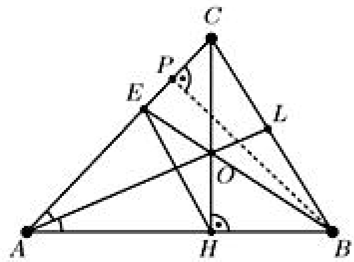
Ристо Малчески
Скопје

ТЕОРЕМА НА ЧЕВА (ВТОР ДЕЛ)

Во статијата [2] е докажана теоремата на Чева. Во оваа статија, за која може да се каже дека е продолжение на статијата [2], ќе разгледаме неколку задачи во чие решавање се користи теоремата на Чева. Притоа, да забележиме дека скоро сите разгледани задачи се задавани на национални математички олимпијади во одделни држави или на престижни математички турнири.

1. Даден е остроаголен $\triangle ABC$ со висина CH $(H \in AB)$ и симетрала AL $(L \in BC)$ на $\measuredangle BAC$ кои се сечат во точката O. Правата BO ја сече страната AC во точката E. Докажи дека $\measuredangle AHE > 45^\circ$.

Решение. Прво да забележиме дека саканото неравенство $\measuredangle AHE > 45^\circ$ е еквивалентно со неравенството $\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} > \frac{\overline{AH}}{\overline{HC}}$. Од теоремата на Чева за $\triangle ABC$ и правите AL, BE и CH добиваме



$$\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CL}}{\overline{LB}} \cdot \frac{\overline{BH}}{\overline{HA}} = 1 \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{BL}}{\overline{LC}} \cdot \frac{\overline{AH}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} \cdot \frac{\overline{AH}}{\overline{HB}}$$

Нека BP е висината во $\triangle ABC$ повлечена од темето B. Имаме

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{CH}} \Rightarrow \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AH}}{\overline{HC}} \cdot \frac{\overline{BP}}{\overline{BH}}.$$

Останува да забележиме дека $\overline{BP} > \overline{BH}$ како тетиви во кружница со дијаметар BC соодветни на $\measuredangle BCP > \measuredangle BCH$,

2. Даден е $\triangle ABC$ со центар I_a на припишаната кружница, која ја допира страната BC. Правата AI_a по втор пат ја сече опишаната кружница околу $\triangle ABC$ во точката T. Нека X е точка на TI_a таква што $\overline{XI_a}^2 = \overline{XA} \cdot \overline{XT}$ и нека $XA' \perp BC$, $A' \in BC$. Аналогно се дефинираат точките B' и C'. Докажи дека правите AA', BB' и CC' се сечат во една точка.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки во $\triangle ABC$. Нека M, P и H се ортогоналните проекции соодветно на T, I_a и A врз BC. Да означиме $\overline{BM} = m = \frac{a}{2}, \overline{BH} = h, \overline{BA'} = x$ и $\overline{BP} = u$. Тогаш од условот на задачата следува $\overline{A'P}^2 = \overline{A'M} \cdot \overline{A'H}$ и $x = \frac{u^2 - hm}{h+m-2u}$. Аналогно, ако ги замениме улогите на

B и C, добиваме

$$a-x=\frac{(a-u)^2-(a-h)(a-m)}{2(a-u)-(a-h)-(a-m)}.$$

Според тоа

$$\frac{x}{a-x}=\frac{u^2-hm}{(a-u)^2-(a-h)(a-m)}=\frac{(p-b)^2-\frac{ac\cos\beta}{2}}{(p-c)^2-\frac{ab\cos\gamma}{2}}.$$

Ако последното равенство го помножиме со аналогните равенства за B' и C', тогаш тврдењето на задачата следува од добиеното равенство и теоремата на Чева.

3. Точките P,Q и R соодветно од страните BC,CA и AB на $\triangle ABC$ се такви што правите AP,BQ и CR се сечат во точката S. Ако

$$P_{ABS}=P_{QSPC} \text{ и } \frac{P_{ARC}}{P_{BRC}}=\frac{\overline{CA}^4}{\overline{BC}^4},$$

докажи дека четириаголникот $ABPQ$ е тетивен.

Решение. Ќе ги искористиме стандардните ознаки $a=\overline{BC}, b=\overline{AC}$ и h_a,h_b за соодветните висини. Од $P_{ABS}=P_{QSPC}$ добиваме $P_{ABP}=P_{QBC}$, па затоа $\overline{BP}\cdot h_a=\overline{CQ}\cdot h_b$. Значи, $\overline{BP}=\overline{CQ}\cdot\frac{h_b}{h_a}=\overline{CQ}\cdot\frac{a}{b}$. Аналогно, од $P_{ABS}=P_{QSPC}$ добиваме $P_{ABQ}=P_{APC}$ и $\overline{AQ}=\overline{CP}\cdot\frac{b}{a}$. Бидејќи

$$\frac{\overline{BP}\cdot\overline{CQ}\cdot\overline{AR}}{\overline{CP}\cdot\overline{QA}\cdot\overline{RB}}=\frac{\frac{a}{b}\overline{CQ}\cdot\overline{CQ}\cdot\overline{AR}}{\overline{CP}\cdot\frac{b}{a}\overline{CP}\cdot\overline{RB}}=\frac{a^2\overline{CQ}^2\cdot b^4}{b^2\overline{CP}^2\cdot a^4}=\left(\frac{\overline{CQ}\cdot b}{\overline{CP}\cdot a}\right)^2,$$

од теоремата на Чева за $\triangle ABC$ следува $\frac{\overline{CQ}\cdot b}{\overline{CP}\cdot a}=1$, т.е. $\overline{CQ}\cdot b=\overline{CP}\cdot a$, што значи дека четириаголникот $ABPQ$ е тетивен.

4. Даден е $\triangle ABC$ со центар на впишаната кружница I и средини на страните AB,BC и CA соодветно C_0,A_0 и B_0. Правата C_0I ја сече A_0B_0 во точка C_1. Аналогно се дефинираат точките A_1 и B_1. Докажи дека

а) правите AA_1,BB_1,CC_1 се сечат во една точка.,

б) нормалите повлечени од A_1,B_1,C_1 соодветно на BC,CA,AB се сечат во една точка.

Решение. Ќе ги користиме стандардните ознаки за елементите на $\triangle ABC$.

а) Бидејќи A_0C_0 е средна линија во $\triangle ABC$, отсечката низ I која е нормална на AC и на A_0C_0 има должина $\frac{h_b}{2}$. Значи, висината од I во $\triangle A_0C_0I$ има должина $\frac{h_b}{2}-r$. Ако го искористиме овој факт и аналогниот факт за $\triangle B_0C_0I$, последователно добиваме

$$\frac{\overline{A_0C_1}}{\overline{B_0C_1}}=\frac{P_{A_0C_0C_1}}{P_{B_0C_0C_1}}=\frac{P_{A_0C_0I}}{P_{B_0C_0I}}=\frac{(\frac{h_b}{2}-r)\frac{b}{2}}{(\frac{h_a}{2}-r)\frac{a}{2}}=\frac{b(\frac{P}{b}-\frac{P}{s})}{a(\frac{P}{a}-\frac{P}{s})}=\frac{s-b}{s-a}=\frac{\overline{BC_2}}{\overline{AC_2}},$$

каде C_2 е допирната точка на впишаната кружница во $\triangle ABC$ и страната AB. Според тоа, CC_1 минува низ C_2.

Аналогно се докажува дека AA_1 и BB_1 минуваат низ соодветните допирни точки и важат соодветните пропорции. Сега тврдењето следува од теоремата на Чева.

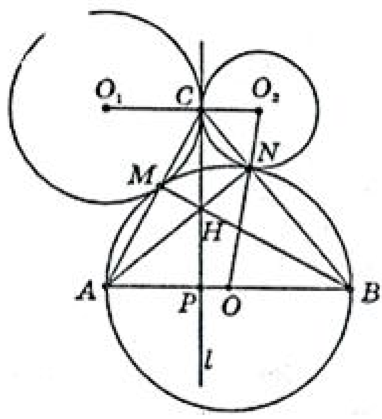
б) Од претходно докажаното равенство $\frac{\overline{A_0C_1}}{\overline{B_0C_1}}=\frac{s-b}{s-a}$ следува дека C_1 е допирната точка на припишаната кружница на $\triangle A_0B_0C_0$ кон страната A_0B_0. Аналогните тврдења важат и за точките A_1 и B_1. Сега тврдењето следува од фактот дека

$$\overline{C_1A_0}^2+\overline{B_1C_0}^2+\overline{A_1B_0}^2=\overline{C_1B_0}^2+\overline{B_1A_0}^2+\overline{A_1C_0}^2$$

(теорема на Карно).

5. Кружниците k_1 и k_2 со центри соодветно во точките O_1 и O_2 се допираат во точката C, а кружницата k со центар O надворешно ги допира k_1 и k_2. Нека l е заедничката тангента на k_1 и k_2 во точката C и нека AB е дијаметар на k нормален на l, при што точките A и O_1 се во иста полурамнина во однос на правата l. Докажи дека правите AO_2, BO_1 и l се сечат во една точка.

Решение. Со r, r_1 и r_2 да ги означиме радисуите на k, k_1 и k_2 соодветно, со M и N допирните точки на k соодветно со k_1 и k_2 и со P пресечната точка на l со AB (цртеж десно).



Од $O_1O_2 \perp l$ и $AB \perp l$ следува дека $\measuredangle BON=\measuredangle CO_2N$. Бидејќи триаголниците BON и CO_2N се рамнокраки, тие се слични, т.е. $\triangle BON \sim \triangle CO_2N$. Затоа $\measuredangle ONB=\measuredangle CNO_2$, што значи дека точките C, N и B лежат на една права. Освен тоа, од сличноста следува $\frac{\overline{BN}}{\overline{CN}}=\frac{\overline{BO}}{\overline{CO_2}}=\frac{r}{r_2}$. Аналогно добиваме дека точките A, M и C се колинеарни и $\frac{\overline{AM}}{\overline{MC}} = \frac{r}{r_1}$. Од друга страна бидејќи AB е дијаметар на k, важи $\measuredangle AMB = \measuredangle ANB = 90^\circ$, што значи дека AM и AN се висини во $\triangle ABC$. Третата висина во овој триаголник е CP. Според тоа, правите AN, AM и l се сечат во една точка H, која е ортоцентар на $\triangle ABC$.

Според теоремата на Чева имаме

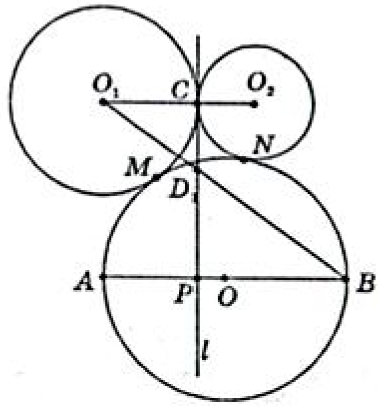
$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{BN}}{\overline{NC}} \cdot \frac{\overline{CM}}{\overline{MA}} = 1,$$

од каде добиваме

$$\frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{r}{r_2} \cdot \frac{r_1}{r} = 1, \text{ т.е. } \frac{\overline{AP}}{\overline{PB}} \cdot \frac{r_1}{r_2} = 1,$$

односно

$$\frac{r_1}{\overline{PB}} = \frac{r_2}{\overline{AP}}. \qquad (1)$$



Нека сега D_1 и D_2 се пресечните точки на правата l соодветно со правите BO_1 и AO_2. Јасно, $\triangle O_1CD_1 \sim \triangle BPD_1$ (цртеж десно), па затоа $\frac{\overline{CD_1}}{\overline{D_1P}} = \frac{r_1}{\overline{PB}}$. Аналогно $\frac{\overline{CD_2}}{\overline{D_2P}} = \frac{r_2}{\overline{AP}}$, па затоа од (1) следува дека $\frac{\overline{CD_1}}{\overline{D_1P}} = \frac{\overline{CD_2}}{\overline{D_2P}}$, т.е. $\frac{\overline{CP}}{\overline{D_1P}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{D_2P}}$, од што следува $D_1 = D_2$. Според тоа, дека правите AO_2, BO_1 и l се сечат во една точка.

6. Даден е тетивен шестаголник $ABCDEF$ за кој важи

$$\overline{AB} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{EF} = \overline{BC} \cdot \overline{DE} \cdot \overline{AF}. \qquad (1)$$

Нека точките B и B_1 се симетричлни во однос на правата AC, D и D_1 се симетрични во однос на правата CE, F и F_1 се симетрични во однос на правата EA. Докажи дека $\triangle B_1D_1F_1$ е сличен со $\triangle BDF$.

Решение. Од $\triangle ACE$ добиваме

$$\frac{\sin\measuredangle DAC}{\sin\measuredangle DAE} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DE}}, \frac{\sin\measuredangle AEB}{\sin\measuredangle CEB} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}, \frac{\sin\measuredangle ECF}{\sin\measuredangle ACF} = \frac{\overline{EF}}{\overline{AF}},$$

па од (1) следува

$$\frac{\sin\measuredangle DAC}{\sin\measuredangle DAE} \cdot \frac{\sin\measuredangle AEB}{\sin\measuredangle CEB} \cdot \frac{\sin\measuredangle ECF}{\sin\measuredangle ACF} = \frac{\overline{DC}}{\overline{DE}} \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \cdot \frac{\overline{EF}}{\overline{AF}} = 1.$$

Сега, од синусната теорема на Чева следува дека правите AD, BE и CF се сечат во една точка. Нека таа точка е P.

Да ги разгледаме $\triangle AF_1P$ и $\triangle CD_1P$, Ако искористиме дека F_1 и D_1 се симетрични на F и D во однос на AE и CE и тоа дека шестаголникот е тетивен, добиваме

$$\begin{aligned}\measuredangle PAF_1 &= |\measuredangle PAE - \measuredangle F_1AE| = |\measuredangle DAE - \measuredangle FAE| \\ &= |\measuredangle DCE - \measuredangle FCE| = |\measuredangle D_1CE - \measuredangle PCE| \\ &= \measuredangle PCD_1.\end{aligned}$$

Горниот израз покажува дека D и D_1 се на различни страни на CF ако и само ако F и F_1 се во една иста полурамнина во однос на AD. Освен тоа, ако искористиме дека $\triangle APF \sim \triangle CPD$ и $\overline{AF_1} = \overline{AF}$ и $\overline{CD_1} = \overline{CD}$, добиваме

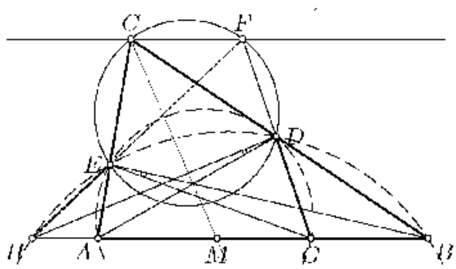
$$\frac{\overline{AF_1}}{\overline{CD_1}} = \frac{\overline{AF}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}}.$$

Според тоа, $\triangle AF_1P \sim \triangle CD_1P$. Оттука $\measuredangle APF_1 = \measuredangle CPD_1$ и $\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PD_1}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{CP}} = \frac{\overline{FP}}{\overline{DP}}$, при што последното равенство следува од сличноста $\triangle APF \sim \triangle CPD$. Освен тоа, бидејќи D_1 е надвор од $\measuredangle PCD$ ако и само ако F_1 е во $\measuredangle FAP$, добиваме $\measuredangle F_1PD_1 = \measuredangle APC = \measuredangle FPD$. Според тоа, $\frac{\overline{PF_1}}{\overline{PD_1}} = \frac{\overline{FP}}{\overline{DP}}$ и $\measuredangle F_1PD_1 = \measuredangle FPD$, па затоа $\triangle F_1D_1P \sim \triangle FDP$. Последното значи дека $\frac{\overline{F_1D_1}}{\overline{FD}} = \frac{\overline{PF_1}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{PD_1}}{\overline{PD}}$. Аналогно се докажува дека $\frac{\overline{B_1D_1}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{PD_1}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{F_1D_1}}{\overline{FD}}$ и $\frac{\overline{F_1B_1}}{\overline{FB}} = \frac{\overline{PF_1}}{\overline{PF}} = \frac{\overline{F_1D_1}}{\overline{FD}}$. Од добиените равенства следува $\triangle B_1D_1F_1 \sim \triangle BDF$.

7. На страните BC и AC на $\triangle ABC$ земени се соодветно точки D и E. Нека $F(F \neq C)$ е пресечната точка на кружницата опишана околу $\triangle CED$ и правата која минува низ точката C и е паралелна со правата AB. Нека G е пресечната точка на правата FD и страната AB, а H е точка на правата AB таква што $\measuredangle HDA = \measuredangle GEB$ и $H - A - B$. Ако $\overline{DG} = \overline{EH}$, докажи дека пресечната точка на отсечките AD и BE припаѓа на симетралата на $\measuredangle ACB$.

Решение. Од

$$\begin{aligned}\measuredangle AGD &= 180^\circ - \measuredangle CFD = \measuredangle CED \\ &= 180^\circ - \measuredangle AED,\end{aligned}$$



следува дека точките A, E, D, G се концициклични. Според тоа, важи $\measuredangle DAG = \measuredangle DEG$. Но, тогаш

$$\begin{aligned}\measuredangle DHB &= \measuredangle DAG - \measuredangle HDA \\ &= \measuredangle DEG - \measuredangle BEG = \measuredangle DEB,\end{aligned}$$

па затоа и точките H, E, D, B се концициклични. Оттука,

$$\measuredangle BHE = 180^\circ - \measuredangle BDE = \measuredangle CDE = \measuredangle CFE,$$

што значи дека точките F, E, H се колинеарни. Според тоа, $\overline{EH} = \overline{EF} \cdot \frac{\overline{AE}}{\overline{EC}}$ и $\overline{DG} = \overline{DF} \cdot \frac{\overline{DB}}{\overline{CD}}$, па условот $\overline{DG} = \overline{EH}$ го добива обликот $\frac{\overline{AE}}{\overline{EC}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} = \frac{\overline{DF}}{\overline{EF}}$. Од друга страна, од $\measuredangle DEF = \measuredangle DCF = \measuredangle ABC$ и $\measuredangle DFE = \measuredangle ACB$ следува дека $\triangle DEF \sim \triangle ABC$, па важи $\frac{\overline{DF}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$, каде M е пресечната точка на симетралата на $\measuredangle ACB$ и страната AB. Според тоа, $\frac{\overline{AE}}{\overline{EE}} \cdot \frac{\overline{CD}}{\overline{DB}} \cdot \frac{\overline{BM}}{\overline{MA}} = 1$, па од теоремата на Чева следува дека правите AD и BE се сечат на CM .

Литература

1. Mitrović, M.; Ognjanović, S.; Veljković, M.; Petković, Lj.; Lazarević, N.: *Geometrija za* I *razred Matematičke gimnazije*, Krug, Beograd, 1998
2. Малчески, А., Малчески, Р.: Теорема на Чева, Сигма/Математички талент, Скопје