Малчески Ристо

ДВЕ ВАЖНИ НЕРАВЕНСТВА И БРОЈОТ e

За бројот e може да се каже дека е една од најважните константи во математиката. При воведување на бројот e најчесто се користи низата

$$(1) \qquad e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \quad n \in N.$$

Имено, се докажува дека низата (1) е монотоно растечка и ограничена од горе, што значи дека таа е конвергентна, т.е. постои $\lim\limits_{n\to\infty} e_n$ и оваа граница се означува со e.

Постојат повеќе методи за докажување на саканите својства на низата (1). Во оваа статија истите ќе ги докажеме ако го искористиме неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина, за позитивни реални броеви, кое претходно ќе го докажеме. Имено, ќе ги разгледаме следните задачи.

Задача 1. (Неравенство на Бернули). Ако x_i, $i=1,...,n$ се реални броеви со ист знак, поголеми од -1, тогаш

$$(2) \qquad (1+x_1)(1+x_2)...(1+x_n) \geq 1+x_1+...+x_n$$

Докажете!

Решение. Неравенството (2) ќе го докажеме со математичка индукција по n.

(i) За $n=1$ имаме $1+x_1 \geq 1+x_1$, т.е. неравенството важи.

(ii) Нека претпоставиме дека за $n=k$ и произволни реални броеви $x_1, x_2, ..., x_k$, со ист знак и поголеми од -1 важи

$$(3) \qquad (1+x_1)(1+x_2)...(1+x_k) \geq 1+x_1+...+x_k$$

Нека $n=k+1$ и x_i, $i=1,2,...,k,k+1$ се произволни реални броеви со ист знак, поголеми од -1. Тогаш, имаме $(x_1+x_2+...+x_k)x_{k+1} \geq 0$ и $1+x_{k+1} > 0$ па затоа од (3) добиваме:

$$(1+x_1)(1+x_2)...(1+x_k)(1+x_{k+1}) \geq (1+x_1+x_2+...+x_k)(1+x_{k+1})$$
$$= 1+x_1+..+x_k+x_{k+1}+(x_1+...+x_k)x_{k+1} \geq 1+x_1+x_2+...+x_k+x_{k+1},$$

т.е. неравенството (2) важи и за $n=k+1$, па од принципот на математичка индукција следува дека важи за секој $n \in N$ и секои реални броеви $x_i > -1$, $i=1,2,...,n$ со ист знак.

Забелешка. Непосредна последица на неравенството (2) е многу попознатиот облик на неравенството на Бернули: ако $x > -1$, тогаш

(4) $$(1+x)^n \geq 1+nx,\ \forall n \in N.$$

Задача 2.(Неравенство меѓу аритметичката и геометриската средина). Ако $a_i > 0,\ i = 1,2,\dots,n;\ n \in N$, тогаш $\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$, $\sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}$ ги нарекуваме аритметичка и геометриска средина на дадените броеви, соодветно. Докажете го неравенството

(5) $$\frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n}.$$

Решение. Од (4), за $x = \frac{a-1}{m}$, $a > 0$, $m \in N$. добиваме

$$\left(1+\frac{a-1}{m}\right)^m = 1+m\frac{a-1}{m},$$

т.е.

(6) $$1+\frac{a-1}{m} \geq \sqrt[m]{a},\ m \in N.$$

Ако неравенството (6) го помножиме со $b > 0$, тогаш добиваме $b+b\frac{a-1}{m} \geq \sqrt[m]{ab^m}$. Во последното неравенство ставаме $ab = c$ и добиваме $\left(b^{m-1}c\right)^{\frac{1}{m}} \leq b+\frac{c-b}{m}$ т.е.

(7) $$\left(b^{m-1}c\right)^{\frac{1}{m}} \leq \frac{c+(m-1)b}{m},\ b > 0,\ c > 0.$$

Сега, користејќи го неравенството (1), со помош на математичка индукција ќе го докажеме неравенството (5).

Имено, за $n = 2$, од $(a_1+a_2)^2 \geq 4a_1 a_2$ добиваме $\frac{a_1+a_2}{2} \geq \sqrt{a_1 a_2}$, т.е. неравенството (5) важи за $n = 2$.

Нека претпоставиме дека неравенството (5) важи за $n = k$, т.е.

$$\frac{a_1+a_2+\dots+a_k}{k} \geq \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k},\ a_i > 0,\ i = 1,2,\dots,k.$$

Според (7), за $m = k+1$ и $c = a_{k+1}$, $b = \sqrt[k]{a_1 a_2 \dots a_k}$ имаме

$$\left(b^k a_{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}} \leq \frac{kb+a_{k+1}}{k+1},$$

па од индуктивната претпоставка следува

$$\left(a_1 \dots a_k a_{k+1}\right)^{\frac{1}{k+1}} \leq \frac{a_1+\dots+a_k+a_{k+1}}{k+1},$$

т.е. неравенството (5) важи за $n=k+1$. Од принципот на математичка индукција заклучуваме дека неравенството (5) важи за секој $n\in N$.

Во следната задача ќе се осврнеме на прашањето кое е предмет на оваа статија.

Задача 3. Низата (1) монотоно расте и е ограничена од горе.

Решение. За да докажеме дека низата монотоно расте, доволно е во неравенството (5) да ставиме $a_i=1+\frac{1}{n}$, $i=1,2,\dots,n$ и $a_{n+1}=1$. Добиваме

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1}\le\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}$$

односно

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\le\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=e_{n+1},\ \forall n\in N,$$

што значи, разгледуваната низа монотоно расте.

За да докажеме дека низата (1) е ограничена од горе, ќе ја разгледаме помошната низа $b_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n\in N$. Од неравенството меѓу аритметичката и геометриската средина добиваме

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\sqrt[n+1]{1+\frac{1}{n+1}}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot 1^n}\le$$

$$\le\frac{1+\frac{1}{n+1}+n\cdot 1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1+\frac{1}{(n+1)^2}\right)=$$

$$=1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}<$$

$$<1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+1)^3}+\frac{1}{(n+1)^4}+\dots=\frac{n+1}{n}=1+\frac{1}{n}.$$

Значи,

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}}=1+\frac{1}{n},$$

или

$$b_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=b_n,\ \forall n\in N,$$

т.е. низата $\{b_n\}$ монотоно опаѓа. Сега имаме,

$$e_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=b_n<b_1=4,\ \forall n\in N,$$

т.е. низата (1) е ограничена од горе.

Од теоремата: *"Монотоно растечка и ограничена од горе низа е конвергентна."* и од задача 3 добиваме дека низата (1) е конвергентна, т.е. $e = \lim\limits_{n\to\infty} e_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, постои.

Како што можеме да видиме, со претходните три задачи, користејќи го само принципот на математичка индукција и споменатата теорема за монотони и ограничени низи успеавме, докажувајќи две важни неравенства, да го воведеме бројот e, една од најважните константи во математиката. Да забележиме дека претходната постапка ни овозможува да добиеме по желба добри апроксимации за бројот e. Имено, ако земеме доволно голем број n, тогаш можеме да кажеме дека

$$e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < b_{20} = \left(1+\frac{1}{20}\right)^{21} < 2{,}79.$$

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на СММ