Alija Muminagić
Jens Carstensen
Данска

ПОЗНАТИ ЗАДАЧИ СО НЕ ТАКА ПОЗНАТИ РЕШЕНИЈА

Во оваа статија Ќе дадеме не така познати решенија, за познати задачи.

Задача 1. Докажи дека за реални позитивни броеви a, b и c е точно неравенството

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2}. \tag{1}$$

Решение. Бидејќи a, b и c се позитивни реални броеви неравенството (1) е еквивалентно со неравенството

$$2a^3+2b^3+2c^3-a^2b-b^2a-b^2c-c^2b-a^2c-c^2a\geq 0.$$

Ако поделиме со $c^3>0$, добиваме неравенство

$$2\frac{a^3}{c^3}+2\frac{b^3}{c^3}+2-\frac{a^2b}{c^3}-\frac{b^2a}{c^3}-\frac{b^2a}{c^3}-\frac{b^2c}{c^3}-\frac{c^2b}{c^3}-\frac{a^2c}{c^3}-\frac{c^2a}{c^3}\geq 0 \tag{2}$$

кое е еквивалентно со претходното неравенство.

Во неравенството (2) воведуваме смени $p=\frac{a}{c}$ и $r=\frac{b}{c}$, при што истото го добива обликот

$$2p^3+2r^3+2-p^2r-r^2p-p^2-r^2-p-r\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$2(p^3+r^3+1)-pr(p+r)-(p+r)-(p^2+r^2)\geq 0 \Leftrightarrow$$
$$2[(p+r)^3-3pr(p+r)+1]-pr(p+r)-(p+r)-(p+r)^2+2pr\geq 0. \tag{3}$$

Во (3) воведуваме смена $x=p+r>0$ и $y=pr>0$. Да забележиме дека $x^2\geq 4y$. Навистина, $x^2-4y=(p+r)^2-4pr=(p-r)^2\geq 0$.

Со последните воведени ознаки, т.е. смени добиваме

$$2(x^3-3xy+1)-xy-x-x^2+2y\geq 0,$$

кое е еквивалентно со неравенството

$$y(2-7x)+2x^3-x^2-x+2\geq 0. \tag{4}$$

Графикот на функцијата $f(y)=y(2-7x)+2x^3-x^2-x+2$ е права и достигнува екстреми (т.е. најголема и најмала вредност, максимум односно минимум) на интервалот $[0,\frac{x^2}{4}]$ во неговите крајни точки. За секоја од крајните точки имаме

$$f(0)=2x^3-x^2-x+2=2(x+1)(x^2-\frac{3}{2}x+1)\geq 0\ ,$$

$$f(\frac{x^2}{4})=\frac{x^2}{4}(2-7x)+2x^3-x^2-x+2=\frac{1}{4}(x^3-2x^2-4x+8)=\frac{1}{4}(x-2)^2(x+2)\geq 0$$

Според тоа, (4) е точно неравенство а со тоа и (1). Кога имаме знак за равенство? Зошто ја разгледуваме линеарната функција на интервалот $[0,\frac{x^2}{4}]$?

Задача 2. Докажи дека за произволни позитивни реални броеви a,b и c е точно неравенството $\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c$.

Решение. Нека е X случајна променлива чии вредности се $\frac{1}{a},\frac{1}{b},\frac{1}{c}$ и за кои веројатностите се $\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3}$. За варијансата $D(X)$ имаме

$$D(X)\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad E\left(X^2\right)-E(X)^2\geq 0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2})\geq(\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}+\frac{1}{3c})^2 \quad\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}\frac{1}{a^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{b^2}+\frac{1}{3}\frac{1}{c^2}\geq\frac{1}{9}\frac{1}{a^2}+\frac{1}{9}\frac{1}{b^2}+\frac{1}{9}\frac{1}{c^2}+\frac{2}{9ab}+\frac{2}{9bc}+\frac{2}{9ca} \quad\Leftrightarrow$$

$$2b^2c^2+2a^2c^2+2a^2b^2\geq 2abc^2+2ab^2c+2a^2bc \Leftrightarrow$$

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}+\frac{ab}{c}\geq a+b+c\ .$$

Кога важи равенство?

Задача 3. Докажи дека $\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Решение. БидејЌи $\sin(90^\circ-x)=\cos x$, добиваме

$$P=\sin 20^\circ\sin 40^\circ\sin 80^\circ=\cos 70^\circ\cos 50^\circ\cos 10^\circ=\frac{\cos 10^\circ\cos 30^\circ\cos 50^\circ\cos 80^\circ}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\ . \qquad (1)$$

Нека $z=\cos 10^\circ+i\sin 10^\circ$. Да се потсетиме дека

$$\cos n\varphi=\frac{z^{2n}+1}{2z^n}\ ,\ z=\cos\varphi+i\sin\varphi \text{ и } z^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$$

$$\bar{z}=\cos\varphi-i\sin\varphi\ ,\ \bar{z}=\frac{1}{z}\ ,\ \bar{z}^n=\frac{1}{z^n}=\cos n\varphi-i\sin n\varphi\ .$$

Според тоа,

$$\cos 10^\circ=\frac{z^2+1}{2z}\ ,\ \cos 30^\circ=\frac{z^6+1}{2z^3}\ ,\cos 50^\circ=\frac{z^{10}+1}{2z^5}\ ,\cos 70^\circ=\frac{z^{14}+1}{2z^7}\ .$$

Сега (1) го добива обликот

$$P=\cos 70^\circ \cos 50^\circ \cos 10^\circ = \frac{\cos 10^\circ \cos 30^\circ \cos 50^\circ \cos 80^\circ}{\cos 30^\circ}$$

$$=\frac{\frac{z^2+1}{2z}\cdot\frac{z^6+1}{2z^3}\cdot\frac{z^{10}+1}{2z^5}\cdot\frac{z^{14}+1}{2z^7}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{16z^{16}}(z^2+1)(z^6+1)(z^{10}+1)(z^{14}+1)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{16z^{16}}(z^{32}+z^{30}+z^{26}+z^{24}+z^{22}+z^{20}+z^{18}+2z^{16}+z^{14}+z^{12}+$$

$$+z^{10}+z^8+z^6+z^2+1)$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{16z^{16}}[(z^{32}+z^{30}+z^{28}+z^{26}+z^{24}+z^{22}+z^{20}+z^{18}+2z^{16}+z^{14}+z^{12}+z^{10}+$$

$$+z^8+z^6+z^4+z^2+1)+z^{16}-z^{28}-z^4]$$

$$=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{16z^{16}}(\frac{z^{34}-1}{z^2-1}+z^{16}-z^{28}-z^4)=\frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{16z^{18}}(\frac{z^{36}-z^2}{z^2-1}+z^{18}-z^{30}-z^6)$$

Да забележиме дека

$$z^{18}=\cos 180^\circ + i\sin 180^\circ = -1,\ z^{36}=\cos 360^\circ + i\sin 360^\circ = 1,$$

$$z^{36}=(z^{18})^2=(-1)^2=1,\ \ z^6=\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$z^{30}=\cos 300^\circ + i\sin 300^\circ = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

па според тоа

$$P=\frac{\sqrt{3}}{24(-1)}[\frac{1-z^2}{-(1-z^2)}-1-(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})-(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})]$$

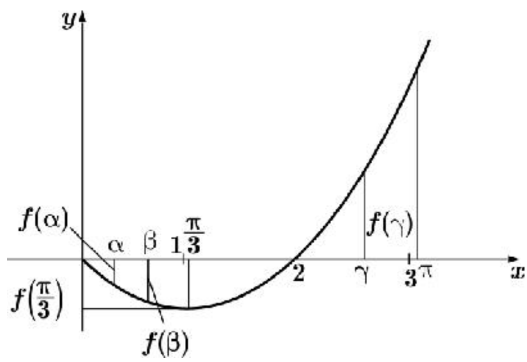
$$=-\frac{\sqrt{3}}{24}(-1-1-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

т.е. $P=-\frac{\sqrt{3}}{24}(-1-1-1)=\frac{\sqrt{3}}{8}$.

Задача 4. Докажи дека во секој триаголник е точно неравенството

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\le\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Решение. Ќе ја разгледаме функцијата $f(x)=\frac{1}{2}x-\sin x$. Изводот на оваа функција е $f'(x)=\frac{1}{2}-\cos x$, од каде што гле-



даме дека на интервалот $[0,\pi]$ најмала вредност (глобален минимум) има во точката $x=\frac{\pi}{3}$. Заради тоа (види цртеж) $f(\alpha)\geq f)\frac{\pi}{3})$, $f(\beta)\geq f(\frac{\pi}{3})$ и $f(\gamma)\geq f(\frac{\pi}{3})$. Ако ги искористиме претходно добиените неравенства и равенството $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ добиваме

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2}-(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma) &= \frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}-(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\\ &= \frac{\alpha}{2}-\sin\alpha+\frac{\beta}{2}-\sin\beta+\frac{\gamma}{2}-\sin\gamma\\ &= f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)\geq 3f(\frac{\pi}{3})\\ &= 3(\frac{1}{2}\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3})=3(\frac{\pi}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{\pi}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

Конечно, $\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}$. Кога важи равенство?

Забелешка. Во задачата 1, добивме дека

$$2a^3+2b^3+2c^3\geq a^2b+b^2a+b^2c+c^2b+a^2c+c^2a$$

и решението може да се добие непосредно на основа на MYURHED-овата теорема. Во задачата 4, лесно се покажува дека функцијата $f(x)=\sin x$ е конкавна (испакната) на интервалот $[0,\pi]$, па според Јенсеновото неравенство добиваме

$$\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\geq\frac{1}{3}(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)\iff\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma\leq\frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

Статијата прв пат е објавена во списанието СИГМА на Сојузот на математичарите на Македонија