Задачите се скенирани од книгата:
Републички натпревари по математика во СР Македонија 1968-1977
Подготвена од
Проф. д-р Наум Целакоски и проф. д-р Александар Самарџиски

XV РЕПУБЛИЧКИ НАТПРЕВАР 1972

1.(II,72). Дадена е равенката

$$x^2 - 3xy + y^2 + 2x - 9y + 1 = 0. \qquad (1)$$

а) За кои вредности на y равенката (1) има двојно решение по x? Потоа да се најде тоа двојно решение.

б) За кои вредности на x равенката (1) има реални решенија по y?

Решение. а) Равенката (1) ќе има двојно решение по x ако нејзината дискриминанта D е нула:

$$D = (3y-2)^2 - 4(y^2 - 9y + 1) = 0,$$

$$5y^2 + 24y = 0,$$

од каде што добиваме $y=0$ и $y=-\frac{24}{5}$.

За $y=0$ равенката (1) се сведува на $x^2+2x+1=0$, па нејзиното (двојно) решение е $x=-1$, а за $y=-\frac{24}{5}$ равенката (1) се сведува на $25x^2+410x+1681=0$ чие двојно решение е $x=-\frac{41}{5}$.

б) Равенката (1) ќе има реални решенија по y, ако нејзината дискриминанта е ненегативна. Имаме:

$$D = (3x+9)^2 - 4(x^2+2x+1) =$$
$$= 5x^2 + 46x + 77 = 5(x+7)\left(x+\frac{11}{5}\right) \geq 0,$$

од каде што добиваме дека $x \in (-\infty, -7] \cup [-\frac{11}{5}, +\infty)$.

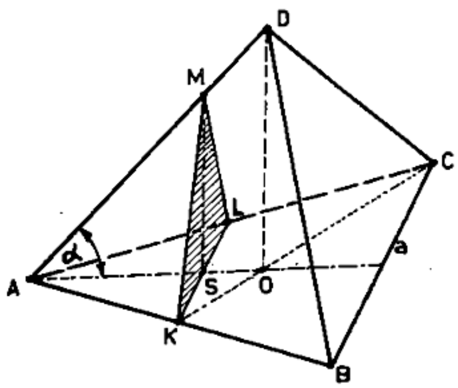
2.(II,72). Правилна тристрана пирамида е пресечена со рамнина што е поставена нормално на основата и низ средините на две страни од основата.

Да се најде волуменот на отсечениот дел ако е даден основниот раб a и аголот α меѓу бочниот раб и основата на пирамидата.

Решение. Отсечениот дел, чиј волумен се бара, е тристраната пирамида AKLM на црт.1.72. За волуменот V на оваа тристрана пирамида имаме

$$V = \frac{1}{3}P \cdot H, \qquad (1)$$

каде што P е плоштината на триаголникот AKL, а H е висината.



Црт.1.72

Триаголникот AKL е рамностран со страна $\frac{a}{2}$, па неговата плоштина P ќе биде

$$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{16} .$$

Триаголникот ASM е правоаголен, па имаме

$$H = \overline{AS}\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{4}\,\mathrm{tg}\,\alpha .$$

Замнувајќи ги вредностите на P и H во (1) добиваме:

$$V = \frac{a^3}{64}\,\mathrm{tg}\,\alpha .$$

3.(II,72). За кои вредности на а неравенките

$$-3 < \frac{x^2 + ax - 2}{x^2 - x + 1} < 2 \qquad (1)$$

се задоволени за сите реални вредноси на x?

Решение. Бидејќи

$$x^2 - x + 1 = (x - \tfrac{1}{2})^2 + \tfrac{3}{4} > 0$$

за секој реален број x, неравенките (1) можеме да ги помножиме со $x^2 - x + 1$ при што го добиваме следниов систем неравенки:

$$-3x^2 + 3x - 3 < x^2 + ax - 2 < 2x^2 - 2x + 2,$$

т.е.

$$4x^2 + (a-3)x + 1 > 0, \qquad (2)$$

$$-x^2 + (a+2)x - 4 < 0. \qquad (3)$$

Да видиме каков треба да биде реалниот број a за неравенката (2) да биде задоволена за секој реален број x. За да биде тоа исполнето, дискриминантата на соодветната квадратна равенка треба да биде негативна. Имаме:

$$D = (a-3)^2 - 16 = (a-7)(a+1) < 0,$$

од каде што добиваме

$$a \in (-1,\ 7). \qquad (4)$$

Слично, неравенката (3) да биде задоволена за секој реален број x, потребно е да биде

$$(a+2)^2 - 16 = (a+6)(a-2) < 0,$$

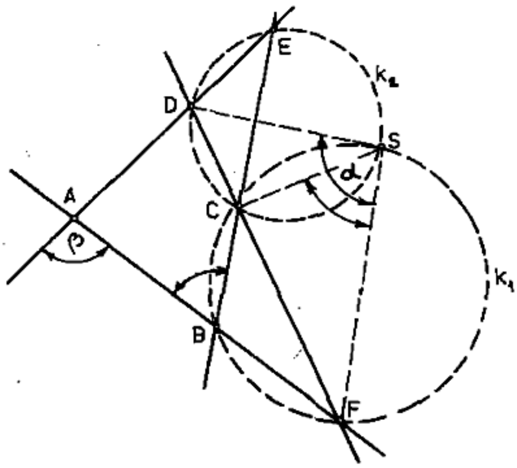
од каде што добиваме

$$a \in (-6, 2). \qquad (5)$$

Од (4) и (5) добиваме дека неравенките (1) се задоволени за секој реален број x ако и само ако $a \in (-1, 2)$.

4.(II.72). Четири прави во рамнината се сечат во шест точки и притоа образуваат четири триаголници. Да се докаже дека кружниците опишани околу овие триаголници минуваат низ една заедничка точка.

Решение. Кружниците k_1 и k_2, опишани околу триаголниците BCF и CDE соодветно, освен во точката C, нека се сечат и во точката S (црт.2.72). Да ја разгледаме сега кружницата k_3 опишана околу триаголникот ADF. Ќе докажеме дека $S \in k_3$. За таа цел ќе го



Црт.2.72

разгледаме четириаголникот ADSF. Имаме:

$$\alpha = \sphericalangle DSC + \sphericalangle CSF;$$

од друга страна, аглите $\sphericalangle DSC$ и $\sphericalangle DEC$ се еднакви, како периферски агли над ист лак. Четириаголникот BCSF е тетивен за кружницата k_1, па $\sphericalangle CSF + \sphericalangle CBF = 180^\circ$, што значи $\sphericalangle CSF = \sphericalangle CBA$. Според тоа,

$$\alpha = \sphericalangle DSC + \sphericalangle CSF = \sphericalangle DEC + \sphericalangle CBA = \beta .$$

Од ова следува дека четириаголникот ADSF е тетивен за кружницата k_3, т.е. $S \in k_3$.

Слично се докажува дека кружницата $к_4$, опишана околу триаголникот ABE, минува низ точката S, т.е. сите четири кружници минуваат низ една иста точка.

1.(III,72). Да се реши равенката

$$\sqrt[n]{(1+x)^2} - \sqrt[n]{1-x^2} = 2\sqrt[n]{(1-x)^2}, \qquad (1)$$

каде што n е природен број.

Решение. Да ставиме

$$u^n = 1+x, \qquad v^n = 1-x. \qquad (2)$$

Тогаш, од (1) и (2) го добиваме системот равенки (по u и v)

$$u^2 - uv - 2v^2 = 0, \qquad (3)$$

$$u^n + v^n = 2. \qquad (4)$$

Равенката (3) е квадратна по u; нејзините решенија се

$$u_1 = 2v, \quad u_2 = -v. \qquad (5)$$

1° Заменувајќи го u со $2v$ во (4), добиваме

$$(2^n+1)v^n = 2,$$

што значи

$$v^n = \frac{2}{2^n+1}, \qquad u^n = \frac{2^{n+1}}{2^n+1},$$

па, заменувајќи ги овие вредности за u и v во (2), добиваме

$$x = \frac{2^n-1}{2^n+1}. \qquad (6)$$

Ако бројот n е парен, тогаш во (1) мора да биде $1-x^2 \geqslant 0$, т.е. $|x| \leqslant 1$. Значи, ако постои решение x, тогаш тоа мора да биде број по апсолутна вредност не поголем од 1.

Бројот x од (6) го задоволува условот $|x| \leqslant 1$, а ја задоволува и равенката (1), па, значи, (6) е (едно) решение на (1). Јасно е дека тоа е решение на (1) и кога n е непарен број.

2° Да ја разгледаме втората можност - кога $u=-v$.

Ако бројот n е непарен, тогаш од (4) имаме

$$-v^n + v^n = 2$$

што не е можно, т.е. системот

$$u = -v,$$
$$u^n + v^n = 2,$$

нема решение.

Ако бројот n е парен, тогаш од (4) имаме:

$$v^n + v^n = 2,$$

т.е. $v^n = 1$, па и $u^n = 1$. Заменувајќи во (2), добиваме $x=0$, а тоа не е решение на (1).

Следствено, бројот x од (6) е единствено решение на равенката (1).

2.(III,72). Да се најдат α, β и γ ако е познато дека:

$$\alpha>0, \quad \beta>0, \quad \gamma>0, \quad \alpha+\beta+\gamma=\pi, \qquad (1)$$
$$\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma = \frac{3}{2}. \qquad (2)$$

Решение. Од условите (1) следува дека α, β, γ се агли на некој триаголник. Бидејќи $\gamma = \pi - \alpha - \beta$, а

$$\cos\gamma = \cos(\pi-\alpha-\beta) = -\cos(\alpha+\beta),$$

равенката (2) се сведува на

$$\cos\alpha + \cos\beta - \cos(\alpha+\beta) = \frac{3}{2},$$

од каде што добиваме $\alpha = \beta = \gamma = \frac{\pi}{3}$ (види 4.(III,68)).

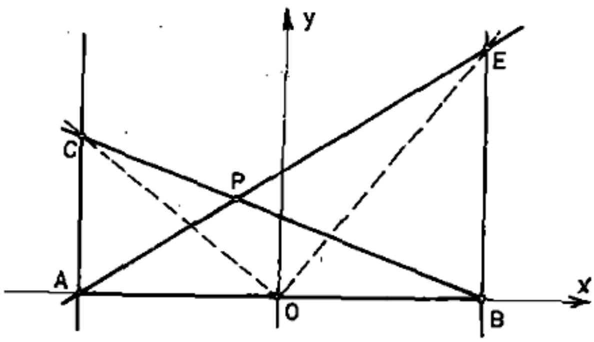
3.(III,72). Дадена е неподвижна отсечка AB ($\overline{AB}=2a$), чија средина е O, и две подвижни точки C и E на нормалите на отсечката AB, подигнати во точките A и B, така што аголот COE е прав.

Да се определи геометриското место на пресеците на правите AE и BC.

Решение. Избирајќи ја точката O за координатен почеток, а правата AB за апсцисна оска на еден декартов правоаголен координатен систем, според условот на задачата, можеме да формираме цртеж како на црт.3.72. Тогаш за точките A, B, C, E ќе имаме :

$$A(-a,0),\quad B(a,0),\quad C(-a,y_1),\quad E(a,y_2),$$

при што y_1 и y_2 се променливи координати и $y_1 \neq 0$, $y_2 \neq 0$. Равен-



Црт.3.72

ките на правите OC и OE се

$$OC:\quad y=-\frac{y_1}{a}x,\qquad OE:\quad y=\frac{y_2}{a}x, \tag{1}$$

а, поради условот $OC \perp OE$, имаме

$$\frac{y_2}{a}=\frac{a}{y_1}\;,\quad \text{т.е.}\quad y_2=\frac{a^2}{y_1}\;.$$

Ставајќи $y_1=k$, добиваме $C(-a,k)$ и $E(a,\frac{a^2}{k})$, па равенките на правите AE и BC се

$$AE:\quad y=\frac{a}{2k}(x+a),\quad BC:\quad y=-\frac{k}{2a}(x-a). \qquad (2)$$

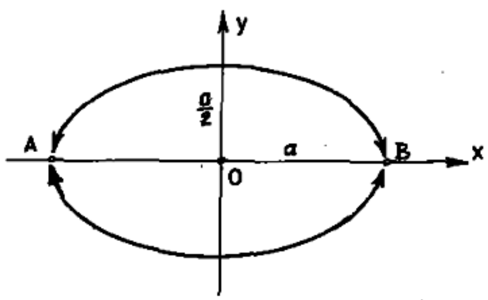
Точката P, којашто е пресек на правите AE и BC, ќе се менува во зависност од менувањето на точките C и E, односно од менувањето на променливата величина (наречена параметар) k. Врската меѓу координатите на точката P претставува равенка на бараното геометриско место. За да ја добиеме таа врска ќе го елиминираме параметарот k од равенките (2). Од првата имаме:

$$k=\frac{a}{2y}(x+a),$$

па, заменувајќи во втората, добиваме

$$x^2+4y^2=a^2. \qquad (3)$$

Поради $y_1\neq 0$ и $y_2\neq 0$, добиваме дека $x\neq -a$ и $x\neq a$, па, значи, бараното геометриско место е елипса, определена со равенката (3), но без точките A и B (црт.4.72).

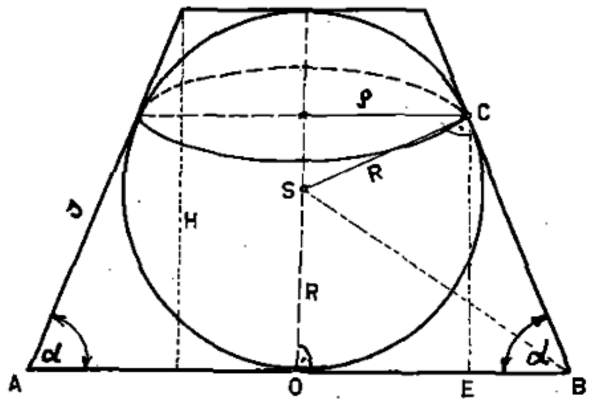


Црт.4.72

4.(III,72). Во прав пресечен конус со генератриса s и агол α меѓу генератрисата и основата е впишана сфера. Да се најде радиусот на кружницата по која сферата ја допира конусната површина.

Решение. Нека ρ е радиусот на споменатата кружница, R - радиусот на сферата, r - радиусот на основата од конусот и H - висината на конусот. Точките O и C се допирни точки на тангентите повлечени од B (прт.5.72), па, значи, $\overline{OB}=\overline{OC}=r$ и $\sphericalangle OBS=\sphericalangle CBS=\frac{\alpha}{2}$. Имаме:

$$\rho=\overline{OE}=\overline{OB}-\overline{EB}=r-r\cos\alpha .$$



Црт.5.72

Од $\triangle SOB$ имаме $r=R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, а поради $R=\frac{H}{2}=\frac{s}{2}\sin\alpha$, добиваме:

$$r=\frac{s}{2}\sin\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.$$

Значи:

$$\rho=r(1-\cos\alpha)=\frac{s}{2}\sin\alpha\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}(1-\cos\alpha)=$$

$$=\frac{s}{2}2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\cdot 2\sin^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\frac{s}{2}\cdot 4\sin^2\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2}=$$

$$=\frac{s}{2}\sin^2\alpha.$$

<u>1.(IV,72)</u>. Задача 4.(IV,68).

2.(IV,72). Дадена е аритметичка прогресија

$$a_1, a_2, \dots, a_k, \dots$$

при што $a_{k+1} - a_k = d$. Да се докаже дека низата

$$s_1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n,$$

$$s_2 = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{2n},$$

$$s_3 = a_{2n+1} + a_{2n+2} + \dots + a_{3n},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

е исто така аритметичка прогресија и дека

$$s_{k+1} - s_k = n^2 d,$$

(Притоа n е произволен, но фиксен природен број.)

Решение. Имајќи предвид дека $a_j = a_1 + (j-1)d$, имаме:

$$\begin{aligned} s_{k+1} - s_k &= a_{kn+1} + a_{kn+2} + \dots + a_{(k+1)n} - \\ &\quad -[a_{(k-1)n+1} + a_{(k-1)n+2} + \dots + a_{kn}] = \\ &= a_1 + knd + a_1 + (kn+1)d + \dots + a_1 + (kn+n-1)d - \\ &\quad -[a_1 + (k-1)nd + a_1 + (kn-n+1)d + \dots + a_1 + (kn-1)d] = \\ &= [na_1 + n^2kd + (1+2+\dots+(n-1))d] - \\ &\quad -[na_1 + n^2(k-1)d + (1+2+\dots+(n-1)d] = \\ &= n^2kd - (n^2kd - n^2d) = \\ &= n^2d. \end{aligned}$$

Значи, разликата $s_{k+1} - s_k$ на кои било два последователни членови од низата $s_1, s_2, s_3, \dots$ е константен број, па, според тоа, таа е аритметичка прогресија.

3.(IV,72). Во една вазна има 12 топчиња од кои 4 се бели. На колку начина можат да се извадат 6 топчиња од вазната, така што меѓу нив да има барем едно бело топче?

Решение. На оваа задача ќе дадеме две решенија.

I) Од 12 топчиња може да се извлечат по 6 на $\binom{12}{6}$ начини (кога не би постоело ограничување). Ако ги отстраниме четирите бели топчиња, остануваат 8 што не се бели; од нив можеме да извлечеме по 6 топчиња на $\binom{8}{6}$ начини при што, јасно, меѓу нив нема бели. Значи, од 12 топчиња, од кои 4 се бели, можеме да извлечеме 6, меѓу кои има барем едно бело, на

$$\binom{12}{6} - \binom{8}{6} = 924 - 28 = 896$$

начини.

II) За избор на 6 топчиња меѓу кои има точно:

- едно бело, постојат $\binom{8}{5}\binom{4}{1}$ начини;
- две бели, постојат $\binom{8}{4}\binom{4}{2}$ начини;
- три бели, постојат $\binom{8}{3}\binom{4}{3}$ начини;
- четири бели, постојат $\binom{8}{2}\binom{4}{4}$ начини.

Значи, вкупниот број начини за избор на 6 топчиња, меѓу кои има барем едно бело, е:

$$\binom{8}{5}\binom{4}{1} + \binom{8}{4}\binom{4}{2} + \binom{8}{3}\binom{4}{3} + \binom{8}{2}\binom{4}{4} = 896.$$

4.(IV,72). Задача 3.(III,72).