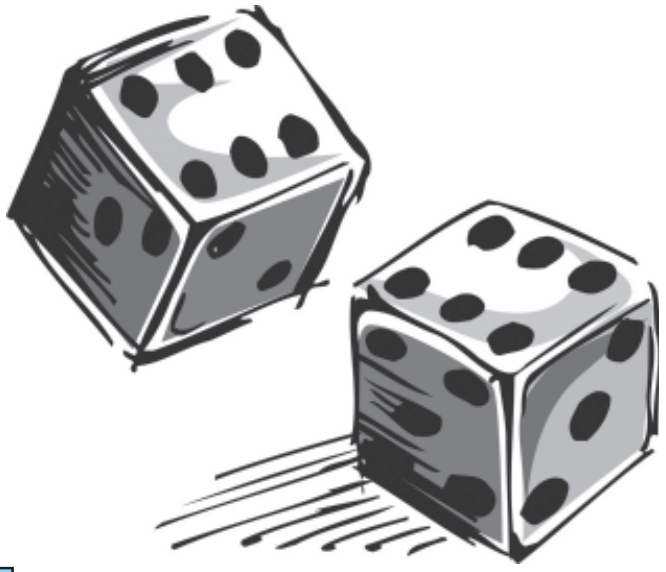
11 Е, З Аритметичка средина 279

12 Е, З Медијана и мода 282

13 Е Мерки за расејување на податоците од примерокот 285

14 Задачи за повторување и утврдување 289

15 Задачи за самопроверка 291



1 СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ И ВЕРОЈАТНОСТ Е

А

- Што подразбираш под експеримент? Каков може да биде резултатот (исходот) од еден експеримент?

Разгледај ги следните примери на експерименти.

1. Една монета се фрла во воздух и по нејзиното паѓање на земја на горната страна од монетата може да се појави „грб” или „глава”. Со фрлањето на монетата сме извршиле еден ***експеримент*** и како резултат на тој експеримент може да се добие еден од следните ***исходи***: „на горната страна од монетата се појави грб” или „на горната страна од монетата се појави глава”.

2. Ако вода се загрее на $100\ °\mathrm{C}$, тогаш таа ќе почне да врие. Овде е извршен еден експеримент (загревање на вода) и како резултат на тој експеримент се јавува исходот „водата врие”.

3. Ако се проверува исправноста на производите во една фабрика, тогаш се зема по еден производ, се проверува неговиот квалитет и се утврдува дали е исправен или не. Значи, експериментот е проверка на квалитетот, а можни исходи се: „производот е исправен” и „производот не е исправен”.

4. Се спроведува тест за да се провери знаењето на учениците. Оценувањето на тестот се прави со поени од 0 до 100. Тогаш експериментот е оценување на еден ученик, а можни исходи се „ученикот освои i поени”, каде што $i = 0, 1, 2, \ldots, 100$.

Запомни!

Експеримент е секоја реализација на одредено множество услови S.
Секој резултат (исход) во врска со експериментот S се вика ***настан*** во врска со експериментот S.

- Настаните се обележуваат со големите латински букви: A, B, $C, \ldots$

- Еден експеримент може да биде детерминистички (определен) или недетерминистички (неопределен). Ако исходот на еден експеримент е однапред познат, тогаш тој експеримент е ***детерминистички***, во спротивно, ако исходот не може со сигурност да се знае однапред, тој експеримент е ***недетерминистички***.

1 Какви се експериментите претставени во примерите 1, 2, 3 и 4?

2 Да се вратиме повторно на експериментот фрлање монета. Нека се изведени 8 серии од по 1000 експерименти под еднакви услови.

- Во секој од експериментите се набљудува настанот A: „падна грб”.

- Со $n_i(A)$ се означува бројот на експериментите од i-тата серија во кои се појавил настанот A. Резултатите од овие осум серии се претставени во следната табела:

i	$n_i(A)$	$\frac{n_i(A)}{n}$
1	502	0,502
2	504	0,504
3	492	0,492
4	500	0,500
5	510	0,510
6	490	0,490
7	493	0,493
8	509	0,509

Во последната колона се дадени вредностите на количникот $\frac{n_i(A)}{n}$, каде што n е бројот на изведените експерименти во една серија. Во нашиот случај $n=1000$.
Воочи дека сите вредности во оваа колона се блиску до $0{,}5$. Притоа, ако бројот на експериментите во една серија се зголемува, тогаш тој количник се приближува сè повеќе до $0{,}5$.

Запомни!

Бројот $\frac{n_i(A)}{n}$ се нарекува ***релативна фреквенција*** за настанот A во i-тата серија. Реалниот број околу кој се натрупуваат овие релативни фреквенции се нарекува ***статистичка*** (или ***емпириска***) ***веројатност*** на настанот A; го означуваме со $P(A)$.

- Воочи дека ако се разгледува серија со n експерименти, тогаш бројот на појавувања на настанот A е најмалку 0, а најмногу n, т.е. $0 \le n(A) \le n$. Оттука, $\frac{0}{n} \le \frac{n(A)}{n} \le \frac{n}{n}$, па $0 \le \frac{n(A)}{n} \le 1$. Можеме да заклучиме дека релативната фреквенција на настанот A е секогаш помеѓу 0 и 1, па и статистичката веројатност на настанот A е помеѓу 0 и 1.

- Статистичката веројатност е објективна мерка за можноста за појавување на настанот A.
- Во експериментот фрлање монета во задачата 2, статистичката веројатност на настанот A: „падна грб” изнесува $0{,}5$. Тоа е бројот околу кој се натрупуваат релативните честоти претставени во претходната табела.
- За даден настан A во врска со експериментот S, може да се применува оваа дефиниција наречена статистичка дефиниција на веројатност, ако:

  1. Експериментот S може да се повтори при исти услови колку што сакаме пати;

  2. Релативните фреквенции на настанот A, во секоја од повеќе изведени серии експерименти, се броеви кои се приближно еднакви.
- Условот **2** обезбедува статистичка стабилност, а условот **1** обезбедува проверка на условот **2**.
- Ако за експериментот S се исполнети условите **1** и **2**, тогаш секој настан во врска со експериментот S, се нарекува ***случаен настан***.

В 3 Да ги разгледаме следните експерименти и настаните во врска со нив.

а) Нека експериментот е фрлање коцка. Се разгледуваат настаните:

A_1: падна број од 1 до 6 и

A_2: падна бројот 7.

б) Експериментот е извлекување на топче од кутија во која има 5 бели топчиња. Се разгледуваат настаните:

B_1: извлечено е бело топче и

B_2: извлечено е црно топче.

в) Експериментот е оценување на случајно избран ученик. Се разгледуваат настаните:

C_1: ученикот доби оценка од 1 до 5 и C_2: ученикот доби оценка 12.

- Што може да се каже за наведените настани?

Одговор. Настаните A_1, B_1 и C_1 се јавуваат при секоја реализација на соодветниот експеримент, а настаните A_2, B_2 и C_2 не се појавуваат никогаш при реализација на експериментот.

Сигурен настан во врска со даден експеримент е настанот кој се појавува при секоја реализација на тој експеримент.
Невозможен настан во врска со даден експеримент е настан што не се појавува никогаш при реализација на дадениот експеримент.

- Значи, A_1, B_1 и C_1 се сигурни, а A_2, B_2 и C_2 – невозможни настани за соодветните експерименти.

- Сигурниот настан се појавува во секој експеримент од дадена серија експерименти, а невозможниот настан не се појавува никогаш. Затоа, релативната фреквенција на сигурниот настан е $\frac{n}{n}=1$, а на невозможниот настан е $\frac{0}{n}=0$, за произволна серија експерименти.

Задачи

1 Нека експериментот е фрлање коцка. Направи 4 серии од по 50 фрлања и определи ја статистичката веројатност на појавување на настаните:

A: на горната страна на коцката се појави бројот 2;

B: на горната страна на коцката се појави парен број.

2 Експериментот е извлекување карта од шпил со 52 карти. Спроведи 5 серии од по 100 експерименти. По секое извлекување регистрирај го бројот и знакот на картата и врати ја назад во шпилот. Определи кој е бројот околу кој се натрупуваат релативните честоти на настаните:

A: извлечена е карта со бројот 10;

B: извлечена е карта со знакот лист.

2 МНОЖЕСТВО ЕЛЕМЕНТАРНИ НАСТАНИ. СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ

Е

А Да го разгледаме експериментот фрлање коцка. Некои од можните случајни настани во врска со овој експеримент се следните:

A: падна парен број; B: падна број делив со 3;

E_1: падна бројот 1; E_2: падна бројот 2; E_3: падна бројот 3;

E_4: падна бројот 4; E_5: падна бројот 5; E_6: падна бројот 6.

1 Воочи ја разликата помеѓу настаните A и B, од една и настаните E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 и E_6 од друга страна.

Решение.

- Настанот A се појавува ако се појави еден од настаните E_2, E_4 или E_6, а настанот B се појавува ако се појави настанот E_3 или ако се појави E_6. Значи, настанот A може да се разложи на настаните E_2, E_4 и E_6, а настанот B може да се разложи на настаните E_3 и E_6.

- Од друга страна, настаните E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 и E_6 не може да се разложат на други настани. Затоа, тие настани ги нарекуваме ***елементарни настани***. Елементарните настани ќе ги означуваме со симболот E со индекс 1,2,...

Запомни!

Елементарен настан во врска со даден експеримент е секој логички исход кој не може да се разложи на други настани. Притоа, при секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден елементарен настан.
Множеството од сите вакви настани во врска со еден експеримент се вика ***множество елементарни настани*** и се означува со Ω.

2 Определи го множеството елементарни настани за експериментот фрлање коцка.

Решение. При секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден од настаните E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 и E_6, затоа множеството елементарни настани во врска со овој експеримент е $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$.

3 Определи го множеството елементарни настани за експериментот фрлање на две монети.

Решение. При фрлање на една монета можен исход е „падна глава" или „падна грб" (ќе пишуваме кратко „глава" или „грб"). Но, експериментот се состои од фрлање на двете монети заедно, па можните исходи ќе бидат подредени парови, каде што првиот елемент ќе го означува исходот на првата монета, а вториот елемент исходот на втората. Со други зборови, множеството елементарни настани е следното:
$\Omega = \{$(глава, глава), (глава, грб), (грб, глава), (грб, грб)$\}$.

4 Нека експериментот е фрлање монета сè додека не се појави грб. Определи го множеството елементарни настани.

Решение. Множеството елементарни настани е од облик $\Omega = \{E_1, E_2, \ldots\}$, каде што $E_1 =$ (грб), $E_2 =$ (глава, грб) итн. Во општ случај, за фиксно $i = 2,3,\ldots$, елементарниот настан

$$E_i = (\underbrace{\text{глава, глава}, \ldots, \text{ глава}}_{i-1}, \text{грб})$$

и тој се појавува ако во првите $i-1$ фрлања на монетата се појави глава, а во i-то фрлање грб. Во овој случај, теоретски експериментот може никогаш да не заврши, па множеството елементарни настани е бесконечно множество.

5 Определи го множеството елементарни настани за експериментот мерење висина на случајно избран човек од дадена група луѓе.

Решение. Ако x е висината на избраното лице во центиметри, тогаш $x \in [50,250]$, каде што 50 е минималната, а 250 максималната висина што може да ја има еден човек. Сега, множеството елементарни настани е од облик $\Omega = \{x \mid x \in [50, 250]\} = [50, 250]$. Во овој случај, Ω е интервал, па повторно Ω е бесконечно множество.

- Од претходните примери можеме да воочиме дека зависно од експериментот, множеството елементарни настани може да биде конечно или бесконечно множество.

- Во понатамошниот дел од текстот ќе се задржиме на експерименти за кои множеството елементарни настани е конечно.

Во задача 1 заклучивме дека настанот A ќе се појави ако се појави еден од настаните E_2, E_4 или E_6, а настанот B ќе се појави ако се појави настанот E_3 или ако се појави E_6.

Оттука, настаните A и B може да се запишат на следниот начин $A = \{E_2, E_4, E_6\}$, $B = \{E_3, E_6\}$. Да воочиме дека настаните A и B се претставени како подмножества од множеството елементарни настани Ω.

Запомни!

Случаен настан е произволно подмножество од множеството елементарни настани Ω. Ќе велиме дека настанот A ***се појавил*** ако се појавил некој од елементарните настани кои припаѓаат на соодветното подмножество елементарни настани.

6 Ако експериментот е фрлање на две монети, опиши го настанот C: барем еднаш падна грб.

Одговор. Настанот C ќе се појави ако на една од монетите падне грб, а на другата глава или ако на двете монети падне грб, т.е.

$$C = \{(\text{глава, грб}), (\text{грб, глава}), (\text{грб, грб})\}.$$

7 Експериментот се состои во фрлање на две коцки. Да се опише множеството елементарни настани и следните случајни настани:

A: на двете коцки падна парен број;

B: на првата коцка падна парен, а на втората непарен број.

Решение. Множеството елементарни настани за овој експеримент ќе се состои од подредени парови (x, y), каде што x е исходот на првата коцка, а y – исходот на втората коцка, $x, y \in \{1,2,3,4,5,6\}$. Оттука,

$$\Omega = \{(x, y) \mid x, y \in \{1,2,3,4,5,6\}\}, \text{ т.е. } \Omega = \{1,2,3,4,5,6\} \times \{1,2,3,4,5,6\}$$

За настанот A се добива следното: $A = \{(x, y) \mid x, y \in \{2, 4, 6\}\}$, или во развиена форма

$$A = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\},$$

а за настанот B имаме: $B = \{(x, y) \mid x \in \{2, 4, 6\}, y \in \{1, 3, 5\}\}$, или

$$B = \{(2, 1), (2, 3), (2, 5), (4, 1), (4, 3), (4, 5), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}.$$

Сигурниот настан се појавува секогаш кога се реализира експериментот, т.е. секој елементарен настан доведува до негово појавување. Затоа тој се означува со Ω. Невозможниот настан, пак, не се појавува никогаш кога се реализира експериментот, односно ниеден елементарен настан не доведува до негово појавување. Оттука, невозможниот настан ќе го означуваме со $\varnothing$.

Задачи

1 Експериментот се состои прво од фрлање монета. Потоа, ако падне грб, се фрла коцка и се регистрира бројот на точките на горната страна од коцката, а ако падне глава, монетата се фрла уште еднаш. Да се опише множеството елементарни настани.

2 Во една кутија има 5 топчиња нумерирани со броевите од 1 до 5. На случаен начин се извлекува едно по едно топче (без враќање), сè додека не се извлече топче со непарен број. Ако се регистрираат броевите на извлечените топчиња, да се опише множеството елементарни настани.

3 Стрелец има 4 куршуми и стрела во целта сè додека не погоди двапати последователно или додека не ја изгуби шансата да го исполни тој услов. Да се опише множеството елементарни настани и следните случајни настани:

A: целта е погодена барем двапати;

B: еден куршум останал неискористен;

C: имало повеќе погодоци отколку промашувања.

4 Експериментот се состои во фрлање три коцки. Да се опише множеството елементарни настани и следните случајни настани:

A: на првите две коцки падна парен број, а на третата непарен;

B: на сите три коцки падна непарен број;

C: збирот на точките на трите коцки е парен;

D: на првите две коцки паднала иста вредност;

E: на трите коцки не се појавила ниедна петка;

F: на трите коцки се појавила барем една петка.

5 На една табла за пикадо се наоѓаат полињата со броевите $7,8,9,10$. Еден играч нишани со стреличките во пикадото трипати. Да се определи множеството елементарни настани и следните случајни настани:

A: трипати е погоден парен број;

B: двапати е погоден парен, а еднаш непарен број;

C: во првите две гаѓања е погоден парен, а во третото непарен број;

D: збирот на погодените броеви е 27.

3 ОПЕРАЦИИ СО СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ Е

Пошсетии се!

- Елементарен настан во врска со даден експеримент е секој логички исход кој не може да се разложи на други настани. Притоа, при секоја реализација на експериментот се појавува еден и само еден елементарен настан.
- Страните на еден правилен тетраедар се означени со броевите 1,2,3,4.Тетраедарот се фрла на рамна површина и се набљудува страната со која тој лежи на површината. Кое е множеството елементарни настани Ω за дадениот експеримент?
- За претходниот експеримент, опиши го настанот A: „падна број не поголем од 3”, како подмножество од Ω.

А 1 Нека експериментот се состои во извлекување на карта од шпил со 52 карти.

Ги означуваме настаните:

A: извлечена е карта со бројот 10;

B: извлечена е карта пик.

Кога ќе се појави настанот C: падна карта пик со бројот 10?

Како појавувањето на овој настан може да го поврзеш со појавувањето на настаните A и B?

Одговор. Воочи дека настанот C ќе се појави тогаш и само тогаш кога ќе се појават истовремено и настаните A и B.

Запомни!

Производ на настаните A и B е настан кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појават и двата настани A и B. Тој настан е определен со множество елементарни настани што е пресек од множествата елементарни настани на настанот A и на настанот B. Производот на два настани A и B се означува со $A \cap B$ или AB.

2 Нека експериментот е фрлање коцка. Ги разгледуваме настаните:

A: падна број помал или еднаков на 3;

B: падна број делив со 3;

C: падна број поголем од 4.

Да се определи производот на настаните A и B и производот на настаните A и C.

Решение. Настаните A, B и C се опишуваат на следниот начин: $A = \{E_1, E_2, E_3\}$, $B = \{E_3, E_6\}$ и $C = \{E_5, E_6\}$. Настанот $A \cap B$ означува дека се појавил број кој е помал или еднаков на 3 и делив со 3, па така $A \cap B = \{E_3\}$. Настанот $A \cap B$ означува дека се појавил број кој е помал или еднаков на 3 и поголем од 4, што е невозможно. Значи, настаните A и C не може да се појават истовремено, т.е. $A \cap B = \varnothing$.

Запомни!

Ако два настани A и B не може да се појават истовремено, тогаш тие се нарекуваат ***дисјунктни настани***. Нивниот производ е невозможен настан, т.е. $A \cap B = \varnothing$.

Запомни!

Збир на настаните A и B е настан кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави барем еден од настаните A или B. Тој настан е определен со множество елементарни настани што е унија од множествата елементарни настани на настанот A и настанот B. Збирот на два настани A и B, во општ случај, се означува со $A \cup B$.
Доколку настаните A и B се дисјунктни, тогаш нивниот збир ќе го означуваме со $A + B$.

- Кога се вели дека се појавил барем еден од настаните A или B, тогаш се подразбира дека се појавил или само настанот A, или само настанот B или и двата настани истовремено.
- Ако настаните A и B се дисјунктни, тогаш истовремено појавување на двата настани е невозможно, па појавување на настанот $A \cup B$ подразбира да се појави или само настанот A, или само настанот B. Затоа, во овој случај, за збир на два настани се користи ознаката $A + B$. Значи, $A + B = A \cup B$, ако $AB = \varnothing$.

3 Определи го збирот на настаните A и B, како и на настаните A и C, ако A, B и C се настаните дефинирани во задачата **2**.

Решение.

- Настаните A, B и C се определени со: $A = \{E_1, E_2, E_3\}$, $B = \{E_3, E_6\}$ и $C = \{E_5, E_6\}$. Настанот $A \cup B$ означува дека ќе се појави број помал од 3 или број делив со 3, и тој може да се опише на следниот начин:

$$A \cup B = \{E_1, E_2, E_3, E_6\}.$$

- Настанот $A \cup C$ означува дека ќе се појави број кој не е поголем од 3 или број кој е поголем од 4. Исто така, во задачата **2** воочивме дека настаните A и C се дисјунктни. Оттука, за нивниот збир се добива $A + C = \{E_1, E_2, E_3, E_5, E_6\}$.

Запомни!

Спротивен настан на настанот A е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога не се појавува настанот A. Овој настан се означува со $\overline{A}$. Множеството елементарни настани на настанот $\overline{A}$ е комплемент на множеството елементарни настани соодветни на настанот A во однос на Ω.
За секој настан A важи: $A \cap \overline{A} = \varnothing$, $A \cup \overline{A} = \Omega$.

4 Определи ги спротивните настани на настаните A и B од задачата 1.

Решение. Настанот A нема да се појави, ако се појави еден од настаните E_4, E_5 или E_6, па затоа $\overline{A}=\{E_4,E_5,E_6\}$, а соодветно $\overline{B}=\{E_1,E_2,E_4,E_5\}$.

Запомни!

Настанот A го ***повлекува*** настанот B (пишуваме $A\subseteq B$), ако секогаш кога се појавува настанот A се појавува и настанот B.

5 Да го разгледаме повторно експериментот фрлање две монети. Нека
A: падна точно една глава; B: падна барем една глава.

- Имаме дека $A=\{$(глава, грб), (грб, глава)$\}$, $B=\{$(глава, грб), (грб, глава), (глава, глава)$\}$.
- Воочи дека ако A и B се разгледуваат како множества, тогаш $A\subseteq B$.
- Од друга страна, може да се воочи дека секогаш кога ќе се појави настанот A се појавува и настанот B, т.е. согласно претходната дефиниција настанот A го повлекува настанот B.

Запомни!

Ако $A\subseteq B$ и $B\subseteq A$, тогаш за настаните A и B велиме дека се ***еднакви***.

6 Повторно, нека експериментот е фрлање две монети. Се разгледуваат следните настани: A: падна барем една глава; B: падна барем еден грб.
Опиши ги настаните A, B, $A\cap B$, $A\cup B$.

- Бидејќи случајните настани се подмножества од множеството елементарни настани во врска со еден експеримент, за операциите со настани важат истите закони како за операциите со множества. Во понатамошните излагања ќе ги искористиме следните закони.

Потсети се!

- Дистрибутивните закони:
$A(B\cup C)=AB\cup AC$,
$(A\cup B)C=AC\cup BC$.
- Де Морграновите закони:
$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$,
$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$.

Запомни!

Разлика на настаните A и B (пишуваме $A \setminus B$ или $A\overline{B}$) е настан кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави настанот A, а не се појавува настанот B, т.е. се појавуваат истовремено настанот A и спротивниот настан на настанот B.

7 Да се определи разликата на настаните A и B, ако A и B се настаните дефинирани во задачата 1, т.е. A: падна број помал или еднаков на 3; B: падна број делив со 3.

Решение. Разликата $A \setminus B$ на настаните A и B ќе се појави ако падне број помал или еднаков на 3 кој не е делив со 3. Оттука, $A \setminus B = \{E_1, E_2\}$.

Б Во овој дел ќе ги обопштиме дефинициите за збир и производ на повеќе од два настани.

Запомни!

Збир на настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$ е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појави барем еден од настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
Овој настан се означува со $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$, а неговото множество елементарни настани е унија од множествата елементарни настани соодветни на секој од настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Производ на настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$ е настанот кој се појавува тогаш и само тогаш кога ќе се појават истовремено сите настани $A_1, A_2, \ldots, A_n$.
Овој настан се означува со $A_1 \cap A_2 \ldots \cap A_n$ (или $A_1 A_2 \ldots A_n$), а неговото множество елементарни настани е пресек од множествата елементарни настани соодветни на секој од настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

8 Во цел се стрела трипати. Се разгледуваат настаните A_1, A_2 и A_3 кои означуваат погодување на целта во првото, второто и третото стрелање, соодветно. Со помош на овие настани, да се опишат следните случајни настани:

B: постигнати се три погодоци;
C: целта е трипати промашена;
D: постигнат е барем еден погодок;
E: постигнато е барем едно промашување;
F: постигнати се не повеќе од два погодоци;
G: до третото стрелање немало погодок.

Решение.

- Настанот B ќе се појави ако се појават сите три настани A_1, A_2 и A_3, истовремено. Оттука, $B = A_1 A_2 A_3$.

- Настанот C ќе се појави ако не се појави ниеден од настаните A_1, A_2 и A_3, т.е. ако се појават нивните спротивни настани, па $C = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3$.
- Настанот D ќе се појави ако се појави барем еден од настаните A_1, A_2 и A_3, па $D = A_1 \cup A_2 \cup A_3$. Соодветно, $E = \overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3$.
- Да воочиме дека настанот F ќе се појави ако се појави настанот E, и обратно, појавувањето на настанот F го повлекува појавувањето на настанот E. Значи, $F = E$.
- Настанот G ќе се појави ако не се појават настаните A_1 и A_2, па $G = \overline{A}_1\,\overline{A}_2$.

9 Еден брод има едно кормило, 4 парни котли и 2 турбини. Ги означуваме следните настани:

A: кормилото е исправно;

B_k: k-тиот парен котел е исправен, $k = 1, 2, 3, 4$;

C_j: j-тата турбина е исправна, $j = 1, 2$.

Настанот D: бродот е во возна состојба, се појавува ако се исправни кормилото, барем еден парен котел и барем една турбина. Да се опишат настаните D и $\overline{D}$ со помош на настаните A, B_k и C_j.

Решение. Со користење на операциите на настаните A, B_k и C_j, настанот D може да се опише како $D = A \cap (B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4) \cap (C_1 \cup C_2)$. Настанот $\overline{D}$ ќе го опишеме со користење на Де Морговите закони. Така, $\overline{D} = \overline{A} \cup (\overline{B}_1 \cap \overline{B}_2 \cap \overline{B}_3 \cap \overline{B}_4) \cup (\overline{C}_1 \cap \overline{C}_2)$, бидејќи $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Задачи

1 Двајца шахисти A и B играат турнир во шах. Турнирот се состои од 4 партии, при што нерешените партии не се земаат предвид. Победник е оној кој ќе постигне повеќе победи. Во случај на нерешен резултат (2:2) се игра петта одлучувачка партија. Да се опишат следните настани:

D: победи шахистот A;

E: победи шахистот B;

F: се игра и петта партија.

2 Експериментот се состои во фрлање три монети. Настаните A_1, A_2 и A_3, означуваат појавување на грб на првата, втората и третата монета, соодветно. Со користење на овие настани да се опишат следните случајни настани.

B: грб се појави само на првата монета;

C: грб се појави на првата и на втората монета;

D: грб се појави на сите три монети;

E: грб се појави на барем две монети;

F: грб се појави само на една монета;

G: грб се појави на точно две монети;

H: грб се појави најмногу на две монети.

3 Еден ученик добива на тест по математика три задачи. Со A_i го означуваме настанот дека ученикот знае да ја реши i-тата задача, $i = 1,2,3$. Со помош на овие настани да се опишат следните настани:

B: ученикот знае да ги реши сите задачи;

C: ученикот знае да реши барем една задача;

D: ученикот знае да реши барем две задачи;

E: ученикот знае да реши најмногу две задачи;

F: ученикот не знае да ги реши сите три задачи;

G: ученикот не знае да реши ниедна задача.

4 Експериментот се состои во избор на три производи од една производствена серија. Ги означуваме следните настани:

A: барем еден од трите производи е неисправен;

B: сите три производи се исправни.

На што се еднакви следните настани:

а) $A \cup B$; б) AB; в) $\overline{A}$; г) $\overline{B}$?

4 КЛАСИЧНА ДЕФИНИЦИЈА НА ВЕРОЈАТНОСТ E

Пошсеши се!

- Што е множеството елементарни настани во врска со даден експеримент?
- Што е случаен настан за даден експеримент? Како се опишува тој?
- Ако се изведува серија од 50 експерименти и настанот A се појави 30 пати, колку е релативната фреквенција на појавување на настанот А во таа серија експерименти?
- Кои вредности може да ги прими релативната фреквенција на даден настан?

А Претходно утврдивме дека бројот околу кој се натрупуваат релативните фреквенции на даден настан A се нарекува статистичка веројатност на настанот A и тоа е објективна мерка за можноста за појавување на настанот A. За да се определи статистички веројатноста на настанот A потребно е да се изведуваат поголем број серии експерименти со голем број експерименти, во секоја од сериите, и да се утврди околу кој број се натрупуваат релативните фреквенции на настанот A.

- Наша цел е да определиме некој метод кој ќе овозможи определување на веројатноста, како мерка за можноста за појавување на даден настан при едно изведување на експериментот.

- Со оглед на тоа што релативните фреквенции се секогаш броеви помеѓу 0 и 1, за веројатноста се поставуваат следните услови:

  1. $0 \le P(A) \le 1$, за произволен настан A;
  2. $P(\Omega) = 1$, т.е. веројатноста на сигурниот настан е 1.

- Овие услови се наметнуваат природно од својствата на релативните фреквенции на даден настан. Имено, релативните фреквенции се секогаш ненегативни и релативната фреквенција на сигурниот настан за произволна серија експерименти е секогаш 1.

- Нека $\Omega=\{E_1,E_2,\ldots,E_n\}$ е множеството елементарни настани во врска со експериментот S и нека $p_1, p_2,\ldots, p_n$ се дадени реални броеви помеѓу 0 и 1, т.е. $0 \le p_i \le 1$, така што $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$. Нека p_i е веројатност на елементарниот настан E_i, $i=1,2,\ldots,n$.

- Веројатноста на елементарните настани може да е однапред дадена или може да е експериментално определена (статистичка веројатност).

- На пример, ако е дадено дека во една фабрика 2% од производите се дефектни, тоа ќе значи дека веројатноста еден производ да е дефектен е $\frac{2}{100} = 0,02$.

- Означуваме $p_i = P(E_i)$, за $i = 1, 2,\ldots, n$.

- Нека A е даден случаен настан во врска со истиот експеримент. Нека настанот A, како подмножество од Ω, се состои од k елементарни настани, т.е. нека е од облик $A=\left\{E_{i_1}, E_{i_2},\ldots, E_{i_k}\right\}$, каде што $k \le n$.

Дефиниција. Веројатноста на настанот A е збир од веројатностите на елементарните настани што се содржат во настанот A. Тоа значи дека

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_k}. \qquad (1)$$

На пример, нека множеството елементарни настани $\Omega=\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$ се состои од 4 елементи и нека веројатностите на елементарните настани се:

$P(E_1)=0,2$; $P(E_2)=0,3$; $P(E_3)=0,1$ и $P(E_4)=0,4$.

Ако настанот $A=\{E_1,E_2,E_4\}$, тогаш неговата веројатност е

$P(A)=P(E_1)+P(E_2)+P(E_4)=0,2+0,3+0,4=0,9$, а веројатноста на настанот $B=\{E_2,E_3\}$ е $P(B)=P(E_2)+P(E_4)=0,3+0,4=0,7$.

1 Една табла за пикадо е поделена со концентрични кругови на области кои носат по 10, 9, 8 и 7 поени. Еден играч нишани на таблата со стреличките и ја погодува областа која носи 10 поени со веројатност $0{,}1$, областа која носи 9 поени со веројатност $0{,}2$, областа со 8 поени со веројатност $0{,}3$, онаа со 7 поени со веројатност $0{,}3$ и ја промашува таблата (постигнува 0 поени) со веројатност $0{,}1$. Ако играчот нишани во пикадото еднаш, определи ја веројатноста на следните настани:

A: играчот ќе постигне најмалку 8 поени; B: играчот ќе добие помалку од 8 поени.

Решение.

- При секоја реализација на експериментот „нишанење на таблата за пикадо“ се појавува еден и само еден од следните елементарни настани:

  E_1: погодена е областа која носи 10 поени; E_2: погодена е областа која носи 9 поени;
  E_3: погодена е областа која носи 8 поени; E_4: погодена е областа која носи 7 поени;
  E_5: таблата воопшто не е погодена.

- Значи, множеството елементарни настани $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}$, а од условите на задачата имаме дека $p_1 = P(E_1) = 0{,}1$, $p_2 = P(E_2) = 0{,}2$, $p_3 = P(E_3) = 0{,}3$, $p_4 = P(E_4) = 0{,}3$ и $p_5 = P(E_5) = 0{,}1$.

- Сега, настаните A и B може да се опишат на следниот начин:

$$A = \{E_1, E_2, E_3\} \text{ и } B = \{E_4, E_5\}.$$

- Согласно со дефиницијата на веројатност (1), за веројатностите на соодветните настани добиваме:

$$P(A) = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}6, \quad P(B) = p_4 + p_5 = 0{,}3 + 0{,}1 = 0{,}4.$$

Д Ќе разгледаме еден специјален случај на претходно дефинираната веројатност. Нека $\Omega = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ е дадено конечно множество елементарни настани и нека сите овие елементарни настани имаат еднаква веројатност да се појават, т.е. $p_i = p_j$, за $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Од условот $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$, следува дека $p_i = \frac{1}{n}$, за сите $i = 1, 2, \ldots, n$.

Оттука, ако $A = \{E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_k}\}$ е даден настан, за неговата веројатност се добива дека

$$P(A) = p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_k} = \underbrace{\frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \ldots + \frac{1}{n}}_{k \text{ пати}} = \frac{k}{n}.$$

Запомни!

Нека $\Omega = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ е дадено конечно множество елементарни настани и нека секој од нив има еднаква веројатност да се појави, т.е. $P(E_i) = 1/n,\ i = 1, 2, \ldots, n.$ Ако A е случаен настан во врска со дадениот експеримент во кој се содржат k елементарни настани, тогаш веројатноста на настанот A се определува со $P(A) = \frac{k}{n}$.

Ова е познатата ***класична дефиниција*** на веројатност.

- Оваа дефиниција може да се примени само ако елементарните настани имаат еднаква веројатност. Тоа најчесто се утврдува од условите на задачата. На пример, нека експериментот е фрлање на хомогена коцка за играње. Поради хомогеноста на коцката, нормално е да се очекува дека секоја страна на коцката може да се појави со еднаква веројатност, т.е. елементарните настани E_i имаат еднаква веројатност на појавување, $i = 1, 2, \ldots, 6$ и таа изнесува $p_i = P(E_i) = 1/6$.

- Да воочиме дека во класичната дефиниција на веројатност, n е вкупниот број на елементарни настани, т.е. бројот на елементи во Ω. Ќе означиме $n = |\Omega|$, т.е. n е бројот на елементи во Ω. Секој елементарен настан може да го толкуваме како ***„можен случај"*** во врска со даден експеримент. Од друга страна, k е бројот на елементарни настани кои се содржат во настанот A, т.е. $k = |A|$ и секој елементарен настан од A ќе го толкуваме како ***„поволен случај"*** за појавување на настанот A. Согласно со класичната дефиниција, веројатноста на даден случаен настан A е еднаква на количникот од бројот на поволни случаи за појавување на настанот A и бројот на сите можни случаи за дадениот експеримент, т.е.

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

2 Да се определи веројатноста при фрлање коцка да се добие парен број.

Решение. Ако експериментот е фрлање коцка, множеството елементарни настани $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, каде што E_i е настанот: се појави бројот i, $i = 1, 2, \ldots, 6$. Настанот A: падна парен број, може да се опише со $A = \{E_2, E_4, E_6\}$. Значи, бројот на поволни можности за појавување на настанот A е 3, а вкупниот број на можности при реализација на експериментот е 6. Оттука, според класичната дефиниција на веројатност, за веројатноста на настанот A се добива:

$$P(A) = \frac{3}{6} = 0,5.$$

3 Во една кутија има 5 бели и 4 црни топчиња. Од кутијата се извлекуваат две топчиња наеднаш. Да се определи веројатноста дека двете извлечени топчиња се бели.

Решение.

Го означуваме настанот A: извлечени се две бели топчиња. Бројот на можни исходи на експериментот, т.е. вкупниот број на елементарни настани е $C_9^2 = \binom{9}{2} = 36$, а поволниот број можности за да се појави настанот A се $C_5^2 = \binom{5}{2} = 10$. Значи, веројатноста за појавување на настанот A е

$$P(A) = \frac{10}{36} = 0,2778.$$

Задачи

1 Во една кутија има 10 топчиња од кои 5 бели, 3 црни и 2 зелени. Случајно се избираат три топчиња. Да се определи веројатноста дека сите три топчиња се бели.

2 Во еден клас има 40 ученици од кои 10 се одлични. Класот се дели на две групи со по 20 ученици. Да се определи веројатноста дека во двете групи ќе има по 5 одлични ученици.

3 Броевите 1,2,3,4,5 се напишани на 5 различни картички. Случајно се избираат една по една 3 картички и се поредуваат по редоследот на извлекувањето. Да се определи веројатноста да се добие непарен број.

4 Во една игра се фрлаат три коцки и добивка се остварува ако збирот на точките на трите коцки е 11 или 12. Да се определи веројатноста на следните настани:
A: ќе се добие збир 11;
B: ќе се добие збир 12.

5 Дадени се 5 отсечки со должини од 2,3,4,7,9 сантиметри. Да се определи веројатноста од три случајно избрани отсечки да може да се конструира триаголник.

6 Еден човек купил 7 светилки од 40 W, 5 светилки од 60 W и 3 светилки од 100 W. По пат скршил три светилки. Колкава е веројатноста дека скршените светилки имаат вкупно 180 W?

7 Десет книги случајно се поредуваат на една полица. Да се определи веројатноста на следните настани:
A: три одбрани книги секогаш ќе бидат една до друга;
B: k фиксни книги ќе бидат една до друга, $k = 2,3,\ldots,10$.

5 СВОЈСТВА НА ВЕРОЈАТНОСТА Е

Потсети се!

- Како гласи класичната дефиниција на веројатност?
- Во една кутија има 5 бели и 10 црни топчиња. Колку е веројатноста да се извлече бело, а колку веројатноста да се извлече црно топче?
- Кои услови треба да ги задоволува веројатноста на даден настан?

А Во продолжение ќе ги разгледаме основните својства на веројатноста.

Бидејќи секој настан A е подмножество од множеството елементарни настани Ω, следува дека $0 \le |A| \le |\Omega|$. Оттука, $0 \le \frac{|A|}{|\Omega|} \le 1$, т.е. $0 \le P(A) \le 1$.

- За веројатноста на сигурниот настан Ω се добива $P(\Omega) = \frac{|\Omega|}{|\Omega|} = 1$.
- Значи, веројатноста определена според класичната дефиниција на веројатност ги задоволува потребните услови 1 и 2 од претходната лекција.
- За веројатноста на невозможниот настан $\varnothing$ се добива $P(\varnothing) = \frac{|\varnothing|}{|\Omega|} = \frac{0}{|\Omega|} = 0$, бидејќи бројот на елементарни настани кои се содржат во невозможниот настан е 0.
- Нека $A = \{E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_k}\}$ и $B = \{E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_m}\}$ се два дисјунктни настани. Значи, $A \cap B = \varnothing$. Тогаш, збирот на овие два настани, $A + B = \{E_{i_1}, E_{i_2}, \ldots, E_{i_k}, E_{j_1}, E_{j_2}, \ldots, E_{j_m}\}$ содржи $k + m$ елементарни настани. За неговата веројатност се добива:

$$P(A+B) = \frac{k+m}{n} = \frac{k}{n} + \frac{m}{n} = P(A) + P(B).$$

Запомни!

За веројатноста P важат следните основни својства:

1. За секој настан A, $0 \le P(A) \le 1$;
2. $P(\Omega) = 1$; $P(\varnothing) = 0$;
3. Ако A и B се два дисјунктни настани, тогаш $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

1 Во една кутија има 4 бели, 5 црни, 3 црвени и 8 сини топчиња. Од кутијата се извлекува едно топче. Да се определи веројатноста дека извлеченото топче е бело или црвено.

Решение. Ги разгледуваме настаните: A: извлечено е бело топче; B: извлечено е црвено топче.
За веројатностите на овие настани се добива: $P(A)=\frac{4}{20}$, $P(B)=\frac{3}{20}$.

Настанот „извлечено е бело или црвено топче" е, всушност, настанот $A+B$. Според својството 3 имаме:

$$P\left(A+B\right)=P(A)+P(B)=\frac{4}{20}+\frac{3}{20}=\frac{7}{20}.$$

Својството 3 може да се обопшти на следниот начин:

4. Ако $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се дисјунктни настани, тогаш
$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+\mathrm{P}(A_n).$$

2 Од стандарден шпил со 52 карти се извлекува една карта. Да се определи веројатноста дека извлечената карта е помала или еднаква на 4.

Решение. Нека A_i: извлечена е карта со бројот i, $i=1,2,3,4$. Од секој број постојат по 4 карти, па

$$P(A_i)=\frac{4}{52}, i=1,2,3,4.$$

Настаните A_1, A_2, A_3, A_4 се дисјунктни, па според својството 4, за веројатноста на настанот $A_1+A_2+A_3+A_4$ се добива:
$$P(A_1+A_2+A_3+A_4)=\frac{4}{52}+\frac{4}{52}+\frac{4}{52}+\frac{4}{52}=\frac{16}{52}=\frac{4}{13}.$$

Ако настанот A го повлекува настанот B, т.е. $A\subseteq B$, тогаш $|A|\le|B|$, па $\frac{|A|}{|\Omega|}\le\frac{|B|}{|\Omega|}$, од каде што следува дека $P(A)\le P(B)$.

5. Ако $A\subseteq B$, тогаш $P(A)\le P(B)$.

Бидејќи $A+\overline{A}=\Omega$, според својствата 2 и 3 имаме дека $P(A)+P(\overline{A})=P\left(\Omega\right)=1$, па го добиваме следното својство:

6. За веројатноста на спротивниот настан $\overline{A}$ на даден настан A важи
$$P\left(\overline{A}\right)=1-P\left(A\right).$$

3 Од стандарден шпил со 52 карти се извлекува една карта. Да се определи веројатноста дека извлечената карта е поголема од 1.

Решение. Веројатноста на настанот A: извлечена е карта со бројот 1, е $P(A)=\frac{4}{52}$. Настанот „извлечена е карта поголема од 1" е, всушност, настанот $\overline{A}$, па според својството 6, добиваме дека $P(\overline{A})=1-P(A)=1-\frac{4}{52}=\frac{48}{52}=\frac{12}{13}$.

- Ако A и B се два настани во врска со еден експеримент, тогаш бројот на елементи во $A\cup B$ е еднаков на $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$. Оттука, следува точноста на следното тврдење:

7. Веројатноста на сумата на два произволни настани A и B во врска со даден експеримент е

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

4 Во едно претпријатие има 100 вработени. Од нив 40 зборуваат англиски јазик, 30 зборуваат француски, а 15 ги знаат и двата јазици. Случајно се избира едно лице. Да се определи веројатноста на следните настани:

B: лицето знае само француски јазик;

C: лицето знае само англиски јазик;

D: избраното лице знае барем еден јазик;

E: избраното лице не знае ниту еден јазик.

Решение. Ќе ги означиме следните настани: A: избраното лице зборува англиски и F: избраното лице зборува француски.

Од условите на задачата може да се определи дека

$$P(A)=\frac{40}{100}=0,4;\ P(F)=\frac{30}{100}=0,3 \text{ и } P(AF)=\frac{15}{100}=0,15.$$

За определување на веројатноста на настанот B, потребно е да се определи бројот на оние што знаат само француски. Тој број ќе се добие кога од бројот на оние кои знаат француски се одземе бројот на оние кои ги знаат двата јазици. Така, бројот на оние кои знаат само француски е $30-15=15$. Оттука, $P(B)=\frac{15}{100}=0,15$.

Аналогно, бројот на оние кои знаат само англиски е $40-15=25$, па $P(C)=\frac{25}{100}=0,25$.

Настанот D може да се претстави како $D=A\cup F$, па со користење на својството 7, се добива: $P(D)=P(A\cup F)=P(A)+P(F)-P(AF)=0,4+0,3-0,15=0,55$.

На крај, да воочиме дека $E=\overline{D}$, па со користење на својството 6, добиваме

$$P(E)=1-P(D)=1-0,55=0,45.$$

Задачи

1 Во една лотарија има 100 лозови нумерирани со броевите 1 до 100. Добитни се лозовите чии броеви се деливи и со 4 и со 5. Колкава е веројатноста на настаните:

A: при купување на еден лоз ќе се добие погодок;

B: при купување на два лоза ќе се добие барем еден погодок.

2 Нека $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$, а $P(AB) = 0{,}1$. Да се определи веројатноста на настаните $A \cup B$, $\overline{A}\,\overline{B}$ и $\overline{A\,B}$.

3 Да се определи веројатноста на настанот AB, ако
$P(A)=0{,}6$, $P(B)=0{,}3$, $P(A \cup B) = 0{,}7$.

4 Во едно претпријатие од 100 вработени, 40 знаат англиски, 30 знаат француски, 26 германски, 15 знаат англиски и француски, 10 англиски и германски, 5 француски и германски, а 3 ги знаат сите три јазика. Случајно се избира група од тројца претставници. Да се определи веројатноста на следните настани:

а) B: сите тројца знаат англиски;

б) C: сите тројца знаат англиски и француски;

в) D: сите тројца знаат барем два јазика;

г) E: сите тројца знаат барем еден јазик;

д) H: двајца знаат два странски јазика, а еден не знае ниеден;

ѓ) K: ниеден не знае англиски и француски, но сите знаат германски;

е) M: најмалку еден од нив ги знае сите три јазика.

6 УСЛОВНА ВЕРОЈАТНОСТ E

Потсети се!

- Нека множеството елементарни настани $\Omega = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ и $P(E_i) = 1/n$, за секој $i = 1, 2, \ldots, n$. Колкава е веројатноста на случаен настан A кој содржи k елементарни настани?

- Ако A и B се дисјунктни настани, тогаш $P(A + B) = P(A) + P(B)$.

A Често се случува веројатноста за појавување на еден настан да зависи од тоа дали ќе се појави или не друг настан. Да ги разгледаме следните настани:

A: ќе врне;

B: на небото има облаци.

Јасно е дека веројатноста за појава на настанот A зависи од тоа дали ќе се појави или не настанот B. Имено, информацијата дека се појавил настанот B ја зголемува веројатноста на појавување на настанот A. Затоа, се јавува потребата за дефинирање на таканаречена условна веројатност. ***Условната веројатност*** на настанот A при услов B е веројатност да се појави настанот A, ако се појавил настанот B. Оваа веројатност ќе ја означуваме со $P(A \mid B)$.

Мотивот за тоа како да се дефинира условната веројатност доаѓа од релативната фреквенција како мерка за можностите за настапување на одреден настан. Имено, нека се изведуваат n експерименти во кои може да се појават настаните A и B. Нека $n(B)$ е бројот на експерименти во кои се појавил настанот B, а $n(AB)$ е бројот на експерименти во кои се појавил настанот AB. Тогаш $\frac{n(AB)}{n(B)}$ е релативната честота на појавување на настанот A ако се појавил настанот B. Добиваме, $\frac{n(AB)}{n(B)} = \frac{\frac{n(AB)}{n}}{\frac{n(B)}{n}} \approx \frac{P(AB)}{P(B)}$,

каде што $P(AB)$ е веројатноста на производот на настаните A и B.

Запомни!

Условна веројатност на настанот A при услов B (ако $P(B) > 0$) се дефинира со:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)},$$

а ***условна веројатност*** на настанот B при услов A (ако $P(A) > 0$) со $P(B \mid A) = \frac{P(AB)}{P(A)}$.

1 Експериментот се состои во фрлање коцка. Да се определи веројатноста дека паднал парен број, ако е познато дека паднал број кој е помал или еднаков на 4.

Решение. Да ги означиме следните настани: A: се појавил парен број;
B: се појавил број помал или еднаков на 4. Во тој случај, настанот AB означува дека се појавил парен број кој е најмногу 4. Веројатноста на настаните B и AB е:

$$P(B) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}; \qquad P(AB) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

На крајот, веројатноста $P(A \mid B)$ според дефиницијата за условна веројатност, ќе биде:

$$P(A \mid B) = \frac{P(AB)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}.$$

Од формулите за условна веројатност може да се изрази веројатноста за производ на два настани.

Запомни!

$$P(AB)=P(A)P(B\mid A)=P(B)P(A\mid B).$$

2 Во една кутија има 4 бели и 3 црни топчиња. Од кутијата се извлекуваат две топчиња едно по едно, без враќање. Да се определи веројатноста дека двете извлечени топчиња се бели.

Решение. Да ги означиме настаните A_1: во првото извлекување е добиено бело топче, A_2: во второто извлекување е добиено бело топче. Ја бараме веројатноста на настанот A_1A_2. Според претходното својство имаме дека $P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)$.

Притоа, $P(A_1)=\frac{4}{7}$, а веројатноста $P(A_2\mid A_1)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$, бидејќи ако се извлече бело топче во

првото извлекување, во кутијата остануваат 6 топчиња од кои 3 се бели. Оттука,

$$P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)=\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{7}.$$

Д Формулата за веројатност на производ на два настани може да се обопшти за производ на n настани на следниов начин:

$$P(A_1A_2\ldots A_n)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_2A_1)\ldots P(A_n\mid A_{n-1}\ldots A_2A_1).$$

3 Во една кутија има 4 бели и 5 црни топчиња. Играчот извлекува по едно топче од кутијата, без враќање, сè додека не извлече бело топче. Да се определи веројатноста дека тој ќе извлекува точно 4 пати.

Воочи ја постапката.

Играчот ќе извлекува точно 4 пати, ако во првите 3 обиди извлече црно топче, а во четвртиот обид – бело. Ако A_i е настанот дека играчот ќе извлече бело топче во i-тото извлекување, $i=1,2,3,4$, тогаш ја бараме веројатноста на настанот $\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4$. Според претходното својство, имаме:

$$P(\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4)=P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)P(\bar{A}_3\mid\bar{A}_1\bar{A}_2)P(A_4\mid\bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3).$$

Притоа, $P(\bar{A}_1)=\frac{5}{9}$. Ако во првото извлекување е извлечено црно топче, тогаш во кутијата останале 4 црни од вкупно 8 топчиња, па $P(\bar{A}_2\mid\bar{A}_1)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$.

Ако во првите две извлекувања се добиени две црни топчиња, во кутијата ќе има 3 црни од вкупно 7 топчиња, па $P\left(\overline{A}_3 \mid \overline{A}_1\overline{A}_2\right)=\frac{3}{7}$. На крајот, по 3 извлечени црни топчиња, во кутијата има 2 црни и 4 бели топчиња, па $P\left(A_4 \mid \overline{A}_1\,\overline{A}_2\,\overline{A}_3\right)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

Така, $P\left(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4\right)=\frac{5}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{3}=\frac{5}{63}=0,0794.$

Задачи

1 Од една кутија во која се наоѓаат картички нумерирани со броевите 1 до 50 случајно се избира една. Да се определи веројатноста дека е извлечена картичка со непарен број, ако е познато дека бројот на картичката е делив со 3.

2 Од еден шпил со 52 карти случајно се извлекува една. Да се определи веројатноста дека е извлечен број помал од 5 ако е познато дека е извлечена карта со црвена боја.

3 Од еден шпил со 52 карти случајно се извлекуваат две карти. Да се определи веројатноста дека збирот на двете карти ќе биде 9 ако е познато дека и двете се поголеми од 3.

4 Од множеството $S=\{1,2,\ldots,20\}$ на случаен начин се избира еден број. Да се определи веројатноста дека извлечениот број е парен ако е познато дека е делив со 3.

5 Веројатноста еден стрелец да ја погоди целта во првото стрелање е $2/3$. Ако ја погоди целта во првиот обид, стекнува право на втор обид. Веројатноста да ја погоди целта во двата обиди е $0,5$. Да се определи веројатноста да ја погоди целта во вториот обид ако стекнал право за втор обид.

6 Еден претплатник ја заборавил последната цифра од телефонскиот број на својот пријател и затоа ја избирал случајно.
а) Да се определи веројатноста дека ќе ја погоди во третиот обид.
б) Да се определи истата таа веројатност ако знаел дека цифрата која ја заборавил е парна.

7 НЕЗАВИСНОСТ НА СЛУЧАЈНИ НАСТАНИ Е

Потсети се!

- Како се дефинира условната веројатност на настанот A при услов B, а како условната веројатност на настанот B при услов A?

А За настанот A велиме дека е ***независен*** од настанот B, ако

$$P(A|B)=P(A).$$

Тоа значи дека појавувањето на настанот B не ја менува веројатноста да се појави настанот A.

Ако настанот A е независен од настанот B, тогаш имаме

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A\,|\,B)P(B)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B),$$

а тоа значи дека и настанот B е независен од настанот A. Тогаш за A и B велиме дека се ***независни настани***. Во тој случај, $P(AB)=P(A|B)P(B)=P(A)P(B)$.

Обратно, ако последното равенство е исполнето, тогаш

$$P(B\,|\,A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B),$$

па A и B се независни настани. Со тоа е докажано следното тврдење:

Теорема. Настаните A и B се независни настани ако и само ако

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

- Во некои случаи независноста може да се согледа од самите услови на задачата. На пример, ако се фрлаат две коцки и се набљудуваат настаните
  A: на првата коцка падна шестка, B: на втората коцка падна петка,
  тогаш е јасно дека A и B се независни настани, бидејќи исходот на едната не влијае на исходот на другата коцка.
  Но, во некои случаи, неопходно е да се провери дали е исполнет условот за независност од последната теорема.

1 Од шпил со 52 карти се извлекува една карта. Да ги разгледаме следните настани:
A: извлечена е карта на која е бројот пет; B: извлечената карта е лист.
Провери дали настаните A и B се независни.

Решение.

$$P(A)=\frac{4}{52}=\frac{1}{13},\qquad P(B)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4},\qquad P(AB)=\frac{1}{52}=\frac{1}{13}\cdot\frac{1}{4}=P(A)\cdot P(B).$$

Значи, условот за независност е исполнет, па A и B се независни настани, иако интуитивно тоа не изгледа така, затоа што помеѓу картите со знак лист има петка и меѓу четирите петки има петка лист.

2 Двајца стрелци стрелаат во една цел независно еден од друг. Веројатноста првиот од нив да ја погоди целта е $0{,}7$, а вториот $0{,}9$. Да се определи веројатноста дека целта ќе биде погодена барем еднаш.

Решение. Ги означуваме настаните A: првиот стрелец ја погодил целта;
B: вториот стрелец ја погодил целта. Од условите на задачата е јасно дека A и B се независни настани бидејќи двајцата стрелци стрелаат независно еден од друг. Притоа, $P(A) = 0{,}7$, а $P(B) = 0{,}9$. Ја бараме веројатноста на настанот $A \cup B$. Добиваме:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = P(A) + P(B) - P(A)P(B) = 0{,}7 + 0{,}9 - 0{,}7 \cdot 0{,}9 = 0{,}97.$$

3 За настаните A и B од задачата 1 утврдивме дека се независни. Провери ја независноста на паровите настани A и $\overline{B}$; $\overline{A}$ и B; $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Решение. Од задачата 1 имаме дека $P(A) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}$ и $P(B) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4}$.

Настанот $A\overline{B}$ означува дека е извлечена карта со бројот 5 која не е лист. Постојат 3 поволни можности за овој настан, па $P(A\overline{B}) = \frac{3}{52} = \frac{1}{13} \cdot \frac{3}{4} = P(A)P(\overline{B})$.

Значи, A и $\overline{B}$ се независни настани. Соодветно, $\overline{A}B$ е настанот: извлечена е карта со знакот лист на која е број што е различен од 5. Има 12 поволни можности за овој настан. Оттука,

$P(\overline{A}B) = \frac{12}{52} = \frac{12}{13} \cdot \frac{1}{4} = P(\overline{A})P(B)$, т.е. и настаните $\overline{A}$ и B се независни.

На крајот, $\overline{A}\overline{B}$ е настанот: извлечена е карта која не е петка и не е лист. Поволни можности има 36, па $P(\overline{A}\overline{B}) = \frac{36}{52} = \frac{12}{13} \cdot \frac{3}{4} = P(\overline{A})P(\overline{B})$. Оттука, и $\overline{A}$ и $\overline{B}$ се независни настани.

Запомни!

Ако A и B се независни настани, тогаш независни се и паровите:

A и $\overline{B}$; $\overline{A}$ и B; $\overline{A}$ и $\overline{B}$. .

Поимот за независност на настани може да се обопшти за повеќе од два настани.

Запомни!

Настаните $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се ***независни во целина***, ако за произволен k $(2 \le k \le n)$ и за кој било избор на индекси $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ важи

$$P\left(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_k}\right) = P\left(A_{i_1}\right) P\left(A_{i_2}\right) \ldots P\left(A_{i_k}\right).$$

- Значи, ако $A_1, A_2, \ldots, A_n$ се независни настани, тогаш за веројатноста на нивниот производ се добива дека е производ на веројатностите на поединечните настани, т.е.

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) = P(A_1)P(A_2)\ldots P(A_n).$$

- Слично како и за два настани се покажува дека ако се независни настаните $A_1, A_2, A_3, \ldots, B_1, B_2, B_3, \ldots$ тогаш независни се и настаните $A_1, A_2, A_3, \ldots, \overline{B}_1, \overline{B}_2, \overline{B}_3, \ldots$

4 Во една кутија има 6 бели и 2 црни топчиња. Играчот извлекува едно топче, ја гледа неговата боја и го враќа во кутијата. Да се определи веројатноста дека бело топче ќе извлече за прв пат во четвртото извлекување.

Решение. Нека A_i означува дека во i-тото извлекување е добиено бело топче, $i = 1,2,\ldots$ Бидејќи по секое извлекување извлеченото топче се враќа назад во кутијата, исходот на секое извлекување не зависи од исходот на претходните извлекувања, т.е. настаните A_i, $i = 1,2,\ldots$, се независни. Притоа, $P(A_i) = 6/8 = 3/4$, а $P\left(\overline{A}_i\right) = 1/4$ за $i = 1, 2, 3, \ldots$ Оттука,

$$P\left(\overline{A}_1 \overline{A}_2 \overline{A}_3 A_4\right) = P\left(\overline{A}_1\right) P\left(\overline{A}_2\right) P\left(\overline{A}_3\right) P\left(A_4\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{3}{256}.$$

Задачи

1 Тројца стрелци нишанат во иста цел. Веројатностите да ја погодат целта се 0,6; 0,7 и 0,5, соодветно. Да се определи веројатноста дека целта ќе биде погодена барем еднаш.

2 Двајца стрелци нишанат во една цел. Веројатноста првиот од нив да ја погоди целта е 0,6, а вториот 0,7. Да се определи веројатноста на следните настани:
A: точно еден од стрелците ја погодил целта;
B: барем еден од стрелците ја погодил целта;
C: целта е двапати погодена;
D: ниеден од стрелците не ја погодил целта;
E: барем еден од стрелците не ја погодил целта.

3 Веројатноста првиот стрелец да ја погоди целта е p, а вториот 0,7. Познато е дека веројатноста точно еден стрелец да ја погоди целта е 0,38. Да се определи p.

4 Еден работник опслужува 4 машини. Веројатноста дека во еден ден ќе биде потребна поправка на секоја од машините е 0,1; 0,3; 0,2 и 0,1, соодветно. Да се определи веројатноста дека во текот на денот не треба да се интервенира на ниедна машина ако машините функционираат независно една од друга.

5 Се фрлаат две коцки за играње. Нека a е исходот на првата, а b е исходот на втората коцка. Ги означуваме следните настани:
A: a се дели со 2, а b со 3;
B: a се дели со 3, а b со 2;
C: a се дели со b; D: b се дели со a;
E: $a+b$ се дели со 2; F: $a+b$ се дели со 3.
Да се најдат:
а) сите парови настани кои се независни;
б) сите тројки настани кои се независни;
в) дали дадените настани се независни во целина?

8 ПОПУЛАЦИЈА, ОБЕЛЕЖЈЕ, ПРИМЕРОК Е, 3

А Математичката статистика е наука која во себе вклучува три типа на активности:

1. собирање на статистички податоци;
2. проучување на тие статистички податоци;
3. разработка на општи методи и правила за собирање на статистички податоци, нивно проучување, добивање на веродостојни резултати и решенија кои се научно засновани.

- При секое статистичко испитување се поаѓа од множеството еднородни објекти кои имаат една или повеќе заеднички карактеристики. На пример, на множеството од сите деца во Скопје на десетгодишна возраст може да се испитаат следните карактеристики: висина, тежина, успех на училиште, пол, националност, боја на очи и сл. На множеството, пак, грозје откупено во една винарска визба може да се испитуваат карактеристиките: тежина, процент на шеќер, процент на алкохол (ако почнало да ферментира) и сл.
- Во статистиката множеството еднородни објекти или резултати од некоја операција кои имаат една или повеќе заеднички карактеристики се нарекува ***популација***. Заедничката карактеристика се нарекува ***обележје***.
- Популацијата е основен поим во статистиката и тој не се дефинира. Популацијата се означува со Ω, бидејќи тоа е множеството од сите можни исходи во врска со еден експеримент (множество елементарни настани).
- Во наведените примери, за популацијата „деца во Скопје" обележја се: висината, тежината, успехот, полот, националноста, бојата на очите и сл., а за популацијата „грозје откупено во една винарска визба" обележја се: тежината, процентот на шеќер, процентот на алкохол итн.
- Може да се воочи дека вредноста што ја добива обележјето е променлива величина и таа не може со сигурност да се предвиди за конкретна единка од популацијата. Затоа, ќе сметаме дека секое обележје прима вредности со одредена веројатност.
- Обележјата може да бидат ***квалитативни*** или ***квантитативни***. Вредностите на квантитативното обележје се реални броеви. Квантитативни обележја се: висина, тежина, успех (кај популацијата ученици), или процент на шеќер, тежина и сл. (кај популацијата откупено грозје). Квалитативни обележја се полот националноста, бојата на очите и сл.
- Квантитативните обележја може да бидат ***дискретни*** и ***непрекинати***. Едно обележје е ***дискретно*** ако прима вредности од едно конечно или пребројливо множество. На пример, обележјето успех кај учениците е дискретно, бидејќи прима вредности $1, 2, 3, 4, 5$, т.е. прима вредности од конечното множество $\{1,2,3,4,5\}$. Едно обележје е ***непрекинато*** ако прима вредности од еден интервал или од целото множество реални броеви. Така, на пример, тежината на луѓето е непрекинато обележје.

Таа може да биде кој било број од интервалот [1,250], каде може да се смета дека 1 е минимална тежина на тукушто родено бебе, а 250 максималната тежина што може да ја достигне еден човек. Јасно е дека не секоја вредност од обележјето се јавува со одредена веројатност. Имено, многу е поверојатно дека тежината на случајно избран човек ќе биде 80 килограми, отколку дека таа ќе биде 235 килограми.

- При испитување на една популација за сите нејзини елементи се регистрираат вредностите на едно или повеќе обележја. Така добиеното множество броеви се нарекува ***множество од статистички податоци*** или ***статистичко множество***.

- Ако за елементите од полулацијата се регистрираат вредностите на едно обележје, тогаш се добива ***еднодимензионално статистичко множество***, а ако истовремено се регистрираат вредностите за повеќе обележја, тогаш се добива ***повеќедимензионално статистичко множество***.

- Во продолжение ќе разгледуваме еднодимензионални статистички множества.

Најчесто, при вршење на статистички испитувања невозможно е да се испитаат сите елементи од популацијата. Се случува испитувањата да траат долго, да бидат поврзани со трошење на големи финансиски средства или, уште повеќе, при испитување на одредени објекти да дојде до нивно уништување.

- Затоа, се избира дел од популацијата на кој се вршат сите испитувања и притоа треба да се донесат заклучоци кои ќе важат за целата популација со одредена веројатност.

Запомни!

Делот од популацијата на кој се вршат потребните испитувања се вика ***примерок***. Бројот на елементите во примерокот се вика ***обем на примерокот***.

- Заклучоците кои ќе се донесат врз основа на примерокот треба да важат за целата популација. За да се постигне тоа, потребно е примерокот да биде ***репрезентативен***, т.е. да претставува мини-модел на популацијата. За да се постигне тоа, потребно е секој елемент од популацијата да има еднакви шанси да влезе во примерокот. Значи, изборот на секој елемент треба да биде независен и случаен.

Запомни!

Примерокот кој се добива со низа независни и еднакви експерименти се нарекува ***прост случаен примерок***.

Отстапувањето од принципот на случаен избор може да доведе до сериозни грешки. Да го разгледаме следниот реален пример.

1 Американското списание „Литературен зборник” спровело анкета за испитување на јавното мислење околу претстојните претседателски избори во САД во 1936 година. Кандидати биле Ф. Рузвелт и А. Лендон.

За избор на примерок списанието го употребило телефонскиот именик. Биле избрани 4 милиони адреси и на сите им била испратена анкета со прашања околу кандидатите. Списанието потрошило големи финансиски средства за испраќање на картичките и обработка на податоците и објавило дека за претседател ќе биде избран А. Лендон. Резултатот од изборите потврдил дека прогнозата била погрешна. Каде било згрешено?

Одговор. Во овој случај, направени се две грешки. Прво, во тој период на владеење на економска криза, телефони имале само најбогатите. Второ, на анкетата одговориле најмногу деловните луѓе кои, всушност, имале навика да одговараат на писма, а сите тие го поддржувале Лендон.

- Од друга страна, двајца социолози, околу истото прашање, направиле анкета со 4 илјади испитаници и дошле до вистинскиот одговор. Причина за тоа е што тие не само што правилно го составиле примерокот, туку тргнале од тоа дека општеството е составено од различни социјални слоеви и најголем дел од припадниците на еден слој поддржуваат ист кандидат. Така, со помош на проучувањето по социјалните слоеви биле донесени заклучоци кои важат за целата држава.
- Денес слични вакви методи за донесување заклучоци се општоприфатени.

Задачи

1 Да ја разгледаме популацијата сијалици произведени во еден ден во една фабрика. Наведи кои од следните обележја се квалитативни, а кои квантитативни: јачина на сијалицата, боја, исправност, големина (во cm) и тежина.

2 Дадена е популацијата $\Omega = \{2, 3, 4, 5\}$. Кои се сите можни примероци со обем 2 кои може да бидат извлечени со враќање од таа популација?

3 Отпорноста на еден телевизор се мери со времето на непрекината работа на еден негов дел (на пример, на екранот). За да се оцени отпорноста на телевизорите произведени во една фабрика се избираат 100 телевизори и се мери времето на непрекината работа на нивните екрани.

а) Која е популацијата што се разгледува?

б) Кој е разгледуваниот примерок?

в) Дали обележјето што се разгледува е квалитативно или квантитативно?

9 ЕЛЕМЕНТАРНА ОБРАБОТКА НА ПОДАТОЦИ СО МАЛ БРОЈ ВРЕДНОСТИ НА ОБЕЛЕЖЈЕТО

Е, 3

Потсети се!

- Во статистиката множеството еднородни објекти или резултати од некоја операција кои имаат една или повеќе заеднички карактеристики се нарекува ***популација***. Заедничката карактеристика се нарекува ***обележје***.

- Како се вика делот од популацијата на кој се вршат потребните испитувања?
- Како се вика бројот на елементите во примерокот?

А 1 Нека се разгледува обележјето „оценка на учениците по математика”. Јасно, ова обележје може да прими конечно многу вредности, т.е. вредности од множеството $\{1,2,3,4,5\}$ станува збор за дискретно обележје кое прима само 5 вредности. За да се утврди успехот на наставата по математика во едно одделение од $n=20$ ученици, ќе ги разгледаме нивните оценки по математика на крајот од учебната година. Со преглед во дневникот добиен е следниот примерок:

$$5, 4, 5, 3, 2, 1, 2, 4, 5, 5, 5, 4, 4, 3, 2, 1, 2, 3, 5, 2.$$

- Може да се воочи дека единица добиле двајца ученици, т.е. елементот 1 се појавува во примерокот точно 2 пати, двојка добиле 5 ученици, т.е. бројот 2 се појавува 5 пати, 3 се појавува 3 пати, 4 се појавува 4 пати и бројот 5 се појавува 6 пати.

Запомни!

Бројот на појавувања на елементот a во примерокот се нарекува ***фреквенција*** (***честота***) на појавување на елементот a и се бележи со n_a.

Ако n е обемот на примерокот, тогаш бројот $p_a = \frac{n_a}{n}$ се нарекува ***релативна фреквенција*** (***релативна честота***) на појавување на елементот a.

- Фреквенцијата n_a го дава бројот на појавувања на елементот a во примерокот. Бројот p_a покажува колкав дел од податоците се еднакви на елементот a, односно бројот $p_a \cdot 100\%$ покажува колкав процент од податоците се еднакви на елементот a.
- Вообичаено е фреквенциите и релативните фреквенции да се претстават во табела која се нарекува ***табела на фреквенции*** или ***табела на честоти***.
- За примерокот наведен претходно, табелата на фреквенции го има следниот облик:

Вредност на обележјето	Фреквенција	Релативна фреквенција
1	2	$\frac{2}{20} = 0,1$
2	5	$\frac{5}{20} = 0,25$
3	3	$\frac{3}{20} = 0,15$
4	4	$\frac{4}{20} = 0,2$
5	6	$\frac{6}{20} = 0,3$

Фреквенцијата и релативната фреквенција ги имаат следните својства.

Запомни!

Нека обележјето прима r вредности и за тоа обележје е даден примерок со n елементи. Тогаш:

$i)$ $n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n;$

$ii)$ $0 \le p_i \le 1, \quad i = 1,2,\ldots,r;$

$iii)$ $p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1.$

- Тврдењето $i)$ е јасно, збирот на сите фреквенции мора да биде еднаков на обемот n на примерокот.
- За да ја утврдиме точноста на $ii)$, да воочиме дека $0 \le n_i \le n$, па $0 \le \frac{n_i}{n} \le 1$, т.е. $0 \le p_i \le 1$.

- Имајќи предвид дека $p_i = \frac{n_i}{n}$, добиваме:

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_r = \frac{n_1}{n} + \frac{n_2}{n} + \ldots + \frac{n_r}{n} = \frac{n_1 + n_2 + \ldots + n_r}{n} = \frac{n}{n} = 1,$$

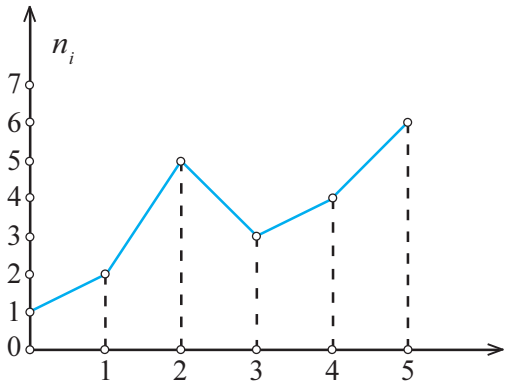
со што е покажана точноста на iii) .

- Врз основа на табелите на фреквенции може да се направат разни графички прикази на податоците од примерокот.

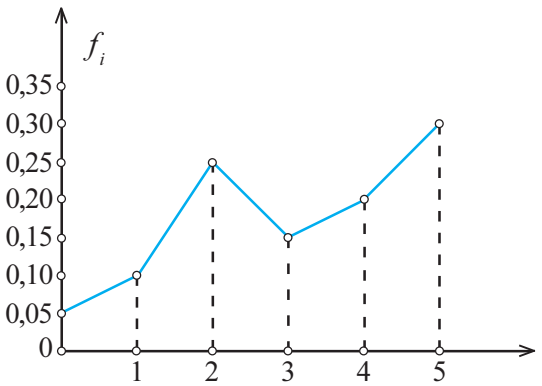
Запомни!

Ако на x-оската во правоаголен координатен систем се нанесат вредностите на обележјето, а на y-оската соодветните фреквенции и добиените точки се поврзат со искршена линија се добива ***полигон на фреквенции***.
Ако на x-оската во правоаголен координатен систем се нанесат вредностите на обележјето, а на y-оската соодветните релативни фреквенции и добиените точки се поврзат со искршена линија се добива ***полигон на релативни фреквенции***.

- За дадениот примерок, полигонот на фреквенции и полигонот на релативни фреквенции го имаат следниот облик:



Полигон на фреквенции



Полигон на релативни фреквенции

- Може да се воочи дека обликот на искршената линија е ист како кај полигонот на честоти, така и кај полигонот на релативни честоти. Различно е само скалирањето на y-оската. Кај полигонот на честоти, y-координатата на секоја точка е природен број, а кај полигонот на релативни честоти y-координатата на секоја точка е број помеѓу 0 и 1.

- Од цртежите може да се воочи дека во класот најголем е бројот на учениците кои имаат петка, потоа доаѓа бројот на учениците кои имаат двојка, а најмал е бројот на учениците кои имаат единица.

- Постапката на изготвување на таблица на фреквенции и полигони на фреквенција и релативна фреквенција се нарекува ***елементарна статистичка обработка на податоци***.

2 Бројот на автомобилски несреќи на еден автопат е земен како обележје. Случајно се избрани 30 дена во годината и утврден е бројот на несреќи во тие денови. Врз основа на тоа добиен е следниот примерок:

1,2,5,3,0,0,1,1,2,5,7,1,1,4,4,7,0,1,3,2,6,5,2,8,0,0,1,1,2,0.

За дадениот примерок да се направи елементарна статистичка обработка.

Задачи

За дадените примероци на обележјата дадени подолу да се направи елементарна статистичка обработка.

1 Обележје: „Број добиен при фрлање коцка". изведени се 50 фрлања.
1, 3, 1, 6, 2, 6, 4, 6, 3, 3, 4, 3, 3, 1, 4, 1, 4, 5, 3, 5, 4, 1, 1, 1, 5, 4, 3, 2, 1, 4, 6, 4, 3, 2, 2, 2, 3, 6, 1, 2, 2, 3, 5, 3, 1, 3, 6, 2, 4, 1.

2 Обележје: „Број на дождливи денови во месец мај". Набљудувањата се вршени во месец мај во тек на 30 години.
21, 16, 18, 17, 22, 20, 17, 19, 19, 20, 16, 20, 20, 22, 21, 16, 17, 20, 21, 22, 15, 19, 16, 20, 18, 18, 19, 20, 17, 16.

3 Обележје: „Број на расипани машини во еден погон во тек на еден ден". Набљудувањата се вршени во период од 40 денови.
2, 1, 0, 1, 3, 1, 1, 0, 2, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 0, 0, 2, 1, 2, 1, 0, 0, 2, 1, 1, 1, 0, 1.

4 Обележје: „Број на телефонски повици преку одредена централа во тек на денот од 12 во 13 часот". Набљудувањата се вршени во период од 30 денови.
24, 25, 29, 28, 27, 27, 28, 27, 30, 25, 25, 26, 26, 29, 28, 25, 30, 29, 28, 28, 24, 28, 29, 30, 30, 25, 26, 26, 27, 25.

10 ЕЛЕМЕНТАРНА СТАТИСТИЧКА ОБРАБОТКА СО ГРУПИРАЊЕ НА ПОДАТОЦИТЕ ВО ИНТЕРВАЛИ

Е, 3

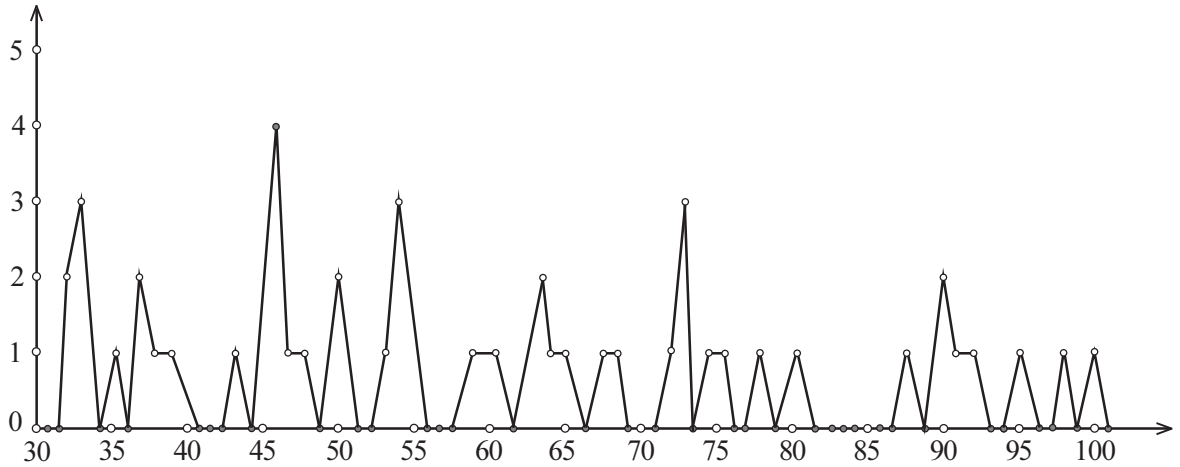
Потсети се!

- Бројот на појавувања на елементот a во примерокот се нарекува фреквенција (честота) на појавување на елементот a и се бележи со n_a.
- Табелата во која се претставени фреквенциите и релативните фреквенции на појавување на вредностите од обележјето во примерокот се нарекува табела на фреквенција.
- Вредностите од табелата на фреквенции може да се претстават со полигон на фреквенции или полигон на релативни фреквенции.

А 1 Нека се разгледува обележјето „поени кои ученикот ги освоил на тест по информатика”. Тестот е направен така што ученикот може да освои $1,2,...,100$ поени. Значи, ова обележје може да прими 100 вредности, т.е. може да ја прими која било вредност од множеството $\{1,2,...,100\}$. За да се утврди успехот на наставата по информатика во втори клас во едно средно училиште, избрани се 50 ученици и се разгледуваат нивните освоени поени на тестот по информатика. Добиен е следниот примерок:

91	94	54	32	45	47	63	68	80	53
54	37	87	35	33	97	75	39	67	89
64	46	74	63	90	45	37	33	32	72
78	65	45	54	58	59	43	50	72	49
71	45	62	89	99	72	38	33	60	50

- Ако се утврди фреквенција на секоја од вредностите што се јавуваат во овој примерок и се нацрта полигон на фреквенции ќе се добие линијата претставена на следниот цртеж. Од овој график не може да се утврди никаква законитост за појавување на вредностите и нивните фреквенции.



- Во вакви случаи, кога бројот на вредностите коишто ги прима обележјето е многу поголем од бројот на сите податоци, тогаш се пристапува кон групирање на податоците во интервали.
- Бројот на интервали во кои ќе бидат групирани податоците зависи од обемот на примерокот, од интервалот во кој се наоѓаат податоците, од видот на обележјето и сл. Одговорот на прашањето:

  „Колкав треба да биде бројот на интервали r во кој ќе бидат групирани податоците”,
  не е еднозначен. При даден обем n на примерокот, тој број може да биде определен по една од овие формули:

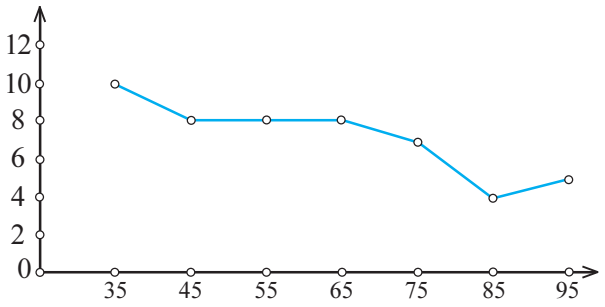
$$r \approx \sqrt{n}; \qquad r \approx 1+3,211\cdot\log n; \qquad r \approx 5\cdot\log n.$$

  Најчесто ќе го избираме r според првата формула.
- Интервалите треба да се со иста должина, бидејќи во спротивно, тешко ќе може да се пресметаат бројните карактеристики на ова обележје.

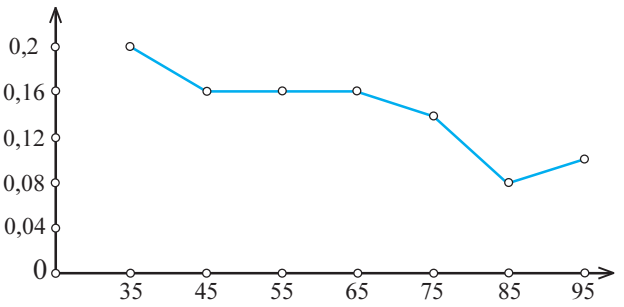
- Долната граница на првиот интервал и горната граница на последниот интервал се избираат така што да не се совпаѓаат со најмалата, т.е. со најголемата вредност на овој примерок, освен во случај кога најмалата и најголемата вредност се еднакви.
- Ако некои од податоците се совпаѓаат со границите на внатрешните интервали, тогаш половина од податоците се додаваат на првиот, а другата половина на вториот интервал или, пак, сите вредности се додаваат во едниот, т.е. другиот интервал. Но, начинот што ќе се одбере за сместување на граничните податоци во некој од интервалите треба да се примени на сите интервали.
- Примерокот што го разгледуваме има обем $n = 50$, па бројот на интервали во кои ќе ги поделиме податоците ќе биде 7, бидејќи $7 \approx \sqrt{50}$.
- Најмалата вредност во примерокот е 32, а најголемата 99. Ќе избереме долната граница на првиот интервал да биде 30, а горната граница на последниот (седмиот) интервал да биде 100. Исто така, избираме ако некој податок се совпаѓа со некоја од внатрешните граници да се додаде во интервалот што следува по него. Тоа значи дека ќе ги разгледуваме следните интервали: $[30,40)$, $[40, 50)$, $[50,60)$, $[60,70)$, $[70,80)$, $[80,90)$, $[90,100)$.
- Да напоменеме дека долната граница на првиот интервал и горната граница на вториот интервал може да се изберат на повеќе начини. Битно е само сите вредности од примерокот да бидат помеѓу тие две граници. Најчесто ги избираме така да можеме полесно да работиме со интервалите.
- Сега може да се пресмета фреквенција и релативна фреквенција на секој од интервалите. Фреквенција на секој интервал е бројот на податоци од примерокот кои се содржат во тој интервал, а релативната фреквенција се добива кога фреквенцијата на секој интервал ќе се подели со обемот на примерокот n.

Интервал	Фреквенција	Релативна фреквенција
$[30,40)$	10	0,2
$[40,50)$	8	0,16
$[50,60)$	8	0,16
$[60,70)$	8	0,16
$[70,80)$	7	0,14
$[80,90)$	4	0,08
$[90,100)$	5	0,1

Добиените вредности може да се претстават во полигон на фреквенции и полигон на релативни фреквенции на тој начин што за претставник на секој интервал се зема неговата средина. Полигоните на фреквенции и релативни фреквенции го имаат следниот облик:

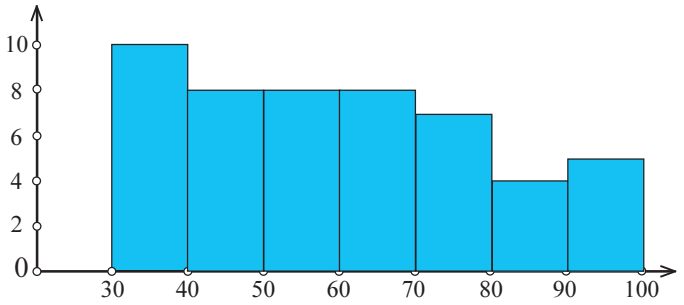


Полигон на честоти



Полигон на релативни честоти

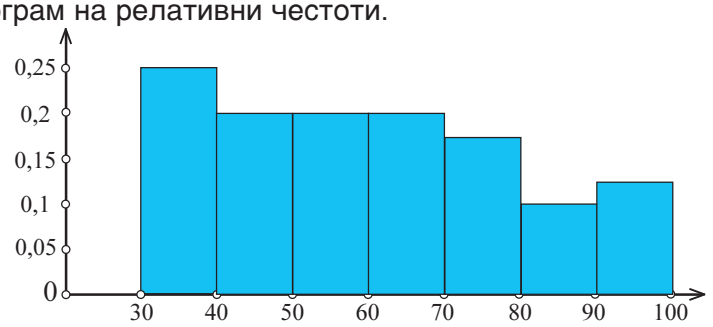
- Но, во овој случај, кога се работи за групирање на податоците во интервали, вообичаено е фреквенциите да не се претставуваат со полигони, туку со таканаречени ***хистограми на честоти***. Имено, над секој интервал $[a,b)$ се издига правоаголник со висина еднаква на бројот на податоци од примерокот кои се наоѓаат во овој интервал.



Хистограм на честоти

Така, во интервалот $[30,40)$ има 10 податоци, па над овој интервал се конструира правоаголник со висина 10, над интервалот $[40,50)$, правоаголник со висина 8, бидејќи во овој интервал има 8 податоци, итн. Хистограмот на честоти е претставен на цртежот погоре.

- Слично, може да се претстави и хистограм на релативни честоти.
- Од хистограмите на честоти и релативни честоти може да се воочи дека најголем број ученици на тестот добиле поени помеѓу 30 и 40, потоа еднаков е бројот на ученици што добиле поени во некој од интервалите $[40,50)$, $[50,60)$ и $[60,70)$ итн.



Хистограм на релативни честоти

Д 2 Должината на времето (во месеци) помеѓу лекувањето од грип и повторното разболување од оваа болест е регистрирано кај 40 пациенти и добиени се следните податоци :

1,2	0,4	3,2	2,8	10,4	11,2	9,3	0,6	18,5	4,3
5,2	0,5	11,7	3,6	20,5	7,8	2,0	3,7	9,7	4,9
9,5	14,7	20,1	5,9	1,4	0,7	8,3	0,9	12,8	3,9
13,6	5,0	6,1	3,3	0,1	12,2	7,1	3,8	15,6	25,5

Да се направи елементарна статистичка обработка.

Решение. Во овој случај е јасно дека станува збор за непрекинато обележје. Исто така, може да се воочи дека секоја вредност се јавува во примерокот еднаш, т.е. фреквенцијата на секоја вредност од овој примерок е 1.

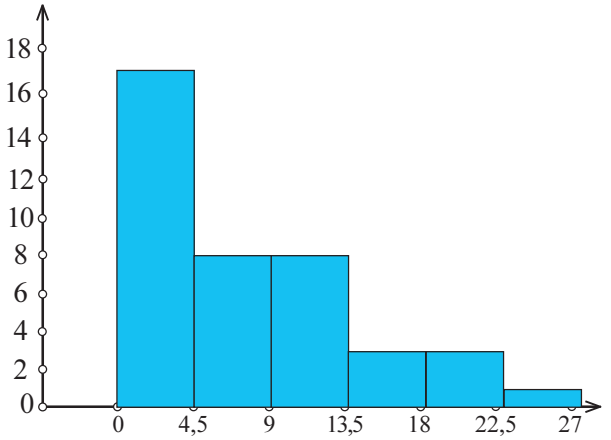
Најмала вредност во примерокот е $0{,}1$, а најголема $25{,}5$.

Ако се нацрта полигон на фреквенции ќе се добие искршена линија на која y-координатата ќе биде 1, само за оние 40 вредности што се јавуваат во примерокот, а за сите други вредности, y-координатата ќе биде 0. Од ваквиот полигон не може да се изведат никакви заклучоци. Затоа и во ваков случај, исто како и во претходниот случај, за да се изведат некакви заклучоци потребно е да се групираат податоците во интервали. Бројот на податоците е 40, па податоците може да се групираат во $6 \approx \sqrt{40}$ интервали.

Нека долната граница на првиот интервал е 0, а горната граница на последниот интервал е 27. Тогаш должината на интервалите ќе биде 4,5. Честотите и релативните честоти на секој од интервалите се пресметуваат исто како и претходно и тие се претставени во следната табела на фреквенции.

Интервал	Фреквенција	Релативна Фреквенција
$[0; 4,5)$	10	0,2
$[4,5; 9)$	8	0,16
$[9; 13,5)$	8	0,16
$[13,5; 18)$	8	0,16
$[18; 22,5)$	7	0,14
$[22,5; 27)$	4	0,08

- Хистограмот на честоти е претставен на следниот цртеж.



- Од хистограмот на честоти се гледа дека најголем е бројот на пациентите кај кои болеста се појавила повторно помеѓу 0 и 4,5 месеци. Потоа, како се зголемува бројот на месеците, така се намалува бројот на пациентите кај кои болеста се појавила повторно.

Задачи

Да се направи елементарна статистичка обработка за примероците на обележјата дадени подолу .

1 Обележје: „Цврстина на челична жица (во MPa)". Изведени се мерења на 50 парчиња жица.

285, 341, 290, 304, 318, 283, 286, 300, 315, 326, 312, 322, 307, 289, 295, 292, 306, 310, 300, 291, 299, 307, 310, 331, 327, 319, 298, 288, 281, 303, 305, 331, 333, 340, 309, 319, 286, 297, 290, 310, 314, 323, 317, 329, 287, 300, 305, 315, 311, 289.

2 Обележје: „Годишна количина на врнежи (во литри/m^2)". Дадена е серија во годишна количина на врнежи во 40 последователни години.

634, 637, 629, 545, 556, 780, 658, 547, 639, 790, 810, 514, 593, 610, 619, 789, 703, 742, 628, 599, 633, 710, 756, 724, 538, 643, 640, 712, 800, 725, 591, 609, 633, 701, 753, 802, 639, 622, 781, 739.

3 Обележје: „Време потрошено за поправка на една машина (во часови)". Даден е примерок со обем 30.

0,4	0,5	3,5	3,4	4,2	2,7	5,5	3,2	2,9	3,3
2,4	4,6	4,4	0,3	0,1	3,2	4,3	6,3	3,2	2,2
3,2	3,6	4,2	0,5	1,3	1,7	1,0	2,1	2,9	2,6

4 Обележје: „Масата на новороденчиња (во килограми)". Даден е примерок од 40 новороденчиња.

2,3	3,4	4,2	3,5	3,1	2,9	2,4	3,2	3,4	4,2
3,4	3,9	4,0	3,8	3,7	3,2	2,7	2,9	3,0	3,8
2,4	2,7	2,8	3,4	3,2	3,1	3,2	4,1	3,6	3,9
3,8	4,1	2,8	2,6	3,2	3,9	3,5	4,3	4,9	3,5

11 АРИТМЕТИЧКА СРЕДИНА

Е, 3

Потсети се!

- Што е фреквенција, а што релативна фреквенција на појавување на елементот a во еден примерок и како се означуваат тие?
- Како се вика табелата во која се претставуваат фреквенциите и релативните фреквенции?

А Со претставување на податоците во табели на фреквенции, со полигони и хистограми, може да се добие првична слика за распределбата (простирањето) на податоците. Меѓутоа, да се добие поточна претстава за простирањето на податоците од еден примерок, потребно е да се пресметаат одредени нумерички мерки кои ќе ја одредат локацијата на податоците од примерокот (параметри на локација) и мерки кои ќе го одредат отстапувањето на податоците од параметрите на локацијата.

Еден од најзначајните параметри на локацијата е аритметичката средина.

Запомни!

Аритметичка средина или ***просечна вредност*** на еден примерок со обем n е збирот на елементите од примерокот поделен со n, т.е. ако $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е даден примерок со обем n, тогаш аритметичката средина на тој примерок е

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

1 Заради испитување на временските прилики во Охрид избрани се случајно 20 години и врз основа на метеоролошкиот извештај, добиен е бројот на сончеви денови во текот на избраните години:

190	169	189	200	201	188	184	197	174	185
192	195	180	199	178	165	187	164	162	194

Решение. Согласно формулата за аритметичка средина, наоѓаме:

$$\bar{x}_{20} = \frac{1}{20}(190+169+189+200+201+188+184+197+174+185+$$
$$+192+195+180+199+178+165+187+164+162+194)$$
$$=184,65.$$

Воочи дека податоците од примерокот се целобројни, а аритметичката средина изнесува 184,65. Значи, аритметичката средина, во општ случај, не мора да е вредност која може да ја прими разгледуваното обележје. Но, аритметичката средина може да се третира како број околу кој ќе се натрупаат вредностите на примерокот земен за дадено обележје.

Ако примерокот е зададен со табела на фреквенции, тогаш формулата за аритметичка средина може да се зададе во следниот облик.

Потсети се!

Ако, $x_1, x_2, \ldots, x_k$ се вредностите од примерок со обем n и ако во примерокот вредноста x_i се јавува n_i пати $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$, тогаш аритметичката средина на тој примерок се определува со формулата:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}(n_1x_1 + n_2x_2 + \ldots + n_kx_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_ix_i.$$

2 Да се определи средниот успех по математика на учениците од II[5] година во едно училиште ако во класот има 25 ученици и нивните оценки се дадени во следната табела на фреквенции.

x_i	n_i
1	2
2	3
3	4
4	6
5	10

Решение. Средниот успех на учениците по математика е, всушност, аритметичка средина на дадените податоци.

- Определувањето на аритметичката средина, според горната формула, може да се направи во самата табела на фреквенции.
- Имено, може да се додаде колона во која ќе се пресмета n_ix_i, потоа ќе се определи збирот на елементите во таа колона и тој збир ќе се подели со обемот на примерокот n.

x_i	n_i	$n_1 \cdot x_i$
1	2	2
2	3	6
3	4	12
4	6	24
5	10	50
Σ	25	94

Така, аритметичката средина е

$$\overline{x}_{25} = \frac{94}{25} = 3,76.$$

В Во некои случаи, примерокот може да биде зададен не со сите вредности кои припаѓаат во него, туку со соодветната табела на фреквенции во која вредностите се групирани во интервали. Во тој случај, аритметичката среднина на примерокот не може точно да се пресмета, но за да се добие одредена претстава за локацијата на податоците може вредноста на аритметичката средина да се оцени приближно.

- Приближната вредност на аритметичката средина се добива кога за претставник на секој интервал се зема неговата средина.

Запомни!

Ако вредностите на примерокот се групирани во k интервали и ако $\tilde{x}_i$ е средината на i-тиот интервал, $i = 1,2,...,k$, а фреквенцијата на тој интервал е n_i тогаш приближната вредност $\tilde{x}_n$ на аритметичката средина се определува со формулата:

$$\tilde{x}_n = \frac{1}{n}(n_1\tilde{x}_1 + n_2\tilde{x}_2 + \ldots + n_k\tilde{x}_k) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\tilde{x}_i.$$

3 Во едно претпријатие, распределбата на платите за месец јануари била следнава (изразена во илјади денари):

Плата	7 до 8	8 до 9	9 до 10	10 до 11	11 до 12	12 до 13
Број на вработени	1	5	9	18	12	5

Да се определи приближно просечната плата за месец јануари.

Решение. Пресметките повторно може да се направат во табела.

Интервал	$\tilde{x}_i$	n_i	$n_1 \cdot \tilde{x}_i$
$[7,8)$	7,5	1	7,5
$[8,9)$	8,5	5	42,5
$[9,10)$	9,5	9	85,5
$[10,11)$	10,5	18	189
$[11,12)$	11,5	12	138
$[12,13)$	12,5	5	62,5
	Σ	50	525

Според претходната формула,

$$\tilde{x}_{50} = \frac{525}{50} = 10,5.$$

Значи, просечната плата за месец јануари изнесува приближно 10 500 денари.

Задачи

1 Регистриран е бројот на возила кои поминале по еден регионален пат во тек на 21 ден. Добиени се следните вредности:

178	195	237	243	152	103	304
245	287	156	146	190	255	232
145	176	123	255	204	170	198

Да се определи просечниот број на возила кои поминувале по тој пат во текот на еден ден.

2 Мерено е времетраењето на 20 светилки произведени во една фабрика. Добиени се следните резултати (во денови):

1567	1876	1987	2032	1987
2155	1987	1965	1643	1865
2045	2134	1589	1890	2134
1678	1970	1865	1853	1890

Да се определи просечното времетраење на една светилка.

3 Измерена е тежината на 30 новороденчиња родени во еден ден во една болница.

2,3	3,4	4,2	3,5	3,1	2,9	2,4	3,2	3,4	4,2
3,4	3,9	4,0	3,8	3,7	3,2	2,7	2,9	3,0	3,8
2,4	2,7	2,8	3,4	3,2	3,1	3,2	4,1	3,6	3,9

Колку изнесува просечната маса на новороденчињата?

4 Врз основа на пописот на населението добиени се податоци за бројот на жителите во 50 села во една област:

Број на жители	500 – 1000	1000 – 1500	1500 – 2000	2000 – 2500	2500 – 3000
Број на села	1	4	32	10	3

Да се определи приближно просечниот број на жители по село во таа област.

5 Мерена е висината на момчињата и девојчињата во еден клас. Добиени се следните податоци:

момчиња: 168 176 180 165 160 178 179 169 186 176

девојчиња: 156 168 170 154 175 180 164 159 185 148 159 171

Да се определи просечната висина на момчињата и девојчињата, како и просечната висина на целиот клас.

12 МЕДИЈАНА И МОДА Е, 3

Потсети се!

- Аритметичката средина е еден од параметрите на локација.
- Ако $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е даден примерок со обем n, како се определува неговата аритметичка средина?

А 1 Даден е следниот примерок:

24	31	29	28	29
16	31	26	23	

- Ако податоците од овој примерок се подредат во неопаѓачки редослед, се добива:

16 23 24 26 **28** 29 29 31 31

- Може да се воочи дека бројот 28 се наоѓа во средината на примерокот, т.е. точно половина од податоците се помали или еднакви, а точно половина се поголеми или еднакви на таа вредност.

- Во овој случај, бројот на елементите во примерокот е непарен.

- Што ќе се случи ако бројот на елементите во примерокот е парен?

2 Даден е примерокот:

14 34 25 28 39 11 41 26 23 50

- Со подредување на податоците во неопаѓачки редослед се добива:

11 14 23 25 **26** **28** 34 39 41 50

- Во овој случај, бројот на елементите е парен и во средината на примерокот се наоѓаат два броја 26 и 28.

Запомни!

Нека вредностите на примерокот се подредат во неопаѓачки редослед $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(n)}$, каде $x_{(i)}$ е елементот кој стои на i-та позиција во подреденото примерок. Вредноста Me на елементот кој се наоѓа точно на средината од примерокот, така што половина од податоците во примерокот се помали или еднакви, а другата половина се поголеми или еднакви од таа вредност се нарекува ***медијана***.

Ако обемот на примерокот е непарен, $n = 2k + 1$, тогаш постои точно еден број кој се наоѓа во средината на примерокот, па тој е медијана, т.е. $Me = x_{(k+1)}$.

Ако обемот на примерокот е парен, $n = 2k$, тогаш постојат два броја кои се наоѓаат во средината на примерокот. Во тој случај, медијаната е нивната аритметичка средина, т.е. $Me = \dfrac{x_{(k)} + x_{(k+1)}}{2}$.

Да воочиме дека во задачата 1, $Me = 28$, а во задачата 2, $Me = 27 = (26 + 28):2$.

3 Кој елемент во следниот примерок има најголема фреквенција, т.е. се јавува најчесто?

24 31 29 28 29 16 30 26 23

Одговор. Тоа е елементот 29. Тој елемент се јавува двапати, а сите други елементи само по еднаш.

Запомни!

Мода Mo на даден примерок е онаа вредност на примерокот која има најголема фреквенција.

- Еден примерок може да нема мода, да има една мода или да има повеќе моди. На пример,

1,2,2,2,3,3,3,3,3,4,5,6	има мода 3
1,2,4,5,7,9,10	нема мода
1,2,2,2,3,3,3,4,4,4,5,6,7	има три моди 2, 3 и 4

4 Се разгледува обележјето „број на телефонски разговори преку една централа за еден час". Случајно се избрани 25 часа во текот на една недела и броевите на извршените разговори во текот на тие 25 часа се следните:

24	35	29	28	29	16	31	26	23	33
25	24	32	23	16	17	23	27	27	26
24	22	23	13	30					

Да се определи медијана и мода на овој примерок.

Решение. Табелата на фреквенции за дадениот примерок го има обликот:

x_i	13	16	17	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	35
n_i	1	2	1	1	4	3	1	2	2	1	2	1	1	1	1	1

Од табелата може да се воочи дека најголема фреквенција има вредноста 23, па $Mo = 23$.

Примерокот има обем $25 = 2 \cdot 12 + 1$, значи, медијана е $x_{(12+1)} = x_{(13)} = 25$.

Задачи

За дадените примероци на обележјата дадени подолу да се определи медијана и мода (ако постои).

1 Обележје: „Број добиен при фрлање коцка". изведени се 50 фрлања.

3, 3, 4, 6, 2, 6, 4, 6, 3, 3, 4, 3, 3, 1, 4, 1, 4, 5, 3, 5, 4, 1, 1, 1, 4, 4, 3, 2, 1, 4, 6, 4, 3, 2, 2, 2, 3, 6, 1, 2, 2, 3, 5, 3, 2, 3, 6, 2, 4, 1.

2 Обележје: „Број на расипани машини во еден погон во текот на еден ден". Набљудувањата се вршени во период од 40 денови.

2, 1, 0, 1, 3, 1, 1, 0, 2, 1, 2, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 0, 0, 2, 1, 2, 1, 0, 0, 2, 1, 1, 1, 0, 1.

3 Обележје: „Број на сончеви денови во месец мај". Набљудувањата се вршени во тек на 30 години.

25, 10, 18, 13, 22, 20, 17, 19, 19, 20, 16, 20, 20, 22, 23, 16, 17, 20, 21, 22, 15, 20, 16, 20, 18, 24, 19, 20, 17, 15.

4 Обележје: „Број на отсутни на час по математика". Набљудувањата се вршени во период од 30 денови.

0, 1, 2, 4, 3, 1, 0, 0, 0, 3, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 2, 2, 3, 4, 0, 0, 0, 1, 4, 2, 0, 1

13 МЕРКИ ЗА РАСЕЈУВАЊЕ НА ПОДАТОЦИТЕ ОД ПРИМЕРОКОТ

E

Пошсети се!

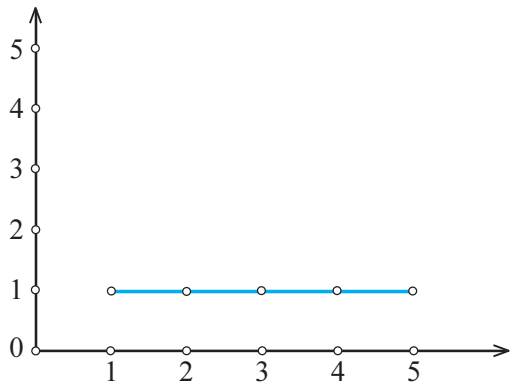
- Аритметичката средина и медијаната се два од параметрите на локација.
- Како се определуваат тие?

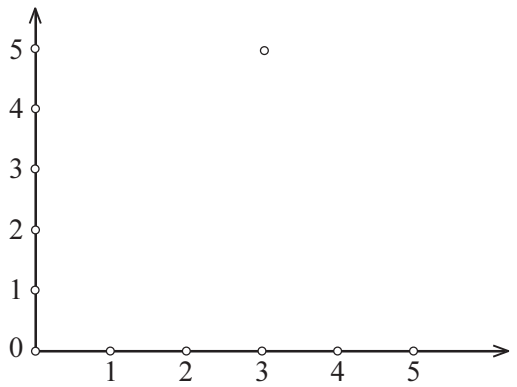
А 1 Дадени се два примерока кои соодветствуваат на две различни обележја:

I примерок: $x_1=1,\ \ x_2=2,\ \ x_3=3,\ \ x_4=4,\ \ x_5=5;$

II примерок: $y_1=3,\ \ y_2=3,\ \ y_3=3,\ \ y_4=3,\ \ y_5=3.$

- Веднаш може да се воочи дека двата примерока имаат иста аритметичка средина $\overline{x}_5=\overline{y}_5=3$ и иста медијана $Me_x=3=Me_y$. Но, исто така, е воочливо дека сите податоци од вториот примерок се концентрирани во една точка (која е аритметичка средина и медијана на примерокот), а во првиот примерок постои расејување на податоците од аритметичката средина. Полигоните на фреквенции за првиот и вториот примерок се дадени на следните слики.





Затоа се јавува потребата да се дефинираат некои параметри кои ќе го покажуваат расејувањето на податоците. Ќе дефинираме три мерки за расејување: ранг, дисперзија и стандардна девијација на даден примерок.

Запомни!

Ранг или ***интервал на варијација*** за даден примерок е разликата помеѓу најголемата и најмалата вредност во тој примерок и тој се означува со r.

Така, за првиот примерок даден претходно, рангот изнесува $r_x=x_{\max}-x_{\min}=5-1=4$, а за вториот примерок $r_y=y_{\max}-y_{\min}=3-3=0$. Значи, должината на интервалот во кој се сместени податоците од првиот примерок е 4, а за вториот примерок е 0, што јасно покажува дека $y_{\max}=y_{\min}$, па сите вредности во примерокот се еднакви.

- Воочи дека рангот е секогаш ненегативен, а прима вредност 0, само ако максималната и минималната вредност во примерокот се еднакви, т.е. ако сите вредности во примерокот се еднакви помеѓу себе.

Следниот параметар на расејување го мери отстапувањето на податоците од нивната аритметичка средина. Се нарекува дисперзија или варијанса на даден примерок.

Запомни!

Дисперзијата s_n^2 на даден примерок $x_1, x_2, \ldots, x_n$ е мерка за средноквадратното отстапување на податоците од нивната аритметичка средина и се определува со следната формула:

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2.$$

- За првиот примерок даден во задачата 1, дисперзијата изнесува:

$$(s_5^2)_x = \frac{1}{5}\left[(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2\right] = \frac{10}{5} = 2,$$

а за вториот примерок дисперзијата е

$$(s_5^2)_y = \frac{1}{5}\left[(3-3)^2 + (3-3)^2 + (3-3)^2 + (3-3)^2 + (3-3)^2\right] = \frac{0}{5} = 0.$$

- Значи, во првиот случај имаме дисперзија еднаква на 2; а во вториот дисперзијата е 0, од што може да се заклучи дека сите вредности во примерокот се еднакви со аритметичката средина, т.е. дека сите вредности во примерокот се еднакви помеѓу себе.

- За пресметување на дисперзијата најчесто се користи друга формула, која се добива од претходната на следниот начин:

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_n)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2 - 2x_i\overline{x}_n + \overline{x}_n^2) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\overline{x}_n \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\overline{x}_n^2$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - 2\overline{x}_n \cdot \overline{x}_n + \frac{1}{n}\cdot n \cdot \overline{x}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \overline{x}_n^2.$$

Запомни!

Дисперзијата s^2 на даден примерок $x_1, x_2, \ldots, x_n$ може да се пресмета и со формулата:

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \overline{x}_n^2.$$

- Ако примерокот е зададен со табела на фреквенции или, пак, е определена неговата табела на фреквенции, тогаш формулата за дисперзија може да се зададе во следниот облик.

Запомни!

Ако $x_1, x_2, \ldots, x_k$ се вредностите од примерок со обем n и ако во примерокот вредноста x_i се јавува n_i пати $(n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n)$, тогаш дисперзијата на тој примерок се определува со формулата:

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x}_n)^2,$$

или на ист начин како претходно може да се изведе дека дисперзијата може да се пресмета со формулата:

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \overline{x}_n^{\,2}.$$

- Во овој случај, исто како и при определување на аритметичката средина, попрегледно е ако пресметките се направат во табела.

2 Да се определи дисперзијата на оценките по математика на учениците од II[5] година во едно училиште ако во класот има 25 ученици и нивните оценки се дадени во следната табела на фреквенции.

x_i	n_i
1	2
2	3
3	4
4	6
5	10

Решение. Во дадената табела ќе воведеме нови колони во кои ќе ги пресметаме изразите кои се јавуваат во формулата за дисперзија.

x_i	n_i	x_i^2	$n_i x_i$	$n_i x_i^2$
1	2	1	2	2
2	3	4	6	12
3	4	9	12	36
4	6	16	24	96
5	10	25	50	250
Σ	25		94	396

Сега, аритметичката средина на примерокот е $\overline{x}_{25} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \frac{94}{25} = 3,76$, а дисперзијата на овој примерок е

$$s_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2 - \overline{x}_n^{\,2} =$$

$$= \frac{1}{25}\cdot 396 - 3,76^2 = 1,7024.$$

- Ако примерокот е зададен не со сите вредности кои припаѓаат во него, туку со соодветната табела на фреквенции во која вредностите се групирани во интервали, тогаш исто како и аритметичката средина, и дисперзијата на примерокот не може точно да се пресмета, но за да се добие одредена претстава за расејувањето на податоците може дисперзијата да се оцени приближно.

- Приближната вредност на дисперзијата се добива кога за претставник на секој интервал се зема неговата средина.

Запомни!

Ако вредностите на примерокот се групирани во k интервали и ако $\tilde{x}_i$ е средината на i-тиот интервал, $i = 1,2,...,k$, а фреквенцијата на тој интервал е n_i тогаш приближната вредност $\tilde{s}_n^2$ на дисперзијата се определува со формулата:

$$\tilde{s}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i(\tilde{x}_i - \tilde{x}_n)^2 \quad \text{или} \quad \tilde{s}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\tilde{x}_i^2 - \tilde{x}_n{}^2,$$

каде што $\tilde{x}_n$ е приближната вредност на аритметичката средина на примерокот.

3 Во една фабрика е направена анализа за староста на вработените. За добиените податоци е направена следната табела на фреквенции:

Интервал	$[20,30)$	$[30,40)$	$[40,50)$	$[50,60)$
n_i	25	35	20	20

Да се пресмета приближно просечната старост и дисперзијата за вработените во таа фабрика.

Решение. Разгледај ја табелата.

Интервал	$\tilde{x}_1$	n_i	$\tilde{x}_1^2$	$n_i\,\tilde{x}_1$	$n_i\,\tilde{x}_1^2$
$[20,30)$	25	25	625	625	15625
$[30,40)$	35	35	1225	1225	42875
$[40,50)$	45	20	2025	900	40500
$[50,60)$	55	20	3025	1100	60500
	Σ	100		3850	159500

Приближната вредност на аритметичката средина на примерокот е

$$\tilde{x}_{100} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\tilde{x}_i = \frac{3850}{100} = 38,5.$$

За приближната вредност на дисперзијата на овој примерок се добива:

$$\tilde{s}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\tilde{x}_i^2 - \tilde{x}_n{}^2 =$$

$$= \frac{1}{100}\cdot 159500 - 38,5^2 = 112,75.$$

B

Последен параметар на расејување е стандардна девијација на примерок.

Запомни!

Стандардна девијација s_n на даден примерок е квадратен корен од дисперзијата на тој примерок.

Во задачата 2 добивме дека дисперзијата на примерокот е $s_n^2 = 1,7024$, па стандардната девијација на овој примерок изнесува $s_n = \sqrt{1,7024} = 1,3$.

Задачи

1 Да се определи рангот, дисперзијата и стандардната девијација во задачите 1 до 5 од лекцијата 10 и задачите 1 до 4 од лекцијата 11.

14 ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1 **E** Нека експериментот е извлекување карта од шпил со 52 карти. Спроведи 10 серии од по 40 експерименти. По секое извлекување, регистрирај го бројот на картата и неа врати ја назад во шпилот. Определи ја статистичката веројатност за појавување на настаните:

A: извлечена е карта треф со бројот 10;

B: извлечена е карта со непарен број (за непарен број се смета и карта-дама).

2 **E** Експериментот е извлекување карта од шпил во кој има по четири карти со знаците 1,2,3,4,5,6,7. Направи 3 серии од по 70 експерименти и одреди го бројот околу кој се натрупуваат релативните честоти на следните настани:

A: извлечена е карта со број не поголем од 5;

B: извлечена е карта со број поголем или еднаков на 3;

C: извлечена е карта со непарен број.

3 **E** Истовремено се фрлаат монета и тетраедар чии страни се означени со буквите a,b,c,d. Да се опише множеството елементарни исходи на овој експеримент.

4 **E** Во една кутија има 4 топчиња, нумерирани со броевите 1, 2, 3 и 4. На случаен начин се извлекуваат едно по едно топче, без враќање во кутијата. Извлекувањето се врши сè додека не се извлече топчето со бројот 1. Да се опише множеството елементарни настани за дадениот експеримент.

5 **E** Стрелец стрела во цел три пати, при што се регистрираат погодоците или промашувањата на целта. Да се опише множеството елементарни настани и следните случајни настани:

A: во првото стрелање е постигнат погодок;

B: целта е промашена двапати;

C: во сите три стрелања е постигнат ист резултат;

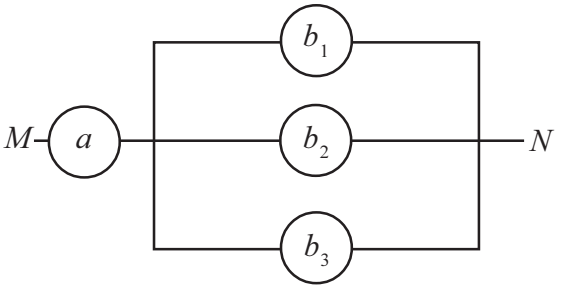
D: во првите две стрелања целта е промашена.

6 **E** На следната слика е дадена електрична шема за проток на струја помеѓу точките M и N. Ги воведуваме следните настани:

A: елементот a се расипува;

B_k: елементот b_k се расипува, $k=1,2,3$.

Со овие настани да се опише настанот C кој означува прекин на протокот на електрична струја.



7 **E** Една серија содржи 10 еднородни артикли од кои 6 се исправни и 4 се неисправни. Од серијата се избираат случајно 5 објекти. Да се определи веројатноста дека помеѓу нив 3 се исправни.

8 **E** Во една кутија има вкупно 8 бели и црни топчиња. Веројатноста да се извлечат две бели топчиња е 15/28. Да се определи бројот на бели топчиња во оваа кутија.

9 **E** Да се определи веројатноста дека во случајно избрана година во месец август ќе има точно четири вторници.

10 **E** Се разгледуваат пермутации без повторување од n елементи. Колкава е веројатноста дека во една случајно избрана пермутација, два фиксни елементи a и b ќе бидат еден до друг?

11 **E** Еден шпил се состои од 52 карти. Картите случајно се распоредуваат во една низа. Да се определи веројатноста на следните настани:

A: сите четири единициќе бидат една до друга;

B: единиците ќе бидат распоредени на првите четири позиции или на последните четири позиции.

12 **E** Секоја страна на една коцка е обоена. Коцката е поделена на 1000 еднакви коцкички и тие добро се измешани. Да се определи веројатноста дека случајно избраната коцкичка ќе има 2 обоени страни.

13 **E** Се фрлаат две коцки. Да се определи веројатноста дека:

а) паднале две петки, ако збирот на вредностите кои паднале е делив со 5;

б) паднале две парни вредности, ако збирот на вредностите кои паднале е делив со 3.

14 **E** Во една кутија има 12 топчиња за тенис. За секоја игра се земаат по 3 топчиња од кутијата и по завршувањето на играта се враќаат во неа. Да се определи веројатноста дека по 4 игри, сите топчиња ќе бидат употребени.

15 **E** Двајца шахисти се договориле да играат меч под следните услови: за победа во мечот играчот A мора да собере 12, а играчот B 6 поени, при што нерешените партии не се земаат предвид. Играчот A победува двапати повеќе отколку играчот B. Играта ненадејно се прекинала при резултат $8{:}4$ за играчот A. Тие решиле победата да му припадне на оној играч чија веројатност за победа е поголема. Кој е победникот?

16 **E,3** Фабриката за автомобили Пежо има за цел да ја утврди потрошувачката на гориво на автомобилите од моделот Пежо 407. За таа цел случајно се избрани 250 вакви автомобили и мерена е нивната потрошувачка на 100 km.

а) Која е разгледуваната популација?

б) Кое е обележјето што се разгледува и дали е квантитативно или квалитативно?

в) Што образуваат податоците коишто претставуваат потрошувачка на 100 km на 250 избрани автомобили?

17 **E,3** На еден натпревар за иновации, 40 ученици учествуваат со своите изуми. Секоја од иновациите е оценета со оценка 1 до 10. Добиен е следниот примерок:

7	9	8	8	4	3	2	2	1	10
9	9	8	10	1	2	1	3	4	5
5	5	6	8	9	10	9	8	8	2
1	2	3	5	8	9	10	8	7	5

а) Да се претстават дадените податоци во табела на фреквенции, а потоа да се нацртаат полигони на фреквенции и релативни фреквенции.

б) Да се пресметаат аритметичката средина, медијаната и модата на дадениот примерок.

в) **E** Да се пресметаат рангот, дисперзијата и стандардната девијација на овој примерок.

18 **Е,3** Масата на 30 јаболка е мерена во грамови и добиени се следните резултати:

86	101	112	75	98	103	89	99	100	85
98	95	102	111	119	87	88	95	96	102
112	108	120	96	93	88	92	100	101	105

а) Да се претстават дадените податоци во табела на фреквенции со групирање во интервали, а потоа да се нацртаат хистограмите на фреквенции и релативни фреквенции.

б) Да се пресметаат аритметичката средина, медијаната и модата на дадениот примерок.

в) **Е** Да се пресметаат рангот, дисперзијата и стандардната девијација на овој примерок.

19 **Е,3** Во еден одреден ден мерено е времето на престој на автомобилите на еден градски паркинг. Резултатите од мерењето се дадени во следната табела:

Време на престој (min)	$[15,50)$	$[50,85)$	$[85,120)$	$[120,155)$	$[155,190)$	$[190,225)$	$[225,260)$	$[260,295)$
Фреквенција	10	15	18	29	30	22	17	9

а) Да се претстават дадените податоци со хистограмите на фреквенции.

б) Да се пресмета приближната вредност на аритметичката средина на овој примерок.

в) **Е** Да се пресметаат приближните вредности на дисперзијата и стандардната девијација.

20 **Е,3** Триесет ученици се натпреваруваат во брзо решавање на задачи. Времињата за кои секој од нив ја решил првата задача се дадени во следната табела:

Време на решавање (min)	$[5,10)$	$[10,15)$	$[15,20)$	$[20,25)$	$[25,30)$
Фреквенција	15	9	7	5	4

а) Да се претстават дадените податоци со хистограмите на фреквенции и релативни фреквенции.

б) Да се пресмета приближната вредност на аритметичката средина.

в) **Е** Да се пресметаат приближните вредности на дисперзијата и стандардната девијација на овој примерок.

15 ЗАДАЧИ ЗА САМОПРОВЕРКА

1 **Е** Настанот $A \cup B$ ќе се појави тогаш и само тогаш кога ќе се појават настаните:

а) A и B; б) A или B; в) $\overline{A}$ и $\overline{B}$; г) само настанот A или само настанот B. 1

2 **Е** Веројатноста на сигурниот настан Ω е

а) 1; б) $1/3$; в) 0; г) зависи од експериментот. 1

3 **Е** Условната веројатност $P(A|B)$ на настанот A при услов B се определува со формулата:

а) $\dfrac{P(AB)}{P(A)}$; б) $\dfrac{P(AB)}{P(B)}$; в) $P(AB)P(B)$; г) $P(A)P(B)$. 1

4 **Е,3** Ако обемот на примерокот е парен и подредениот примерок е $x_{(1)} \le x_{(2)} \le \ldots \le x_{(2n)}$, тогаш медијаната на примерокот е: а) $x_{(n)}$; б) $x_{(n+1)}$; в) $\dfrac{x_{(n)} + x_{(n+1)}}{2}$; г) $\dfrac{x_{(n+1)} - x_{(n)}}{2}$. 1

5 **E** Ако x_{min} е минималната, а x_{max} е максималната вредност во даден примерок, тогаш рангот на примерокот е: а) x_{max}; б) $(x_{max}+x_{min})/2$; в) x_{min}; г) $x_{max}-x_{min}$. 1

6 **E** Множество елементарни настани за даден експеримент е _____ _____. 1

7 **E** Веројатноста на сумата на два произволни настани A и B во врска со даден експеримент се определува со формулата: _____. 1

8 **E** Настаните A и B се независни ако и само ако _____. 1

9 **E,3** Што е популација? Дефинирај ги поимите обележје и примерок. 1

10 **E** Која е врската помеѓу дисперзијата и стандардната девијација на еден примерок? 1

11 **E** Марија полага испити по математика, информатика и физика. Веројатноста дека ќе положи математика е 0.8, за информатика 0.9, а за физика 0.7. Ги означуваме настаните:

E_1: Марија ќе положи математика; E_2: Марија ќе положи информатика;

E_3: Марија ќе положи физика.

Со помош на овие настани, да се опишат настаните A,B,C и D дадени подолу и да се определи нивната веројатност:

A: Марија ќе ги положи сите три испити; B: Марија ќе падне на сите три испити;

C: Марија ќе положи барем два испита; D: Марија ќе положи точно еден испит. 5

12 **E** Нека A и B се дадени настани такви што $P(A)=1/2$, $P(B)=1/5$, а $P(A|B)=0$.

а) Да се определи $P(A\cup B)$. б) Дали A и B се независни настани? 5

13 **E,3** Педесет луѓе во Скопје биле анкетирани со прашањето колку ги гледаат програмите на локалните и националните телевизиски станици. Врз основа на одговорите добиен е следниот примерок:

5	9	7	8	6	10	13	9	4	1
8	7	7	6	5	4	2	10	12	11
13	12	11	9	9	10	1	2	2	3
9	8	7	4	5	6	2	3	3	4
5	9	8	7	10	9	6	8	4	1

а) Да се претстават дадените податоци во табела на фреквенции, а потоа да се нацртаат полигони на фреквенции и релативни фреквенции.

б) Да се пресметаат аритметичката средина, медијаната и модата на дадениот примерок.

в) **E** Да се пресметаат рангот, дисперзијата и стандардната девијација на овој примерок. 5

14 **E,3** Во следната табела е даден коефициентот на интелигенција на 480 ученици од едно основно училиште. Да се пресметаат:

а) аритметичката средина, медијаната, модата, рангот на дадениот примерок;

б) **E** дисперзијата и стандардната девијација на овој примерок. 5

Коефициент на интелег.	70	74	78	82	86	90	94	98	102	106	110	114	118	122	126
Фреквенција	4	9	16	28	45	66	85	72	54	38	27	18	11	5	2

ТЕМА 10

БЛАГОРОДНИ МЕТАЛИ

3

СОДРЖИНА НА ТЕМАТА

1 Благородни метали. Поим за финост 294

2 Изразување финост од англиски начин на промилен начин и обратно 287

3 Одредување маса на чистиот метал во легурата 300

4 Задачи за повторување и утврдување 303

5 Задачи за самопроверка 304

1 БЛАГОРОДНИ МЕТАЛИ. ПОИМ ЗА ФИНОСТ

А Благородни метали се злато, сребро и платина. Тие се ретки метали, имаат посебни хемиски и физички својства, немаат доволна цврстина (растегливи), хемиски се отпорни, не оксидираат, а некои од нив (злато и платина) во природата се наоѓаат и во природен, самороден облик.

Поради ваквите особини, благородните метали се мешаат со други метали, т.е. се прават легури со додавање на бакар, цинк, никел и др. Легурите на благородните матали се користат за изработка на накит, за обложување на медицински и лабораториски инструменти и др.

Потсети се!

- Процент (%) е стоти дел од некоја големина, т.е. $(1\%\ \text{од}\ A)=\frac{1}{100}A.$
- 5% од 60 е $\frac{5}{100}\cdot 60=3.$
- Промил $(‰)$ е илјадити дел од некоја големина, т.е. $(1‰\ \text{од}\ A)=\frac{1}{1000}A.$
- $5‰$ од 60 е $\frac{5}{1000}\cdot 60=0{,}3.$
- Зборот промил е латински збор што значи „на илјада".

1 Наталитетот на популацијата што живее во еден град е $32‰$.

Колку деца ќе се родат за една година во градот ако тој има 250000 жители?

Решение. Бројот на родените деца е $32‰$ од 250000, т.е. $\frac{32}{1000}\cdot 250000=8000.$

2 Во една легура со маса $2{,}5\ \text{kg}$ има 35% бакар, 42% цинк и никел. Колку килограми има бакар, цинк и никел во легурата?

3 Во една легура со маса $250\ \text{g}$ има $350‰$ злато, $420‰$ сребро, а останатиот дел е никел.

Колку грама во легурата има злато, колку сребро, а колку никел?

Решение. Злато има $350‰$ од 250, т.е. $\frac{350}{1000}\cdot 250=87{,}5\ \text{g}$; сребро $\frac{420}{1000}\cdot 250=105\ \text{g}$, а $250-(87{,}5+105)=57{,}5\ \text{g}$ никел.

При изработката на некој предмет од легура што содржи благороден метал, потребно е да се знае масата на чистиот благороден метал во легурата, бидејќи продажната цена на предметот зависи од количината на благородниот метал.

Запомни!

Односот меѓу масата на чистиот благороден метал во легурата и вкупната маса на легурата се вика ***финост на благородниот метал.***

- Финоста на благородните метали се изразува на два начина: промилен и англиски.
- ***Промилниот начин*** покажува колку еднакви делови чист благороден метал има во 1000 еднакви делови од легурата. На пример, ако еден предмет има финост $850\,‰$, значи во 1000 делови од легурата има 850 делови чист благороден метал.
- На ***англискиот начин*** финоста на златен предмет се искажува во ***карати*** (се означува со car), $1\ \text{car} = \frac{1}{24}$. На пример, златниот предмет со финост 18 car, значи дека во 24 дела златниот предмет има 18 делови чисто злато, а се означува 24/18.
- Финоста на среброто на англиски начин се изразува во ***пенивејси*** (од англискиот збор pennyweight), се означува со dwt, а $1\ \text{dwt} = \frac{1}{240}$.

  Помалата единица од каратот и пенивејсот е ***грен*** (од англискиот збор grain), се означува со gr и притоа $1\ \text{car} = 4\ \text{gr}$, а $1\ \text{dwt} = 24\ \text{gr}$. На пример, сребрен предмет со финост 225 dwt, значи дека во 240 делови легурата има 225 делови чисто сребро, а се означува 240/225.

Чистото злато се означува со симболот ⊙ - симбол на сонце, а чистото сребро се означува со симболот ☾ - симбол на месечина.

За определување на финоста на легурите се користат и ***стандардно злато*** (финост од 22 car, се означува 24/22) и ***стандардно сребро*** (финост од 222 dwt, се означува 240/222).

Воочи дека *со англискиот начин финоста не се искажува директно, туку се одредува колку карати чисто злато содржи златниот предмет, односно колку пенивејси чисто сребро содржи сребрениот предмет.*

Запомни!

Со финоста изразена на англиски начин се покажува за колку карати златниот предмет е подобар или полош од стандардното злато, односно за колку пенивејси сребрениот предмет е подобар или полош од стандардното сребро.

- За обележување на подобра или полоша финост на златниот или сребрениот предмет се користат ознаките:

„B m,,n" (од англискиот збор *Better*), значи подобро од стандардното злато (St ⊙), односно стандардното сребро (St ☾).

„W m,,n" (од англискиот збор *Worse*), значи полошо од стандардното злато (St ⊙), односно стандардно сребро (St ☾).

Со m се означува бројот на карати или пенивејси, а со n бројот на грени за колку што златниот, односно сребрениот предмет е подобар или полош од стандардното злато, односно сребро.

4 Одреди ја финоста на златен предмет што има ознака B1,,2.

Решение. Записот B1,,2 означува дека предметот е со подобра финост за 1 car и 2 gr од стандардното злато, т.е. предметот е со финост $22\,\text{car} + 1\,\text{car}\ 2\,\text{gr} = 23\,\text{car}\ 2\,\text{gr}$, или во децимален запис $23\frac{2}{4} = 23{,}5\,\text{car}$. Значи, во 24 делови златниот предмет има 23,5 делови чисто злато, а се означува како 24/23,5.

5 Одреди ја финоста на:
а) златен предмет со ознака B0,,3; б) сребрен накит со ознака B10,,6.

6 Одреди ја финоста на сребрен предмет со ознака W10,,6.

Решение. Ознаката W10,,6 покажува дека сребрениот предмет е со полоша финост од стандардното сребро за 10 пенивејси и 6 грени. Според тоа имаме:

$$222\,\text{dwt} - 10\,\text{dwt}\ 6\,\text{gr} = 221\,\text{dwt}\ 24\,\text{gr} - 10\,\text{dwt}\ 6\,\text{gr} = 211\,\text{dwt}\ 18\,\text{gr} = 211\frac{18}{24}\,\text{dwt} = 211{,}75\,\text{dwt},$$

бидејќи 1 пенивејс има 24 грени. Ова значи дека од 240 делови на сребрениот предмет чисто сребро се 211,75 делови, а се означува 240/211,75.

7 Колку делови чисто злато содржи златен предмет што носи ознака:
а) W2,,3; б) W3,,1; в) B0,,2?

Решение. а) Предметот е со полоша финост за 2 car 3 gr од стандардното злато, па тој е со финост: $22\,\text{car} - 2\,\text{car}\ 3\,\text{gr} = 21\,\text{car}\ 4\,\text{gr} - 2\,\text{car}\ 3\,\text{gr} = 19\,\text{car}\ 1\,\text{gr} = 19\frac{1}{4}\,\text{car} = 19{,}25\,\text{car}$. Значи, во 24 делови предметот има 19,25 делови чисто злато (24/19,25).

8 Колку делови чисто сребро има во сребрен накит што носи ознака:
а) B15,,12; б) W15,,12; в) W0,,20?

Решение. а) $\text{St}\odot + \text{B}15,,12$ или $222\,\text{dwt} + 15\,\text{dwt} + 12\,\text{gr} = 237\,\text{dwt}\ 12\,\text{gr}$ или $237\frac{12}{24} = 237{,}5\,\text{dwt}$.

Значи, во 240 делови накитот има 237,5 делови чисто сребро (240/237,5).

Задачи

1 Еден златен предмет е означен со:
а) B1,,1; б) B0,,3; в) B1,,0.
Одреди ја на англиски начин финоста на златниот предмет.

2 Изрази ја на англиски начин финоста на златниот предмет со ознака:
а) W3,,2; б) W10,,3; в) W7,,0.

3 Колку делови чисто сребро има во сребрен предмет со ознака:
а) B5,,20; б) B12,,12; в) B10,,5?

4 Изрази ја на англиски начин финоста на сребрен предмет означен со:
а) W5,,10; б) W12,,18; в) W6,,20.

5 Стандардната финост на златен предмет изрази ја во промилна финост.

6 Стандардната финост на сребрен предмет изрази ја во промилна финост.

2 ИЗРАЗУВАЊЕ НА ФИНОСТ ОД АНГЛИСКИ НАЧИН НА ПРОМИЛЕН НАЧИН И ОБРАТНО

Потсети се!

- Во промилната сметка учествуваат следните величини:
  - константа 1000,
  - главна или основна вредност (S),
  - промил (p),
  - промилен износ (P).
- Бидејќи споменатите величини се правопропорционални, врската меѓу нив е:

↑ на целината S (цела легура) ↑ одговара делот P (чист метал)
на 1000 делови од легурата одговара промилот p

$$p : P = 1000 : S \quad \text{или} \quad p \cdot S = P \cdot 1000$$

A Решавајќи ги задачите 5 и 6 од претходната лекција сигурно доби дека St ⊙ е со промилна финост $p = \frac{22 \cdot 1000}{24} = 916,7\,‰$, а St ⊙ со финост $p = \frac{222 \cdot 1000}{240} = 925\,‰$.

1 Изрази ја на промилен начин финоста на златен предмет означен со B1,,1.

Решение. Златниот предмет е со подобра финост од стандардното злато, т.е. со финост $22 + 1,,1 = 23,,1 = 23\frac{1}{4} = 23,25$ car. Значи, во 24 од златниот предмет има 23,25 дела чисто злато, па

↑ 24 делови легура ↑ 23,25 делови чисто злато
1000 делови легура одговара промил p

$p : 23,25 = 1000 : 24$, или $p = \frac{23,25 \cdot 1000}{24} = 968,75\,‰$.

2 Одреди ја во промили финоста на сребрен предмет со ознака B10,,12.

3 Одреди ја промилната финост на сребрен предмет со финост 225 dwt 20 gr.

Решение. За финоста на предметот имаме:

$225\,\text{dwt}\ 20\,\text{gr} = 225\frac{20}{24}\text{dwt} = 225{,}83\,\text{dwt};\ 240/225{,}83.$ Според тоа:

↑ на 240 делови легура ↑ 225,83 делови чисто сребро

1000 делови легура одговара промил p

Од $p : 225{,}83 = 1000 : 240$ следува дека $p = \frac{225{,}83 \cdot 1000}{240} = 940{,}96\,‰$.

Воочи, промилната финост на легурата од благородни метали се добива кога финоста на легурата ќе се помножи со 1000.

На пример, златниот предмет со финост 24/22,5 има промилна финост $\frac{22{,}5}{24} \cdot 1000 = 937{,}5\,‰$.

4 Одреди ја промилната финост на сребрен накит со ознака W12,,15.

Решение. Накитот е со полоша финост од стандардното сребро. Неговата финост е

$222 - 12{,}{,}15 = 221{,}{,}24 - 12{,}{,}15 = 209{,}{,}9 = 209\,\text{dwt}\ 9\,\text{gr} = 209\frac{9}{24} = 209{,}375\,\text{dwt}.$ Според тоа,

$p = \frac{209{,}375}{240} \cdot 1000 = 872{,}40\,‰$.

Д При одредувањето на финоста на благородниот метал на аглиски начин, ако е дадена неговата промилна финост, ја користиме истата шема како за промилната сметка. Во овој случај го одредуваме промилниот износ P.

5 Еден златен предмет има финост $975\,‰$. Оваа финост изрази ја на англиски начин.

Решение. ↓ на 24 делови легура ↓ P делови чисто злато

на 1000 делови легура 975 делови чисто злато

$P : 975 = 24 : 1000$ или $P \cdot 1000 = 975 \cdot 24$, т.е. $P = \frac{975 \cdot 24}{1000} = 23{,}4\,\text{car} = 23\,\text{car} + 0{,}4\,\text{car} =$

$= 23\,\text{car}\ 0{,}4 \cdot 4\,\text{gr} = 23\,\text{car}\ 1{,}6\,\text{gr}.$ Значи, предметот е за 1 car 1,6 gr подобар од стандардното злато, т.е. тој е со ознака B1,,1,6 или 24/23,4.

6 Сребрен предмет има финост $802,5‰$. Изрази ја финоста на предметот во пенивејси.

Решение.

на 240 делови легура	P делови чисто сребро
↓	↓
на 1000 делови легура	802,5 делови чисто сребро

$P:802,5=240:1000$, т.е. $P=\dfrac{802,5\cdot 240}{1000}=192,60\,\text{dwt}$. Значи, во 240 делови легурата има $192,6=192\,\text{dwt}+0,6\cdot 24\ \text{gr}=192\ \text{dwt}\ 14\ \text{gr}$ делови чисто сребро. Предметот е со полоша финост од стандардното сребро за $222\,\text{dwt}-192\,\text{dwt}\ 14\,\text{gr}=221\,\text{dwt}\,24\,\text{gr}-192\,\text{dwt}\ 14\,\text{gr}=$ $=29\,\text{dwt}\ 10\,\text{gr}$ и е со ознака W29,,10 или 240/192,6.

Воочи, ако е дадена промилната финост на легурата, тогаш англиската финост се добива кога финоста на предметот ќе се помножи со 24 за злато, односно со 240 за сребро.

7 Еден сребрен предмет има вкупна маса 480 g и содржи 450 g чисто сребро.Изрази ја на англиски начин финоста на тој предмет.

Решение. Промилната финост на предметот е $\dfrac{450\cdot 1000}{480}=937,5‰$. Англиската финост е $\dfrac{937,5}{1000}\cdot 240=225\,\text{dwt}$ (пенивејси). Предметот е за $225\,\text{dwt}-222\,\text{dwt}=3\,\text{dwt}$ подобар од стандардното сребро и е со ознака B3,,0.

Задачи

Изрази ја во $(1-2)$ промилната финост на:

1 Златниот предмет со финост:
а) W5,,2; б) B1,,2; в) 21 car.

2 Сребрениот предмет со финост:
а) 235 dwt 10 gr; б) B8,,5; в) W13,,20.

3 Еден златен предмет има финост:
а) $815‰$; б) $940‰$; в) $956,25‰$.
Изрази ја дадената финост на англиски начин.

4 Сребрен предмет има финост:
а) $825‰$; б) $900‰$; в) $956,25‰$.
Изрази ја дадената финост на англиски начин.

5 Златен накит има промилна финост:
а) $980‰$; б) $900‰$; в) $850‰$.
Изрази ја дадената финост на англиски начин и одреди ја ознаката на предметот.

6 Сребрен накит има промилна финост:
а) $945‰$; б) $925‰$; в) $800‰$.
Изрази ја дадената финост на англиски начин и одреди ја ознаката на предметот.

7 Еден златен предмет има маса 120 g и содржи 115 g чисто злато. Одреди ја финоста на предметот на:
а) промилен начин; б) англиски начин.

8 Еден златен предмет има маса 150 g и содржи 90 g чисто злато. Изрази ја финоста на предметот на англиски начин.

9 Сребрен предмет има маса 600 g и содржи 550 g чисто сребро. Одреди ја финоста на предметот на:
а) промилен начин; б) англиски начин.

3 ОДРЕДУВАЊЕ МАСА НА ЧИСТИОТ МЕТАЛ ВО ЛЕГУРАТА

А За одредување на масата на чистото злато или чистото сребро во некоја легура треба да се знае вкупната маса на легурата и нејзината финост.

Одредување на масата на чистиот метал се сведува на одредувањето на промилниот износ P во промилната сметка.

1 Колку грама чисто злато има во златен предмет чија маса е $350\ \text{g}$ и финост $820\,‰$?

Решение.

на $350\ \text{g}$ легура ↓ на $1000\ \text{g}$ легура

P g чисто злато ↓ $820\ \text{g}$ чисто злато

$P:820=350:1000$ или $P=\dfrac{350\cdot 820}{1000}=287\ \text{g}$ чисто злато.

2 Колку грама чисто сребро има во сребрен предмет со маса $600\ \text{g}$ и финост $900\,‰$?

Решение.

на $600\ \text{g}$ легура ↓ на $1000\ \text{g}$ легура

P g чисто сребро ↓ $900\ \text{g}$ чисто сребро

$P:900=600:1000$ или $P=\dfrac{600\cdot 900}{1000}=540\ \text{g}$ чисто сребро.

3 Колку грама чисто сребро има во предмет со маса $120\ \text{g}$ и финост $204\ \text{dwt}$?

4 Колку грама чисто злато содржи златен предмет со маса $620\ \text{g}$ и финост $\text{W}4,,3$?

Решение. Златниот предмет е со полоша финост од стандардното злато. Неговата финост е $22-4,,3=21,,4-4,,3=17,,1=17,25\,\text{car}$. Значи, во 24 дела легурата има $17{,}25$ дела чисто злато. Според тоа имаме:

на $620\ \text{g}$ легура ↓ на $24\ \text{car}$ легура

P g чисто злато ↓ $17{,}25\ \text{car}$ чисто злато

$P:17{,}25=620:24$ или $P=\dfrac{620\cdot 17{,}25}{24}=445{,}625\ \text{g}$ чисто злато.

Воочи, масата на чистиот метал во легурата се добива така што масата на легурата се множи со нејзината финост (промилна или англиска).

За одредување на масата на една легура треба да се знае масата на чистиот метал и финоста на легурата.

5 Одреди ја масата на златен предмет чија финост е $800‰$ и кој содржи 480 g чисто злато.

Решение. Во овој пример на промилна сметка непознатата е основната вредност S, па

↓ легурата има S g	↓ 480 g чисто злато
на 1000 g легура	800 g чисто злато

$S:1000=480:800$ или $S=\dfrac{480\cdot 1000}{800}=600$ g.

6 Еден сребрен предмет има финост $800‰$ и содржи 630 g чисто сребро. Одреди ја масата на тој предмет.

7 Еден сребрен предмет има финост W20,,16 и содржи 480 g чисто сребро. Одреди ја масата на тој предмет.

Решение. Финоста на сребрениот предмет е $221,,24-20,,16=201,,8=201\dfrac{8}{24}=201,33$ dwt.

↓ S	↓ одговара 480
240	201,33

$S:240=480:201,33$ или $S=\dfrac{480\cdot 240}{201,33}=572,19$ g.

Воочи, масата на една легура се добива кога количникот од масата на чистиот метал и финоста на легурата ќе се помножи со 1000, 24 или 240, во зависност од тоа со што е изразена финоста на легурата, промил, карати или пенивејси, соодветно.

8 Еден златен предмет е изработен од следните легури: 30 g злато со финост $900‰$; 50 g злато со финост $920‰$; 1 troz чисто злато $(1\,\text{troz}=31,1035\text{ g})$; $9,8565$ g бакар. Пресметај ја:

а) масата на златниот предмет и масата на чистото злато во него;

б) финоста на легурата на промилен начин и англиски начин;

в) масата на бакарот што треба да се додаде, па финоста на легурата да е $780‰$.

Решение. а)

Вкупна маса	Маса на чисто злато
30 g злато со финост $900‰$	$30\cdot 0,9=27$ g
50 g злато со финост $920‰$;	$50\cdot 0,92=46$ g
31,1035 g чисто злато	31,1035 g
9,8565 g бакар	0 g
120,96 g легура	чисто злато 104,1035 g

б) $p=\frac{104,1035}{120,96}\cdot 1000=860,64\,‰$ или $\frac{104,1035}{120,96}\cdot 24=20,65\,\text{car.}$

Со додавање на бакар (има $0\,‰$ злато), финоста на легурата се намалува, па величините се обратнопропорционални.

в)

↑ $120,96$ g легура	↓ има финост $860,64$
x g нова легура	имa финост 780

$x:120,96=860,64:780$ или $x=\frac{120,96\cdot 860,64}{780}=133,46$ g. Значи, ако во легурата се вградат уште $133,46-120,96=12,5$ g бакар, тогаш новата легура ќе има финост $780\,‰$.

Задачи

1 Златен предмет има маса 35 g и финост $940\,‰$. Колку грама чисто злато содржи тој предмет?

2 Златна фунта стерлинг има маса $6,889$ g и има стандардна финост. Колку грама чисто злато има фунтата?

3 Колку грама чисто сребро содржи сребрениот предмет со маса 920 g и со финост B12,,12?

4 Златен пехар со финост $920\,‰$ има маса 16 troz (1 troz $=31,1035$ g). Колку грама чисто злато има во пехарот?

5 Сребрен пехар со финост W10,,0 има маса 18 troz. Колку грама чисто сребро има во пехарот?

6 Колкава е масата на златен предмет со стандардна финост ако тој содржи 120 g чисто злато?

7 Сребрен предмет со стандардна финост содржи 400 g чисто сребро. Одреди ја масата на тој предмет.

8 Еден предмет е изработен од: 60 g злато со финост $900\,‰$, 110 g злато со финост $960\,‰$ и 60 g злато со финост W5,,1. Одреди ги масата и финоста на предметот.

9 Сребрен накит е направен од 1 kg сребро со финост $800\,‰$, 650 g сребро со финост B15,,10 и 500 g сребро со финост W4,,6. Одреди ја финоста на накитот на промилен начин и на англиски начин.

10 Златен накит е направен од следните легури: 25 g злато со финост $912\,‰$; 50 g злато со финост W5,,3; 1 troz чисто злато и $8,735$ g бакар.
а) Пресметај ја масата на накитот и одреди колку грама чисто злато содржи накитот.
б) Одреди ја финоста на накитот на промилен и англиски начин.
в) Колку грама бакар треба да се додаде за накитот да биде со финост W4,,2?

4 ЗАДАЧИ ЗА ПОВТОРУВАЊЕ И УТВРДУВАЊЕ

1. Што е финост на легура од благородни метали?

2. Со кои единици се изразува на англиски начин финоста на: а) злато; б) сребро?

3. На еден златен предмет стои ознаката W4,,2. Што искажува таа ознака?

4. Златен предмет има ознака B1,,3. Одреди ја финоста на тој предмет на:
   а) англиски начин; б) промилен начин.

5. Сребрен предмет има ознака W8,,15. Одреди ја финоста на тој предмет на:
   а) англиски начин; б) промилен начин.

6. Одреди ја на англиски начин финоста на сребрен предмет изразена со:
   а) 780 ‰; б) 930 ‰; в) 980 ‰.

7. Одреди ја на англиски начин финоста на златен предмет чија промилна финост е :
   а) 780 ‰; б) 930 ‰; в) 980 ‰.

8. Златен предмет со маса 80 g содржи 65 g чисто злато. Одреди ја финоста на предметот во :
   а) промили; б) карати.

9. Сребрен предмет со маса 180 g содржи 150 g чисто злато. Одреди ја финоста на предметот во :
   а) промили; б) пенивејси.

10. Одреди ја масата на златен предмет со финост W6,,2, а кој содржи 300 g чисто злато.

11. Одреди ја масата на сребрен предмет со финост B9,,12, а кој содржи 500 g чисто сребро.

12. Во една стоматолошка ординација за правење коронки се користи злато (забарско злато) со финост 20 car. Колку грама злато е потребно за да се направат 28 коронки, ако во просек за една коронка е потребно 1,90 g? Колку чини употребеното злато ако неговата набавна цена е 850 денари за 1 g?

5 ЗАДАЧИ ЗА САМОПРОВЕРКА

1. Стандардното злато е со финост: а) 22 car; б) 23 car; в) 24 car; г) 24 car 3 gr. 1

2. Стандардното сребро е со финост: а) 200 dwt; б) 220 dwt; в) 221 dwt 24 gr; г) 240 dwt. 1

3. Златен накит има ознака B1,,2 која означува дека накитот има:
   а) подобра финост од стандардното злато за 1 car;
   б) подобра финост од стандардното злато за 1 car 2gr;
   в) полоша финост од стандардното злато за 1 car;
   г) полоша финост од стандардното злато за 1 car 2gr. 1

4. Сребрен накит со финост 222 dwt има промилна финост:
   а) 1000 ‰; б) 950 ‰; в) 930 ‰; г) 925 ‰. 1

5. Ознаката W5,,1 на златен предмет покажува дека предметот е со _____ финост од стандардното злато за _____. 2

6. Ознаката B10,,10 на сребрен предмет покажува дека предметот е со _____ финост од стандардното сребро за _____. 2

7. Помала единица од каратот, односно пенивејсот е грен (со ознака gr), при што:
   а) 1 car = _____ gr; б) 1 dwt = _____ gr. 2

8. Сребрен накит има финост 935 ‰. Изрази ја оваа финост на англиски начин. 3

9. Златен накит со маса 200 g содржи 180 g чисто злато. Изрази ја финоста на предметот:
   а) во промили; б) на англиски начин. 3

10. Колкава маса има сребрен накит со стандардна финост и што содржи 250 g чисто сребро? 3

РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

ТЕМА 1 СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ СО ДВЕ НЕПОЗНАТИ

1 **3** а) $x=-9$; б) $x=6$; в) $x=\frac{4}{3}$; г) $x=1$. **7** а) $x=-\frac{7}{6}$; б) $x=3$. Внимавај, не смееш да делиш со $x-3$, бидејќи за $x=3$, $x-3=0$, па добиената равенка не е еквивалентна со дадената.

9 а) нема решение; б) има решение; в) има решение; г) нема решение.

1 Точни се а) и г). **2** а) и в). **3** а) $x=0,6$; б) $x=-1$; в) $x=-2,5$; г) $x=-6$. **4** а) $x=1$; б) $x=1$.

5 а) $6\cdot\frac{3x-2}{3}-6\cdot\frac{4-x}{2}=2\cdot 6 \Leftrightarrow 2(3x-2)-3(4-x)=12 \Leftrightarrow x=3\frac{1}{9}$; б) $x=-2$. **6** а) $x=-5$; б) $x=-16$.

7 а) нема решение; б) $x=0$; в) $x=11$; г) равенка идентитет. **8** а) $(m-3)x=m(m-3)$, $x=m$ за $m\neq 3$; б) не постои таков број m; в) $m=3$, а равенката е од видот $0\cdot x=0$.

2 **8** а) $M(x-4y=2)=\{(2+4k,\ k)k\in\mathbb{R}\}$; в) $M(x=5)=\{(5,\ k)k\in\mathbb{R}\}$.

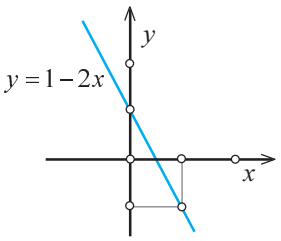
10 а) $\{(4+2k,k)\mid k\in\mathbb{R}\}$; б) $\{(k,-2k)\mid k\in\mathbb{R}\}$; в) $\{(k,-2)\mid k\in\mathbb{R}\}$; г) $\{(3,k)\mid k\in\mathbb{R}\}$.

1 а) и б). **2** б) и г). **3** а) $x+3y=-3$; б) $2x+3y=-3$; в) не може, $3x-4y+xy=6$ не е линеарна равенка; г) $3(x+3y)-4(x+y)=12(2+x)\Leftrightarrow 13x-5y=-24$; д) $2x-6y=3$. **4** а) $(1,-1)$; б) $(-2,-7)$; в) $(2,1)$; г) $(2,5;2)$.

5 а) Ако $y=k$, тогаш $x=3-2k$, па $M(x+2y=3)=\{(3-2k,k),\ k\in\mathbb{R}\}$; б) $2x-y=6$, па ако $x=k$, тогаш $y=2k-6$, а множеството решенија е $M(2x-y=6)=\{(k,2k-6)\mid k\in\mathbb{R}\}$; в) $x+2y=5$, $y=\frac{5-x}{2}$, па ако $x=k$, тогаш $y=\frac{5-k}{2}$, а $M(x+2y=5)=\left\{\left(k,\frac{5-k}{2}\right),k\in\mathbb{R}\right\}$; г) $2x-3y=3(1-y)\Leftrightarrow 2x-0\cdot y=3$, за $y=k$, $k\in\mathbb{R}$ имаме $2x-0\cdot k=3\Leftrightarrow 2x=3\Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$, па $M(2x=3)=\left\{\left(\frac{3}{2},k\right),k\in\mathbb{R}\right\}$; д) $2(x-2)-y+2=2x\Leftrightarrow 0\cdot x-y=2$ $\Leftrightarrow y=-2$, па $x=k$, а $M(y=-2)=\{(k,-2),k\in\mathbb{R}\}$.

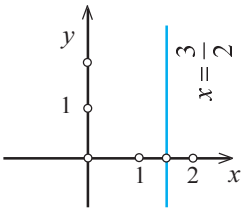
6 а) $y = 1 - 2x$.

x	-1	0	1
y	3	1	-1



г) $2x = 3 \Leftrightarrow 2x + 0 \cdot y = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$,

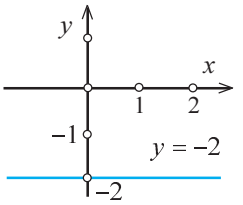
за $x = k, k \in \mathbb{R}$, $M(2x - 3 = 0) = \left\{\left(\frac{3}{2}, k\right), k \in \mathbb{R}\right\}$.



Правата $x = \frac{3}{2}$ е паралелна со y-оската.

д) $y + 2 = 0 \Leftrightarrow 0 \cdot x + y = -2 \Leftrightarrow y = -2$

за $x = k, k \in \mathbb{R}$. $M = \{(k, -2) \mid k \in \mathbb{R}\}$.



Правата $y = -2$ е паралелна со x-оската.

3

2 а) $\begin{cases} 6x - 2y = 5 \\ x - 4y = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ x - y = 1. \end{cases}$ **4** а) не; б) не; в) да. **5** а) да; б) равенките во дадените системи се еквивалентни, па и системите се еквивалентни. **7** а) $(9, 2)$; б) $(1, -1)$.

1 а) $\begin{cases} 3x - 3y = -5 \\ x + y = 1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x - y = 2 \\ x - 2y = -1. \end{cases}$ **2** а) $\begin{cases} 3x - 4y = -5 \\ 3x - 2y = 12 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x - 2y = 5 \\ 2x + 5y = -5. \end{cases}$

3 а) $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 3x - 2y = -18 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 4x + y = 45 \\ x + 4y = 6. \end{cases}$ **4** а) $\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = x^2 + y^2 - 1 \\ (x-1)^2 - (x-2)^2 = 3x - y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 - 1 \\ x^2 - 2x + 1 - (x^2 - 4x + 4) = 3x - y + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 3 \\ x - y = -5 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 2x - 8y = 3 \\ 3x - 4y = 3. \end{cases}$ **5** Ако броевите се x и y, тогаш системот равенки е $\begin{cases} x + y = 64 \\ x - y = 40. \end{cases}$ **6** $\begin{cases} x + y = 32 \\ 5x = 3y. \end{cases}$ **7** Нека $\gamma = 52^0$, тогаш $\begin{cases} \alpha + \beta = 180^0 - 52^0 \\ \alpha - \beta = 18^0. \end{cases}$

8 а) За $x = 3$, $y = 2$ имаме $\begin{cases} 2 \cdot 3 - 2 = 3 \\ 3 + 2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 = 3 \\ 5 = 5 \end{cases}$, значи парот $(3, 2)$ не е решение; б) да; в) не.

9 а) $\begin{cases} 2x - y + 3 = 0 \\ y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 3 \end{cases}$, па решение на системот е парот $(x, y) = (0, 3)$; б) $(x, y) = (2, -2)$.

10 а) $\begin{cases} x + 2y = 3 - 2x + 2y \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + 2y + y = 3 \\ x + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 + y - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases}$, па решението на системот равенки е парот $(x, y) = (1, 4)$; б) $\begin{cases} \frac{2x - y}{3} - \frac{x}{2} = \frac{1}{6}x \\ (x - 2y)(x + 1) = x^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x + 2y - 2xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = -2 \end{cases}$, па решението на системот е парот $(x, y) = (-2, 0)$.

4

4 а) $(3,1)$; б) $(10,6)$. **6** а) $(-2,5)$; б) $(3,4)$.

1 а) $(2,2)$; б) $\left(3,\frac{5}{2}\right)$. **2** а) $\left(\frac{1}{5},-\frac{7}{5}\right)$; б) $\left(-2,\frac{1}{2}\right)$. **3** а) $\left(1,-\frac{1}{2}\right)$; б) $(2,4)$.

4 а) $\begin{cases}\frac{x}{3}+\frac{y+5}{2}=1\\ y=\frac{x+1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+3y+15=6\\ y=\frac{x+1}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\ y=-1\end{cases} \Leftrightarrow (x,y)=(-3,-1)$; б) $(-13,-1)$. **5** а) $\left(-5,-\frac{32}{3}\right)$;

б) $(-1,1)$. **6** а) $\begin{cases}x-2y=4\\ -3x+6y=-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4+2y\\ -3(4+2y)+6y=-12\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=4+2y\\ 0\cdot y=0.\end{cases}$ Според тоа, системот равенки има

бесконечно многу решениа за $y=k,\ k\in\mathbb{R}$, т.е. $(x,y)=\{(4+2k,\ k)\mid k\in\mathbb{R}\}$;

б) $\begin{cases}2x-y=3\\ 4x-2y=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x-3\\ 4x-2(2x-3)=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x-3\\ 0\cdot x=-1.\end{cases}$ Овој систем нема решение, бидејќи равенката $0\cdot x=-1$ е

невозможна.

5

3 а) $\left(5,\frac{4}{5}\right)$; б) $(2,3)$. **5** а) $\left(-3,\frac{3}{2}\right)$; б) $(10,-10)$. **7** а) $\left(3\frac{1}{2},5\frac{1}{2}\right)$; б) $(3,4)$.

9 а) $\left(\frac{6-a}{a-2},\frac{a^2-12}{a-2}\right)$, за $a\neq 2$. Ако $a=2$, тогаш системот нема решение, т.е. е невозможен.

1 а) $(1,1)$; б) $(1,-1)$; в) $(1,3)$. **2** а) $(-13,-15)$; б) $\left(-\frac{2}{3},0\right)$. **3** а) $(5,7)$; б) системот нема решение.

4 а) $(2,3)$; б) $(6,18)$; в) $(1,2)$. **5** а) $(3,2)$. б) Дадениот систем равенки е еквивалентен со системот

равенки $\begin{cases}x+y=2\\ x+y=2\end{cases}$ кој има бесконечно многу решенија. Ако $x=k$, тогаш $y=2-k,\ k\in\mathbb{R}$, па решението е

$(x,y)=\{(k,2-k)\mid k\in\mathbb{R}\}$. **6** а) Со примена на својството $a:b=c:d \Leftrightarrow a\cdot d=b\cdot c$, дадениот систем равенки

е еквивалентен со системот равенки $\begin{cases}x(y+4)=(x+3)(y-2)\\ 2y-5x=9,\end{cases}$ чие решение е парот $(-5,-8)$; б) $(6,8)$.

7 а) $\begin{cases}ax+y=5a\mid\cdot(-2)\\ x+2y=3a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2ax-2y=-10a\\ x+2y=3a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-2ax=-7a\\ x+2y=3a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{7a}{2a-1}\\ \frac{7a}{2a-1}+2y=3a\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{7a}{2a-1}\\ y=\frac{3a^2-5a}{2a-1}\end{cases}$, за

$2a-1\neq 0$, т.е. за $a\neq\frac{1}{2}$. Ако $a=\frac{1}{2}$, тогаш системот е невозможен. б) $x=\frac{6a-5}{a}, y=\frac{5-3a}{a}$ за $a\neq 0$. Ако $a=0$,

тогаш системот е невозможен. в) $\begin{cases} x+y=k \\ kx+y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=k \\ (x+y)-(kx+y)=k-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=k \\ x(1-k)=k-1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1+k, \ k\in\mathbb{R}\setminus\{0\} \\ x=-1, \text{ за } k-1\neq 0, \text{ т.е. } k\neq 1 \end{cases}$. Ако $k=1$, тогаш системот е од видот $\begin{cases} x+y=1 \\ x+y=1 \end{cases}$ и е неопределен, т.е. има

бесконечно многу решенија. Ако $x=m$, $m\in\mathbb{R}$, тогаш $y=1-m$, па решение е парот $(x,y)=\{(m,1-m)\mid m\in\mathbb{R}\}$.

6 **2** Нацртај ги графиците на линеарните функции дадени со равенките на системот. а) $(-1,-3)$; б) $(2,1)$; в) $(1,1)$. **5** а) неопределен; б) невозможен; в) определен.

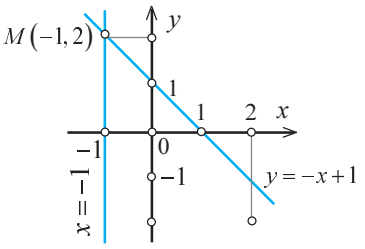
1 Нацртај ги графиците на функциите определени со равенките на системот.

а) $\begin{cases} y=-x+3 \\ y=2x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y=3x-2 \\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$; в) $\begin{cases} y=x \\ y=-x+2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1. \end{cases}$

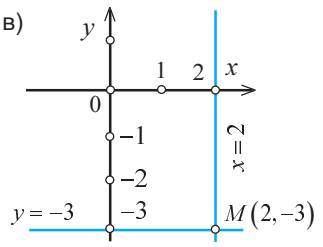
2 а) $\begin{cases} y=-x+1 \\ x=-1 \end{cases}$, $(x,y)=(-1,2)$.

в) $\begin{cases} x=2 \\ y=-3 \end{cases}$, $(x,y)=(2,-3)$.

а)



в)



3 а) Невозможен; б) неопределен; в) определен.

4 а) $\frac{4}{6}=\frac{6}{9}=\frac{3}{4,5}$, неопределен; б) $\frac{2}{4}\neq\frac{-3}{6}$, определен; в) $\frac{2}{8}=\frac{-6}{-12}\neq\frac{7}{12}$, невозможен.

5 а) $\frac{1}{1}=\frac{m}{-2}$, $m=-2$; б) $\frac{1}{1}\neq\frac{m}{-2}$, $m\neq-2$, $(x,y)=\left(\frac{3m+8}{m+2},\frac{1}{m+2}\right)$, $m\neq-2$. **6** Од $\frac{1}{1}=\frac{-2}{a}=\frac{3}{a+5}$ имаме

$-2(a+5)=3a$, па $a=-2$. **7** а) $\frac{3}{1}\neq\frac{-k}{2}$, $k\neq-6$, $m\in\mathbb{R}$; б) $\frac{3}{1}=\frac{-k}{2}\neq\frac{m}{3}$, $k=-6$, $m\neq 9$;

в) $\frac{3}{1}=\frac{-k}{2}=\frac{m}{3}$, $k=-6$, $m=9$.

7 **1** Ако x е првиот број, а y е вториот број, тогаш го формираме системот равенки $\begin{cases} x-y=28 \\ 5x-6y=5 \end{cases}$ чие решение е парот $(x,y)=(163,135)$, па бараните броеви се 163 и 135.

2 Нека x е цифра на десетки, а y е цифра на единици. Тогаш $\begin{cases} x+y=11 \\ \overline{xy}+27=\overline{yx} \end{cases}$, а бараниот број е 47.

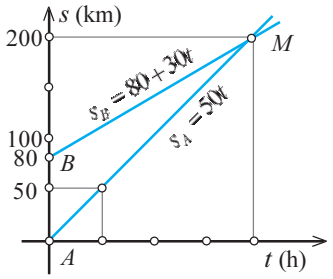
3 Точно одговорил на 13 прашања. **4** $\begin{cases} x+y=37 \\ x-2=10(y-2) \end{cases}$. Мајката има 32 години, а ќерката 5 години.

5 Равенката на изминатиот пат е $s = s_0 + vt$, па $s_A = 50t$, а $s_B = 80 + 30t$.

Од $s_A = s_B$ следува дека $t = 4$ часа, па $s_A = 50 \cdot 4 = 200\,\text{km}$.

t	0	1	2
s_A	0	50	100

t	0	1	2
s_B	80	110	140



6 80. ***Упатство.*** Бројот на запците и бројот на вртежите се обратно пропорционални.

7 а) $y = 2x - 3$; в) $(2,1)$; г) $v^2 = v_x^{\,2} + v_y^{\,2} = 2^2 + 1^2 = 5$, $v = \sqrt{5}$ m/s. **8** 160 kg и 100 kg.

9 Нека x kg има во првата, а y kg во втората легура, па од $\begin{cases} x + y = 10,5 \\ x \cdot 0,76 + y \cdot 0,88 = 10,5 \cdot 0,84 \end{cases}$ добиваме дека

$x = 3,5$ kg и $y = 7$ kg. **10** Ако првиот работник сам може да ја заврши работата за x дена, а вториот за y дена,

тогаш секој од нив за еден ден ќе заврши $\frac{1}{x}$, односно $\frac{1}{y}$ од работата. Според тоа имаме:

$$\begin{cases} \frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1 \\ \frac{5}{x} + \frac{5}{y} + \frac{17,5}{y} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1 / \cdot (-5) \\ \frac{5}{x} + \frac{22,5}{y} = 1 / \cdot 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{60}{x} - \frac{60}{y} = -5 \\ \frac{60}{x} + \frac{270}{y} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{12}{x} + \frac{12}{y} = 1 \\ \frac{210}{y} = 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 20 \\ y = 30. \end{cases}$$

Првиот работник може сам да ја заврши работата за 20 дена, а вториот за 30 дена. **11** 40000 и 80000 евра.

12 200 кревети и 150 гости. **13** $0,6\,\ell$ и $0,4\,\ell$. **14** Нека $x = 0,56$ kg злато, а y kg сребро. Тогаш од

$x : y = 7 : 4$ следува дека $0,56 : y = 7 : 4$, т.е. $y = 0,32$ kg. Легурата има $0,56 + 0,32 = 0,88$ kg.

12 6 месеци 20 дена.

8

1 а). **2** 3. **3** а) $x = 0$; б) $y = 6$. **4** а) $\{(k, -2k - 1) \mid k \in \mathbb{R}\}$; б) $\left\{\left(k, \frac{4k - 2}{3}\right) \mid k \in \mathbb{R}\right\}$.

6 а) Да; б) не. **7** а) $\begin{cases} 2x + 3y = 15 \\ 2x - y = 4 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x - y = -3 \\ 3x - 2y = 6. \end{cases}$ **8** б). **9** $(7,3)$. **10** $(1,0)$. **11** $(1,2)$.

12 б). **13** а) $k \neq \frac{1}{2}$; б) $k = \frac{1}{2}$. **14** 16 kg. **14** 115 kg портокали и 150 kg мандарини.

9

1 б). **2** в). **3** г). **4** в). **5** а). **6** б). **7** Еднакви. **8** Бесконечно многу.

9 $\{(k, 2k + 1), k \in \mathbb{R}\}$. **10** Координатите на заедничката точка. **11** $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

12 $2x + 2y = 3$. **13** $\begin{cases} 3x - 2y = 6 \\ x - y = 1. \end{cases}$ **14** $(2,1)$. **15** 16 и 11. **16** $v_{\text{чамец}} = 62,5$ km/h, $v_{\text{река}} = 12,5$ km/h.

ТЕМА 2 КОРЕНУВАЊЕ

1

4 а) и б). **6** а) -7; б) 9; в) $|-4|=4$; г) 3.

1 б), в). **2** а) и г). **3** а) $x \geq 1$; б) за секој $x \in \mathbb{R}$; в) $6-2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$; г) за секој $x \in \mathbb{R}$; д) за секој $x \in \mathbb{R}$. **4** а) 11; б) 4; в) -4; г) 3. **5** а) $2 \cdot \frac{1}{2}+3 \cdot 5-4 \cdot \frac{1}{4}=15$; б) $13-(-5)+2=20$; в) $-2-6-(-2)=-6$. **6** а), в), г) и д). **7** а) $a \geq 0$; б) $a \in \mathbb{R}$; в) $x \geq 2$; г) $x \in \mathbb{R}$.

2

1 а) 3; в) 5. **2** б) $\frac{1}{10}$. **3** а) $a^{\frac{7}{6}}$; г) $x^{\frac{3}{8}} a^{\frac{1}{3}}$. **4** а) x^3; б) $x^{\frac{5}{3}} y^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x^5 y}$; в) $\sqrt[3]{x}$.

5 б) $\sqrt[8]{81}$, $\sqrt[12]{16}$, $\sqrt[16]{\frac{16}{81}}$. **8** а) $\sqrt[12]{4^4}$, $\sqrt[12]{3^6}$, $\sqrt[12]{2^3}$; б) $\sqrt[30]{x^{15}}$, $\sqrt[30]{x^{10} y^{20}}$, $\sqrt[30]{x^{12} y^6}$.

11 а) $\sqrt[3]{a^2}$; б) $\sqrt[4]{x^2 y}$; в) $\sqrt[3]{x^3 y^2 z^4}$. **14** а) $\sqrt[3]{8}$, $\sqrt[3]{10}$, $\sqrt[3]{43}$; б) $\sqrt{3}=\sqrt[6]{27}$, $\sqrt[3]{6}=\sqrt[6]{36}$, $\sqrt[6]{37}$.

1 а) $\sqrt[4]{x}$; б) $2\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b}$; в) $\frac{3\sqrt[3]{b^2}}{\sqrt{a}}$. **2** а) $a^{\frac{3}{4}}$; б) $\left(2a^2 b^3\right)^{\frac{1}{4}}$; в) $b^{\frac{2}{3}} a^{\frac{1}{2}}$; г) $a^2+a^{\frac{2}{3}}$.

3 а) $9^{\frac{3}{2}}=\left(3^2\right)^{\frac{3}{2}}=3^{2 \cdot \frac{3}{2}}=3^3=27$; б) $\frac{1}{2}$; в) 7; г) 64; д) $\frac{1}{4}$. **4** а) $\frac{1}{2}+\frac{3}{2}-\frac{9}{4}=-\frac{1}{4}$; б) 0;

5 а) $a^{\frac{5}{3}}$; б) $b^{\frac{7}{6}}$; в) x. **6** а) $\sqrt[3]{2}=\sqrt[9]{2^3}=\sqrt[9]{8}$; б) $\sqrt[6]{8a^3}$; в) $\sqrt[9]{8a^6 b^3}$; г) $\sqrt[12]{27a^6 b^9}$.

7 а) $\sqrt[4]{a^3}=\sqrt[12]{a^9}$ и $\sqrt[6]{a^5}=\sqrt[12]{a^{10}}$; б) $\sqrt[6]{4x^4}$ и $\sqrt[6]{ab^5}$; в) $\sqrt[12]{16a^8 b^4}$ и $\sqrt[12]{27a^6 b^3}$.

8 а) $\sqrt[6]{3^2}, \sqrt[6]{2^3}$ и $\sqrt[6]{6}$; б) $\sqrt[24]{a^4 b^2}, \sqrt[24]{a^6}$ и $\sqrt[24]{a^3 b^6}$; в) $\sqrt[24]{2^4 x^4 y^8}$, $\sqrt[24]{x^{18}}$, $\sqrt[24]{3^3 y^{15}}$.

9 а) $2^2=4$; б) $\sqrt[8]{64}=\sqrt[4]{8}$; в) 2; г) 0,1. **10** а) $\sqrt{x}$; б) $\sqrt[3]{x^2}$; в) $\sqrt{x}$; г) $\sqrt[3]{x^2}$.

11 а) $\sqrt[4]{a^2 b}$; б) $\sqrt[4]{25a^2 b^2}=\sqrt[4]{5^2 a^2 b^2}=\sqrt{5ab}$; в) $9|xy|$; г) $\sqrt[4]{4a^3 b}$.

3

2 а) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 4^3}=2 \cdot 4=8$; б) $\frac{1}{2}$. **3** а) -60; б) $-\frac{2}{3}$. **4** б) $\frac{2ab^2}{3x^2 y}$. **7** б) $4\sqrt[3]{3}$; г) $2a^2 b \sqrt[3]{9ab^2}$. **8** б) $xy^2 \sqrt[5]{x^2 y^4}$. **10** а) $\sqrt[3]{x^5}$; б) $\sqrt[4]{\frac{a^3}{b^2}}$; в) $\sqrt[3]{3a^2}$. **11** б) $\sqrt[3]{24}<\sqrt[3]{25}$; в) $\sqrt[4]{160}<\sqrt[4]{162}$.

1 а) $4\cdot 11=44$; б) $2\cdot(-3)\cdot 4=-24$; в) 13. $\sqrt{(85-84)(85+84)}=\sqrt{1\cdot 169}=13$; г) $\sqrt[5]{7\frac{19}{32}}=\sqrt[5]{\frac{243}{32}}=\frac{3}{2}$.

2 а) xy^2; б) $3x^2y^3$; в) $\frac{-2x^3}{y^2}$. **3** а) $\sqrt{108}=\sqrt{36\cdot 3}=\sqrt{6^2\cdot 3}=6\sqrt{3}$; б) $3xy\sqrt[3]{2x^2y}$; в) $\frac{2ab^2}{c^2}\sqrt{3ab}$.

4 а) $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{18}$; б) $\sqrt[4]{\frac{8}{27}}$; в) $\sqrt{a}$; г) $\sqrt{6x^3y}$. **5** а) $2\sqrt{3}=\sqrt{2^2\cdot 3}=\sqrt{12}$, $3\sqrt{2}=\sqrt{3^2\cdot 2}=\sqrt{18}$, па $2\sqrt{3}<3\sqrt{2}$; б) $5\sqrt[3]{5}<7\sqrt[3]{2}$, бидејќи $\sqrt[3]{625}<\sqrt[3]{686}$; в) $3\sqrt[3]{2}>2\sqrt[3]{3}$. **6** а) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$; б) $3\sqrt[3]{2}$; в) $ab^2\sqrt{3b}$; г) $2\sqrt{3ab}$;

д) $2\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{7}}=2\sqrt{\frac{7+2}{14}}=2\cdot 3\sqrt{\frac{1}{14}}=\frac{3}{7}\sqrt{14}$; ѓ) $\sqrt{4a^3-8a^2}=\sqrt{4a^2(a-2)}=2a\sqrt{a-2}$; е) $\frac{1}{b}\sqrt{a-b}$.

4

3 а) $2\sqrt[3]{2}$ и $3\sqrt[3]{2}$; б) $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ и $\frac{1}{3}\sqrt{5}$; в) $\frac{1}{y}\sqrt{xy}$ и $\frac{1}{x}\sqrt{xy}$. **6** а) $7\sqrt{a}$.

1 а) да; б) да; в) да, $\frac{1}{y}\cdot\sqrt[3]{xy}$; $\frac{1}{x}\sqrt[3]{xy}$; $\frac{1}{xy}\sqrt[3]{xy}$. **2** а) $\sqrt{2}$; б) 0; в) $\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{3}$; г) $\sqrt{3}$; д) $\frac{17}{4}\sqrt{2}+\frac{7}{3}\sqrt{3}$.

3 а) $3\sqrt{a}$; б) $2(a-b)^2\cdot\sqrt[3]{ab}$. **4** а) $\sqrt[4]{a}$ б) $7\sqrt{x}-5\sqrt[3]{y}$.

5

2 а) $\sqrt{6}$; б) $\sqrt[5]{x^4}$. **3** а) 6; б) $30a\sqrt[3]{3}$; в) 4; г) 3; д) 1. **4** а) $\sqrt[6]{a^2b^3}$; б) $\sqrt[6]{a^{-1}}$.

5 а) 5; б) 1; в) $2a\sqrt[6]{2x^5}$; г) $\sqrt[6]{8a}$. **7** а) 5; б) $x\sqrt[3]{9x}$; в) $\frac{a^4}{b^2}\sqrt{ab}$. **9** а) 3. **10** а) $\sqrt{2}$;

б) $\sqrt[18]{a^{13}}$. **11** а) $\sqrt[8]{2^7}$; б) $\sqrt{a}$; в) $\sqrt[18]{a^{13}}$. **1** а) 42; б) 12; в) 6. **2** а) $a\sqrt{5}$; б) $9x$; в) $30a^3$.

3 а) $\sqrt[6]{a^5}$; б) $6xy\sqrt[12]{x^2y}$; в) $2x\sqrt[12]{2x}$. **4** а) 4; б) 3; в) $\frac{3}{5}$. **5** а) $\sqrt[6]{2}$; б) $\sqrt[15]{16}$; в) $\sqrt{10}$. **6** а) $\sqrt{5}$;

б) $\sqrt[3]{3}$; в) 3. **7** а) $\frac{1}{a}\sqrt[6]{a^5}$; б) $\sqrt[6]{8a}$; в) $3a\sqrt[5]{a^3}$. **8** а) $18\sqrt{2}+42$; б) 34. **9** а) $ab^2\sqrt[8]{a^6b^5}$; б) $\frac{8}{27}$;

в) $x\sqrt[3]{9x}$; г) a^4b^6; д) a^2b; ѓ) $5+2\sqrt{6}$. **10** а) $\sqrt[8]{27}$; б) $\sqrt[4]{a}$; в) $\sqrt[8]{a^5}$; г) $\frac{1}{y}\sqrt[12]{x^5y^5}$; д) $\sqrt[18]{a^{13}}$.

6

6 а) $4-\sqrt{15}$. **7** а) $3(\sqrt{2}-1)$; б) $\sqrt{15}-2$; в) $\frac{a+\sqrt{a}}{a-1}$; г) $(a+2b)(\sqrt{a}-\sqrt{2b})$.

1 а) $\frac{4}{3}\sqrt{5}$; б) $\sqrt{2}$; в) $3\sqrt{11}$; г) $2\sqrt[3]{4}$. **2** а) $2\sqrt{b}$; б) $5a\sqrt{a}$; в) $\sqrt[3]{2x}$; г) $2\sqrt[4]{x}$. **3** а) $\frac{1}{2}\sqrt[3]{12}$;

б) $3\sqrt[4]{2}$; в) $\sqrt[4]{a}$; г) $\sqrt[5]{b^2}$. **4** а) $\sqrt{1-b}$; б) $(a-b)\sqrt{a+b}$; в) $\sqrt[3]{(a-b)^2}$. **5** а) $2+\sqrt{2}$; б) $2\left(3-\sqrt{3}\right)$;

в) $\frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)$; г) $7-4\sqrt{3}$; д) $5+2\sqrt{6}$; ѓ) $\sqrt{xy}$; е) $\frac{2}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}=\frac{2}{\sqrt{3-\sqrt{5}}}\cdot\frac{\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{3+\sqrt{5}}}=\frac{2\sqrt{3+\sqrt{5}}}{\sqrt{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}}=\sqrt{3+\sqrt{5}}.$

7

2 в) $x\in[-1,+\infty)$. **3** а) $x\geq 0$ или $x\in(0,+\infty)$; б) $3-x\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 3$ или $x\in(-\infty,-3)$;

в) $x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$ или $x\in(-3,+\infty)$. **6** в) 4; г) $\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}+\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}=\frac{\left(\sqrt{5}-1\right)^2+\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{\left(\sqrt{5}-1\right)\left(\sqrt{5}+1\right)}=3$; д) $\frac{a+b}{a-b}$.

1 а) $x+2\geq 0,\ x\geq -2$ или $x\in[-2,\infty)$; б) $x\in[-2,\infty)$, бидејќи $\sqrt{x^2+1}$ е дефиниран за секој $x\in\mathbb{R}$;

в) $x-3\geq 0$ и $5-x\geq 0,\ x\in[3,5]$; г) $x-1\geq 0$ и $x+2\neq 0,\ x\in[1,\infty)$; д) $x+2\geq 0$ и $x-3\neq 0,\ x\in[-2,3)\cup(3,\infty)$.

2 а); б). **3** а) x; б) ab; в) $\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$; г) 1; д) a; ѓ) -32; е) x. Ирационален израз е само в).

4 а) $3\sqrt{15}$; б) $10\sqrt{3}$. **5** а) 1; **6** а) $\frac{4\sqrt{ab}}{b-a}$; б) 4.

8

1 а), б) и г). **2** а) $x\in\left[-\frac{3}{2},+\infty\right)$; б) $x\in(-\infty,+2]$. **3** а) 21; б) 4. **4** а) x^4; б) $2a^4b^{-\frac{5}{6}}$.

5 а) $\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{a}\sqrt[3]{b^2}$; в) $2x+3\sqrt{y}$. **6** а) $2^{\frac{1}{4}}$; б) $4^{\frac{1}{3}}$; в) $2\left(ab^2\right)^{\frac{1}{3}}$; г) $2x^{\frac{1}{2}}-\left(x^2y\right)^{\frac{1}{3}}$. **7** а) $\sqrt[12]{x^8}$, $\sqrt[12]{x^2y^4}$ и

$\sqrt[12]{x^6y^3}$; б) $\sqrt[8]{a^4}$, $\sqrt[8]{a^4b^2}$, $\sqrt[8]{a^5b^3}$. **8** $\sqrt[4]{3}=\sqrt[12]{27}$, $\sqrt{2}=\sqrt[12]{64}$, $\sqrt[3]{3}=\sqrt[12]{81}$. **9** а) $10\sqrt{2}$; б) $2xy^2\sqrt[3]{x^2y}$; в) $\sqrt[5]{xy^2}$.

10 а) $8\sqrt{2}$; б) $x\sqrt[6]{y^5}$; в) $\sqrt[4]{b}$. **11** а) 14; б) $\sqrt[5]{xy^2}-\sqrt[5]{x^2y}$. **12** а) $\sqrt[6]{a^5}$; б) $\sqrt[12]{x^9y^4}$; в) $ab\sqrt[6]{a^5b^4}$. **13** б) и г).

14 а) $2\left(4+\sqrt{3}\right)$; б) $4-\sqrt{15}$; в) $(x+y)\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)$. **15** -115.

9

1 в). **2** в). **3** а). **4** г). **5** б), в, г). **6** n-ти корен. **7** Коренување. **8** парен.

9 Слични корени. **10** 5. **11** $\frac{1}{2}a^{\frac{7}{2}}b^{\frac{5}{2}}$. **12** $9\sqrt{a}$. **13** а) $30a^3$; б) $\sqrt[6]{8a}$. **14** $xy\sqrt[6]{y}$.

15 а) $5-\sqrt{5}$; б) $3+\sqrt{6}$.

ТЕМА 3 КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ

1

5 а) $\mathrm{Re}(z)=2,\ \mathrm{Im}(z)=3$; б) $\mathrm{Re}(z)=4,\ \mathrm{Im}(z)=-2$; в) $\mathrm{Re}(z)=2,\ \mathrm{Im}(z)=0$; г) $\mathrm{Re}(z)=0,\ \mathrm{Im}(z)=3$.

8 а) $3i$; б) $7i$. **1** а) $x=15,\ 15\in\mathbb{N}$; Равенката има решение во $\mathbb{N}$, а бидејќи $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, таа има решение и во $\mathbb{Z},\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$. б) $x=-3,\ -3\in\mathbb{Z}$; Равенката има решение во $\mathbb{Z}$, а бидејќи $\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$, таа има решение и во $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$. в) $x=-\frac{5}{4},\ -\frac{5}{4}\in\mathbb{Q}$; Равенката има решение во $\mathbb{Q}$, па и во $\mathbb{R}$. г) $x_1=\sqrt{7},\ x_2=-\sqrt{7}$; $\sqrt{7},-\sqrt{7}\in\mathbb{J}$. Равенката има решение во $\mathbb{J}$, па и во $\mathbb{R}$. **2** а) $z=-3+12i$; б) $z=10$; в) $z=2+3i$; г) $z=-4i$.

3 а) $\mathrm{Re}(z)=1,\ \mathrm{Im}(z)=-3$; б) $\mathrm{Re}(z)=3,\ \mathrm{Im}(z)=-32$; в) $\mathrm{Re}(z)=0,\ \mathrm{Im}(z)=5$; г) $\mathrm{Re}(z)=6,\ \mathrm{Im}(z)=0$.

4 а) $-z=-2-3i,\quad \overline{z}=2-3i$; б) $-z=32+32i,\quad \overline{z}=-32+32i$; в) $-z=-2,\ \overline{z}=2$; г) $-z=-53i,\quad \overline{z}=-53i$.

5 а) $\overline{\overline{z}}=\overline{(2+5i)}=2-5i=z$; б) $\overline{(-z)}=\overline{(-2+5i)}=-2-5i=-(2+5i)=-\overline{z}$. **6** а) $9i$; б) $12i$.

7 а) $x=4,\ y=3$; б) $x=2,\ y=11$; в) $x=-\frac{8}{3};\quad y=-\frac{5}{3}$; г) $x=\frac{16}{5};\quad y=-\frac{12}{5}$.

2

4 а) $z_1+z_2=25+10i,\ z_1-z_2=-1+54i$; б) $z_1+z_2=4+4i,\ z_1-z_2=4+20i$.

1 а) $z_1+z_2=8-5i,\quad z_1-z_2=11i$; б) $z_1+z_2=\frac{5}{6}-\frac{13}{8}i,\quad z_1-z_2=\frac{1}{2}-\frac{7}{8}i$; в) $z_1+z_2=4\sqrt{2}-\sqrt{3}\,i$, $z_1-z_2=-2\sqrt{2}+3\sqrt{3}\,i$. **2** а) $z+\overline{z}=20;\quad \overline{z-\overline{z}}=-2i$; б) $z+\overline{z}=1;\quad \overline{z-\overline{z}}=\frac{6}{7}i$; в) $z+\overline{z}=2\sqrt{3};\quad \overline{z-\overline{z}}=2\sqrt{5}\,i$.

3 $\overline{z_1-z_2}=-4-12i=\overline{z}_1-\overline{z}_2$. **4** $\overline{z_1+z_2}=6+i=\overline{z}_1+\overline{z}_2$.

5 а) $-\sqrt{25}-\sqrt{-36}+\sqrt{-64}+\sqrt{100}=-5-6i+8i+10=5+2i$; б) $22i$.

3

2 $z_1\cdot z_2=3-i$. **1** а) $z_1\cdot z_2=47-13i,\quad \frac{z_1}{z_2}=-\frac{43}{82}+\frac{23}{82}i$. б) $z_1\cdot z_2=-20i,\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{6}{5}-\frac{8}{5}i$. в) $z_1\cdot z_2=12+\sqrt{6}\,i,\ \frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{6}}{6}i$. **2** а) $(2+5i)^3=-142-65i$. б) $(2-6i)^4=448+1536i$. в) $(\sqrt{2}+\sqrt{3}\,i)^3=-7\sqrt{2}+3\sqrt{3}\,i$.

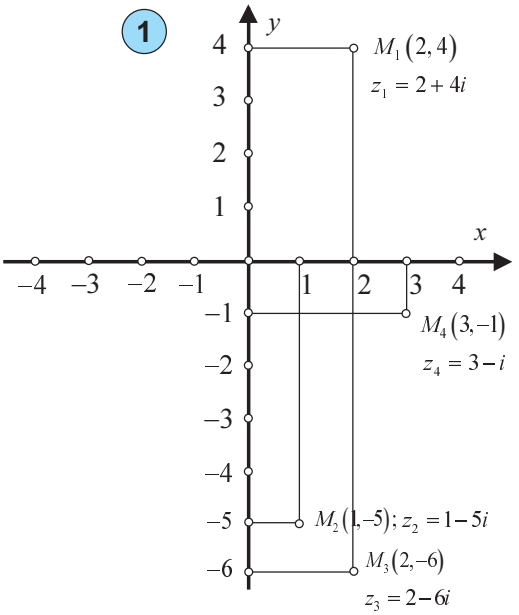
3 а) $|10-2i|=2\sqrt{26}$. б) $|1-4i|=\sqrt{17}$. в) $\left|\sqrt{3}-\sqrt{5}\,i\right|=2\sqrt{2}$. **4** $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=-\frac{1}{5}+\frac{2}{5}i=\frac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}$.

5 а) $i^{54}=i^{4\cdot13+2}=i^2=-1$. б) $i^{524}=i^{4\cdot131+0}=i^0=1$. в) $i^{-97}=i^{-4\cdot25+3}=i^3=-i$. г) $i^{-486}=i^{-4\cdot121+2}=i^2=-1$.

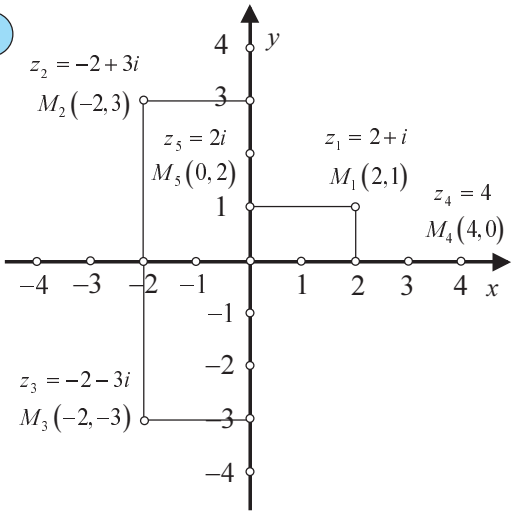
6 а) Равенката може да се запише во облик $x^2 = 16$, а оттука следува дека нејзини решенија се $x = 4$ или $x = -4$, бидејќи $4^2 = 16$ и $(-4)^2 = 16$. б) Од $(4i)^2 = 4^2 \cdot i^2 = 16 \cdot (-1) = -16$ и $(-4i)^2 = (-4)^2 \cdot i^2 = 16 \cdot (-1) = -16$, следува дека решенија на равенката $x^2 + 16 = 0$, т.е. $x^2 = -16$ се $x = 4i$ или $x = -4i$.

4

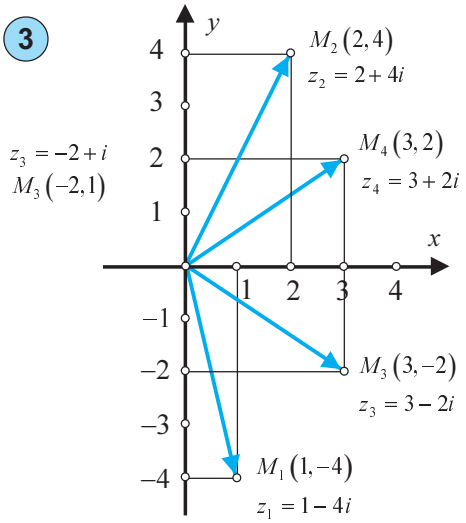
1



2



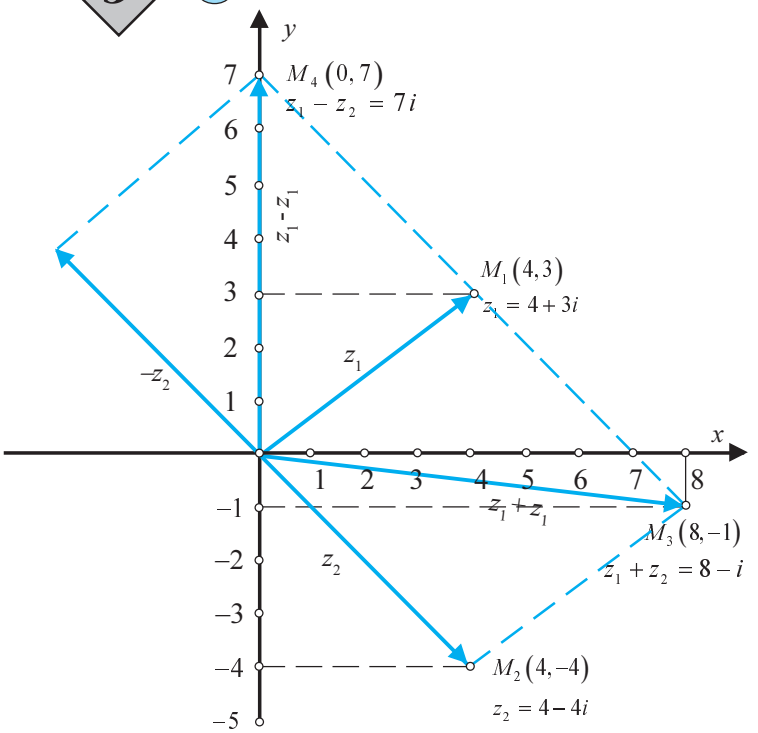
3



4 $x = -1, y = -2$.

5

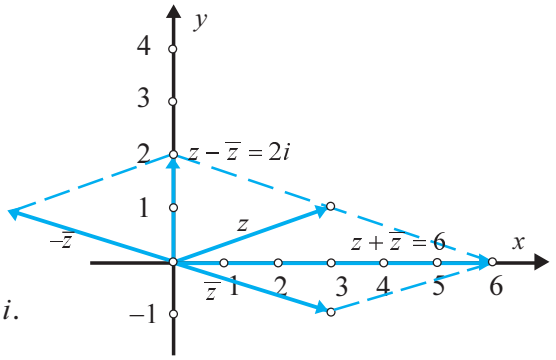
1 а) $z_1 + z_2 = 8 - i, \quad z_1 - z_2 = 7i.$



б) $z_1+z_2=6+i,\quad z_1-z_2=-2+i.$ в) $z_1+z_2=3+i,\quad z_1-z_2=-3+3i.$ г) $z_1+z_2=-i,\quad z_1-z_2=3i.$

д) $z_1+z_2=\frac{5}{6}-\frac{13}{8}i,\quad z_1-z_2=\frac{1}{2}-\frac{7}{8}i.$ ѓ) $z_1+z_2=2,\quad z_1-z_2=-4.$

Векторското определување на збирот и разликата на задачите б) - ѓ) е аналогно како во задачата под а).



2 а) $z+\overline{z}=6,\ z-\overline{z}=2i.$ Збирот на z и на $\overline{z}$ е реален број, а разликата е имагинарен број (види цртеж).

б) $z+\overline{z}=1,\quad z-\overline{z}=-\frac{6}{7}i.$ в) $z+\overline{z}=6,\quad z-\overline{z}=-10i.$

6

1 а) $|4+3i|=5.$ б) $|2+i|=\sqrt{5}.$ в) $|2i|=2.$ г) $|i|=1.$ д) $|-2i|=2.$ ѓ) $|-1|=1.$

2 а) $|z_1|=5.$ б) $|z_2|=\sqrt{10}.$ в) $z_1\cdot z_2=15+5i,\quad |z_1\cdot z_2|=5\sqrt{10}.$ г) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{9}{10}+\frac{13}{10}i,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{\sqrt{10}}{2}.$

д) $\frac{z_2^4}{z_1}=-\frac{176}{25}-\frac{468}{25}i,\quad \left|\frac{z_1}{z_2}\right|=20.$ **3** $z_1=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{10}}{2}i,\quad z_2=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{10}}{2}i.$ **4** а), б) еднакви се.

5 а) $|z|=\frac{135\sqrt{5}}{4}.$ б) $|z|=\frac{\sqrt{3}}{81}.$ **6** а) $\frac{5}{2};$ б) $\frac{\sqrt{2}}{800};$ в) $\frac{1}{1000}.$

7

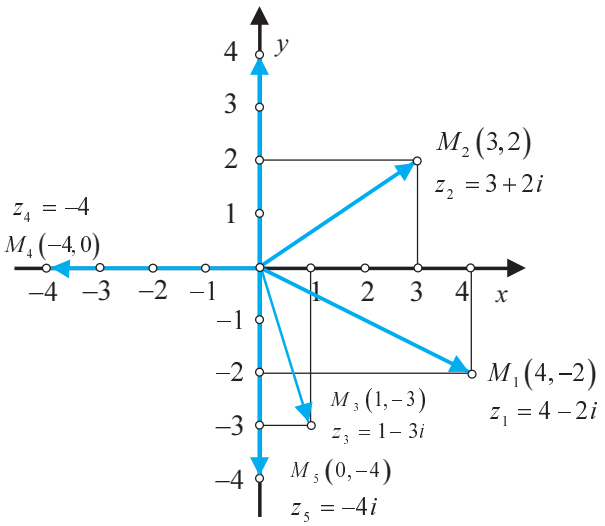
1 а) $z=-10+22i;$ б) $z=-102+25i;$ в) $z=225-3i;$ г) $z=1-i.$ **2** а) $z_1+z_2=5,\quad z_1-z_2=3+6i;$

б) $z_1+z_2=4\sqrt{2}-2\sqrt{5}i,\quad z_1-z_2=-2\sqrt{2}+8\sqrt{5}i.$ **3** а) $z_1\cdot z_2=14-2i,\quad \frac{z_1}{z_2}=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i;$ б) $z_1\cdot z_2=\sqrt{6}-15i,$

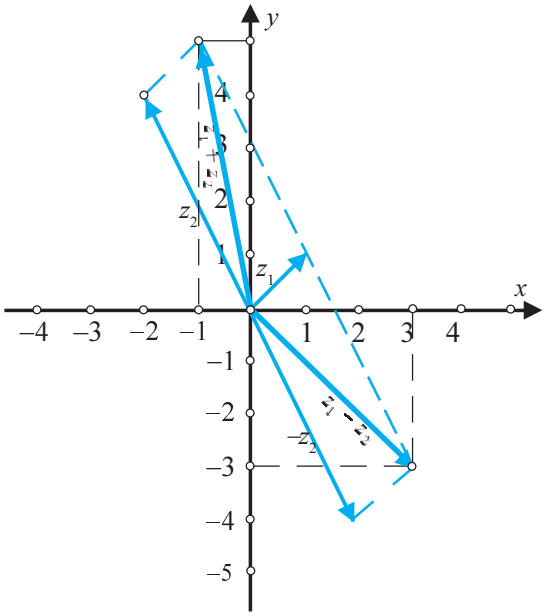
$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5\sqrt{6}}{21}-\frac{3}{7}i.$ **4** а) 0; б) 0. **5** а) $(2+i)^4=-7+24i;\quad |-7+24i|=25;$ б) $(1-4i)^3=-47+52i;$

$|-47+52i|=17\sqrt{17};$ в) $(\sqrt{3}+3i)^2=-6+6\sqrt{3}i;\quad |-6+6\sqrt{3}i|=12.$ **6** а) $\frac{444}{50}+\frac{183}{50}i;$ б) $-\frac{26}{125}-\frac{143}{125}i.$

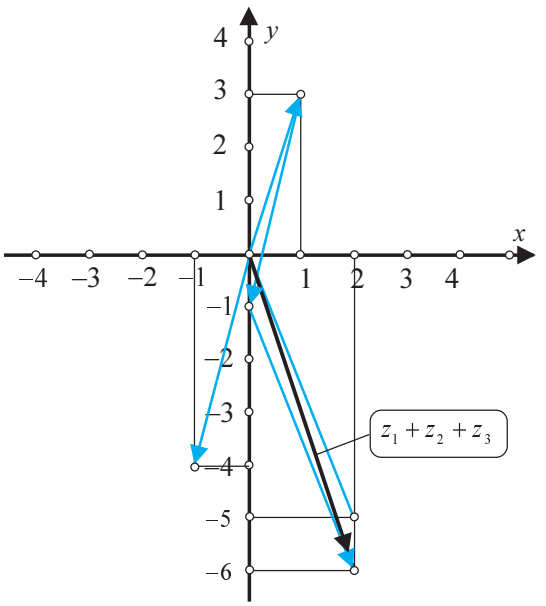
7 $z=2-3i.$ **8** Равенството е точно. **9**



10 $z_1+z_2=-1+5i, \quad z_1-z_2=3-3i.$



11 $z_1+z_2+z_3=2-6i.$ ***Упатство:*** На крајот од радиус-векторот соодветен на z_1 се нанесува почетокот на радиус-векторот соодветен на z_2, а на неговиот крај се нанесува радиус-векторот соодветен на z_3. Векторот, чиј почеток е во координатниот почеток, а крајот е во крајот на векторот z_3, е радиус-вектор на збирот $z_1+z_2+z_3$. На цртежот $z_1+z_2+z_3$ е векторот нацртан со црна боја.



8

1 в). **2** в). **3** б). **4** а). **5** б). **6** $2+3i.$

7 $\mathrm{Re}(z_1+z_2+z_3)=a_1+a_2+a_3;\ \mathrm{Im}(z_1+z_2+z_3)=b_1+b_2-b_3.$

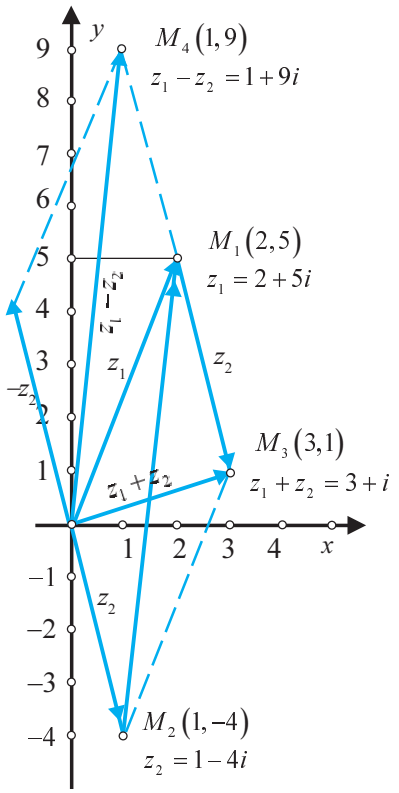
8 $|z|=\sqrt{a^2+(-b)^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$ **9** Со точка и со радиус-вектор.

10 $|z_1\cdot z_2|=|z_1|\cdot|z_2|.$

11 0. ***Упатство.*** $(1+i)^8-(1-i)^8=((1+i)^2)^4-$

$-((1-i)^2)^4=(2i)^4-(-2i)^4=0.$ **12** $z_1=5+7i; \quad z_2=7+5i.$

13 $|z|=\dfrac{512}{625}.$ **14** Решението е дадено на цртежот.



ТЕМА 4 КВАДРАТНИ РАВЕНКИ

1

2 а) $a=-3,\ b=5,\ c=-6;$ б) $a=\frac{1}{2},\ b=-\frac{2}{3},\ c=-5;$ в) $a=\frac{\sqrt{3}}{2},\ b=-0{,}5,\ c=0{,}1.$

4 а) $a=\sqrt{3}-1,\ b=0,\ c=-2\sqrt{3};$ б) $a=2\sqrt{3},\ b=\sqrt{3}-1,\ c=0;$ в) $a=3,\ b=0,\ c=0.$

6 а) $k\neq-3;$ б) $c=0,$ т.е. $c=-k+2=0,\ k=2.$ **7** б) $x^2+2x-1=0,\ a=1,\ b=2,\ c=-1.$

8 а) $x^2-2x+\frac{5}{3}=0;$ б) $x^2-\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}=0;$ в) $x^2-\frac{11}{5}x=0.$ **10** $x=-\frac{1}{3}$ или $x=1.$

12 а) $m=2;$ б) $m=0.$ **1** а), б), г). **2** а) $a=3,\ b=-2,\ c=3;$ б) $a=1,\ b=-\sqrt{2},\ c=-3;$

в) $a=1,\ b=-8,\ c=0;$ г) $a=6,\ b=c=0;$ д) $a=-3,\ b=0,\ c=-2;$ ѓ) $a=k-2,\ b=3k,\ c=-2+k.$

3 а) $k=2;$ б) $k\neq2;$ в) $k=\frac{1}{2};$ г) $k=-3;$ д) $k=3.$ **4** а) $m\neq-\frac{1}{2};$ б) $m\neq-1.$

5 а) $p=-\frac{1}{2};$ б) $p=\frac{1}{2}.$ **6** а) $2x^2+5x+5=0;$ б) $x^2-9=0;$ в) $x^2-2x=0.$

7 а) $3x^2+x-14=0;$ б) $3x^2+14x+20=0.$ **8** а) $12x^2-38x-5=0;$ б) $4x^2+13x+11=0.$

9 $x_1=1,\ x_2=\frac{1}{2}.$ **10** Равенката е квадратна ако $k\neq-2.$ а) $k=0;$ б) $k=2;$ в) $k=\frac{24}{5}.$

2

2 а) $-2,\ -\frac{5}{3};$ б) $-\frac{1}{2},\ 3,\ \frac{4}{3};$ в) $0,\ -\frac{6}{5}.$ **5** а) $x_1=\frac{3}{5},\ x_2=-3;$ б) $x_1=0,\ x_2=-1;$

в) $x_1=x_2=0.$ **8** а) $x_{1/2}=\pm3;$ б) $x_{1/2}=\pm\sqrt{2};$ в) $x_{1/2}=\pm\frac{1}{2}.$ **1** а) $x_1=\frac{5}{2},\ x_2=3;$ б) $x_1=\frac{4}{3},\ x_2=\frac{4}{5}.$

2 а) $x_1=0,\ x_2=9;$ б) $x_1=5,\ x_2=-1.$ ***Упатство.*** $(x-2)^2-9=0\Leftrightarrow(x-2+3)(x-2-3)=0.$

3 а) $x_1=x_2=0;$ б) $x_1=x_2=0.$ **4** а) $x_1=0,\ x_2=\frac{2}{3};$ б) $x_1=0,\ x_2=-\frac{5}{2};$ в) $x_1=0,\ x_2=-\sqrt{3}.$

5 а) $x_{1/2}=\pm4;$ б) $x_{1/2}=\pm\frac{3}{2};$ в) $x_{1/2}=\pm\frac{5b}{2}.$ **6** а) $x_1=x_2=0;$ б) $x_1=x_2=\pm4.$ **7** а) $x_1=0,\ x_2=4;$

б) $x_1=0,\ x_2=-6.$ **8** а) $k\in(-\infty,2);$ б) $k\in(-1,3).$ ***Упатство.*** $a=k+1,\ c=k-3,\ \begin{cases}k+1>0\\k-3<0\end{cases}$ или $\begin{cases}k+1<0\\k-3>0.\end{cases}$

9 $k_1=0,\ k_2=1.$ **10** Равенката има едно решение нула $(x_1=0)$ ако $c=0.$ $c=m^2-4=0,\ m=\pm2;\ x_2=-\frac{5}{3}.$

3 **3** а) 1; б) 4; в) $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$. **1** а) $x_1=-\frac{2}{3},\ x_2=\frac{1}{2}$; б) $x_1=x_2=\frac{3}{2}$; в) нема реални решенија.

2 а) $z_1=\frac{2}{3},\ z_2=\frac{1}{2}$; б) $y_1=3,\ y_2=2$. **3** а) $x_1=0,\ x_2=\frac{3}{2}$; б) $x_1=-\frac{5}{2},\ x_2=\frac{5}{2}$; в) нема реални решенија.

4 а) $x_1=0,\ x_2=\frac{7}{2}$; б) $x_1=-3,\ x_2=2$. **5** а) $x_1=-4,\ x_2=\frac{11}{6}$; б) $x_1=0,\ x_2=\frac{10}{3}$.

6 а) $x_1=-\frac{3}{14},\ x_2=1$; б) $x_1=5,\ x_2=\frac{25}{12}$. **7** а) за $x=0$ или $x=7$; б) за $x=-3$ или $x=2$.

8 а) $x_1=\sqrt{2}+\sqrt{3},\ x_2=\sqrt{2}-\sqrt{3}$; б) $x_1=\sqrt{7},\ x_2=\sqrt{5}$. **9** а) $x_1=3a,\ x_2=2a$; б) $x_1=m+n,\ x_2=m-n$;

в) $x_1=1,\ x_2=\frac{1}{a}$.

4 **3** б) $D=48-12m$, па за $m<4$ равенката има реални и различни корени, за $m=4$ има реални и еднакви корени, а за $m>4$ нема реални решенија.

1 а) $x_1=5,\ x_2=3$; б) нема реални нули. **2** а) $D>0$, реални и различни; б) $D=0$, реални и еднакви;

в) $D<0$, нема реални решенија. **3** а) $k=\frac{9}{4}$; б) $k=3$ или $k=-3$; в) $k=6$ или $k=2$. **4** а) $k<\frac{1}{3}$;

б) $k<2$; в) $k>-\frac{9}{20}$. **5** а) $m<-2$; б) $m>1$; в) $m>\frac{9}{8}$. **6** а) $a\geq 3$; б) $a\geq\frac{1}{2}$. **7** а) За $D=0$, т.е.

$m=9$; б) за $D=0$, т.е. $m=\frac{4}{3}$ или $m=-\frac{4}{3}$. **8** а) За $k<4$ има реални и различни, за $k=4$ има реални и

еднакви, а за $k>4$ нема реални решенија; б) за $k>-\frac{16}{15}$ има реални и различни, за $k=-\frac{16}{15}$ има реални и

еднакви, а за $k<-\frac{16}{15}$ нема реални решенија; в) реални и различни за $k>-\frac{1}{8}$, реални и еднакви за $k=-\frac{1}{8}$, а

нема реални решенија за $k<-\frac{1}{8}$.

5 **1** а) $x^2+\frac{3}{2}x+\frac{7}{2}=0,\ p=\frac{3}{2},\ q=\frac{7}{2},\ x_1+x_2=-\frac{3}{2},\ x_1\cdot x_2=\frac{7}{2}$; б) $x^2-\frac{4}{3}x+\frac{1}{3}=0,\ p=-\frac{4}{3},\ q=\frac{1}{3}$;

$x_1+x_2=\frac{4}{3},\ x_1\cdot x_2=\frac{1}{3}$. **1** а) $x^2-2x+\frac{5}{3}=0,\ p=-2,\ q=\frac{5}{3}$; б) $x^2-\frac{m+2}{m}x-5=0,\ p=-\frac{m+2}{m},\ q=-5$.

2 а) $x_1+x_2=\frac{7}{2},\ x_1\cdot x_2=\frac{5}{2}$; б) $x_1+x_2=5,\ x_1\cdot x_2=0$; г) $x_1+x_2=\frac{2m+3}{m-2},\ x_1\cdot x_2=\frac{1}{m-2}$;

д) $x_1+x_2=\frac{1}{2m},\ x_1\cdot x_2=\frac{m-3}{2m}$. **3** а) $x_1=-5,\ x_2=-3$; б) $x_1=3,\ x_2=5$; в) $x_1=-4,\ x_2=-3$; г) $x_1=1,\ x_2=\frac{5}{2}$.

4 а) Да; б) да; в) не; г) не. **5** а) $x_1=-14,\ x_2=7$; б) $\frac{1}{6},\ x_2=-2$; в) $b^2-a^2,\ x_2=b+a$. **6** $k=-6$.

7 $m=-\frac{5}{2},\ x_1=-1,\ x_2=5$. **8** а) ***Решение.*** $-p=\frac{3}{4},\ q=\frac{1}{2},\ x_1x_2^2+x_1^2x_2=x_1x_2\left(x_1+x_2\right)=-p\cdot q=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$;

б) $\frac{-3p}{q}=\frac{9}{2}$; в) $p^2-2q=-\frac{7}{16}$; г) $\frac{p^2-2q}{q^2}=-\frac{7}{4}$.

6

1 а) $x^2+5x+6=0$; б) $x^2-\frac{1}{2}x+\frac{2}{3}=0$; в) $x^2+x-\frac{5}{2}=0$. **2** а) $p=-\left(-3+2\right)=1,\ q=-3\cdot 2=-6$,

$x^2+x-6=0$; б) $x^2-x-20=0$; в) $x^2+7x+6=0$. **3** а) $x^2+\frac{1}{6}x-\frac{1}{3}=0$; б) $x^2+\frac{1}{4}x-\frac{3}{8}=0$;

в) $x^2+\frac{23}{12}x+\frac{5}{6}=0$. **4** а) $x^2-5\sqrt{3}x+12=0$; б) $x^2-\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)x-\sqrt{10}=0$; в) $x^2-10x+23=0$.

5 а) $x^2-x-\frac{1}{2}=0$; б) $x^2-4x+13=0$; в) $x^2-\frac{2}{3}x+\frac{5}{9}=0$. **6** а) $x^2-\frac{a^2+b^2}{ab}x+1=0$;

б) $x^2-\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x+\frac{ab}{a^2-b^2}=0$. **7** а) $x^2-6x-3=0$; б) $x^2-6x+13=0$; в) $x^2-\frac{6}{5}x+\frac{2}{5}=0$. **8** $\frac{91}{32}$.

9 ***Решение.*** $x_1^2+x_2^2=\left(x_1+x_2\right)^2-2x_1x_2=p^2-2q,\ p^2-2q=12$, т.е. $16-2m=12$, па $m=2$.

10 Од $x_1+x_2=m+1$ и $x_1=2x_2$ имаме $x_2=\frac{m+1}{3}$, т.е. $x_1=\frac{2m+2}{3}$. Од $x_1\cdot x_2=m+3$, ја добиваме равенката

$\frac{m+1}{3}\cdot\frac{2m+2}{3}=m+3$, т.е. $2m^2-5m-25=0$, од каде што $m=5$ или $m=-\frac{5}{2}$.

7

5 а) $x_1=2,\ x_2=4$; б) $x_1=2,\ x_2=-1$, но $x_2=-1$ не е решение бидејќи во тој случај равенката не е дефинирана.

1 53 и 70. **2** 18 и 19 или -18 и -19. **3** 7 cm. **4** а) Да, 3, 4 и 5; б) да, 6, 8 и 10; в) не.

5 а) $x_1=2,\ x_2=4$; б) $x_1=2$. ($x_2=-1$ не е решение бидејќи не припаѓа на дефиниционото множество).

6 Имало 10 ученици. ***Упатство.*** $\frac{6000}{x-2}-\frac{6000}{x}=150$. **7** Првиот работник за 25 дена, а вториот за 20 дена.

Упатство. $\frac{15}{x}+\frac{8}{x-5}=1$. **8** 65 km/h, а вториот 50 km/h. ***Упатство.*** $\frac{650}{x}+3=\frac{650}{x-15}$.

8

1 в). **2** $[1,\infty)$. **3** в). **4** в). **5** в). **6** в). $x_1=2,\ x_2=-2$; б) $x_1=0,\ x_2=-b$; в) $x_1=1,\ x_2=-1$. **7** а) $x_1=0,\ x_2=-\frac{5}{2}$; б) $x_1=5,\ x_2=-\frac{4}{5}$. **8** а) $D>0$, реални и различни; б) $D=0$, реални и еднакви; в) нема реални решенија. **9** а) $x^2+14x+45=0$; б) $x^2+\frac{1}{8}x-\frac{15}{32}=0$.

10 а) $2m-6=0,\ m=3$; б) $m=\frac{1}{3}$. **11** а) $D=0,\ m=25$; б) $m=3$ или $m=-3$. **12** а) $x_1=4,\ x_2=2$;

13 7, 9 и 11. ***Упатство.*** Нека најмалиот број е x. Тогаш другите се $x+2$ и $x+4$. Од условот на задачата ја ја добиваме равенката $x^2+(x+2)^2+(x+4)^2=251$, т.е. $x^2+4x-77=0$, од каде што $x_1=7,\ x_2=-11$. Бидејќи $x_2\in\mathbb{N}$, бараните броеви се 7, 9 и 11. **14** ***Упатство.*** Ако x е поголемата страна на правоаголникот, тогаш помалата е $x-6$, па од $x^2+(x-6)^2=30^2$ следува дека $x=24$. Плоштината на правоаголникот е $24\cdot18$, а на квадратот е $3\cdot24\cdot18=36^2$. Страната на квадратот е 36 cm. **15** $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-8}\right)\cdot3=1,\quad x^2-14x+24=0$. Оттука добиваме $x_1=12,\ x_2=2$. Важи само решението $x_1=12$, па низ иглата A растворорот ќе протече за 12 часа.

16 $x+\frac{1}{x}=\frac{40001}{200},\quad 200x^2-40001x+200=0$. Напонот е 200 волти. **17** Приносите се 9, 12 и 15 тони.

9

1 в). **2** 1. **3** Помала од нула. **4** а). **5** в). **6** а) $x_1=1,\ x_2=-1$; б) нема реални решенија. **7** а) $x_1=0,\ x_2=24$; б) $x_1=0,\ x_2=-25$. **8** а) $x_1=x_2=\frac{1}{2}$; б) $x_1=-1;\ x_2=-12$.

9 а) $D<0$, нема реални решенија; б) $D=0$, реални и еднакви; в) $D>0$, реални и различни.

10 а) $p=-(16-1)=-15,\ q=16\cdot(-1)=-16,\ x^2-15x-16=0$; б) $x^2-\frac{9}{10}x+\frac{1}{5}=0$. **11** а) $x_1=25,\ x_2=3$; б) $x_1=0,\ x_2=4$; в) ***Упатство.*** Равенката ја множиме со x^2-4 $(x\neq\pm2)$ и добиваме $x^2+3x+2=0$. Корените на оваа равенка се $x_1=-1,\ x_2=-2$, но бидејќи $x_2\notin D$, решение на равенката е само $x=-1$.

12 Од $x(30-x)=144$ следува дека $x^2-30x+144=0$, а броевите се 24 и 6.

13 ***Решение.*** Нека x е бројот на шахистите. Тогаш бројот на одиграните партии е $\frac{x(x-1)}{2}=120$. Оттука следува дека $x^2-x-240=0$, т.е. $x=16$. Значи, на турнирот учествувале 16 шахисти.

14 Равенката има еднакви решебија ако $D=0$. а) $m^2-4\cdot36=0,\ m=\pm12$; б) $m=\frac{9}{20}$.

ТЕМА 5 КВАДРАТНА ФУНКЦИЈА. КВАДРАТНА НЕРАВЕНКА

1 4

Координатите на точките ги заменуваме во даденото равенство и добиваме:

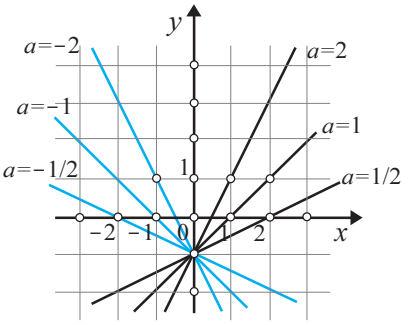
$\begin{cases} 4+2b+c=0 \\ 9-3b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2b-c=4 \\ -3b+c=-9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ c=-6 \end{cases}$, па функцијата е $f(x)=x^2+x-6$.

1 а)

x	0	2
$x-1$	-1	1
$2x-1$	-1	3
$\frac{1}{2}x-1$	-1	0

б)

x	0	2
$-x-1$	-1	-3
$-2x-1$	-1	-5
$-\frac{1}{2}x-1$	-1	-2



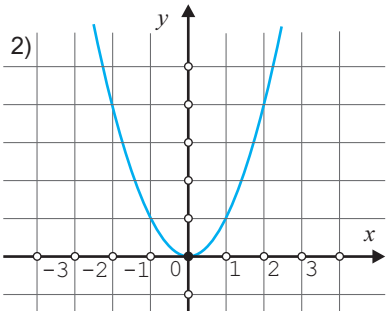
2 а) $\begin{cases} a\cdot 0+b=1 \\ a\cdot(-1)+b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$, па $y=2x+1$; б) $y=-2x+4$.

3 а), б) и г). **4** а) $V_f=\{-1,0,3,8\}$; б) $V_f=[-1,8]$. **5** а) $f(0)=2\cdot 0^2-5\cdot 0+3=3$; б) 0; в) 21; г) 0.

6 1)

x	-3	-2	-1	$-0,5$	0	0,5	1	2	3
x^2	9	4	1	0,25	0	0,25	1	4	9

2)



3) а) $f(-3)>f(-2)$; б) $f(-2)>f(1)$; в) $f(x_1)>f(x_2)$; $f(x_1)<f(x_2)$.

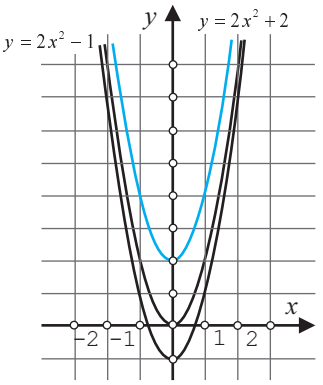
7 а) Од $2=1^2+m\cdot 1+4$ добиваме $m=-3$; б) $m=3$; в) $m=5$. **8** а) $m\neq -2$; б) $m\in\mathbb{R}$; в) $m\neq -2$ и $m\neq 2$.

9 а) $b=3,\ c=2$; б) $b=-1,\ c=4$. **10** $a=1,\ b=-2,\ c=3$. **11** ***Решение.*** Нека $x+1=t$. Тогаш $x=t-1$, па $f(t-1)=(t-1)^2-3(t-1)+2=t^2-2t+1-3t+3+2=t^2-5t+6$. Значи, $f(x)=x^2-5x+6$.

12 $f(c-1)=(c-1)^2+c-1+c=c^2-2c+1+c-1=c^2$.

2 5

а) Графикот е претставен на цртежот. б) својаствата се:



За $y=2x^2-1$: **1)** $D_f=\mathbb{R}$; **2)** $T(0,-1)$; **3)** $a=2>0$, $y_{\min}=-1$, за $x=0$;

4) графикот е симетричен во однос ординатната оска.

За $y=2x^2+2$: **1)** $D_f=\mathbb{R}$; **2)** $T(0,2)$; **3)** $a=2>0$, $y_{\min}=2$, за $x=0$;

4) графикот е симетричен во однос ординатната оска.

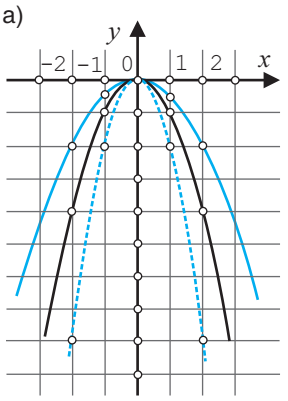
1 а)

x	0	±1	±2
$-x^2$	0	-1	-4
$-2x^2$	0	-2	-8
$-\frac{1}{2}x^2$	0	$-\frac{1}{2}$	-2

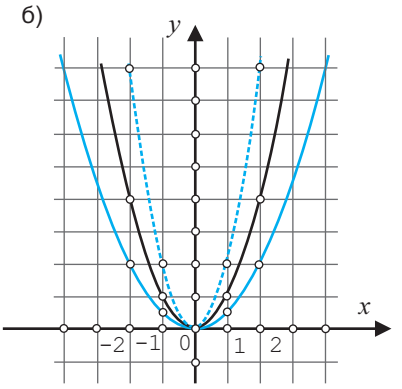
б)

x	0	±1	±2
x^2	0	1	4
$2x^2$	0	2	8
$\frac{1}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}$	2

а)



б)

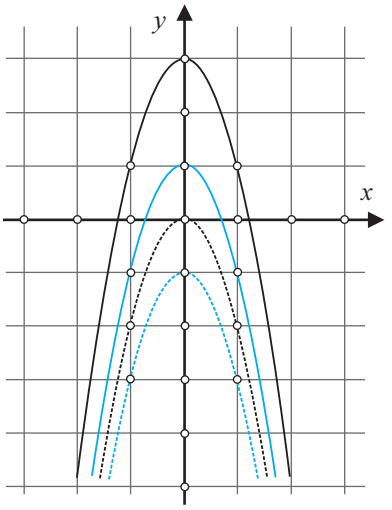


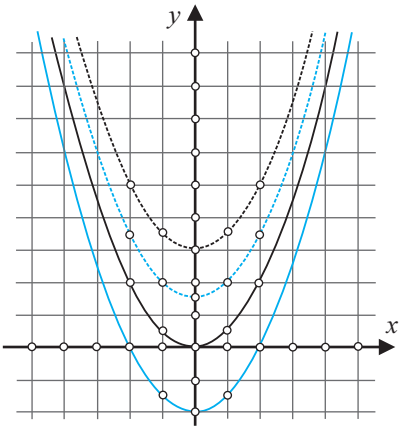
2

x	0	±1	±2
$-2x^2$	0	-2	-8
$-2x^2+1$	1	-1	-7
$-2x^2-1$	-1	-3	-9
$-2x^2+3$	3	1	-5

3

x	0	±1	±2
$\frac{1}{2}x^2$	0	$\frac{1}{2}$	2
$\frac{1}{2}x^2-2$	-2	$-\frac{3}{2}$	0
$\frac{1}{2}x^2+3$	3	$\frac{7}{2}$	5
$\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{7}{2}$





4 а) $T(0,2)$, $V_f=(-\infty,2]$, $y_{\max}=2$; б) $T(0,-3)$, $V_f=[-3,+\infty)$, $y_{\min}=-3$. **5** а) $T(0,-4)$, $V_f=[-4,+\infty)$, $y_{\min}=-4$; б) $T(0,3)$, $V_f=(-\infty,3]$, $y_{\max}=3$. **6** а) $T\left(0,\frac{1}{2}\right)$, $V_f=\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$, $y_{\min}=\frac{1}{2}$; б) $T(0,-3)$, $V_f=(-\infty,-3]$, $y_{\max}=-3$. **7** а) $a=-\frac{1}{2}$, $c=2$; б) $a=2$, $c=-\frac{3}{2}$. **8** $y=x^2-4$.

9 а) $y=ax^2-2$; б) $y=ax^2+3$. **10** а) За 1 единица нагоре; б) за 3 единици нагоре; в) за 4 единици надолу.

3 **2** Нацртај го графикот на функцијата $y=-\frac{1}{2}x^2$ и помести го: а) за една единица надесно; б) за две единици налево.

1 а) $T(2,0)$; б) $T(-3,0)$; в) $T(1,2)$; г) $T(-3,-2)$. **2** а) Нацртај го графикот на функцијата $y=2x^2$ и

помести го за 3 единици налево; б) графикот на функцијата $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ транслатирај го надесно за 2 единици; в) графикот на функцијата $f(x)=\frac{1}{2}x^2$ помести го надесно за $1\frac{1}{2}$ единици.

3 а)Параболата $f(x)=-\frac{1}{2}x^2$ помести ја за 3 единици налево; б) параболата $y=-2x^2$ помести а за една единица налево; в) параболата $y=-\frac{3}{2}x^2$ помести ја за 0,5 единици надесно. **4** а) Нацртај ја параболата $y=x^2$, а потоа помести ја за 2 единици надесно, односно 3 единици налево; б) исто како под а), само што одве ќе ја поместуваш параболата $y=-x^2$. **5** а) Нацртај го графикот на ункцијата $y=-x^2$, а потоа помести го за три единици надесно и четири единици надолу; б) графикот на функцијата $y=-\frac{1}{2}x^2$ помести о за 2 единици налево и една единица надолу; в) ***Упатство.*** $y=x^2-2x+4=x^2-2x+1+3=(x-2)^2+3$. Значи, графикот на функцијата $f(x)=x^2$ ќе го поместиш за две единии надесно и три единици нагоре. **6** а) $T(3,0)$, $x=3$, $y_{\min}=0$; б) $T(-3,0)$, $x=-3$, $y_{\max}=0$; в) $T(2,3)$, $x=2$, $y_{\min}=3$. **7** а) За една единица кон негативната насока на x-оската; б) за четири единици кон негативната насока на x-оската; в) за една единица кон позитивната насока на x-оската. **8** а) За три единици кон позитивната насока на y-оската; б) за пет единици надолу; в) за четири единици налево и четири единици нагоре. **9** а) $a=2$, $\alpha=3$; б) $a=-\frac{1}{2}$, $\alpha=-2$.

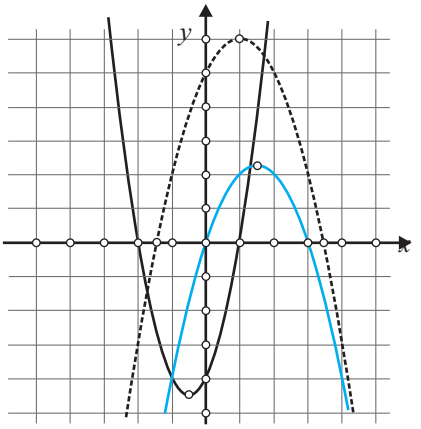
10 а) $f(x)=\frac{1}{2}x^2$; б) $f(x)=-2x^2+5$; в) $f(x)=-2(x+2)^2$.

4

1 а) $T(1,-1)$; б) $T(2,8)$; в) $T\left(6,-\frac{7}{2}\right)$. **2** а) $y=(x-1)^2-1$; б) $y=\frac{1}{2}(x-2)^2$; в) ***Решение.*** $f(x)=x^2-5x+4=\left(x^2-2\cdot\frac{5}{2}x+\frac{25}{4}\right)+4-\frac{25}{4}=\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{9}{4}$; г) $y=-2(x+1)^2+2$. **3** а) Нацртај го графикот на функцијата $y=x^2$ и помести го за за две единици надесно и три единици нагоре; б) параболата $y=-x^2$ помести ја за две единици налево и четири единици нагоре; в) параболата $y=\frac{1}{2}x^2$ помести ја за една единица надесно и $\frac{3}{2}$ единици нагоре. **4** ***Упатство.*** Дадените функции запиши ги во каноничен облик: а) $y=(x-1)^2+1$; б) $y=-(x+1)^2+2$; в) $y=\frac{1}{2}(x+2)^2+6$. Понатаму постапи слично како во претходната задача.

5 Карактеристичните точки се темето на параболата и пресеците на параболата со координатните оски.

а) $a=-1,\ b=3,\ y=0,$ па според $T\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right),$ темето на параболата е $T\left(\frac{3}{2},\frac{9}{4}\right).$ За $x=0,\ y=0,$ па параболата ја сече s-оската во точката $(0,0).$ За $y=0$ имаме: $-x^2+3x=0,\ -x(x-3)=0,$ т.е. $x_1=0,\ x_2=3,$ па $(0,0)$ и $(3,0)$ се пресеците на параболата со x-оската. б) Темето е $T\left(-\frac{1}{2},-\frac{9}{2}\right),$ нули се $x_1=-2,\ x_2=1,$ а пресекот со y-оската е точката $(0,-4).$ в) $T(1,6);\ x_1=1-\sqrt{6},\ x_2=1+\sqrt{6},\ (0,5).$ Графиците на трите функции се прикажани на цртежот, и тоа: а) сина боја; б) црна боја; в) испрекината црна боја.



6 ***Упатство.*** Графикот нацртај го со помош на карактеристични точки. а) $T(2,0)$ е теме на параболата, $A(0,4)$ пресекот на параболата со y-оската, а $A_1(4,4)$ е точка од параболата што симетрична со точката A во однос на оската на параболата; б) $T\left(-1,\frac{9}{2}\right),\ A(0,4),\ A_1(-2,4),\ B(-4,0),\ C(2,0).$ в) $T(1,2),\ A(0,3),\ A_1(2,3).$ Параболата не ја сече x-оската, значи дека со отворот е нагоре. Графикот нацртај го сам.

7 $p=-8,\ q=9.$ ***Упатство.*** $-\frac{b}{2a}=4,\ -p=8a,\ p=-8.$ **8** $a=\frac{1}{2},\ \alpha=3.$ **9** $a=1,\ \beta=3.$

10 $a=3,\ \alpha=4,\ \beta=2.$

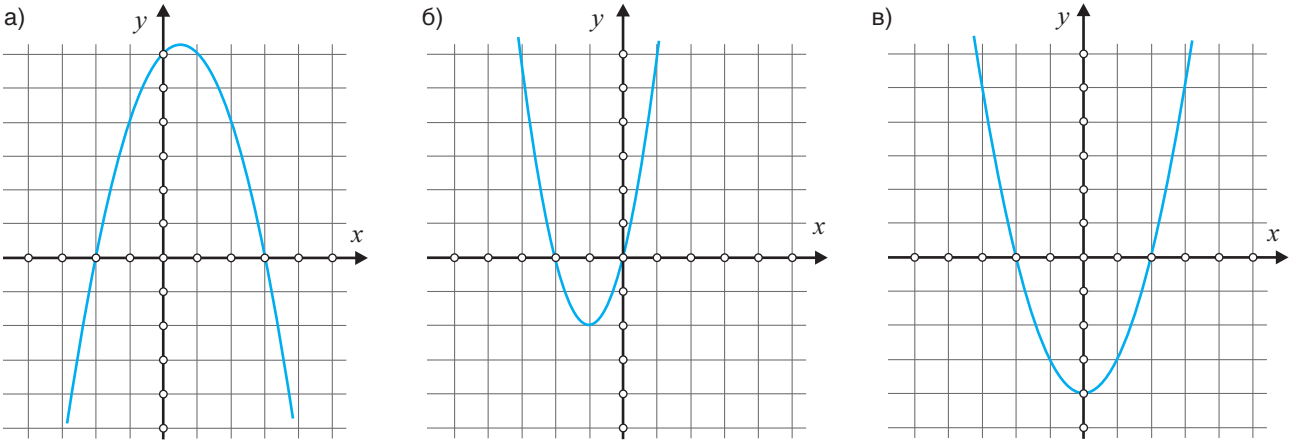
5 ▶ 6

$p=-4,\ q=3.$ ***Упатство.*** $\begin{cases}1+p+q=0\\9+3p+q=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p+q=-1\\3p+q=-9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}p=-4\\q=3.\end{cases}$

1 а) $\alpha=+4,\ \beta=-3;$ б) $\alpha=5,\ \beta=4;$ в) $\alpha=2,\ \beta=-2.$ **2** а) $\beta=\frac{9}{8},\ V_f=\left(-\infty,\frac{9}{8}\right];$ б) $\beta=-3,$ $V_f=[-3,+\infty);$ в) $\beta=-3,\ V_f=[-3,+\infty).$ **3** а) $x_1=0,\ x_2=7;$ б) $x_1=-5,\ x_2=3;$ в) $x_1=x_2=-1.$

4 $b=2,\ c=-12.$ **5** $a=-3,\ c=6.$ **6** а) Нули се $x_1=3,\ x_2=\frac{1}{2},$ а бидејќи $a=2>0,\ f(x)<0$ за $x\in\left(\frac{1}{2},3\right),$ а $f(x)>0$ за $x\in\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)\cup(3,+\infty);$ б) $a=2>0,$ нема реални нули, па $f(x)>0$ за $x\in(-\infty,+\infty);$ в) $a=-1<0,$ нема реални нули, па $f(x)<0$ за $x\in(-\infty,+\infty).$ **7** а) $x_1=x_2=3,\ a=-1<0,\ f(x)<0$ за $x\in\mathbb{R}\setminus\{3\};$ б) $x_1=0,\ x_2=3,\ a=2>0,\ f(x)<0$ за $x\in(0,3),$ а $f(x)>0$ за $x\in(-\infty,0)\cup(3,+\infty);$ в) $x_1=x_2=-\frac{1}{2},\ a=2>0,\ f(x)>0$ за $x\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}.$ **8** а) Нули се $x_1=-1,\ x_2=5,\ a=1>0,\ f(x)<0$ за $x\in(-1,5);$ б) $x_1=-\frac{2}{5},\ x_2=1,\ a=5>0,\ f(x)<0$ за $x\in\left(-\frac{2}{5},1\right);$ в) $x_1=0,\ x_2=3,\ a=3>0,\ f(x)<0$ за

$x \in (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$. **9** Графиците на дадените функции се претставени на цртежот.



а) **1)** $D_f = \mathbb{R}$; **2)** теме $T\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{4}\right)$; **3)** оската е $x = \frac{1}{2}$; **4)** преск со y-оската е точката $A(0,6)$, а пресеци со x-оската се точките $B(-2,0)$ и $C(3,0)$; **5)** $y_{\max} = \frac{25}{4}$; **6)** $V_f = \left(-\infty, \frac{25}{4}\right]$; **7)** $f(x) > 0$ за $x \in (-2,3)$, а $f(x) < 0$ за $x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$. б) **1)** $D_f = \mathbb{R}$; 2) $T(-1,-2)$; **3)** $x = -1$; **4)** $A(0,0)$, $B(-2,0)$, $C(0,0)$; **5)** $y_{\min} = -2$; **6)** $V_f = [-2, +\infty)$; **7)** $f(x) < 0$ за $x \in (-2,0)$, а $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$. в) **1)** $D_f = \mathbb{R}$; **2)** $T(0,-4)$; **3)** $x = 0$; **4)** $A \equiv T$, $B(-2,0)$, $C(2,0)$; **5)** $y_{\min} = -4$; **6)** $V_f = [-4, +\infty)$; **7)** $f(x) > 0$ за $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, а $f(x) < 0$ за $x \in (-2,2)$. **10** $x = \alpha = -\frac{6}{-2} = 3$; $\frac{2}{-9+18+2} = \frac{2}{11}$.

6 3

а) $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$; б) $x = 3$; в) $x \in \varnothing$; г) $x \in \left(-\infty, 1-\sqrt{6}\right) \cup \left(1+\sqrt{6}, +\infty\right)$.

1 а) $x \in (-4,4)$; б) $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$; в) $x \in (-5,5)$; г) $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. **2** а) $x \in [-3,5]$; б) $x \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$; в) $x \in (-\infty, +\infty)$. **3** а) $x \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$; б) $x \in (-\infty, -3) \cup (1, +\infty)$; в) $x \in (-\infty, -1) \cup (4, +\infty)$.

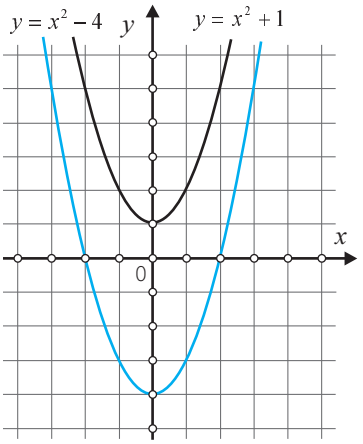
4 а) $2x^2 - x - 1 \geq 0$, $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty)$; б) $2x^2 - 5x - 3 < 0$, $x \in \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$. **5** а) $x \in \mathbb{R}$; б) $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$; в) $x = -5$; г) $x \in \varnothing$. **6** а) $x \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup [2, +\infty)$; б) $x^2 + 8x - 9 \leq 0$, $x \in (-9,1)$. **7** а) $D_f = [0,2]$; б) $D_f = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$; в) $D_f = [-6,6]$. **8** а) За $x \neq \frac{3}{2}$, $(x-2)(3-2x) \geq 0$, $x \in \left(\frac{3}{2}, 2\right]$; б) за $x \neq -2$, $(2x-1)(x+2) < 0$, $x \in \left(-2, \frac{1}{2}\right)$; в) за $x \neq -2$, $(x-3)(x+2) \leq 0$, $x \in (-2,3]$.

9 За $k \neq -1$, $4(k-1)^2 - 4(k-1)(2k+5) \geq 0$, т.е. $k^2 - k - 6 \leq 0$, $k \in [-2,3] \setminus \{-1\}$. **10** За $k \neq \frac{2}{3}$, $4k^2 - 4k(3k-2) < 0$, т.е. $k^2 - k > 0$, $k \in (-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$.

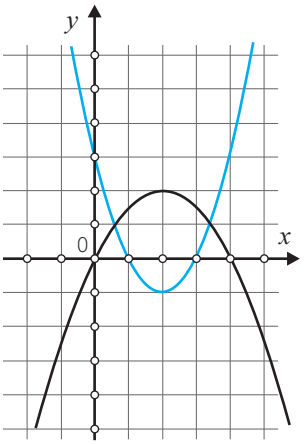
7

1 в) и г). **2** Парабола. **3** $\mathbb{R}$. **4** $(-2,0)$. **5** $x=\alpha$. **6** $-\frac{b}{2a}$. **7** Види црт. 1.

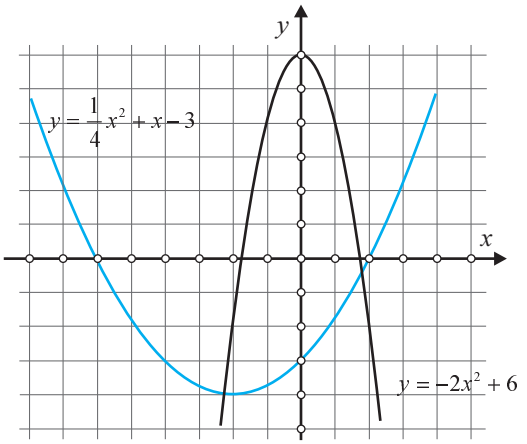
8 а) $T(1,4)$; б) $T(-2,-3)$. **9** Види црт. 2. **10** а) $a=-1,\ \alpha=2,\ \beta=1$; б) $a=2,\ \alpha=-1,\ \beta=-5$.



Црт. 1



Црт. 2

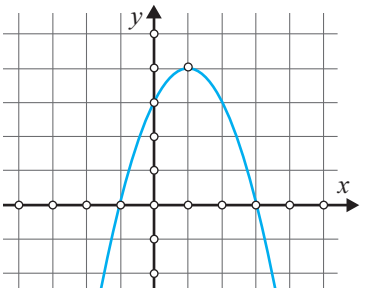


Црт. 3

11 а) $2(x+1)^2+2$; б) $(x-1)^2-1$. **12** Види црт. 3. **13** Види црт. 4.

14 а) $y_{\min}=-\frac{9}{4}$; б) $y_{\max}=11$. **15** а) $V_f=(-\infty,0]$; б) $V_f=\left[-\frac{9}{2},+\infty\right)$.

16 а) $x\in(-3,2)$; б) $x\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right]$; в) $x\in(-\infty,-4]\cup[4,+\infty)$.



Црт. 4

8

1 г). **2** $[-5,+\infty)$. **3** г). **4** а). **5** а).

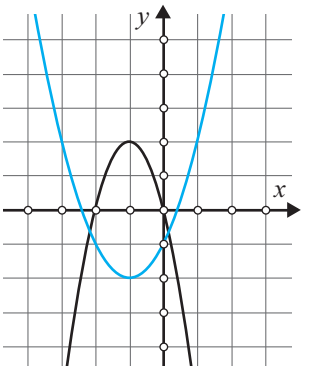
6 каноничен облик. **7** г). **8** β.

9 а) $a=-\frac{1}{2},\ c=2,\ f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2$;

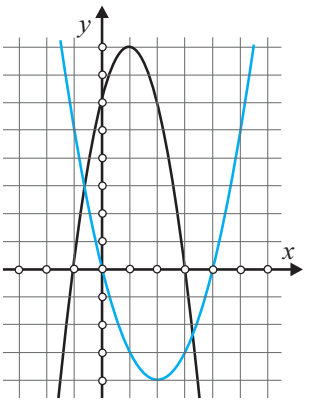
б) $a=\frac{8}{5},\ c=-\frac{7}{5},\ f(x)=\frac{8}{5}x^2-\frac{7}{5}$. **10** Види црт. 5.

11 $a=-1,\ \beta=2$. **12** Види црт. 6.

13 а) $x\in(-\infty,0)\cup\left(\frac{3}{2},+\infty\right)$; б) $x\in(-\infty,-6]\cup[1,+\infty)$.



Црт.5



Црт.6

14 $f(x)>0$ за $x\in(0,4)$; $f(x)<0$ за $x\in(-\infty,0)\cup(4,+\infty)$. **15** а) $x\in(-\infty,-4]\cup[3,+\infty)$; б) $x\in[-4,4]$.

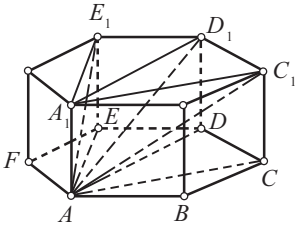
ТЕМА 6 ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА

1

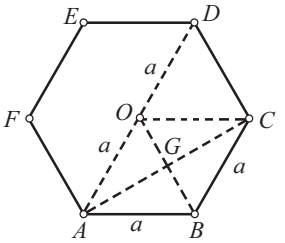
1 а) Да. б) и в). Не, зашто површините со кои се ограничени, не се многуаголници.

3 а) Правоаголници. б) Складни. в) Не. На пример, коса триаголна призма, при која два бочни раба се нормални на еден основен раб, има еден бочен ѕид што е правоаголник, но другите два бочни ѕида не се правоаголници (туку се ромбоиди или ромбови).

5 $5\sqrt{3}$ cm. **7** $84\,\text{cm}^2$. **1** $s=4;\ t=4,\ r=6.$ **2** а) $t=6,\ s=5,\ r=9,\ b=3;$ б) $t=8,\ s=6,\ r=12,$ $b=4;$ в) $t=2n,\ s=n+2,\ r=3n,\ b=n.$ **3** $5\sqrt{7}$ cm. **4** 9,5 cm. **5** а) 18. б) Дванаесет дијагонали имаат еднаква должина $2a$, а останатите 6 дијагонали имаат еднаква должина $a\sqrt{5}$. ***Упатство.*** Од темето А (цртеж) излегуваат три дијагонали: AC_1, AD_1 и AE_1, при што $\overline{AC_1}=\overline{AE_1}$ (тоа може да се докаже со помош на складност на триаголници). Притоа, $\overline{AD_1}^2=\overline{AA_1}^2+\overline{A_1D_1}^2=$ $=a^2+(2a)^2=5a^2$, па $\overline{AD_1}=a\sqrt{5}$; $\overline{AC_1}$ може да се пресмета од правоаголниот триаголник ACC_1: $\overline{AC_1}^2=\overline{AC}^2+\overline{CC_1}^2=\left(a\sqrt{3}\right)^2+a^2=4a^2$, па $\overline{AC_1}=2a.$

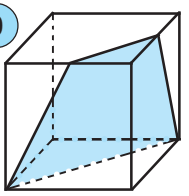


6 $L=40\,\text{cm},\ P=96\,\text{cm}^2.$ **7** Плоштината на помалиот дијагонален пресек е $Q\sqrt{3}$, а на поголемиот $2Q$. ***Упатство.*** Во правилниот шестаголник $ABCDEF$ на цртежот, четириаголникот $ABCO$ е ромб, па триаголникот AGO е правоаголен; така, $\overline{AG}=\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$ и $\overline{AC}=a\sqrt{3}.$ Од тоа што $Q=aH$, т.е. $H=\dfrac{Q}{a}$ (H е висината на призмата), за плоштината P_1 на дијагоналниот пресек ACC_1A_1 се добива: $P_1=\overline{AC}\cdot H=a\sqrt{3}\cdot\dfrac{Q}{a}$, т.е. $P_1=Q\sqrt{3}$, а за плоштината P_2 на дијагоналниот пресек ADD_1A_1: $P_2=2a\cdot\dfrac{Q}{a}$, т.е. $P_2=2Q.$



8 Правоаголник, (рамнокрак) трапез и триаголник.

9



$P=\dfrac{9}{8}\,\text{m}^2.$

2

2 а) $P=2(ab+ac+bc)$; б) $P=6a^2$; в) $P=3a^2\sqrt{3}+6aH.$

4 Воочи дека бочните рабови се нормални на основата, а висината H е еднаква со бочниот раб.

6 Коцката е специјален квадар со димензии $a=b=c$, па $V=a\cdot a\cdot a=a^3.$

1 За 1206 cm². **2** 9 m² и 1 m. **3** $V = 243\sqrt{7} \approx 643\left(\text{cm}^3\right)$, $P = 162 + 108\sqrt{7} \approx 447,7\left(\text{cm}^2\right)$. ***Упатство.*** Од $2a^2 + H^2 = 15^2$ и $a^2 + H^2 = 12^2$ се добива: $a = 9\,\text{cm}$, $H = 3\sqrt{7}$ cm. **4** $V = 2592\ \text{cm}^3$, $P = 1152\ \text{cm}^2$.

5 45 cm³. ***Упатство.*** $V = BH$, $B = 3,75\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, $H = 8\sin 60^0 = 4\sqrt{3}$ cm. **6** $\approx 5,8$ m.

7 а) $\approx 60\,\text{dm}^2$; б) ≈ 12000 ден. **8** 1012500 вреќи; 5062500 евра.

3

1 а) Рамнокраки триаголници, складни меѓу себе. б) Центар на впишаната и на опишаната кружница околу основата.

2 а) Да. б) Не мора; на пример, кај пирамида со основа правоаголник и врв чија ортогонална проекција е пресекот на дијагоналите на правоаголникот, сите бочни рабови се еднакви меѓу себе, но таа пирамида не е правилна.

4 $\overline{SA_1} = 2,5\,\text{cm}$. ***Упатство.*** Направи цртеж на правилна четириаголна пирамида $SABCD$ со паралелен пресек $A_1B_1C_1D_1$. Најди ја плоштината Q на основата $\left(Q = a^2 = 72\,\text{cm}^2\right)$, потоа, со помош на **3⁰**, растојанието H_1 од врвот до пресекот $\left(72 : 18 = 8 : H_1,\ H_1 = 2\ \text{cm}\right)$. Од ΔSOA (O е центарот на основата):

$\overline{SA}^2 = H^2 + \overline{AO}^2 = 64 + 36$, $\overline{SA} = 10$ cm и, на крајот, според својството **1⁰**, ќе добиеш $\overline{SA_1} : \overline{SA} = H_1 : H$,

$\overline{SA_1} = (10 \cdot 2) : 8 = 2,5$ cm.

6 $Q = 56\ \text{cm}^2$, $h = 2\sqrt{51}$ cm. ***Упатство.*** $Q = \frac{1}{2} d \cdot H$; $d = 28\sqrt{2}$ cm, $H = 2\sqrt{2}$ cm. **1** 16 cm².

2 $H = 35$ cm. ***Упатство.*** $H = \overline{SO_1} + 14$; $150 : 54 = \left(\overline{SO_1} + 14\right)^2 : \overline{SO_1}^2$; $5 : 3 = \left(\overline{SO_1} + 14\right) : \overline{SO_1}$, $\overline{SO_1} = 21$ cm.

3 $5\sqrt{2}\ \text{cm}^2$. **4** $25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. ***Упатство.*** Најголемиот дијагонален пресек е рамностран триаголник со страна $2a = 10$ cm. **5** а) $H = 12$; б) $h = 13$; в) $a = 40$. **6** $\frac{1}{2} a^2 \operatorname{tg} \beta$. **7** $\frac{s^2}{4}\left(= 9\,\text{dm}^2\right)$.

4

2 $M = 60\,\text{m}^2$; 48000 ден. **4** 1360 cm³. **6** $V = 96\,\text{dm}^3$; $H = \frac{2Q}{d_2} = \frac{36}{12}$, $H = 3\,\text{dm}$.

1 а) $800\,\text{dm}^2$; б) $2256\,\text{cm}^2$. **2** $B = 245\,\text{cm}^2$. ***Упатство.*** $B : (B - 200) = 7^2 : 3^2$. **3** $M = 288\,\text{cm}^2$.

Упатство. $M = \frac{3}{2} ah$; $\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = h^2 - H^2$; $a^2 = 576$, $a = 24\,\text{cm}$. **4** $M = 616\,\text{cm}^2$; $H = 12\,\text{cm}$,

$h_a = 13\,\text{cm}$, $h_b = 20\,\text{cm}$. **5** а) $P = 36\sqrt{3}\,\text{cm}^2$, $V = 18\sqrt{2}\,\text{cm}^3$; б) $P = a^2\sqrt{3}$, $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{12}$. **6** 587,4 g;

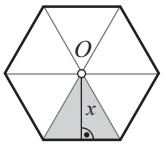
$V = 66\,\text{cm}^3$; другата катета е 4,8 cm. **7** 12000 денари; $M = 15\,\text{m}^2$. **8** $\approx 287,6$ g; $V \approx 27,36\,\text{cm}^3$, $H \approx 7,1$.

9 ≈ 40 листови лим; $M \approx 3535\,\text{dm}^2$. ***Упатство.*** $M = 2ah$, $h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + H^2$, $H = \frac{a}{2} = 25\,\text{dm}$, $h \approx 35,4\,\text{dm}$;

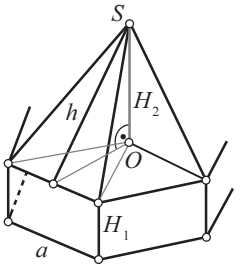
$M + 10\%M \approx 3888,5\,\text{dm}^2$; еден лист има 7 dm x 14 dm = 98 dm².

10 а) Околу 205 гледачи; б) 211,2 m².

Упатство. а) Волуменот V на арената е збир од волуменот V_1 на призмата и волуменот V_2 на пирамидата (на цртежот е претставен „дел од арената").



$x = \frac{a\sqrt{3}}{2}$



$V = V_1 + V_2 = BH_1 + \frac{1}{3}BH_2 = \frac{6a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H_1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{6a^2\sqrt{3}}{4}\cdot H_2 =$

$= \frac{3}{2}\cdot 64\cdot 3\cdot\sqrt{3} + \frac{1}{2}\cdot 64\cdot 4\cdot\sqrt{3}$, $V \approx 720,53\ \text{m}^3$. Арената може да прими околу 205 $(\approx 720,53 : 3,5)$ гледачи. б) $M = 6\cdot\frac{ah}{2}$; $h^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + H_2{}^2 = 64$, $h = 8\,\text{cm}$; $M = 192\ \text{m}^2$;

$10\%\cdot 192 = 19,2\,\text{m}^2$. Значи, за арената се набавени 211,2 m² платно.

5

2 $P = 746,28\,\text{m}^2$. ***Упатство.*** $P = B + B_1 + M$, $B = 18^2 = 324\,\text{m}^2$, $B_1 = 5,4^2 = 29,16\,\text{m}^2$;

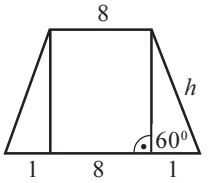
$M = 4\cdot\frac{a + a_1}{2}\cdot h$, $h^2 = s^2 - \left(\frac{a - a_1}{2}\right)^2 = 70,56$, $h = 8,4\,\text{m}$, па $M = 393,12\,\text{m}^2$.

4 $V_ц = 180\,\text{cm}^3$, $V_д = \frac{160}{3}\,\text{cm}^3$.

Упатство. Волуменот $V_п$ на потсечената пирамида е $V_п = \frac{1}{3}\cdot\left(36 + 16 + \sqrt{36\cdot 16}\right)\cdot 5 = \frac{380}{3}\,\text{cm}^3$. Од

$B : B_1 = (H + x)^2 : x^2$, т.е. $36 : 16 = (5 + x)^2 : x^2$, каде што x е висината на дополнението, се добива $x = 10$.

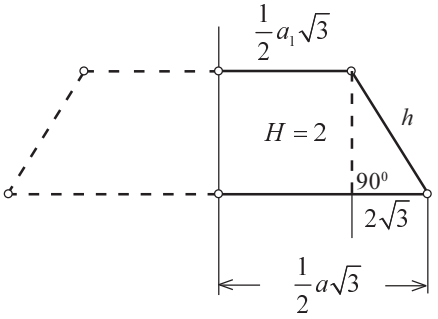
1 $P = 2592\,\text{cm}^2$. **2** $P = 236\,\text{cm}^2$. ***Упатство.*** $P = B + B_1 + M$; $B = 100\,\text{cm}^2$,



$B_1 = 64\,\text{cm}^2$, $M = 4\cdot\frac{10 + 8}{2}\cdot h$; $\frac{1}{h} = \cos 60^0$, $h = 2\,\text{cm}$; $M = 72\,\text{cm}^2$.

3 $P = 240\,\text{dm}^2$. ***Упатство.*** $M = 6\cdot\frac{a + a_1}{2}\cdot h = 60h$.

За да ја пресметаш апотемата h, избери пресек што минува низ центрите на основите и низ средините на две спротивни страни - ќе добиеш скица како на цртежот; оттука:



$h^2 = H^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{3} - \frac{1}{2}a_1\sqrt{3}\right)^2 = 2^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 16$, па $h = 4\,\text{dm}$.

4 $V = 296\,\text{cm}^3$. ***Упатство.*** Висината на потсечената пирамида е $H = 12 - x$, каде што x висина на дополнението; $B : B_1 = 12^2 : x^2$, од каде што $x = 9\,\text{cm}$, па $H = 3\,\text{cm}$.

5 $V = 210\,\text{dm}^3$. ***Упатство.*** Од $B = 72\ \text{dm}^2$ и $B_1 = 18\,\text{dm}^2$, за дијагоналите се добива: $d^2 = 2\cdot 72$ и

$d_1^2 = 2\cdot 18$, $d = 12\,\text{dm}$, $d_1 = 6\,\text{dm}$, а од $\frac{d+d_1}{2}\cdot H = 45$ се добива $H = 5\,\text{dm}$. Следствено,

$V = \frac{1}{3}\left(72+18+\sqrt{72\cdot 18}\right)\cdot 5 = 210\,\text{dm}^3$. **6** $V = 2496\,\text{cm}^3$. ***Упатство.*** $V = \frac{1}{3}\left(B+B_1+\sqrt{BB_1}\right)\cdot H$;

$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, $s = 45$ cm, $B = 240\,\text{cm}^2$ и $L = 90\,\text{cm}$. Од $L : L_1 = a : a_1$ се добива

$a_1 = (L_1\cdot a) : L = (36\cdot 40) : 90 = 16$, $a_1 = 16$ cm, а од $B : B_1 = a^2 : a_1^2$ следува дека $B_1 = \left(B\cdot a_1^2\right) : a^2 = \left(240\cdot 16^2\right) : 40^2 =$

$= 38,4\ \text{cm}^2$. **7** $V = 3,5\,\text{m}^3$. а) 25,2 t; б) 12600 евра. **8** а) $140400 : 25 = 5616\,\text{kg}$. $V \approx 5616\,\text{dm}^3$;

б) $5616 = \frac{1}{3}\left(144+900+\sqrt{144\cdot 900}\right)\cdot H$, $5616 = 468H$, $H = 12\,\text{dm}$; в) $P = B+M$; $B = 12^2 = 144\,\text{dm}^2$,

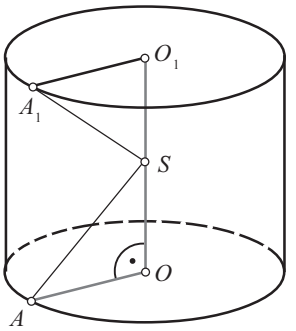
$M = 4\cdot\frac{12+30}{2}\cdot h$, $h^2 = H^2 + \left(\frac{a_1-a}{2}\right)^2 = 12^2+9^2 = 225$, $h = 15\,\text{dm}$, $M = 1260\,\text{dm}^2$, $P = 1404\,\text{dm}^2$.

9 $H \approx 181\,\text{cm}$ $\left(1\,\text{m}^3 = 10\,\text{h}\ell\right)$.

6

1 1) $r = b$, $H = a$; 2) $r = a$, $H = b$; 3) $r = \frac{b}{2}$, $H = a$. **3** $H = 5\,\text{cm}$, $r = 2,5\,\text{cm}$. **5** $56\,\text{cm}^2$.

1 25 cm. **2** Квадрат. **3** 16 cm. **4** Средината на отсечката OO_1, каде што O и O_1 се центрите на основите. ***Решение.*** Нека S е точка од отсечката OO_1, а A и A_1 се произволни точки од основите (види го цртежот). Од правоаголните триаголници AOS, A_1O_1S и од условот $\overline{SA} = \overline{SA_1}$, се добива равенството $\overline{SO}^2 + \overline{OA}^2 = \overline{SO_1}^2 + \overline{O_1A_1}^2$, од каде што $\overline{SO} = \overline{SO_1}$, т.е. S е средина на OO_1.



5 $32\sqrt{3}\,\text{cm}^2$. **6** 8 cm. **7** $40\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ $\left(\approx 70\,\text{cm}^2\right)$. **8** 90^0. ***Решение.*** $r^2\pi : 2rH = \pi : 4$, $r : H = 1 : 2$, $H = 2r$; значи, пресекот е квадрат, па дијагоналите се заемно нормални.

7

2 $r = 0,96\,\text{cm}$. **4** Околу $62\,\text{m}^2$. **6** $2r \approx 0,76\,\text{mm}$. ***Решение.*** $\pi r^2\cdot 125\cdot 8,9 \approx 500$,

$r^2 \approx \frac{4}{3,14\cdot 8,9} \approx 0,143$, $r \approx 0,378\,\text{mm}$. **8** а) Длабочината H на базенот е $H \approx 2,04\,\text{m}$; б) $\approx 348\,\text{m}^3$.

Решение. а) $r = 12,5\,\text{m}$; $\pi r^2 H = 1000$, $H = \frac{1000}{\pi r^2} \approx 2,037$, $H \approx 2,04\,\text{m}$. б) За околниот ѕид: $r_1^2\pi\cdot H - 1000 =$

$= 13^2\cdot 2,04\cdot\pi - 1000 \approx 83\ \text{m}^3$; за дното: $r_1^2\pi\cdot 0,5 = 13^2\cdot 0,5\cdot\pi \approx 265,4\,\text{m}^3$; вкупно потрошен бетон: $\approx 348\ \text{m}^3$.

1 $B = \frac{a^2}{4\pi}\left(= \frac{100}{\pi}\,\text{cm}^2 \approx 31,8\,\text{cm}^2\right)$. ***Решение.*** $B = \pi r^2$; периметарот на основата е $L = a$, т.е. $2\pi r = a$, па

$r = \frac{a}{2\pi}\left(\approx \frac{10}{\pi}\,\text{cm}\right)$.

2 Околу 1257 t. ***Решение.*** $P = 2\pi r(r+H)$, $r = 50\,\text{cm}$, $H = 450\,\text{cm}$; $P = \pi \cdot 100 \cdot 500 \approx 1507079\ \text{cm}^2$,

$P \cdot 8 \approx 1257\,\text{t}$. **3** Околу 16 t; $V \approx 18,85\,\text{m}^3$. **4** Околу 9,9 m³; $V = R^2\pi H - r^2\pi H$; $r = 0,6\,\text{m}$, $R = 0,9\,\text{m}$, $H = 7\,\text{m}$.

5 Околу 0,32 m³. ***Упатство.*** Волуменот на цилиндарот е $V_ц = \pi r^2 H = \pi \cdot 0,3^2 \cdot 6,4 \approx 1,81\ \text{m}^3$. Волуменот на

призмата е $V_п = BH = \frac{3}{2}r^2\sqrt{3} \cdot H \approx \frac{3}{2} \cdot 0,3^2 \cdot 1,73 \cdot 6,4 \approx 1,49\,\text{m}^3$, $V_ц - V_п \approx 0,32\,\text{m}^3$.

6 а) $\approx 220,5\,\text{t}$; б) ≈ 2646000 денари. **7** $\approx 36,3\%$. ***Упатство.*** $V_ц = \pi r^2 H$, $r = 14\,\text{cm}$, $H = 450\,\text{cm}$;

$V_ц \approx 277088\,\text{cm}^3$; $V_п = a^2 H$; $a^2 + a^2 = (2r)^2$, $a^2 = 392$; $V_п = 176400\,\text{cm}^3$; $V_ц - V_п \approx 100688\,\text{cm}^3$; $\frac{(V_ц - V_п) \cdot 100}{V_ц} \approx 36,3$.

8 а) Не би можел. б) $\approx 308\,\text{kg}$. в) $\approx 1\,\text{kg}$. ***Решение.*** Цевката можеме да ја замислиме

како „цилиндар во цилиндар" (цртеж), од кои оној со помал радиус е „празен". Поради тоа, волуменот на цевката е $V = V_1 - V_2$, каде што V_1 е волуменот на цилиндарот со поголем радиус $(r_1 = 220\,\text{mm} = 22\,\text{cm})$, а V_2 е волуменот на цилиндарот со помал радиус $(r_2 = 200\,\text{mm} = 20\,\text{cm})$. Должината на цевката е висина на цилиндарот, т.е. $H = 1,5\,\text{m} = 150\,\text{cm}$. Значи, $V = \pi r_1^2 H - \pi r_2^2 H =$
$= (r_1^2 - r_2^2)\pi H = (22^2 - 20^2) \cdot 150\pi = 2 \cdot 42 \cdot 150\pi \approx 39584\,\text{cm}^3$, $V \approx 39,584\,\text{dm}^3$, па масата Q на цевката е
$Q = V \cdot 7,8 \approx 308,8\,\text{kg}$. б) $P = 2\pi r_1^2 + 2\pi r_1 H + 2\pi r_2 H - 2\pi r_2^2 = 2\pi(r_1^2 + r_2^2) + 2\pi H(r_1 + r_2) = 2\pi(r_1 + r_2)(r_1 - r_2 + H) =$
$= 2\pi \cdot 42 \cdot 152 \approx 40112\,\text{cm}^2$, $P \approx 4\,\text{m}^2$; $P : 4(\text{m}^2/\text{kg}) \approx 1\,\text{kg}$ боја.

8

1 32 cm. **5** $Q = 300\ \text{cm}^2$. ***Упатство.*** $Q = r \cdot H$; $r^2 = s^2 - H^2 = 625 - 400 = 225$, $r = 15\,\text{cm}$.

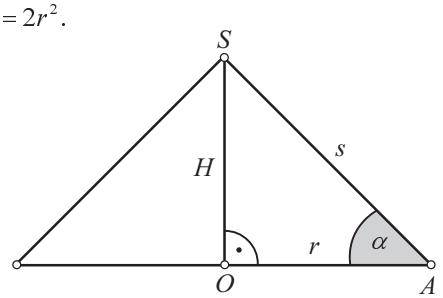
1 $Q = r^2\,(= 36\,\text{cm}^2)$. ***Упатство.*** $Q = \frac{s^2}{2}$, каде што s е катета; $s^2 = 2r^2$.

2 $Q = \frac{s^2}{2}(= 25\,\text{cm}^2)$. **3** $\alpha = 45^0$. ***Решение.*** Од $B : Q = \pi$,

каде што $B = \pi r^2$ и $Q = rH$, имаме $\pi r^2 : rH = \pi$, па $r : H = 1$,

т.е. $r = H$. Значи, правоаголниот триаголни SOA (на цртежот)

е рамнокрак, па $\alpha = 45^0$.



4 $Q = \frac{r^2\sqrt{3}}{3}(= 75\sqrt{3}\ \text{cm}^2)$. ***Упатство.*** Искористи го цртежот од задача **3**, ставајќи $\alpha = 30^0$; $Q = rH$, $\frac{H}{r} = \text{tg}\,30^0$,

$H = r \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$. **5** 20 cm. **6** 6 cm. **7** $H_1 = \frac{H\sqrt{5}}{5} \approx 0,45H$. ***Упатство.*** $B = 5B_1$; $\frac{H_1^2}{H^2} = \frac{B_1}{5B_1}$, $H_1^2 = \frac{H^2}{5}$.

8 $B_1 = \frac{4}{9}\pi r^2\,(= 16\pi\,\text{cm}^2)$. Упатство. $B_1 = \pi r_1^2$; $B : B_1 = H^2 : \left(\frac{2}{3}H\right)^2$, $\pi r^2 : \pi r_1^2 = 1 : \frac{4}{9}$, $r_1^2 = \frac{4}{9}r^2$; $B_1 = \pi \cdot \frac{4}{9}r^2$

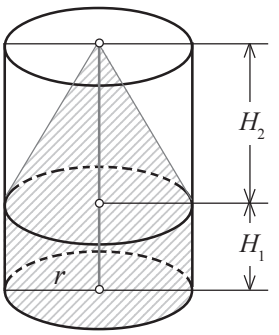
$\left(= \frac{4\pi}{9} \cdot 36 = 16\pi\,\text{cm}^2\right)$. **9** $Q = 24\,\text{dm}^2$, $H = 4,8\,\text{dm}$; триаголникот е правоаголен, бидејќи $s_1^2 + s_2^2 = (2r)^2$.

9 **3** $47,04\pi\ \text{dm}^2 \approx 147,7\ \text{dm}^2$. **6** $P = 200\pi\ \text{cm}^2$; $V = 320\pi\ \text{cm}^3$; $H = 15\,\text{cm}$, $s = 17\,\text{cm}$.

1 $s : r$; во рамностран. **2** ≈ 34 листови. ***Упатство.*** $M = \pi rs$; $r = 3\ \text{m}$, $s^2 = r^2 + H^2 = 15,25$; $s \approx 3,9\,\text{m}$; $M \approx 36,8\,\text{m}^2$; еден лист има $0,8\,\text{m} \cdot 1,5\,\text{m} = 1,2\,\text{m}^2$; $36,8 : 1,2, \approx 30,67$ плус $30,67 \cdot 10\% \approx 3,07$ листови.

3 ≈ 4825 денари. ***Упатство.*** $M = \pi rs$; $r = \dfrac{15,1}{2\pi} \approx 2,4\,\text{m}$, $s^2 = r^2 + H^2 = 16$, $s = 4\ \text{m}$; $M = \pi \cdot 2,4 \cdot 4 \approx 30\ \text{m}^2$; $M \cdot 160 \approx 4825$ денари. **4** $1 : 4$. **5** $\approx 515\,\text{g}\left(V \approx 49\ \text{cm}^3,\ H = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}\ \text{cm}\right)$. **6** $\approx 30,2\,\text{m}^3$ сено.

7 $1 : 3$. ***Решение.*** Нека H_1 и H_2 се деловите на кои висината е разделена со паралелниот пресек, а r е радиусот на основата на цилиндарот (како на цртежот). Двата дела на кои е разделен цилиндарот со бочната површина на конусот имаат волумени:



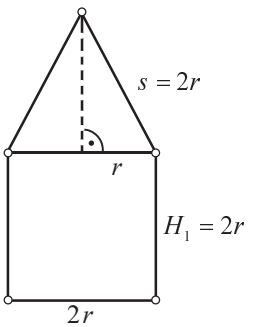
$V_1 = \pi r^2 H_1 + \dfrac{1}{3}\pi r^2 H_2$ и $V_2 = \pi r^2 H_2 - \dfrac{1}{3}\pi r^2 H_2$. Од условот $V_1 = V_2$, т.е.

$\pi r^2 H_1 + \dfrac{1}{3}\pi r^2 H_2 = \pi r^2 H_2 - \dfrac{1}{3}\pi r^2 H_2$ се добива $H_1 + \dfrac{1}{3}H_2 = H_2 - \dfrac{1}{3}H_2$, т.е.

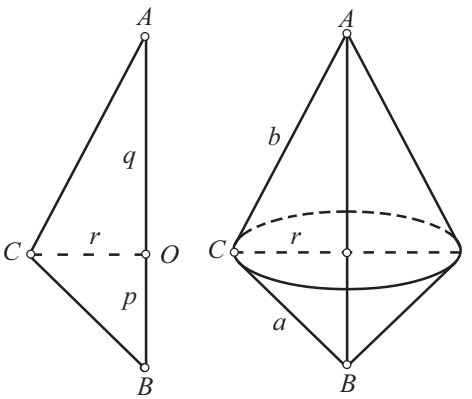
$H_1 = \dfrac{1}{3}H_2$. Според тоа, $H_1 : H_2 = 1 : 3$.

8 ≈ 67 чаши; волуменот на една чаша е $\approx 75\,\text{cm}^3$, па $5000\left(\text{cm}^3\right) : 75\left(\text{cm}^3\right) \approx 67$ (чаши).

9 а) $P = 63\pi\ \text{dm}^2$; б) $V \approx 218,6\,\text{dm}^3$. ***Упатство.*** На цртежот е претставен еден осен пресек на телото. а) Плоштината е $P = B + M_ц + M_к$, каде што B е плоштината на основата, $M_ц$ е бочната плоштина на цилиндарот, а $M_к$ е бочната плоштина на конусот. б) Волуменот V на телото е збир од волуменот $V_ц$ на цилиндарот и волуменот $V_к$ на конусот, т.е. $V = V_ц + V_к$.



10 $P = 420\pi\ \text{cm}^2$; $V = 1200\pi\ \text{cm}^3$. ***Упатство.*** Добиеното тело е составено од два конуса (види го цртежот) со радиус r еднаков на висината h_c кон хипотенузата на правоаголниот триаголник ABC, т.е. $r = h_c$. Изводницата на едниот конус е $s_1 = a = 15\,\text{cm}$, а на другиот е $s_2 = b = 20\,\text{cm}$. Од ΔABC: $c^2 = a^2 + b^2$,

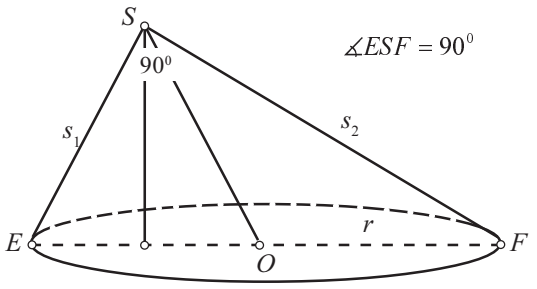


$c = 25\,\text{cm}$, а од $P_\Delta = \dfrac{ab}{2} = \dfrac{ch_c}{2}$ имаме $P_\Delta = \dfrac{15 \cdot 20}{2} = \dfrac{25 \cdot h_c}{2}$,

$r = 12\,\text{cm}$. Плоштината P на ротационото тело е еднаква на збирот од плоштините на површините добиени со ротација на отсечките AC и BC на дадениот триаголник. Според тоа $P = M_1 + M_2 = \pi r s_1 + \pi r s_2 = \pi r\left(s_1 + s_2\right) = 420\pi\ \text{cm}^2$.

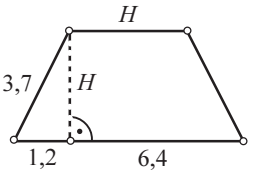
Волуменот: $V = V_1 + V_2 = \dfrac{1}{3}\pi r^2 H_1 + \dfrac{1}{3}\pi r^2 H_2 == \dfrac{1}{3}\pi r^2\left(H_1 + H_2\right) = \dfrac{1}{3}\pi r^2 c = 1200\pi\ \text{cm}^3$.

11 29 камиони. **12** $135\pi\ \text{cm}^3$. ***Решение.*** Волумемот на кос конус се пресметува со истата формула како за прав конус, т.е. $V=\frac{1}{3}B\cdot H$. Од ΔSEF: $s_1^2+s_2^2=9^2+12^2=225$, $\overline{EF}=15\,\text{cm}$, $r=7{,}5\,\text{cm}$, а од $P_{\Delta SEF}=\frac{1}{2}s_1\cdot s_2=\frac{1}{2}\cdot\overline{EF}\cdot H$, т.е. $\frac{1}{2}\cdot 9\cdot 12=\frac{1}{2}\cdot 15\cdot H$ се добива $H=7{,}2\,\text{cm}$. Така, $V=\frac{1}{3}\pi r^2 H=\frac{\pi}{3}\cdot 7{,}5^2\cdot 7{,}2=135\pi\ \text{cm}^3$.



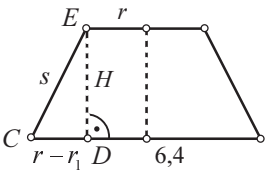
10 **2** 2 cm. **5** $M\approx 330\,\text{cm}^2$; $P\approx 722\,\text{cm}^2$. **6** $1394\pi\ \text{cm}^2$. **9** $P=257{,}6\pi\ \text{cm}^2$, $s=5{,}2\,\text{cm}$; $V=390{,}4\pi\ \text{cm}^3$. **1** $M=2\pi\left(r^2-r_1^2\right)=66\pi\ \text{dm}^2$. ***Упатство.*** $M=\pi\left(r+r_1\right)\cdot s$, $s=\frac{r-r_1}{\cos 60^0}=2\left(r-r_1\right)$.

2 $P=576\pi\ \text{cm}^2$. **3** $P=192\pi\ \text{cm}^2$; $H=4\,\text{cm}$, $s=5\,\text{cm}$. **4** 5 dm. **5** Околу $4\ \text{dm}^3$. **6** $P=216\pi\ \text{cm}^2$; $V=196\pi\ \text{cm}^3$. **7** а) $\approx 1460\,\text{g}$; б) ≈ 1095000 денари. ***Упатство.*** Според цртежот (на кој е претставен еден осен пресек на фигурата со означени димензии во cm), јасно е дека $H^2=3{,}7^2-1{,}2^2=12{,}25$, т.е. $H=3{,}5\,\text{cm}$; волуменот е $V=24{,}08\pi\ \text{cm}^3\approx$ $\approx 75{,}65\ \text{cm}^3$, масата на фигурата е $V\cdot 19{,}3\approx 1460\,\text{g}$, а цената е ≈ 1095000 денари.



8 а) $\approx 28{,}7\,\ell$ вода; б) $\approx 23{,}35\ \text{m}^2$ лим. ***Упатство.*** а) $V=\frac{\pi}{3}\left(12^2+20^2+12\cdot 20\right)\cdot 35=\frac{\pi}{3}\cdot 27440$, $V\approx 28{,}7\ \text{dm}^3$; значи, кофата собира околу $28{,}7\,\ell$ вода. б) Кофата е отворена (обично) од кај пошироката страна, па $P=B_1+M=\pi r_1^2+\pi\left(r+r_1\right)\cdot s$; $s^2=H^2+\left(r-r_1\right)^2$, $s\approx 35{,}9\ \text{cm}$; $P\approx 40{,}6\ \text{dm}^2$ лим за една кофа, а околу $20{,}30\ \text{m}^2$ за 50 кофи; за отпадокот: $20{,}30\cdot\frac{15}{100}\approx 3{,}04\ \left(\text{m}^2\right)$. Значи, вкупно набавен лим: приближно $23{,}35\ \text{m}^2$.

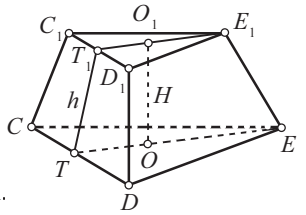
9 $P=128\pi\ \text{cm}^2$. ***Упатство.*** $r=11k$, $r_1=4k$, $s=25k$, па $P=\pi\left(r^2+r_1^2+\left(r+r_1\right)\cdot s\right)=$ $=\pi\left(121k^2+16k^2+15\cdot 25k^2\right)=512\pi k^2$. Од цртежот (на кој е претставен осен пресек на потсечениот конус): $H^2=s^2-\left(r-r_1\right)^2$, па $H=24k$. Од $V=\frac{\pi}{3}\cdot H\left(r^2+r_1^2+r\cdot r_1\right)$, т.е. од $181\pi=\frac{\pi}{3}\cdot 24k\left(121k^2+16k^2+44k^2\right)$ се добива $k^3=\frac{1}{8}$, па $k=\frac{1}{2}$ и $r=5{,}5\ \text{cm}$, $r_1=2\ \text{cm}$, $s=12{,}5\ \text{cm}$.

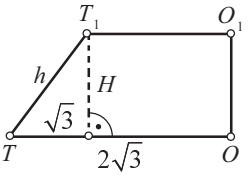


11 **1** $d=10\ \text{cm}$. **2** $H=b\sin\alpha=10\sqrt{2}\ \text{cm}$. **3** $V=121{,}5\ \text{m}^3$. ***Упатство.*** $V=B\cdot H$, $B=\frac{3}{2}a^2\sqrt{3}=13{,}5\sqrt{3}\ \text{m}^2$, $H=3\sqrt{3}\ \text{m}$. **4** За 2 часа и 30 минути. $\left(V=225\ \text{m}^2=225000\ \ell.\right)$ **5** 1 dm.

6 16,49 cm; 256 cm². **7** 21,6 m². **8** $H=1{,}2\ \text{m}$; $a=3{,}2\ \text{m}$; $V=4{,}096\ \text{m}^3$.

9 а) $54\ \text{dm}^2$; б) $21\sqrt{3}\ \text{dm}^3$. ***Упатство.*** а) $M = 3\cdot\frac{a+a_1}{2}\cdot h$,

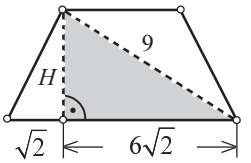




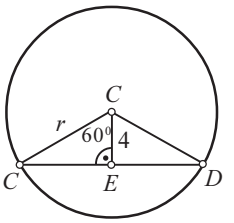
$a = 12\ \text{dm}$, $a_1 = 6\ \text{dm}$, $h^2 = H^2 + \left(\overline{TO} - \overline{T_1O_1}\right)^2$ (види цртеж)

$\overline{TO} = \frac{1}{3}\overline{TE} = \frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}\ \text{dm}$, $\overline{T_1O_1} = \frac{1}{3}\frac{a_1\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ \text{dm}$; $h = 2\ \text{dm}$.

б) $V = \frac{H}{3}\left(\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a_1^2\sqrt{3}}{4} + \frac{aa_1\sqrt{3}}{4}\right) = 21\sqrt{3}\ \text{dm}^3$. **10** $V = 109\ \text{cm}^3$. ***Упатство.*** Разгледај



го дијагоналниот пресек (на цртежот) - тој е рамнокрак трапез со основи $7\sqrt{2}$ cm и висина H; $H^2 = 9^2 - \left(6\sqrt{2}\right)^2 = 9$, $H = 3$ cm. **11** 7,5 cm. **12** $Q = 120\ \text{cm}^2$;

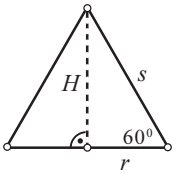


$B = 64\pi\ \text{cm}^2$. ***Упатство.*** $B = \pi r^2$, $Q = t\cdot H$; $t = \overline{CD}$ (цртеж), $r = 2\cdot\overline{OE} = 8$ cm,

$\left(\frac{t}{2}\right)^2 = r^2 - \overline{OE}^2$, $t = 8\sqrt{3}$ cm. **13** $\approx 78,5$ тони. **14** а) $\approx 41,5\ \text{m}^3$; б) $\approx 5,97\ \text{m}^3$.

Упатство. Радиусот на ископаниот бунар е $r = 0,65 + 0,40 = 1,05\ (\text{m})$.

15 $Q = 25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$. ***Упатство.*** Според цртежот: $Q = rH$; $H = s\cdot\sin 60^0 = 10\frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}$ cm;



$r = s\cdot\cos 60^0 = 5$ cm.

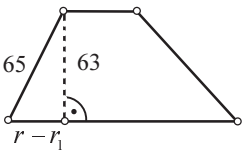
16 $h = \frac{2}{3}H$. ***Упатство.*** Искористи ја теоремата за паралелни пресеци на конус $B : B_1 = H^2 : H_1^2$; $B = 9B_1$,

па $9B_1 : B_1 = H^2 : H_1^2$; $H_1^2 = \frac{H^2}{9}$, $H_1 = \frac{H}{3}$; $h = H - H_1 = H - \frac{H}{3} = \frac{2}{3}H$.

17 $\approx 17,1\ \text{m}$ $\left(H^2 = s^2 - r^2;\ r = \frac{28,28}{2\pi} \approx 4,5\ \text{m};\ s = \frac{M}{\pi r} = \frac{250}{\pi\cdot 4,5} \approx 17,7\ \text{m}\right)$. **18** ≈ 13500 денари. ***Упатство.***

$V = 3^2\cdot 2,5\pi + \frac{1}{3}\cdot 3^2\cdot 2\pi \approx 89,535\ \text{m}^3$; $V\cdot 30 \approx 2686\ \text{kg} \approx 2,7\ \text{t}$; $2,7\cdot 5000 = 13500$ денари. **19** Околу 27 ℓ вода;

$V = 8645\pi\ \text{cm}^3 \approx 27,1\ \text{dm}^3$. **20** $r = 28$ dm, $r_1 = 12$ dm. ***Упатство.*** $M = 2600\pi\ \text{dm}^2$;



$\pi\cdot\left(r + r_1\right)\cdot 65 = 2600\pi$, $r + r_1 = 40$; $\left(r - r_1\right)^2 = 65^2 - 63^2$ (види го цртежот), т.е. $r - r_1 = 16$;

системот равенки $r + r_1 = 40$, $r - r_1 = 16$ има решение: $r = 28$ dm, $r_1 = 12$ dm.

12

1 б). **2** в). **3** в). **4** б). **5** г). **6** а). **7** растојанието (меѓу) рамнините.

8 висината (на) пропорционални. **9** квадратите (на нивните) растојанија (до) врвот.

10 рамнокрак трапез .... дијаметрите на основите ... изводницата. **11** $25200\ \text{m}^3$. **12** $H = 10$ dm;

$P = 112,5\ \text{dm}^2$; $h = 10,25$ dm. **13** 87,5 %. ***Упатство.*** $V = \pi r^2 H$; $V_1 = \pi\left(r + \frac{25}{100}r\right)^2\cdot\left(H + \frac{20}{100}H\right) =$

$= \pi r^2 (1+0,25)^2 \cdot H \cdot (1+0,2) = \pi r^2 H \cdot 1,5625 \cdot 1,2 = V \cdot 1,875 = V + 0,875V$, а $0,875V = \frac{87,5}{100}V$. **14** ≈ 35 cm.

Упатство. Волуменот на конусот е $V = \frac{\pi}{3} \cdot 12^2 \cdot 18 \approx 2714,34 \text{ cm}^3$, а волуменот на делот од цилиндарот што има течност е $2714,34 = 25\pi H_1$, па $H_1 \approx 2714,34 : 78,54 \approx 34,56$ cm. **15** а) ≈ 30 cm; б) $\approx 30 \text{ dm}^2$ лим.

Упатство.

а) $V = 15,1\ \ell = 15100 \text{ cm}^3$; $\frac{\pi}{3}\left(r^2 + r_1^2 + r \cdot r_1\right) = 15100$, $\frac{\pi}{3} \cdot 481H = 15100$, $H = 30$ cm.

б) $P = B_1 + M = 9^2\pi + \pi(9+16)s$; $s^2 = H^2 + (r - r_1)^2 = 30^2 + 7^2 = 949$, $s \approx 30,8$ cm; $P \approx 26,73 \text{ dm}^2$; отпдокот е $26,73 \cdot \frac{12}{100} \approx 3,2 \text{ dm}^2$ или, вкупно набавен лим: $\approx 30 \text{ dm}^2$.

ТЕМА 7 РЕШАВАЊЕ НА КОСОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК

1 **3** а) $(0^0, 90^0)$; б) $(90^0, 180^0)$; в) $(180^0, 270^0)$; г) $(270^0, 360^0)$. **4** а) 45^0, 225^0; б) 135^0, 315^0. **6** Одреди ги координатите на пресечните точки на координатните оски со тригонометриската кружница. а) $\sin 0^0 = 0$, $\cos 0^0 = 1$; б) $\sin 90^0 = 1$, $\cos 90^0 = 0$; в) $\sin 180^0 = 0$, $\cos 180^0 = -1$; г) $\sin 270^0 = -1$, $\cos 270^0 = 0$; д) $\sin 360^0 = 0$, $\cos 360^0 = 1$. **8** а) III или IV квадрант, т.е. $\alpha \in (180^0, 360^0)$; б) II квадрант, т.е. $\alpha \in (90^0, 180^0)$; в) III квадрант, т.е. $\alpha \in (180^0, 270^0)$. **2** а) I квадрант; б) II квадрант; в) IV квадрант; г) III квадрант; д) IV квадрант. **3** а) II квадрант; б) II квадрант; в) I квадрант; г) III квадрант; д) IV квадрант.

5 а) $\alpha = 0^0$ или $\alpha = 360^0$, па $\sin 0^0 = \sin 360^0 = 0$, $\cos 0^0 = \cos 360^0 = 1$; б) $\alpha = 180^0$, $\sin 180^0 = 0$; $\cos 180^0 = -1$; в) $\alpha = 90^0$, $\sin 90^0 = 1$; $\cos 90^0 = 0$; г) $\alpha = 270^0$, $\sin 270^0 = -1$; $\cos 270^0 = 0$; д) исто како б).

7 Позитивен: а), в) и д), а негативен: б), г) и ѓ). **8** а) $\sin 130^0 > 0$, $\cos 210^0 < 0$, па $\sin 130^0 \cdot \cos 210^0 < 0$; б) негативен; в) негативен; г) позитивен; д) позитивен. **9** а) II или IV квадрант, т.е. $\alpha \in (90^0, 180^0) \cup (270^0, 360^0)$; б) I или III квадрант, т.е. $\alpha \in (0^0, 90^0) \cup (180^0, 270^0)$.

10 Негативен: а) и в), позитивен: б) и г).

2 **2** а) $\text{ctg}\, 90^0$ не постои, бидејќи функцијата $\text{ctg}\,\alpha$ не е дефинирана за $\alpha = 90^0$; б) 1; в) $-0,57$; г) 0,57; д) -1; ѓ) -1. **3** Позитивен: б), г), д) и ѓ); негативен: а) и в). **4** в) $\sin 100^0 > 0$, $\cos 200^0 < 0$, $\sin 100^0 > 0$, $\cos 200^0 < 0$, $\text{tg}\, 300^0 < 0$, $\text{ctg}\, 150^0$, па изразот има негативна вредност. **5** в) I или II квадрант,

т.е. $\alpha \in (0^0, 90^0) \cup (90^0, 180^0)$; б) II или III квадрант, т.е. $\alpha \in (90^0, 180^0) \cup (180^0, 270^0)$; в) III или IV квадрант, т.е. $\alpha \in (180^0, 270^0) \cup (270^0, 360^0)$. **1** а) 1,73; б) –1,73; в) 0; г) 1,73; д) –0,57. **2** Позитивен: а), б) и г); негативен: в) и д). **3** а) $\sin 15^0 > 0$, $\operatorname{tg} 150^0 < 0$, па $\sin 15^0 \cdot \operatorname{tg} 150^0 < 0$; б) позитивен; в) негативен. **4** Позитивен: а), б) и в); негативен: г). **5** а) II или III квадрант, т.е. $\alpha \in (90^0, 180^0) \cup (180^0, 270^0)$; б) I или II квадрант, т.е. $\alpha \in (0^0, 90^0) \cup (90^0, 180^0)$; в) I или II квадрант, т.е. $\alpha \in (0^0, 90^0) \cup (90^0, 180^0)$.

3 **4** а) $-\frac{1}{2}$; б) –1; в) $-\sqrt{3}$. **7** а) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{8}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{15}{8}$; б) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$. **9** $\operatorname{tg}\alpha = \frac{7}{24}$, $\sin\alpha = -\frac{7}{25}$, $\cos\alpha = -\frac{24}{25}$, а вредноста на изразот е $-\frac{44}{89}$. **1** а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{-\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{35}{12}$; г) –4. **2** а) $2\sqrt{3}$; б) $\frac{2}{3}$.

3 а) $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\sin\alpha = \frac{21}{29}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{20}{21}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{21}{20}$. **4** а) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$; б) $\sin\alpha = \frac{40}{41}$, $\cos\alpha = -\frac{9}{41}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{40}{9}$. **5** $\frac{9}{5}$. **6** а) $\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\sin\alpha$; в) $\operatorname{tg}\alpha$.

7 б) $\operatorname{ctg}^2\alpha - \cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha = \frac{\cos^2\alpha - \cos^2\cdot\alpha\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha(1-\sin^2\alpha)}{\sin^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}\cdot\cos^2\alpha = \operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$.

8 а) $1+\sin\alpha+\cos\alpha+\operatorname{tg}\alpha = 1+\sin\alpha+\cos\alpha+\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\cos\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha} =$

$= \frac{\cos\alpha(1+\cos\alpha)+\sin\alpha(\cos\alpha+1)}{\cos\alpha} = \frac{(1+\cos\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)}{\cos\alpha} = (1+\cos\alpha)(1+\operatorname{tg}\alpha)$.

4 **6** а) $\operatorname{tg}115^0 = \operatorname{tg}(90^0+25^0) = -\operatorname{ctg}25^0$, $\operatorname{ctg}115^0 = \operatorname{tg}(180^0-65^0) = -\operatorname{ctg}65^0$; б) $\sin 200^0 = \sin(180^0+20^0) = -\sin 20^0$, $\cos 200^0 = \cos(180^0+20^0) = -\cos 20^0$, $\operatorname{tg}200^0 = \operatorname{tg}(180^0+20^0) = \operatorname{tg}20^0$, $\operatorname{ctg}200^0 = \operatorname{ctg}20^0$; в) $\sin 320^0 = -\sin 40^0$ или $\sin 320^0 = -\cos 50^0$, $\cos 320^0 = \cos 40^0$ или $\cos 320^0 = \sin 50^0$, $\operatorname{tg}320^0 = -\operatorname{tg}40^0$ или $\operatorname{tg}320^0 = -\operatorname{ctg}50^0$, $\operatorname{ctg}320^0 = -\operatorname{ctg}40^0$ или $\operatorname{ctg}320^0 = -\operatorname{tg}50^0$. **7** а) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$; б) $\sqrt{3}$; в) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$; **8** $\cos 35^0 = \sin 55^0$; $\operatorname{tg}83^0 = \operatorname{ctg}7^0$. **1** а) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; в) –1. **2** а) $\frac{\sqrt{3}-3}{2}$; б) $\frac{3}{2}$; в) 1. **3** а) 3; б) од $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$ следува дека $\cos\beta = \sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5}$, па $\operatorname{tg}\beta = \operatorname{ctg}\alpha =$

$=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{4}{3}$, $\frac{\operatorname{tg}\beta-\sin\alpha}{\cos\beta+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{\frac{4}{3}-\frac{3}{5}}{\frac{3}{5}+\frac{4}{3}}=\frac{11}{29}$. **4** а) $\sin 40^0$; б) $\sin 20^0\cdot\left(-\sin 20^0\right)-\cos 20^0\cdot\cos 20^0+$

$+\left(-\operatorname{ctg}20^0\right)\cdot\left(-\operatorname{tg}20^0\right)=-\sin^2 20^0-\cos^2 20^0+1=0$. **5** $2\cos^2\alpha$. **6** 1. **7** $\operatorname{ctg}40^0$.

5

2 $c=17,42;\ a=11,37;\ \alpha=49^0 15'$. **4** $c=54,67;\ \alpha=39^0 48';\ \beta=50^0 12'$.

6 $b=28,89;\ L=a+2b;\ L=76,2$ cm. **1** а) $c=19,04,\ b=11,72,\ \alpha=52^0$; б) $\beta=54^0 20',\ c=30,77,$ $a=17,94$. **2** а) $\beta=49^0 10',\ b=20,42,\ a=17,65$; б) $\alpha=24^0 30',\ a=26,13,\ b=57,33$. **3** а) $\alpha=58^0 40',\ a=21,35$ $\beta=31^0 20'$; б) $\alpha=33^0 18',\ c=41,88,\ \beta=56^0 42'$. **4** а) $\beta=67^0 23,\ \alpha=22^0 37',\ b=36,\ c=39$; б) $\alpha=46^0 24',$ $\beta=43^0 36',\ a=42,\ b=40$. **5** а) $a=10,5,\ c=15,95,\ \alpha=41^0 10',\ \beta=48^0 50'$; б) $b=9,\ c=41,\ \beta=12^0 41',$ $\alpha=77^0 19'$. **6** $\alpha=\beta=36^0 52',\ \gamma=106^0 16'$. **7** $\alpha=\beta=71^0 6',\ \gamma=\delta=108^0 54'$. **8** Висина на трапезот $h=12$ cm, $\alpha=67^0 22',\ \beta=53^0 7',\ \delta=180^0-\alpha=112^0 38',\ \gamma=180^0-\beta=126^0 53'$.

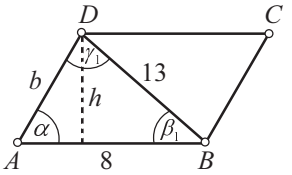
9 $H=16,38$ m. **10** $H=40,41$ m.

6

2 $\alpha=52^0 5',\ b=19,25,\ c=25,75$. **5** а) $\beta=47^0 30',\ b=9,08,\ c=10,15$; б) $\beta=71^0 53',$ $\gamma=180^0-(\alpha+\beta)=54^0 19',\ c=45,30$. Бидејќи $\beta>\alpha$ а и $b>a$, задачата има две решенија: $\beta_1=180^0-\beta=108^0 7',$ $\gamma_1=180^0-(\alpha+\beta_1)=18^0 5'$, а $c_1=17,31$; в) Од $\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}$ следува $\sin\beta=\frac{6\cdot\sin 60^0}{c}=1,3>1$, што не е можно, задачата нема решение. **1** а) $\gamma=75^0 04',\ b=19,\ c=22$; б) $\beta=45^0 43',\ a=16,33,\ c=14,15$.

2 а) $\alpha=36^0 52',\ \gamma=94^0 33',\ c=19,94$; б) Задачата нема решение, бидејќи $\sin\beta>1$; в) $\gamma=68^0 23',\ \beta=63^0 7',$ $b=17,27$. Бидејќи $\gamma>\alpha$ и $c>a$, значи задачата има две решенија. Второто решение е $\gamma_1=180^0-\gamma=111^0 37',$ $\beta_1=180^0-(\alpha+\gamma_1)=19^0 53',\ b_1=6,58$. **3** а) $\alpha=42^0,\ \beta=114^0 30',\ b=21,75$. Бидејќи $\alpha>\gamma$ и $a>c$, задачата има две решенија $\alpha_1=180^0-42^0=138^0,\ \beta_1=180^0-(\alpha_1+\gamma)=18^0 30',\ b_1=7,58$; б) $\sin\gamma=1,58>1$, што не е можно. Задачата нема решение. **4** $\beta=41^0 40',\ \gamma=52^0 35',\ a=5,7$. **5** а) $\gamma=25^0,\ a=2R\cdot\sin\alpha=46,98,\ b=49,81,$ $c=21,13$; б) Од $\frac{a}{\sin\alpha}=2R$, $\sin\alpha=\frac{a}{2R}$, $\alpha=54^0 20',\ b=12,\ \gamma=77^0 04',\ c=15,6$. **6** а) $\alpha=42^0 22',$ $\beta=37^0 29',\ \gamma=100^0 09',\ c=45,28$; б) $\beta=81^0 47'$, од $\sin\alpha=\frac{h_c}{b}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\alpha=60^0,\ \gamma=38^0 13',\ c=15,\ a=21$.

7 Од ΔABC $\dfrac{\overline{BD}}{\sin\alpha}=\dfrac{\overline{AB}}{\sin\gamma_1}$ следува $\sin\gamma_1=\dfrac{\overline{AB}\cdot\sin\alpha}{\overline{BD}}=\dfrac{8\cdot\sin 60^0}{13}$, $\gamma_1=32^0 20'$,



$\beta_1=180^0-(\alpha+\gamma_1)=87^0 48'$, $b=15$. $L=2(a+b)=2(8+15)=46$, $\sin\alpha=\dfrac{h}{b}$,

$h=b\cdot\sin\alpha=15\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{15\sqrt{3}}{2}$, $P=\overline{AB}\cdot h=8\cdot\dfrac{15\sqrt{3}}{2}=60\sqrt{3}\ \text{cm}^2$.

7

3 а) $a=77{,}14$, $\beta=30^0 38'$, $\gamma=38^0 57'$; б) $c=20{,}23$, $\beta=39^0 55'$, $\alpha=80^0 05'$.

5 а) $\alpha=107^0 15'$, $\beta=42^0 23'$, $\gamma=30^0 22'$; б) $\alpha=91^0 41'$, $\beta=47^0 37'$, $\gamma=40^0 42'$. **1** а) $b=6{,}25$; б) $c=18{,}35$.

2 а) $c=9{,}98$, $\beta=61^0 10'$, $\alpha=83^0 10'$; б) $a=13{,}15$, $\gamma=68^0 29'$, $\beta=56^0 51'$. **3** а) $\alpha=67^0 23'$, $\beta=90^0$,

$\gamma=22^0 37'$; б) $\gamma=86^0 13'$, $\beta=53^0 53'$, $\alpha=39^0 54'$. **4** $c^2=a^2+b^2-2ab\cos 120^0$, $ab=49-34=15$,

$$\begin{cases}a^2+b^2=34\\ ab=15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+b^2=34\\ 2ab=30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a^2+2ab+b^2=64\\ a^2-2ab+b^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a+b)^2=64\\ (a-b)^2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+b=8\\ a-b=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=5\\ b=3\end{cases};\ \alpha=38^0 13',\ \beta=21^0 47'.$$

5 $\alpha=57^0 25'$, $\beta=71^0 57'$, $\gamma=50^0 38'$, $a=14{,}18$. **6** а) $b=13$, $a=7$. ***Упатство.*** $\begin{cases}b^2=a^2+c^2-2ac\cos\beta\\ a+b=20\end{cases}\Leftrightarrow$

$\begin{cases}b^2=(20-b)^2+c^2-2(20-b)c\cdot\cos 60^0\\ a=20-b\end{cases}$; б) $a=7$, $c=37$. **7** а) 60^0; б) 135^0. **8** а) $t_c=7$; б) $t_c=10{,}7$.

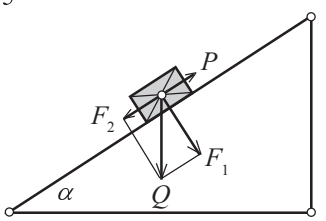
9 $\alpha=57^0 07'$, $\beta=122^0 53'$, $P=a\cdot b\sin\alpha=29{,}39$. **10** $\alpha=44^0 24'$, $\beta=34^0 02'$. ***Упатство.*** Примени ја косинусната теорема за триаголникот AD_1D, $DD_1\parallel BC$.

8

1 а) $b=5$, $L=42$, $P=ab\sin 120^0=40\sqrt{3}$; б) $a=32{,}23$, $P=379{,}77$, $L=89{,}06$.

2 $c=12{,}77$, $d=9{,}37$, $P=74{,}30$. **3** Од $d_1^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$ и $d_2^2=a^2+b^2-2ab\cos(180^0-\alpha)$ следува $d_1^2+d_2^2=2(a^2+b^2)$. **4** Од $a^2+\left(\dfrac{b}{2}\right)^2=t_b^2$ и $b^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=t_a^2$ следува $c^2=\dfrac{4(t_a^2+t_b^2)}{5}=2340$, $c=48{,}37$;

$\cos\varphi=\dfrac{\left(\frac{2}{3}t_a\right)^2+\left(\frac{2}{3}t_b\right)^2-c^2}{\frac{8}{9}t_a t_b}$, $\varphi=150^0$. **6** $P=Q\cdot\sin\alpha=132\ N$. (црт.)

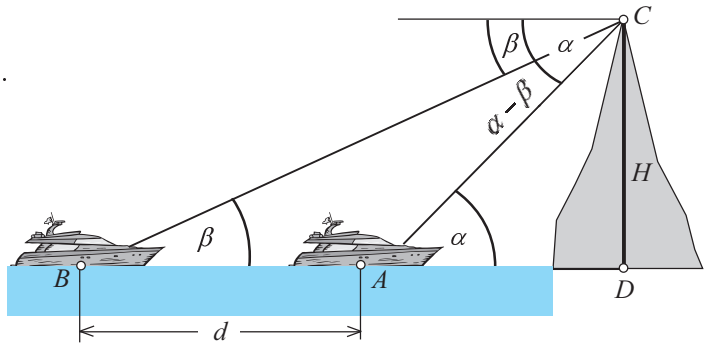


5 $\vec{R}=30{,}04$ kN, $\measuredangle(\vec{R},\vec{F}_1)=34^0 28'$, $\measuredangle(\vec{R},\vec{F}_2)=56^0 20'$.

7 $H = 168{,}5$ m; $\alpha = 24^0 18'$; $\beta = 8^0 12'$. Од $\Delta\, ADC: \sin\alpha = \dfrac{H}{\overline{AC}}$, $\overline{AC} = \dfrac{H}{\sin\alpha}$, а од

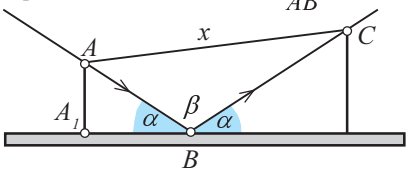
$\Delta BAC: \dfrac{d}{\sin(\alpha-\beta)} = \dfrac{\overline{AC}}{\sin\beta}$ следува дека

$d = \dfrac{H\cdot\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$, т.е. $d \approx 796$ m. **8** 84,58 m.



Цртеж за задача 7

9 Од $\Delta AA_1B: \sin\alpha = \dfrac{\overline{AA_1}}{\overline{AB}}$, $\overline{AB} = \dfrac{\overline{AA_1}}{\sin\alpha}$, а од



$\Delta ABC:\ x^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 - 2\overline{AB}\cdot\overline{BC}\cdot\cos\beta$,

$x = 27{,}18$ cm.

9

1 $240^0,\ 60^0,\ 30^0,\ 315^0,\ 150^0,\ 300^0$. **2** а) $\operatorname{tg} 72^0 > 0$; б) $\operatorname{ctg} 352^0 < 0$, $\sin\dfrac{5\pi}{6} > 0$, $\cos\dfrac{7\pi}{4} > 0$.

3 а) $\sin 120^0 > 0$, $\cos 120^0 < 0$, $\sin 120^0\cdot\cos 120^0 < 0$; б) негативен; в) позитивен; г) негативен.

4 а) $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$; б) $\cos\alpha$; в) $-\cos\alpha$. **5** а) -1; б) $\operatorname{tg}\alpha$. **6** а) $\dfrac{3}{2}$; б) -1; в) 1. **7** а) $2+\sqrt{3}$;

б) $\dfrac{1}{2}$. **8** а) $\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -\dfrac{15}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{8}{15}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{15}{8}$; в) $\sin\alpha = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \dfrac{1}{2}$, $\cos\alpha = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

$\operatorname{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$. **9** а) $\dfrac{9}{5}$; б) $\dfrac{8}{13}$. **10** а) $\sin\alpha$; б) $\cos^2\alpha$; в) 1; г) $\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$; д) $\dfrac{2}{\cos^2\alpha}$; ѓ) $\cos\beta$.

12 а) $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; в) 1; г) $-\sqrt{3}$. **13** а) $-\dfrac{3}{4}$; б) $\dfrac{\sqrt{3}+2}{2}$. **15** а) $b = 16{,}62$, $\gamma = 70^0 55'$, $c = 17{,}24$;

б) $a = 17{,}83$, $b = 21{,}57$, $\gamma = 68^0$, $c = 22{,}25$. **16** а) $c = 25{,}05$, $\alpha = 84^0 22'$, $\beta = 28^0 13'$; б) $\alpha = 82^0 49'$, $\beta = 41^0 25'$,

$\gamma = 55^0 46'$. **17** $57^0 09'$.

10

1 г). **2** а). **3** б). **4** в). **5** а). **6** б). **7** Ординатата, тригонометриската кружница. **8** Тангенсна оска. **9** Првиот, четвртиот. **10** Вториот, третиот. **11** Синусна теорема.

12 $\sin\alpha = -\dfrac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{12}{5}$, $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{5}{12}$. **13** а) 1: б) 1. **15** $\alpha = 70^0 3'$, $c = 15{,}21$, $\beta = 72^0 27'$, $b = 23{,}84$,

$P = 263{,}31$. **16** 64,13 m.

ТЕМА 8 КОМБИНАТОРИКА

1

1 $A\times B=\{(a,1),(a,2),(a,3),(b,1),(b,2),(b,3),(c,1),(c,2),(c,3),(d,1),(d,2),(d,3)\}$.

2 *aaaaa, aaaab, aaaba, aaabb, aabaa, aabab, aabba, aabbb, abaaa, abaab, ababa, ababb, abbaa, abbab, abbba, abbbb, baaaa, baaab, baaba, baabb, babaa, babab, babba, babbb, bbaaa, bbaab, bbaba, bbabb, bbbaa, bbbab, bbbba, bbbbb,*

3 $\overline{V}_8^3=8^3=512$. **4** $2\cdot\overline{V}_5^3=2\cdot5^3=250$. **5** $\overline{V}_3^{10}=3^{10}$. **6** $\overline{V}_4^3=4^3=64$. ***Упатство***. На секое палто се доделува закачалка на која ќе биде обесено. **7** $\overline{V}_4^6=4096$. ***Упатство***. На секој човек се определува спрат на којшто ќе го напушти лифтот. **8** $\overline{V}_4^5=1024$. **9** САД: $\overline{V}_{10}^5=10^5=100000$; Канада: $\overline{V}_{26}^3\overline{V}_{10}^3=26^3\cdot10^3=17\,576\,000$.

2

5 $\overline{V}_5^3=5^3=125$; $V_5^3=\dfrac{5!}{(5-3)!}=60$. **1** а) 120; б) 5040; в) 1814400. **2** а) 1320; б) 360360.

3 а) 9; б) 6; в) n=11; в) нема решение. **4** $V_7^5=\dfrac{7!}{2!}=2520$. **5** $V_9^4=\dfrac{9!}{5!}=3024$. **6** $V_8^3-V_7^2=$ $=\dfrac{8!}{5!}-\dfrac{7!}{5!}=294$. ***Упатство***. Бројот не може да започнува со цифрата 0. **7** $V_{12}^3=1320$. **8** $V_8^5=6720$.

3

1 $P_5=5!=120$. **2** $6!=720$. **3** $4!=24$. **4** $5!=120$. **5** ИГАНК.

6 а) $P_{10}(2,3,2,1,1,1)=\dfrac{10!}{2!3!2!1!1!1!}=151200$; б) $P_{13}(2,2,2,2,1,1,1,1,1)=389\,188\,800$. **7** $P_6(1,3,1,1)=\dfrac{6!}{3!}=120$.

8 $P_9(4,2,3)=\dfrac{9!}{4!2!3!}=1260$. **9** $2\cdot(5-1)!=48$. ***Упатство.*** Пријателите се разгледуваат како еден човек, т.е. се распоредуваат 5 луѓе, а потоа се зема дека едниот може да седи лево од другиот или обратно (постојат две можности).

4

1 $\{a,b,c,d\}$, $\{a,b,c,e\}$, $\{a,b,c,f\}$, $\{a,b,d,e\}$, $\{a,b,d,f\}$, $\{a,b,e,f\}$, $\{a,c,d,e\}$, $\{a,c,d,f\}$, $\{a,c,e,f\}$, $\{a,d,e,f\}$, $\{b,c,d,e\}$, $\{b,c,d,f\}$, $\{b,c,e,f\}$, $\{b,d,e,f\}$, $\{c,d,e,f\}$.

2 а) 15; б) 210; в) 75; г) 22/7. **3** $C_7^3=\begin{pmatrix}7\\3\end{pmatrix}=35$. **4** $C_{24}^{12}=2\,704\,156$. **5** $C_{16}^8\cdot C_{20}^{10}=2\,377\,809\,720$.

6 $C_6^1\cdot C_6^1\cdot C_{10}^2=1620$. **7** $C_8^4+C_8^5+C_8^6+C_8^7+C_8^8=163$. **8** $C_{37}^7=10\,295\,472$.

9 *aaaa aaab aaac aabb aabc aacc abbb abcb*
abcc accc bbcc bbbc bccc bbbb cccc

10 а) 1; б) $\overline{C}_5^5=C_9^5=126$.

5

1 а) $\overline{V}_5^4=5^4=625$; б) $V_5^4=120$; в) $2\cdot\overline{V}_5^3=250$; г) $5\cdot\overline{V}_5^2=125$. **2** $V_{16}^3=3360$.

3 а) 7! ***Упатство.*** 1234 се разгледува како една цифра; б) 7! 4! = 120 960.

4 а) $P_4 \cdot P_3 = 4! \cdot 3! = 144$; б) 2!Ч5! = 250. **5** $C_6^2 \cdot C_6^1 + C_6^3 = 110$. **6** $C_2^1 \cdot C_7^3 + C_2^2 \cdot C_7^2 = 91$.

6

1 а) $(2x+3y)^6 = 64x^6 + 576x^5y + 2160x^4y^2 + 4320x^3y^3 + 4860x^2y^4 + 2916xy^5 + 729y^5$;
б) $(x-3y)^7 = x^7 - 21x^6y + 189x^5y^2 - 945x^4y^3 + 2835x^3y^4 - 5103x^2y^5 + 5103xy^6 - 2187y^7$;

в) $\left(\frac{x}{2} - 4y\right)^4 = \frac{x^4}{16} - 2x^3y + 24x^2y^2 - 128xy^3 + 256y^4$. **2** а) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^5 = x^5 - 5x^3 + 10x - \frac{10}{x} + \frac{5}{x^3} - \frac{1}{x^5}$;

б) $x^8 + 8x^7\sqrt{x} + 28x^7 + 56x^6\sqrt{x} + 70x^6 + 56x^5\sqrt{x} + 28x^5 + 8x^4\sqrt{x} + x^4$. **3** а) 220; б) 1760; в) 3041280.

4 252. **5** а) $2^3 = 8$; б) $2^{12} = 4096$. **6** $n = 12$; 25344. **7** $n = 10$; -8064. **8** $n = 8$; 112.

7

1 $\overline{V}_2^3 \overline{V}_3^4 = 2^3 \cdot 3^4 = 648$. **2** ***Упатство:*** Ако бројот почнува со непарна цифра, тогаш непарните цифри за прва, трета и петта позиција може да се изберат на V_5^3 начини и на исто толку начини може да се изберат и парни цифри за втора, четврта и шеста позиција. Ако бројот почнува со парна цифра, таа може да биде една од цифрите 2,4,6,8, тогаш третата и петтата позиција може да се пополнат на V_4^2 начини, а втора, четврта и шеста позиција на V_5^3 начини. Вкупно: $V_5^3 \cdot V_5^3 + 4 \cdot V_4^2 \cdot V_5^3 = 6480$.

3 $6 \cdot V_6^5 = 6 \cdot \frac{6!}{1!} = 4320$. **4** а) $P_6 = 6! = 720$; б) $C_6^2 \cdot 2 = 30$; в) $C_8^2 \cdot 6! = 20160$. **5** $P_3 \cdot P_3 = 3! \cdot 3! = 36$.

6 Вкупно $P_{15}(2,3,4,6) = 6\,306\,300$; Непарни: $P_{14}(2,2,4,6) = 1\,261\,260$. **7** а) $C_8^3 = 56$; б) $C_4^2 \cdot C_4^1 = 24$;

в) $C_4^3 + C_4^3 + C_4^2 \cdot C_2^1 + C_4^2 \cdot C_2^1 = 4 + 4 + 12 + 12 = 32$. ***Упатство.*** Може да се изберат: тројца мажи; три жени; двајца мажи и една жена која не е во брак со ниеден од нив; две жени и еден маж кој не е во брак со ниедна од нив.

8 ***Упатство.*** Ако било кои три од 20 точки се неколинеарни, бројот на прави кои може да се определат е $C_{20}^2 = 190$. Но, 6 од точките лежат на една права, па затоа вкупниот број 190 се намалува за бројот на оние прави кои може да се повлечат низ 6 точки кога било кои 3 од нив се неколинеарни. На крај тој број се зголемува со дадената права. Оттука, бараниот број е $C_{20}^2 - C_6^2 + 1 = 176$.

9 а) $\overline{C}_8^8 = C_{15}^8 = 6435$; б) $\overline{C}_{16}^8 = C_{23}^8 = 490\,314$. **10** -145152. **11** 294. **12** а) $1680\,x^4$; б) $\frac{3432a^7}{x^3\sqrt{x}}$.

13 а) $\frac{9856}{3}$; б) -242242. **14** а) $\frac{35}{2}x^3$; б) $1120a^2b^8$.

8

1 в). **2** в), г). **3** в). **4** б), в). **5** б). **6** $V_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$.

7 Варијација од n елементи класа n. **8** Подмножество со k елементи од множество со n елементи.

9 $\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$. **10** $(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n}b^n$.

11 $\overline{V}_{26}^5 \cdot \overline{V}_{10}^4 = 26^5 \cdot 10^4$. **12** $P_9(3,4,2) = 1260$. **13** $C_4^3 \cdot C_3^1 + C_4^4 = 13$. **14** 6750.

ТЕМА 9 ВЕРОЈАТНОСТ И СТАТИСТИКА

1

1 $P(A)=\frac{1}{6}$; $P(B)=\frac{1}{2}$. **2** $P(A)=\frac{1}{13}$; $P(B)=\frac{1}{4}$.

2

1 $\Omega=\{$(грб,1), (грб,2), (грб,3), (грб,4), (грб,5), (грб,6), (глава,глава), (глава,грб)$\}$.

2 $\Omega=\{(1),(3),(5),(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5),(2,4,1),(2,4,3),(2,4,5),(4,2,1),(4,2,3),(4,2,5)\}$.

3 Ако 0 означува промашување, а 1 погодок, тогаш:

$\Omega=\{(1,1),(1,0,0),(1,0,1,1),(1,0,1,0),(0,1,1),(0,1,0),(0,0,0),(0,0,1,1),(0,0,1,0)\}$.

$A=\{(1,1),(1,0,1,1),(1,0,1,0),(0,1,1),(0,0,1,1)\}$; $B=\{(1,0,0),(0,1,1),(0,1,0),(0,0,0)\}$.

$C=\{(1,1),(1,0,1,1),(0,1,1)\}$.

4 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$, каде x е бројот на точки на првата коцка, y – бројот на точки на втората коцка, а z –бројот на точки на третата коцка.

$A=\{(x,y,z)|x,y\in\{2,4,6\},z\in\{1,3,5\}\}$, $B=\{(x,y,z)|x,y,z\in\{1,3,5\}\}$,

$C=\{(x,y,z)|x,y,z\in\{1,2,3,4,5,6\},x+y+z\in\{4,6,8,10,12,14,16,18\}\}$,

$D=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{1,2,3,4,5,6\},x=y\}=\{(x,x,z)\mid x,z\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$,

$E=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{1,2,3,4,6\}\}$, $F=\overline{E}$.

5 Нека x е исходот при првото, y–при второто, а z–при третото гаѓање. Исход 0 при кое било гаѓање означува дека метата е промашена.

$\Omega=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{0,7,8,9,10\}\}$; $A=\{(x,y,z)\mid x,y,z\in\{8,10\}\}$;

$B=\{(x,y,z)\mid x\in\{7,9\},y,z\in\{8,10\}\}\cup\{(x,y,z)\mid y\in\{7,9\},x,z\in\{8,10\}\}\cup$

$\cup\{(x,y,z)\mid z\in\{7,9\},x,y\in\{8,10\}\}$, $C=\{(x,y,z)\mid x,y\in\{8,10\},z\in\{7,9\}\}$,

$D=\{(9,9,9),(8,9,10),(8,10,9),(9,8,10),(9,10,8),(10,8,9),(10,9,8)\}$.

3

6 $A=\{$(глава,грб), (грб,глава),(глава,глава)$\}$, $B=\{$(глава,грб), (грб,глава), (грб,грб)$\}$,

$A\cap B=\{$(глава, грб), (грб, глава)$\}$, $A\cup B=\Omega$.

1 Нека A_i го означува настанот: во i-тата партија победил играчот A, $i=1,2,3,4,5$.

$$D=A_1A_2A_3A_4+A_1A_2A_3\overline{A}_4+A_1A_2\overline{A}_3A_4+A_1\overline{A}_2A_3A_4+\overline{A}_1A_2A_3A_4+A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4A_5$$
$$+A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4A_5+\overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4A_5+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4A_5+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4A_5+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4A_5$$

$$E=\overline{D},\ F=A_1A_2\overline{A}_3\overline{A}_4+A_1\overline{A}_2A_3\overline{A}_4+\overline{A}_1A_2A_3\overline{A}_4+A_1\overline{A}_2\overline{A}_3A_4+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3A_4+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3A_4.$$

2 $B=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3$, $C=A_1A_2$, $D=A_1A_2A_3$, $E=A_1A_2\cup A_1A_3\cup A_2A_3$, $F=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$,

$G=A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$, $H=\overline{D}$..

3 $B = A_1A_2A_3,\quad C = A_1 \cup A_2 \cup A_3,\quad D = A_1A_2 \cup A_1A_3 \cup A_2A_3,\quad E = \overline{A_1A_2A_3},\quad F = E,\quad G = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3.$

4 а) $A \cup B = \Omega;$ б) $A \cap B = \varnothing;$ в) $\overline{A} = B;$ г) $\overline{B} = A;$

4

1 $\dfrac{C_5^3}{C_{10}^3} = \dfrac{1}{12}.$ **2** $\dfrac{C_{10}^5 \cdot C_{30}^{15}}{C_{40}^{20}} = 0,2836.$ **3** $\dfrac{3 \cdot V_4^2}{V_5^3} = \dfrac{3}{5}.$

4 $\Omega=\{(x,y,z)|x,y,z\in\{1,2,3,4,5,6\}\}, |\Omega|=216.$

A={(1,4,6),(1,5,5),(1,6,4),(2,3,6), (2,4,5),(2,5,4),(2,6,3),(3,2,6),(3,3,5),(3,4,4),(3,5,3),(3,6,2),(4,1,6),(4,2,5),(4,3,4), (4,4,3), (4,5,2),(4,6,1),(5,1,5),(5,2,4),(5,3,3),(5,4,2),(5,5,1),(6,1,4),(6,2,3),(6,3,2),(6,4,1)}, $P(A)$=27/216. $P(B)$=25/216.

5 Вкупниот број на можни изботи на 3 од понудените 5 должини е $C_5^3 = 10$. Ако A е настанот: од трите избрани отсечки може да се формира триаголник, тогаш A ќе се појави ако збирот на должините на кои било две отсечки е поголем од должината на третата отсечка. Оттука, поволни можности има вкупно 3. Тоа се: $\{2,3,4\},\{3,7,9\},\{4,7,9\}$. Добиваме дека бараната веројатност е 3/10.

6 $C_{15}^3 = 455$ е вкупниот број на можности од 15 сијалици да се изберат 3 кои се скршиле. Нека A е настанот: скршените сијалици имаа вкупно 180W. Поволни можности за појавување на настанот A се следните: се скршиле 2 сијалици од по 40 W и 1 сијалица од 100 W; или 3 сијалици од по 60W. Оттука, поволни можности за појавување на настанот A има вкупно $C_7^2C_3^1 + C_5^3 = 73$. Така, $P(A) = \dfrac{73}{455} = 0.545.$

7 а) $\dfrac{8 \cdot 3!7!}{10!} = \dfrac{1}{15};$ ***Упатство:*** 8 е вкупниот број на позиции на кои може да се постави првата од трите книги, тие 3 книги може да се распоредат на 3! начини, а останатите 7, на 7! начини.

б) $\dfrac{(10-k+1)\cdot k!(10-k)!}{10!},\quad k = 2,3,\ldots,10.$

5

1 Добитни се лозовите со реден број 20,40,60,80,100, па $P(A) = \dfrac{5}{100} = 0.05.$ Веројатноста на настанот B ќе ја определиме преку веројатноста на спротивниот настан $\overline{B}$: ниеден од два купени лоза не е добитен. $P(\overline{B}) = \dfrac{C_{95}^2}{C_{100}^2} = 0.902$. Сега, $P(B)$=0.098.

2 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = 0,6;\ P(\overline{A}\,\overline{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 0,4;\ P(\overline{AB}) = 1 - P(AB) = 0,9.$

3 $P(AB) = 0,2.$ **4** Ги означуваме следните настани: A: избраното лице знае англиски, F: избраното лице знае француски, G: избраното лице знае германски. а) $P(B) = \dfrac{C_{40}^3}{C_{100}^3};$ б) $P(C) = \dfrac{C_{15}^3}{C_{100}^3};$ в) Прво ќе го определиме бројот на оние кои знаат барем два јазика. За тој број добиваме:

$|AF \setminus (AFG)| + |AG \setminus (AFG)| + |FG \setminus (AFG)| + |AFG| = 15 - 3 + 10 - 3 + 5 - 3 + 3 = 24.$ Веројатноста дека сите тројца избрани делегати ќе бидат од овие 24 лица е $P(D) = \dfrac{C_{24}^3}{C_{100}^3};$ г) Бројот на оние лица кои знаат барем еден јазик е: $|A \cup F \cup G| = |A| + |F| + |G| - |AF| - |AG| - |FG| + |AFG| = 40 + 30 + 26 - 15 - 10 - 5 + 3 = 69$, па $P(E) = \dfrac{C_{69}^3}{C_{100}^3};$

д) Ако 69 лица знаат барем еден странски јазик, тогаш останатите 31 не знаат ниеден странски јазик. Од друга страна, бројот на оние кои знаат точно два странски јазика, се определува аналогно како претходно, и тој број е 21. Значи, веројатноста дека од тие 21 лица ќе се изберат двајца и од оние 31, кои не знаат ниеден јазик, ќе се избере еден е: $P(H)=\frac{C_{21}^{2}\cdot C_{31}^{1}}{C_{100}^{3}}$; ѓ) Бројот на лицата кои знаат само германски е:

$|G\setminus(AG\cup FG)|=|G|-|AG\cup FG|=|G|-|AG|-|FG|+|AFG|=14$, па $P(K)=\frac{C_{14}^{3}}{C_{100}^{3}}$; е) Настанот $\overline{M}$ означува дека ниедно од трите лица не ги знае сите три јазици. $P(\overline{M})=\frac{C_{97}^{3}}{C_{100}^{3}}$, $P(M)=1-\frac{C_{97}^{3}}{C_{100}^{3}}$.

6 **1** $\frac{1}{2}$. **2** $\frac{4}{13}$. **3** $\frac{4}{195}$. ***Упатство.*** A: збирот на двете карти е 9, B: двете карти се поголеми од 3. $P(AB)=\frac{C_4^1C_4^1}{C_{52}^2}$ (збирот на два броја поголеми од 3 е 9, ако едниот од нив е 4, а другиот 5).

$P(B)=\frac{C_{40}^{2}}{C_{52}^{2}}$ (постојат 40 карти поголеми од 3). **4** Да ги означиме настаните: A: извлечениот број е парен; B: извлечениот број е делив со 3. Според дефиниција за условна веројатност добиваме дека

$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{3/20}{6/20}=\frac{1}{2}$. **5** Нека A_i: стрелецот ја погодил целта во i-тото гаѓање, $i=1,2$.

Од условите на задачата $P(A_1)=2/3$, а $P(A_1A_2)=0.5$. Се бара условната веројатност $P(A_2\mid A_1)=\frac{P(A_1A_2)}{P(A_1)}=\frac{3}{4}$.

6 Означуваме B: претплатникот не ја погодил заборавената цифра во првите два обиди, но ја погодил во третиот обид. A_i: претплатникот ја погодил заборавената цифра во i-тиот обид, $i=1,2,\ldots$ Да уочиме дека настаните A_i не се независни. Имено, со секое непогодуваме на цифрата се намалува бројот на цифри од кои се избира. Настанот B ќе се појави, ако претплатникот не ја погоди цифрата во првиот и во вториот обид, туку во третиот, т.е. $B=\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$. За веројатноста на овој настан имаме: $P(B)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)$.
а) Заборавена цифра е една од цифрите $0,1,2,\ldots,10$. Веројатноста да ја промаши цифрата во првиот обид е $P(\overline{A}_1)=\frac{9}{10}$, бидејќи 9 цифри се погрешни. Соодветно, $P(\overline{A}_2\mid\overline{A}_1)=\frac{8}{9}$, бидејќи ако промашил во првиот обид, остануваат уште 9 цифри од кои 8 се погрешни. На крај, $P(A_3\mid\overline{A}_1\overline{A}_2)=\frac{1}{8}$, бидејќи после два промашени обида, остануваат уште 8 можни цифри, а само една е вистинската. Со замена во претходната формула, за веројатноста на настанот B се добива $P(B)=1/10$. б) Претплатникот знае дека цифрата е парна, па избира од цифрите $0,2,4,6,8$. На ист начин како и претходно $P(B)=\frac{4}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$.

7 **1** 0,94. ***Упатство.*** Нека H_i: i-тиот стрелец ја погодил целта, $i = 1,2,3$, а D: целта е барем еднаш погодена. Бидејќи $\overline{D} = \overline{H}_1\overline{H}_2\overline{H}_3$ и настаните H_i се независни настани, се добива дека $P(\overline{D}) = 0,06$, а $P(D)$=0,94. **2** Нека H_i, $i = 1,2$ се истите настани како во претходната задача. Тогаш $A = H_1\overline{H}_2 + \overline{H}_1H_2$ и $P(A) = 0,46$. Настанот B=$H_1 \cup H_2$ и неговата веројатност е $P(B) = 0,88$. $P(C)$=$P(H_1H_2)$=0,42. $P(D) = P(\overline{B}) = 0,12$.

$P(E) = P(\overline{C}) = 0,58$. **3** Нека H_i, $i = 1,2$ се истите настани како во претходните задачи. Сега $p = P(H_1)$, $P(H_1) = 0,7$, $P(H_1\overline{H}_2 + \overline{H}_1H_2) = 0,38$. Значи, $0,3p + 0,7(1-p) = 0,38$, од каде се добива дека $p = 0,8$.

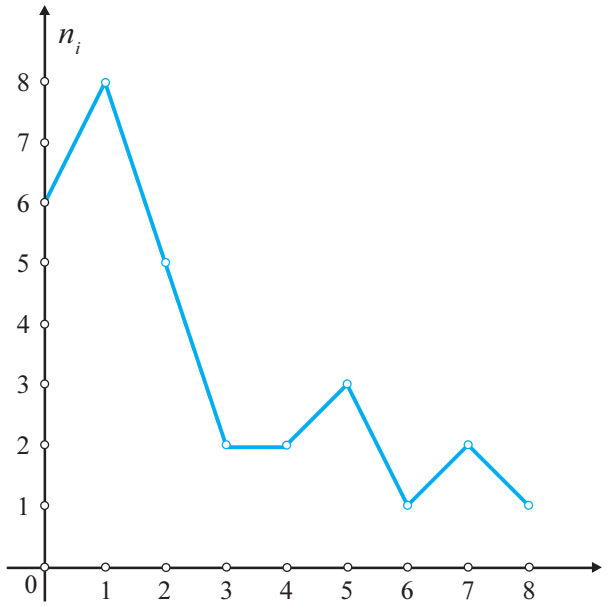
4 Ако A_i: i-тата машина ќе се расипе, $i = 1,2,3,4$, тогаш $P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4) = 0,4536$.

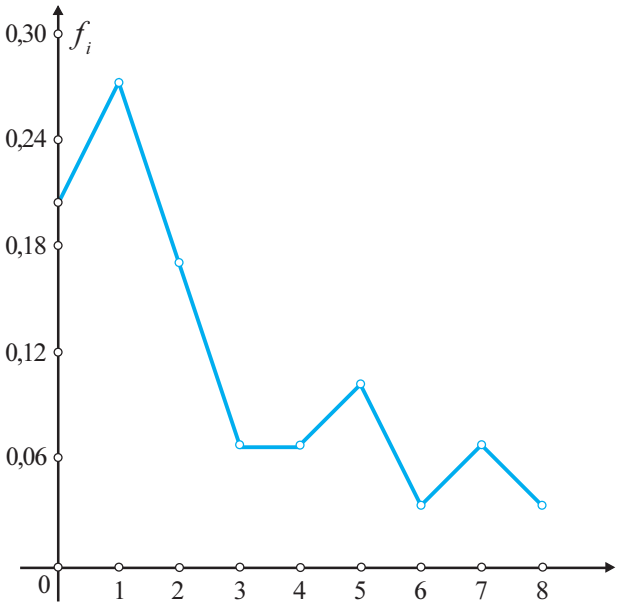
5 а) Независни се следните парови настани: A и B; A и E; A и F; B и E; B и F; E и F. б) Независни се следните тројки настани: A, E и F; B, E и F. в) Настаните не се независни во целина.

8 **1** Квантитативни обележја се: јачина на сијалицата, големина (во cm.) и тежина, а квалитативни се: боја и исправност. **2** Можни примероци со обем 2 се: 2,2; 2,3; 2,4; 2,5; 3,2; 3,3; 3,4; 3,5; 4,2; 4,3; 4,4; 4,5; 5,2; 5,3; 5,4; или 5,5. Напомена: со знакот точка-запирка (;) се одделени различните примероци.

3 а) Популација е множеството од сите телевизори во фабриката. б) Примерок се избраните 100 телевизори. в) Квантитативно.

9 **2**





Вредност на обележјето	Фреквенција	Релативна фреквенција
0	6	$\frac{6}{30} = 0,2$
1	8	$\frac{8}{30} = 0,266$
2	5	$\frac{5}{30} = 0,167$
3	2	$\frac{2}{30} = 0,067$
4	2	$\frac{2}{30} = 0,067$
5	3	$\frac{3}{30} = 0,1$
6	1	$\frac{1}{30} = 0,033$
7	2	$\frac{2}{30} = 0,067$
8	1	$\frac{1}{30} = 0,033$

1

Вредност на обележјето	Фреквенција	Релативна фреквенција
1	11	0,22
2	8	0,16
3	12	0,24
4	9	0,18
5	4	0,08
6	6	0,12

2

Вредност на обележјето	Фреквенција	Релативна фреквенција
15	1	0,033
16	5	0,167
17	4	0,133
18	3	0,1
19	4	0,133
20	7	0,234
21	3	0,1
22	3	0,1

3

Вредност на обележјето	Фреквенција	Релативна фреквенција
0	10	0,25
1	17	0,425
2	10	0,25
3	3	0,075

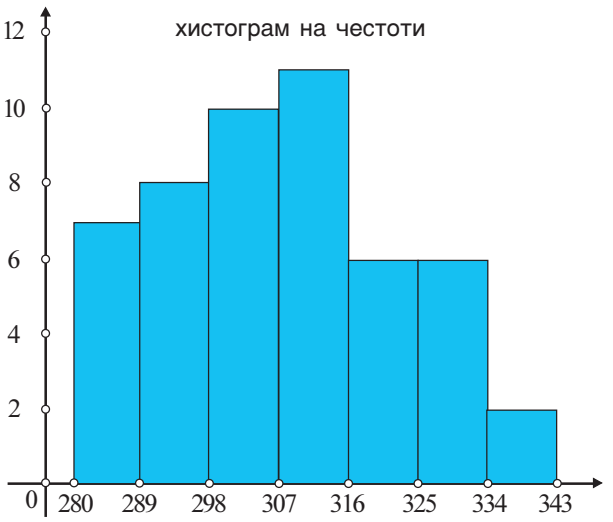
4

Вредност на обележјето	Фреквенција	Релативна фреквенција
24	2	0,0667
25	6	0,2
26	4	0,133
27	4	0,133
28	6	0,2
29	4	0,133
30	4	0,133

10

1

Интервал	Фреквенција	Релативна фреквенција
$[280, 289)$	7	0,14
$[289, 298)$	8	0,16
$[298, 307)$	10	0,20
$[307, 316)$	11	0,22
$[316, 325)$	6	0,12
$[325, 334)$	6	0,12
$[334, 343)$	2	0,04



2

Интервал	Фреквенција	Релативна фреквенција
$[500,555)$	4	0,1
$[555,610)$	5	0,125
$[610,665)$	14	0,35
$[665,720)$	4	0,1
$[720,775)$	6	0,15
$[775,830)$	7	0,175

3

Интервал	Фреквенција	Релативна фреквенција
$[0;1,5)$	7	0,233
$[1,5;3)$	8	0,267
$[3;4,5)$	12	0,4
$[4,5;6)$	2	0,067
$[6;7,5)$	1	0,033

4

Интервал	Фреквенција	Релативна фреквенција
$[2;2,5)$	3	0,075
$[2,5;3)$	7	0,175
$[3;3,5)$	12	0,3
$[3,5;4)$	11	0,275
$[4;4,5)$	6	0,15
$[4,5;5)$	1	0,025

11

1 $\bar{x}_{21}=199,71.$ **2** $\bar{x}_{20}=1905,6.$

3 $\bar{x}_{30}=3,31.$ **4** $\tilde{x}_{50}=1850.$

5 Просечната висина на момчињата е $\bar{x}_{10}=173,3,$ а на девојчињата: $\bar{y}_{12}=165,75.$ Просечната висина на целиот клас е $\bar{z}_{22}=169,36.$

12

1 $Me=3,\ Mo=3.$ **2** $Me=1,\ Mo=1.$ **3** $Me=19,5;\ Mo=20.$ **4** $Me=1,\ Mo=1.$

13

10 1 $r=201;\ s^2=2777,35;\ s=52,7.$ **10 2** $r=588;\ s^2=28628,44;\ s=169,2.$

10 3 $r=1,9;\ s^2=0,28;\ s=0,5296.$ **10 4** $\tilde{r}=3000-500=2500;\ \tilde{s}^2=140000;\ \tilde{s}=374,166.$

10 5 За примерокот од момчињата имаме: $r_x=26;\ s_x^2=56,61;\ s_x=7,52.$ За примерокот од девојчиња: $r_y=37;\ s_y^2=112,69;\ s_y=10,615.$ За примерокот составен од целиот клас: $r_z=38;\ s_z^2=102,87;\ s_z=10,14.$

11 1 $r=5;\ s^2=2,32;\ s=1,52.$ **11 2** $r=3;\ s^2=0,7775;\ s=0,882.$

11 3 $r=15;\ s^2=10,16;\ s=3,187.$ **11 4** $r=4;\ s^2=1,5789;\ s=1,2565.$

14

1 $P(A)=\frac{1}{52};\ P(B)=\frac{24}{52}=\frac{6}{13}.$ **2** $P(A)=\frac{20}{28}=\frac{5}{7};\ P(B)=\frac{20}{28}=\frac{5}{7};\ P(C)=\frac{16}{28}=\frac{4}{7}.$

3 Ако исходите на монетата се означуваат со грб и глава, а исходите на тетраедарот со a, b, c, d, тогаш $\Omega=\{$(грб,a), (грб,b), (грб,c), (грб,d), (глава,a), (глава,b), (глава,c), (глава,d)$\}$.

4 $\Omega=\{(1),(2,1),(3,1),(4,1),(2,3,1),(2,4,1),(3,2,1),(3,4,1),(4,2,1),(4,3,1),(2,3,4,1),(2,4,3,1),(3,2,4,1),(3,4,2,1),(4,2,3,1),(4,3,2,1)\}.$

5 Нека S_i означува поговок на метата во i-тото стрелање, i=1,2,3. $A=S_1$, $B=S_1\bar{S}_2\bar{S}_3+\bar{S}_1S_2\bar{S}_3+\bar{S}_1\bar{S}_2S_3$;

$C=S_1S_2S_3+\bar{S}_1\bar{S}_2\bar{S}_3$; $D=\bar{S}_1\bar{S}_2$. **6** $C=A\cup B_1B_2B_3$. **7** $\frac{C_6^3\cdot C_4^2}{C_{10}^5}=\frac{10}{21}$. **8** Нека во кутијата има k бели и

8-k црни топчиња. Веројатноста да се извлечат две бели топчиња е $\frac{C_k^2}{C_8^2}$ и од условите на задачата,

потребно е $\frac{C_k^2}{C_8^2}=\frac{15}{28}$. Се добива равенката $k^2-k-30=0$, чие решение е $k=6$. **9** $p=4/7$. ***Упатство.***

Во првите 28 дена од месецот сигурно има точно 4 вторници, така што петиот вторник би можел да падне во еден од деновите 29, 30 или 31, а за да не дојде до тоа постојат 4 од вкупно 7 можности: 29 да биде среда, четврток, петок или сабота. **10** $2/n$. ***Упатство.*** ab може да се јави како подниза во $(n$-1)! пермутации. Ист е бројот на пермутации во кои се јавува ba. Значи, бараната веројатност е $2(n$-1)!/n!.

11 а) $\frac{49\cdot 4!\cdot 48!}{52!}=0,00018$. ***Упатство.*** Постојат 49 блокови од по четири позиции каде може да се сместат единиците (за да бидат една до друга): од 1,2,3,4 до 49,50,51,52. За секој блок постојат 4! различни распореди на единиците и 48! различни распореди на останатите карти. б) $\frac{2\cdot 4!\cdot 48!}{52!}=0,0000074$. ***Упатство.*** Четирите единици може да бидат сместени во два блока (во првиот или во последниот).

12 96/1000. ***Упатство.*** Од секој раб на коцката ќе се добијат по 8 коцкички кои имаат по две обоени страни. Коцката има 12 раба, па вкупниот број на вакви коцкички е 96.

13 1/7. ***Упатство.*** $\Omega=\{(x,y)\mid x,y\in\{1,2,3,4,5,6\}\}$, $|\Omega|=36$. а) Ги означуваме настаните: A: паднале две петки, B: збирот на паднатите вредности е делив со 5. $AB=\{(5,5)\}$, B={(1,4), (2,3), (3,2), (4,1), (4,6), (5,5), (6,4)}.

$P(A\mid B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1/36}{7/36}=1/7$. б) $P(A\mid B)=\frac{3/36}{12/36}=\frac{1}{4}$. ***Упатство.*** Нека A: паднале две парни вредности, B: збирот на паднатите вредности е делив со 3. $AB=\{(2,4),(4,2),(6,6)\}$, B={(1,2), (1,5), (2,1), (2,4), (3,3), (3,6), (4,2), (4,5), (5,1), (5,4), (6,3), (6,6)}.

14 Нека A_i: i-тата партија се игра со нови топчиња, i=1,2,3,4. По 4 игри сите топчиња ќе бидат употребени, ако секоја патрија се игра со нови топчиња. Затоа, $P(A_1A_2A_3A_4)=P(A_1)P(A_2\mid A_1)P(A_3\mid A_1A_2)P(A_4\mid A_1A_2A_3)=$

$=1\cdot\frac{C_9^3}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_6^3}{C_{12}^3}\cdot\frac{C_3^3}{C_{12}^3}=0,000158$. **15** Нека A_i е настанот: играчот A победува во i-тата партија, $i=1,2,3,\ldots$ Тогаш,

$\bar{A}_i$ е настанот дека ќе победи играчот B во i-тата партија. Притоа, $p=P(A_i)=\frac{2}{3}$, $1-p=P(\bar{A}_i)=\frac{1}{3}$, $i=1,2,\ldots$

Ако D означува дека играчот A победил во мечот тогаш $D=A_1A_2A_3A_4+\bar{A}_1A_2A_3A_4A_5+A_1\bar{A}_2A_3A_4A_5+$

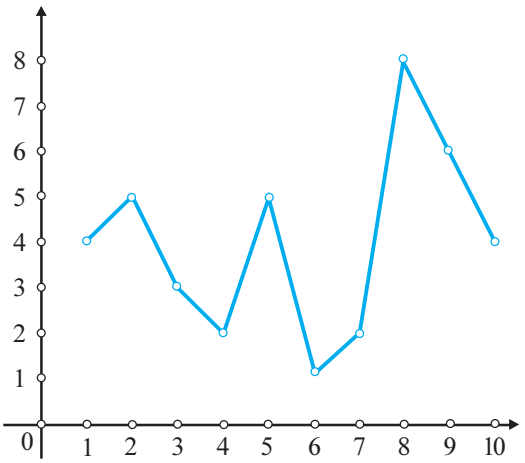
$+A_1A_2\bar{A}_3A_4A_5+A_1A_2A_3\bar{A}_4A_5$, а неговата веројатност е $P(D)=p^4+4p^4(1-p)=\frac{112}{243}$. Веројатноста дека ќе

победи B во мечот е $P(\bar{D})=1-\frac{112}{243}=\frac{131}{243}$. Значи, победник е играчот B.

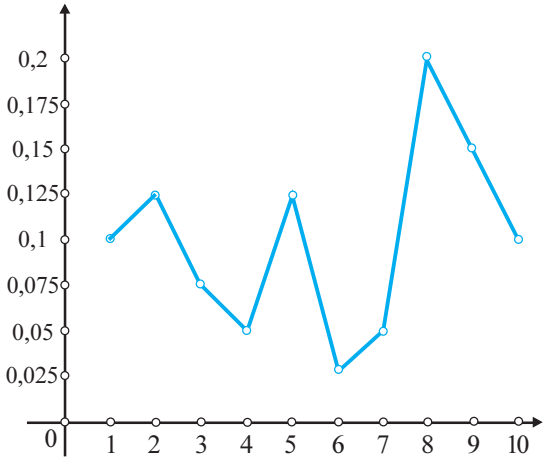
16 а) Популација: сите автомобили произведени во фабриката; б) потрошувачка на гориво; квантитативно обележје; в) реализација на случаен примерок за разгледуваното обележје.

17 а)

x_i	n_i	$\frac{n_i}{n}$
1	4	0,1
2	5	0,125
3	3	0,075
4	2	0,05
5	5	0,125
6	1	0,025
7	2	0,05
8	8	0,2
9	6	0,15
10	4	0,1



Полигон на фреквенции



Полигон на релативни фреквенции

б) $\overline{x}_{40} = 5,85$; $Me = 6,5$; $Mo = 8$; в) $r = 9$; $s^2 = 9,2775$; $s = 3,0459$.

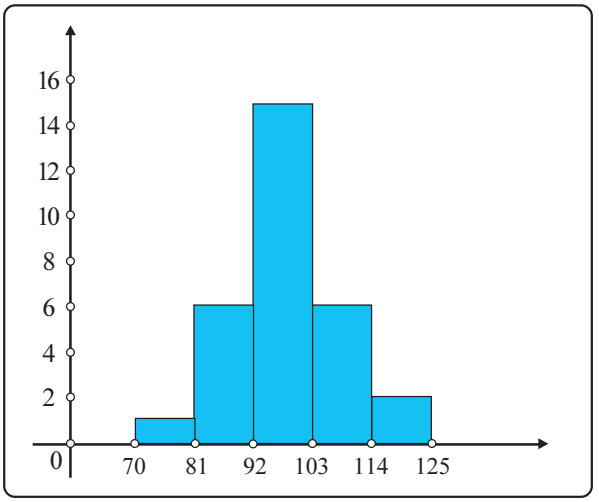
18 а)

Интервал	Фреквенција	Релативна фреквенција
$[70,81)$	1	0,033
$[81,92)$	6	0,2
$[92,103)$	15	0,5
$[103,114)$	6	0,2
$[114,125)$	2	0,067

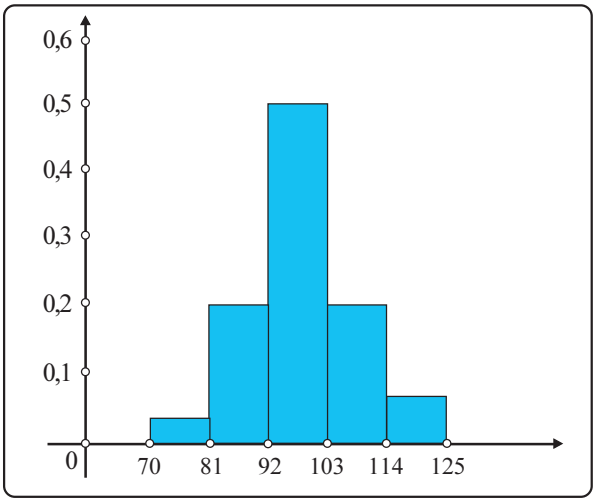
б) $\overline{x}_{30} = 98,533$; $Me = 98,5$;

моди се: 88, 95, 96, 98, 100, 101, 102, 112.

в) $r = 45$; $s^2 = 101,38$; $s = 10,069$.

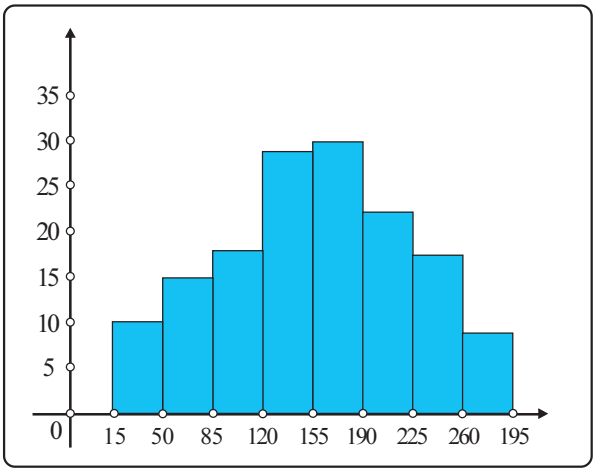


Хистограм на честоти



Хистограм на релативни честоти

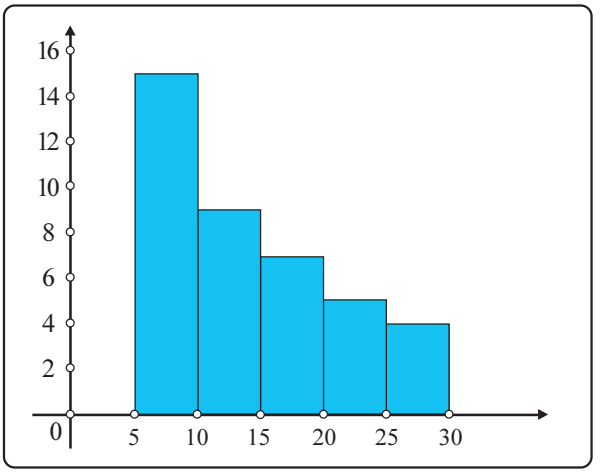
19 а)



Хистограм на честоти

б) $\tilde{x}_{150} = 156,87$; в) $\tilde{s}^2 = 4386$; $\tilde{s} = 66,228$.

20 а)



Хистограм на честоти

б) $\tilde{x}_{40} = 14,25$; в) $\tilde{s}^2 = 45,6875$; $\tilde{s} = 6,76$.

15

1 б) **2** а) **3** б) **4** в) **5** г) **6** Множеството од сите исходи во врска со даден експеримент со својство при секое изведување на експериментот да се појави еден и само еден елемент од тоа множество. **7** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. **8** $P(AB) = P(A)P(B)$.

9 Множество еднородни објекти или резултати од некоја операција кои имаат една или повеќе заеднички карактеристики се вика популација. Заедничката карактеристика се вика обележје. Делот од популацијата на кој се вршат потребните испитувања се вика примерок.

10 Стандардната девијација е квадратен корен од дисперзијата.

11 $A = E_1E_2E_3$; $B = \overline{E}_1\overline{E}_2\overline{E}_3$; $C = E_1E_2\overline{E}_3 + E_1\overline{E}_2E_3 + \overline{E}_1E_2E_3 + E_1E_2E_3$; $D = E_1\overline{E}_2\overline{E}_3 + \overline{E}_1E_2\overline{E}_3 + \overline{E}_1\overline{E}_2E_3$

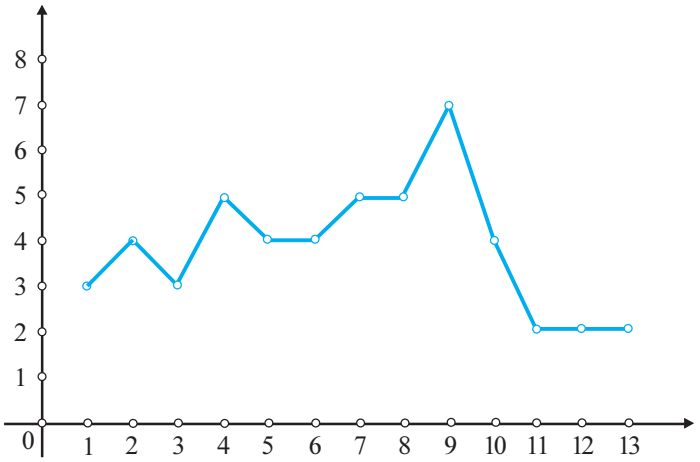
$P(A) = 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,504$
$P(B) = 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,3 = 0,006$
$P(C) = 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,3 + 0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,7 + 0,2 \cdot 0,9 \cdot 0,7 + 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,7 = 0,902$
$P(D) = 0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,9 \cdot 0,3 + 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,7 = 0,092$

12 Од $P(A \mid B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)} = 0$, следува дека $P(AB) = 0$. а) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{5} = \dfrac{3}{10}$;

б) $P(AB) \neq P(A)P(B)$, A и B не се независни настани.

13 а)

x_i	n_i	$\frac{n_i}{n}$
1	3	0,06
2	4	0,08
3	3	0,06
4	5	0,1
5	4	0,08
6	4	0,08
7	5	0,1
8	5	0,1
9	7	0,14
10	4	0,8
11	2	0,04
12	2	0,04
13	2	0,04



Полигон на фреквенции

б) $\overline{x}_{50} = 6,68;$ $Me = 7;$ $Mo = 9.$ в) $r = 12;$ $s^2 = 10,78;$ $s = 3,283.$

14 а) $\overline{x}_{480} = 95,9667;$ $Me = 94;$ $Mo = 94;$ б) $r = 56;$ $s^2 = 109,6;$ $s = 10,469.$

ТЕМА 10 БЛАГОРОДНИ МЕТАЛИ

1 **2** 0,875 kg бакар; 1,05 kg цинк; 0,575 kg никел. **5** а) $22\,car\,3\,gr = 22\frac{3}{4} = 22,75$ car; б) 232,25 dwt; **7** б) 18,75 car; в) 21,5 car. **8** б) 206 dwt 12 gr = 206,5 dwt; в) 221 dwt 4 gr = 221,17 dwt.

1 а) 23,25 car; б) 22,75 car; в) 23 car. **2** а) 18,50 car; б) 11,25 car; в) 15 car. **3** а) 227,83; б) 234,5; в) 232,21. **4** а) 216,58 dwt; б) 209,25 dwt; в) 215,17 dwt. **5** $\frac{22}{24} \cdot 1000 = 916,67‰$. **6** $925‰$.

2 **2** $968,75‰$. **1** Се бара промилот p. Од $p \cdot S = P \cdot 1000$ следува дека $p = \frac{P \cdot 1000}{S}$.

а) $687,5‰$; б) $979,16‰$; в) $875‰$. **2** а) $980,90‰$; б) $959,20‰$; в) $867,36‰$. **3** а) Промилниот износ во карати е $P = \frac{p \cdot S}{1000}$, при што $S = 24$ за злато, односно $S = 240$ за сребро. $P = \frac{815 \cdot 24}{1000} = 19,56\,car$. Значи, во 24 делови легурата има 19,56 делови чисто злато. Предметот е со финост 19 car 2.24 gr, а е со ознака W2,,1.76 или 24/19,56. б) 22,56 car = 22 car 2,24 gr ; в) 22,95 car = 22 car 3,8 gr. **4** а) 198 dwt; б) 216 dwt; в) 229,5 dwt = 229 dwt 12 gr. **5** а) 23,52 car = 23 car 2,08 gr; B1,,2.08 или 24/23,52; б) 21,60 car = 21 car 2,4 gr; W0,,1.6 или 24/21,60; в) 20,4 car = 20 car 1,6 gr; W1,,2.4 или 24/20,4. **6** а) 226,8 dwt = 226 dwt 19,2 gr;

B4,,19.2 или 240/226,8; б) 222 dwt, стандардно сребро, 240/222; в) 192 dwt; W30,,0 или 240/192.

7 а) $958,3‰$; б) 23 car; **8** 14,4 car со ознака W7,,2.4 или 24/14,4. **9** $916,67‰$; 220 dwt, со ознака W2,,0 или 240/220.

3

3 $P=\frac{120\cdot 204}{240}=102$ g чисто злато. **6** $P=\frac{630}{800}\cdot 1000=787,5$ g.

1 32,9 g. **2** 6,315 g. **3** 898,92 g. **4** 457,8 g. **5** 494,55 g. **6** 130,91 g. **7** 432,4 g.

8 Во златниот предмет има $\frac{60\cdot 900}{1000}+\frac{110\cdot 960}{1000}+\frac{60\cdot 16,75}{24}=201,475$ g чисто злато, а предметот има маса 230 g и финост $875,98‰$ или 21,02 car. **9** Предметот има $\frac{1000\cdot 800}{1000}+\frac{650\cdot 237,42}{240}+\frac{500\cdot 217,75}{240}=1896,66$ g чисто сребро. Масата на предметот е 2150 g, а финоста е $882,17‰$ или 211,72 dwt = 211 dwt 17,28 gr.

10 Во накитот има $\frac{25\cdot 912}{1000}+\frac{50\cdot 16,25}{24}+31,1035=87,75$ g чисто злато, а масата на накитот е 114, 84 g.

Промилната финост е $764,1‰$, а англиската финост е 18,34 car = 18 car 1,36 gr. Ако x е масата на новата легура, тогаш поради обратната пропорционалност на величните имаме: $\uparrow \begin{matrix}114,64\\ x\end{matrix}$ $\downarrow \begin{matrix}764,1\\ 729,17\end{matrix}$, од каде што $x:114,84=764,1:729,17$; $x=120,34$ g, а треба да се додадат $120,34-114,84=5,5$ g бакар.

4

2 а) Карат (car); б) пенивејси (dwt). **3** Предметот е со полоша финост за 4 car 2 gr од стандардното злато. **4** Предметот е со подобра финост за 1 car 3 gr, а неговата финост е $22\,car+1\,car\,3\,gr=$ $=23\frac{3}{4}\,car=23,75\,car$, односно $\frac{23,75}{24}\cdot 1000=989,58‰$. **5** а) $222\,dwt-8\,dwt\,15\,gr=213\,dwt\,9\,gr=213,375\,dwt$; б) $\frac{213,375}{240}\cdot 1000=889,06‰$. **6** а) 187,2 dwt; б) 223,2 dwt; в) 235,2 dwt. **7** а) 18,72 car; б) 22,32 car; в) 23,52 car = 23 car 2,08 gr. **8** а) $\frac{65}{80}\cdot 1000=812,5‰$; б) $\frac{65}{80}\cdot 24=19,5$ car. **9** а) $833,33‰$ или 200 dwt.

10 Предметот е со финост $22-6,,2=15,5$ car, а од $x:24=300:15,5$ следува дека масата x на предметот е 464,52 g. **11** Финоста на предметот е $222+9,,12=231,5$ dwt, а масата е $\frac{500\cdot 240}{231,5}=518,36$ g.

12 $1,9\cdot 28=53,2$ g; $53,2\cdot 850=45220$ денари.

5

1 а). **2** в). **3** б). **4** г). **5** Полоша, 5 car и 1 gr. **6** Подобра, 10 dwt 10 gr.

7 а) 4 gr; б) 24 gr. **8** 224,4 dwt = 224 dwt 9,6 gr. **9** а) $900‰$; б) 21,6 car. **10** $\frac{250\cdot 240}{222}=270,27$ g.

ПРЕГЛЕД НА ПОИМИ

А

апсолутна вредност, 67
апотема, 143
агол:
- насочен, 176
- позитивен, 176
- ориентиран, 176

аритметичка средина, 279

Б

број:
- природен, 36
- реален, 37
- ненегативен, 37
- рационален, 40
- комплексен, 62
- имагинарен, 62

бочни ѕидови, 135
бочна плоштина, 138
биномна формула, 236
благородни метали, 294

В

виетови формули, 95
волумен на:
- призма, 140
- пирамида, 147
- потсечена пирамида, 150
- цилиндар, 157
- конус, 166
- потсечен конус, 170

варијации:
- со повторување, 214
- без повторување, 218

веројатност:
- статистичка, 243
- класична, 257
- својства, 259
- условна, 263

Г

генератриса, 153
грен, 295

Д

дефиниционо множество, 4
дискриминанта, 91
двоен корен, 93
директриса, 153
дисперзија, 287

Е

еднакви комплексни, 63
екстремна вредност, 124
експеримент, 242
елементарни настани, 245

И

израз:
- алгебарски, 53
- ирационален, 53
- рационален, 55

имагинарна единица, 61

К

корен:
- нормален вид, 36
- n-ти, 37
- проширување, 47
- скратување, 43
- слични, 48
- коренување, 52

комплексни броеви:
- дефиниција, 62
- спротивен комплексен, 62
- конкугирано комплексни,62
- еднаквост, 63
- модул, 67
- геометриски приказ, 70

квадратна равенка:
- полна, 83
- неполна, 83
- со параметри, 83
- општ облик, 84
- нормален (сведен), 84
- решение (корен), 85
- каноничен вид, 118
- неравенка, 128

конус:
- прав, 160
- кос, 160
- потсечен, 168
- рамностран, 162
- плоштина, 165

косинус, 179
котангенс, 184
косинусна теорема, 204
комбинации:
- без повторување, 225
- со повторување, 228

карат, 295

М

модул, 67
максимум, 124
минимум, 124
медијана, 263
мода, 284

Н

нули, 125
независност на настани, 266

О

оска:
- реална, 71
- имагинарна, 71

- тангенсна, 183
- котангенсна, 183
операции со комплексни броеви:
- собирање, 64
- одземање, 64
- множење, 66
- делење, 68
- степенување, 69
осен пресек:
- цилиндар, 154
- конус, 161
операции со случајни настани:
- производ, 249
- збир, 250
обележје, 269

П

параметар, 13
проширување корен, 42
парабола, 110
призма:
- права, 135
- правилна, 135
- плоштина, 138
пирамида:
- триаголна, 143
- четириаголна, 143
- правилна, 143
- потсечена, 144
- плоштина, 146
пенивејси, 235
пермутации:
- без повторување, 221
- со повторување, 223
полигон на:
- фреквенции, 273
- релативни фреквенции,273
популација, 269
примерок, 269

Р

равенка:
- линеарна, 4
- алгебарска, 4
- еквивалентна, 5
- со една непозната, 4
- со две непознати, 9
- квадратна, 82
ранг, 285
решавање систем на линеарни равенки:
- метод на замена, 17
- спротивни коефициенти, 20
- графичко, 24
радиканд, 37
рационализирање, 53
рамнина:
- комплексна, 71
- гаусова, 71
рабови:
- бочни, 135
- основни, 135
ротационо тело, 154

С

систем линеарни равенки е:
- неопределен, 19
- противречен, 19
- еквивалентен, 15
степен со показател рационален број, 40
синус, 179
синусна теорема, 199
случаен настан, 247
стандардна девијација, 288
својство:
- комутативно, 65
- асоцијативно, 65
- дистрибутивно, 67
стандардно:
- злато, 295
- сребро, 295

Т

теме на парабола, 110
тригонометриска кружница, 179
тангенс, 183

Ф

функција:
- линеарна, 108
- квадратна, 109
финост:
- промилна, 295
- англиска, 295

Х

хистограми, 277

Ц

цилиндар:
- прав, 153
- рамностран, 155
- кос кружен, 155
- плоштина, 157
- волумен, 157

СОДРЖИНА

ТЕМА 1 СИСТЕМ ЛИНЕАРНИ РАВЕНКИ 3
сите струки

ТЕМА 2 КОРЕНУВАЊЕ 35
Т

ТЕМА 3 КОМПЛЕКСНИ БРОЕВИ 59
Т,Е

ТЕМА 4 КВАДРАТНИ РАВЕНКИ 81
сите струки

ТЕМА 5 КВАДРАТНИ ФУНКЦИИ И КВАДРАТНИ НЕРАВЕНКИ 107
сите струки

ТЕМА 6 ПЛОШТИНА И ВОЛУМЕН НА ГЕОМЕТРИСКИ ТЕЛА 133
сите струки

ТЕМА 7 РЕШАВАЊЕ НА КОСОАГОЛЕН ТРИАГОЛНИК 175
Т

ТЕМА 8 КОМБИНАТОРИКА 213
Е

ТЕМА 9 ВЕРОЈАТНОСТ И СТАТИСТИКА 241
Е Е,З

ТЕМА 10 БЛАГОРОДНИ МЕТАЛИ 293
З

ОДГОВОРИ, УПАТСТВА, РЕШЕНИЈА 305

ПРЕГЛЕД НА ПОИМИ 353

Издавач:

МИНИСТЕРСТВО ЗА ОБРАЗОВАНИЕ И НАУКА НА РЕПУБЛИКА МАКЕДОНИЈА
ул. „Мито Хаџи Василев - Јасмин”, бб - Скопје

Рецензенсиона комисија:

Д-р Жанета Попеска, претседател
Јагода Тамушоска, член
Хамид Хебиби, член

Со Решение на Министерот за образование и наука на Република Македонија број 22-4256/1 од 28.07.2010 година, се одобрува употребата на овој учебник.

Автори: Д-р Наум Целакоски,
Д-р Верца Бакева,
Боривоје Миладиновиќ,
Јово Стефановски

МАТЕМАТИКА
за втора година средно стручно образование за сите струки

Уредник на изданието
Јово Стефановски

Јазичен лектор
Сузана Стојковска

Компјутерска обработка и дизајн
Драган Шопкоски, Милчо Аврамоски, Бобан Аврамоски

Коректура
Авторите

Подготовка за печат
Јово Стефановски

Печати*:*
Графички центар дооел, Скопје

Тираж:
10.700

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека “Св.Климент Охридски” , Скопје
51(075.3)

МАТЕМАТИКА за втора година : средно стручно образование за сите струки / Наум Целакоски ...[и др.]. - Скопје : Министерство за образование и наука на Република Македонија, 2010. - 257 стр. : илустр. ; 25 см
Автори: Наум Целакоски, Верица Бакева, Боривоје Миладиновиќ, Јово Стефановски

ISBN 978-608-226-050-1
1.Целакоски, Наум [автор]
COBISS.MK-ID 84290314