

Ристо Малчески

МАТЕМАТИЧКИ ТАЛЕНТ 13
**(збирка задачи за IV одделение – втор
дел)**

Скопје, 2020

Одговорен уредник
д-р Алекса Малчески

Рецензенти
Проф. д-р Методи Главче
Проф. д-р Катерина Аневска

CIP - Каталогизација во публикација
Национална и универзитетска библиотека "Св. Климент Охридски",
Скопје

373.3.016:51(076.12)

МАЛЧЕСКИ, Ристо

Математички талент 13 : (збирка задачи за IV одделение - втор дел) /
Ристо Малчески. - Скопје : Армаганка, 2020. - 250 стр. : илустр. ; 25 см

Библиографија: стр. 248-250

ISBN 978-608-4904-57-1

COBISS.MK-ID 51244805

СОДРЖИНА

Предговор	5
I Пресметувања и бројни ребуси	
I.1. Пресметувања	7
I.2. Бројни ребуси	9
I.3. Низи броеви	11
I.4. Равенки и неравенства	12
I.5. Магични фигури	15
II Текстуални задачи	
II.1. Броеви и цифри	17
II.2. Задачи со мерни броеви	21
II.3. Купуваме и пресметуваме пари	26
II.4. Времето е важно	30
II.5. Разни задачи	34
III Геометриски фигури	
III.1. Броиме фигури во рамнина	45
III.2. Пресметуваме периметри	49
III.3. Дополнителни задачи	55
IV Логика и комбинаторика	
IV.1. Елементарни логички задачи	58
IV.2. Логички главоболки	63
IV.3. Занимливи броења	68
IV.4. Распоредувања	73
IV.5. Дополнителни задачи	75

Решенија на задачите

I	Пресметувања и бројни ребуси	
I.1.	Пресметувања	79
I.2.	Бројни ребуси	83
I.3.	Низи броеви	90
I.4.	Равенки и неравенства	92
I.5.	Магични фигури	98
II	Текстуални задачи	
II.1.	Броеви и цифри	103
II.2.	Задачи со мерни броеви	113
II.3.	Купуваме и пресметуваме пари	124
II.4.	Времето е важно	133
II.5.	Разни задачи	144
III	Геометриски фигури	
III.1.	Броиме фигури во рамнина	169
III.2.	Пресметуваме периметри	177
III.3.	Дополнителни задачи	193
IV	Логика и комбинаторика	
IV.1.	Елементарни логички задачи	198
IV.2.	Логички главоболки	208
IV.3.	Занимливи рроења	219
IV.4.	Распоредувања	232
IV.5.	Дополнителни задачи	238
	Литература	248

ПРЕДГОВОР

Ниту едно истражување на човекот не може да се нарече вистинска наука ако не е поткрепено со математички доказ.

Проблематична е веродостојноста на тврдењата во науките каде што нема примена на ниту една математичка дисциплина, т.е. кои не се поврзани со математиката.

Леонардо да Винчи

Книгава *Математички талент 13* е наменета за талентираните ученици по математика од четврто одделение и на извесен начин е продолжение на книгата *Математички талент 1* во издание на Просветно дело, Скопје. Меѓутоа, сметам дека таа ќе биде интересна и за наставниците кои дел од своето слободно време го посветуваат на математички надарените ученици, како и за бројните вљубеници во математиката. Книгата, всушност, е збирка од 447 решени задачи во која во четири одделни дела се обработени аритметички, текстуални, логички, комбинаторни и геометриски задачи, приспособени за учениците на возраст од десет до единаесет години.

Природата на задачите содржани во оваа книга е таква што тие се посебно интересни за комисиите кои ги спроведуваат математичките натпревари. Притоа, задачите не се систематизирани според степенот на натпреварувањето, туку тие се распределени по области. Така, на пример, текстуалните задачи се поделени во пет дела, и тоа: *Броеви и цифри, Задачи со мерни броеви, Купуваме и пресметуваме*

пари, Времето е важно и Разни задачи, а истото се однесува и на разработката на логичките и комбинаторните задачи.

Рецензентите, проф. д-р Методи Главче и проф. д-р Катерина Аневска придонесоа со своите сугестии и забелешки да се подобри содржината на книгава, за што посебно им благодарам.

И покрај вложениот напор, не можам да се ослободам од впечатокот дека се можни значителни подобрувања на оваа збирка решени задачи, како и отстранување на евентуалните пропусти и грешки. Затоа, однапред сум благодарен на секоја добронамерна забелешка, критика и сугестија.

На крајот, ќе ми биде особена чест и задоволство ако оваа збирка придонесе учениците да навлезат во тајните на математиката, а посебно ако математиката им стане животна определба на некои од нив.

Скопје
мај, 2020 г.

Авторот

I ПРЕСМЕТУВАЊА И БРОЈНИ РЕБУСИ

I.1. ПРЕСМЕТУВАЊА И БРОЈНИ РЕБУСИ

1. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 6$$

2. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $(90 : 5) \cdot 2 + 12$,

б) $2 \cdot 7 + 4 \cdot 4 - 7 \cdot 8 + 4 \cdot 9$,

в) $7 \cdot 13 - 3 \cdot 17 + 8 \cdot 14 - 4 \cdot 18$,

г) $9 \cdot 6 - 4 \cdot 8 - 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2$

д) $6 \cdot 14 - 4 \cdot 16 + 9 \cdot 17 - 7 \cdot 19$.

3. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $(14 + 54 + 86 + 46) - 200$,

б) $100 - (32 : 4 - 2 + 4 : 2) \cdot 2$

в) $(280 - 34 \cdot 5) \cdot (180 - 12 \cdot 15) + 51 \cdot 2 : 3$

4. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $150 : 5 + 60 \cdot (100 - 91)$

б) $15 \cdot (12 - 5) + 606 : (92 + 54 : 6)$

в) $420 - 350 : 7 + 270 : 3 + 3$

5. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(345 - ((720 : 6) \cdot 2 - 4 + 2) : 2 + 44) : 3 - 25 : 5.$$

6. Ако $a = 5 \cdot 6 + 78$, $b = 56 + 7 \cdot 8$ и $c = (5 + 67) : 8$, определи го збирот на најмалиот и најголемиот од добиените броеви.

7. Фросина купила четири кутии со тениски топчиња. Во три кутии има еднаков број жолти, а во четвртата кутија се бели топ-

чиња (види цртеж). Колку бели топчиња и колку жолти топчиња купила Фросина? Кулку вкупно топчиња купила Фросина?



8. Меѓу цифрите прикажани на долниот цртеж постави еден аритметички знак и еден знак за равенство така што ќе добиеш точно равенство.

2 0 0 0 2 0 1 2 1 2

9. Меѓу некои од цифрите додадете знаци за аритметичките операции така што ќе добиете точно равенство:

1 2 0 2 2 0 1 7 = 5

Дозволена е употреба на загради.

10. Меѓу цифрите 9876543 се ставени 5 знаци + така што збирот на петте едноцифрени и двоцифрениот број е еднаков на 87. Кои броеви се собрани?

11. Собирањето прикажана на цртежот десно не е точно. Смени ги местата на две цифри така што собирањето ќе биде точно.

$$\begin{array}{r} 438 \\ + 259 \\ \hline 751 \end{array}$$

12. Кој од броевите 12, 14, 10, 16 и 18 не може да се запише како збир на два или повеќе последователни природни броја?

13. Со кибритени чкорчиња Горјан ги пишува цифрите од 0 до 9 (цртеж десно). Тој го напишал бројот



Премести 4 чкорчиња така што ќе го добиеш најголемиот можен број.

1.2. БРОЈНИ РЕБУСИ

14. Нека A, B, C и D се различни цифри такви што $D \cdot D = B$ и $A + C = D$. Определи го производот $A \cdot B \cdot C \cdot D$.

15. Нека A, B, C и D се различни цифри такви што

$$A + A + A = \overline{BC}, \quad D + D = B, \quad B + B = C.$$

Пресметај го збирот $A + B$.

16. Реши го бројниот ребус даден на цртежот десно, во кој на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

$$\begin{array}{r} A \ X \ A \\ + \quad A \ X \\ \hline A \\ \hline III \ A \ X \end{array}$$

17. Во бројниот ребус прикажан на цртежот десно на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри. Ако на буквата Γ соодветствува цифрата 0, определи го бројот $\overline{BAM}$.

$$\begin{array}{r} B \ A \ M \\ + \quad A \ M \\ \hline M \ A \ \Gamma \end{array}$$

18. Во бројниот ребус прикажан на цртежот десно на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри. Ако на буквата P соодветствува цифрата 2, која цифра е означена со A ?

$$\begin{array}{r} K \ P \ O \\ + \quad K \ O \\ \hline T \ A \ K \end{array}$$

19. Во долните равенства на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

$$\overline{CB} + B = \overline{BA}, \quad \overline{CB} - B = \overline{CA}.$$

Пресметај ја разликата $\overline{CC} - B$?

20. Во долните равенства на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

$$\overline{BC} + \overline{BE} = \overline{CA}, \quad \overline{AA} + \overline{BE} = \overline{DBC}.$$

Пресметај ја разликата $\overline{CB} - \overline{BA}$?

21. На местото на секоја ѕвезда во равенството $86 + * = **$ стои по една цифра. Ако збирот на овие цифри е еднаков на 19, определи го непознатиот собирок.

22. Во бројниот ребус $\overline{NOS} + \overline{ROG} = 777$ на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри. Пресметај го збирот

$$N + O + S + O + R + O + G.$$

23. Во бројниот ребус на цртежот десно на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри и на различни букви соодветствуваат различни цифри. Ако К е 3, определи го збирот

$$\begin{array}{r} \\ + \\ \\ \hline \end{array}$$

$$B + A + K + L + A + B + A.$$

24. Во долното равенство на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

$$\overline{AA} + A + A = \overline{AK}.$$

Која е најголемата можна вредност на бројот $\overline{KA}$?

25. Реши го ребусот:

$$\overline{AAAA} + \overline{BBB} + \overline{AA} + C = 2017.$$

26. Во бројниот ребус на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

$$\overline{AB} + A = \overline{BCC}.$$

Определи го збирот $A + B + C$.

27. Реши го бројниот ребус даден на цртежот десно, во кој на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

$$\begin{array}{r} \\ + \\ \\ \hline \end{array}$$

28. Свездичките замени ги со соодветни цифри така што пресметувањата бидат точни:

$$\begin{array}{r} 4 * . 3 * \\ *** \\ **1 \\ \hline ***5 \end{array}$$

29. Во долните равенства на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

$$B + C + D = \overline{AA}, \quad \overline{AD} - C = \overline{EB}.$$

Која цифра соодветствува на буквата D ?

30. Во долните равенства на еднаквите букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различните букви соодветствуваат различни цифри:

$$A \cdot \overline{BA} = \overline{BGT}, \quad \overline{GA} + \overline{BD} = \overline{EJA}, \quad \overline{BB} \cdot B = \overline{EDB}.$$

Пресметај го збирот $A + B + G$.

I.3. НИЗИ БРОЕВИ

31. Определи ги дваесеттиот и дваесет и првиот член на низата:

2, 5, 12, 15, 22, 25, 32, 35, ...

32. Во низа се запишани природните броеви од 1 до 1000 на следниот начин:

1, 10, 100, 1000, 2, 11, 20, ...,

т.е. бо растечки редосле се запишани броевите со збир на цифрите 1, потоа во растечки редослед се запишани броевите со збир на цифрите 2, па во растечки редослед се запишани броевите со збир на цифрите 3, потоа со збир на цифрите 4 итн.

а) Напиши ги подредувањето на броевите чиј збир на цифрите е помал или еднаков на 3.

б) На кое место во низата од сите броеви е бројот 112?

в) На кое место во низата од сите броеви е бројот 996?

33. Определи го збирот на следните два члена во низата броеви:

5, 9, 17, 33, 65, ...

34. Дадена е низата

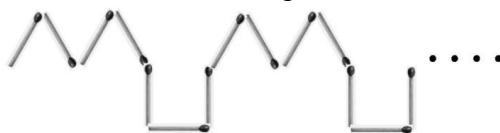
2, 9, 23, 44, 72, ...

Определи го збирот на првите осум членови на оваа низа.

35. Кои броеви треба да се запишат во квадратчињата за да се запази правилото според кое е составена долната низа?

41, 1, 40, 2, 38, 3, 35, , 31, ,

36. Со помош на кибритени чкорчиња се составуваат „триаголни“ и „квадратни“ фигури прикажани на цртежот десно, а потоа од нив се составува низата фигури прикажана на долниот цртеж.



Колку кибритени чкорчиња се искористени за да горната низа се продолжи до петнаесеттата „триаголна“ фигура.

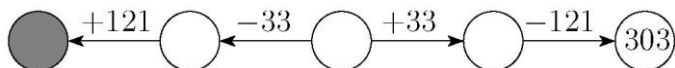
37. Ана една до друга ги напишала цифрата 1 – еднаш, цифрата 2 – три пати, цифрата 3 – пет пати, цифрата 4 – седум пати, цифрата 5 – девет пати, цифрата 6 – единаесет пати, цифрата 7 – тринаесет пати, цифрата 8 – петнаесет пати, цифрата 9 – седумнаесет пати и цифрата 0 – деветнаесет пати. Потоа неколку пати ја поворила истата низа. Која цифра е 2019-тата по ред?

I.4. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА

38. Кој број треба да биде запишан во сивото квадратче на дијаграмот даден на цртежот десно?

$$\begin{array}{r} \boxed{135} \\ + \\ \boxed{351} + \boxed{} = \boxed{} \\ \parallel \\ \boxed{513} \end{array}$$

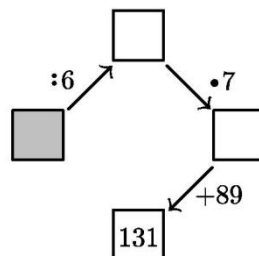
39. Определи го бројот кој треба да се запише во сивото квадратче на дијаграмот прикажан на долниот цртеж.



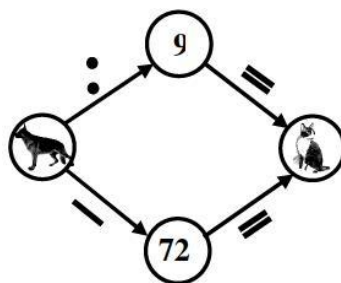
40. Пресметај го збирот на броевите кои треба да се запишат во сивите квадратчиња на дијаграмот прикажан на цртежот десно за да пресметувањата се точни.

117	
	177
171	

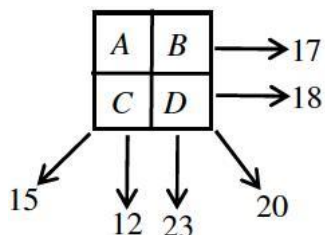
41. Кој број треба да биде запишан во сивото квадратче на дијаграмот даден на цртежот десно?



42. Во равенствата дадени на цртежот десно под кучето и мачето е скриен по еден број. Определи го производот на овие два броја.



43. Во полињата на квадратот даден на цртежот десно се запишани броевите A, B, C и D така што зборовите на броевите запишани во двата реда, двете колони и на двете дијагонали се еднаков на посочените броеви. Определи го бројот D .



44. Во равенствата

$$\spadesuit + \clubsuit + \diamondsuit + \heartsuit = 20, \clubsuit + \spadesuit + \clubsuit = 12 \text{ и } \heartsuit + \diamondsuit + \heartsuit = 19$$

на секоја од четирите фигури соодветствува број. Определи го збирот $\clubsuit + \heartsuit$.

45. На таблата се запишани два бројни ребуси во кои на исти букци соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$D + V + A + E + S + E + T + I + D + V + A = 32$$

$$T + R + I + E + S + E + T + I + T + R + I = 38.$$

Пресметај го збирот

$$D+V+A+E+S+E+T+I+T+R+I.$$

46. Кој е најголемиот број кој може да се стави на местото на свездата за да е точно неравенството:

$$32-* > 43-(41-17).$$

47. Колку различни природни броеви може да се запишат на местото на свездичката за да се точни неравенствата:

$$48:6-28:7 < 3\cdot* < 45:5+24:3?$$

48. Колку парни и колку непарни броеви x ги задоволуваат неравенствата

$$9872:8-77\cdot13 < x < 7020:45+1001:11?$$

49. Нека $a < c$. Кој од изразите

$$M=100-(10\cdot4-10+0\cdot80)-a \text{ и } P=9\cdot5+5+2\cdot2\cdot5-c$$

прима поголема вредност?

50. Во шемата дадена на цртежот десно замени ја секоја буква со еден од броевите од 1 до 9 така што ќе се исполнети неравенствата. Притоа на различните букви соодветствуваат различни броеви. Кој број соодветствува на буквата И.

$$\begin{array}{ccccc} A & > & B & > & V \\ & \vee & & \wedge & \wedge \\ Г & > & Д & < & Е \\ & \vee & & \wedge & \wedge \\ Ж & > & З & > & И \end{array}$$

51. Во квадратчињата запиши ги броевите 1, 2, 3, и 4 така што во секој ред и во секоја колона се запишани сите четири броја и се точни посочените неравенства.

$$\begin{array}{cccc} \square & < & \square & \square & \square \\ \vee & & & & \\ \square & > & \square & \square & \square \\ & & & & \\ \square & \square & < & \square & < & \square \\ & & & & & \\ \square & \square & \square & > & \square \end{array}$$

52. Илија запишал четири трицифрени броеви чии цифри се 0, 2 и 3. Тој броевите ги запишал

$$\bigcirc < \bullet < \bigcirc < \bullet$$

во кругчињата на цртежот десно во растечки редослед. Определи ја разликата на броевите запишани во сивите кругчиња.

1.5. МАГИЧНИ ФИГУРИ

53. Во празните полиња на квадратот даден на цртежот десно треба да се запишат броеви така што збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков. Кој број треба да се запише на местото на ѕвездичката?

	*	9
12	18	
	6	21

54. Во празните полиња на табелата дадена на цртежот десно треба да се запишат броеви така што збирот на броевите во секој ред, секоја колона и двете дијагонали ќе биде еднаков. Кој број треба да се запише на местото на прашалникот? Пополни ја табелата!

7		3
	9	
	?	

55. Во празните полиња на табелата дадена на цртежот десно треба да се запишат броеви така што збирот на броевите во секој ред, секоја колона и двете дијагонали ќе биде еднаков. Кој број треба да се запише на местото на прашалникот?

		32
?		
8	28	

56. Во табелата прикажана на цртежот десно запиши броеви така што збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на двете дијагонали е еднаков. Кој број треба да се запише во полето во кое се наоѓа прашалникот? Пополни ја табелата!

11	14	?
12		15

57. Пополни ги празните полиња на табелата дадена на цртежот десно така што збирот на запишаните броеви во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала ќе биде еднаков.

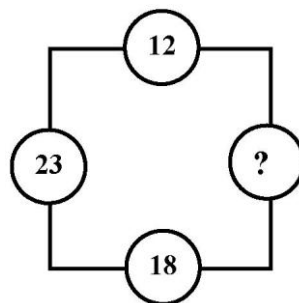
	21	13
25		

58. Во магичниот квадрат даден на цртежот десно запиши броеви така што зборовите на броевите во секоја колона, зборовите на броевите во секој ред и зборовите на бро-

224		448
	392	

евите во секоја дијагонала се еднакви.

59. Во секое теме од квадратот даден на цртежот десно бил запишан по еден број, а врз секоја страна е запишана разликата меѓу поголемиот и помалиот број запишани во двете крајни точки. Потоа некои броеви се избришани. Кој број бил запишан на местото на прашалникот?



II ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

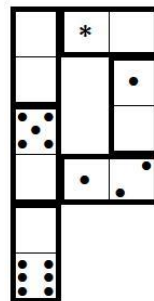
II.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Од сите броеви до 999 Горјан ги избрал само броевите кои текстуално се запишуваат со најмал можен број букви. Определени го збирот на овие броеви.
2. Определи го најмалиот четирицифрен број чиј збир на цифри е еднаков на 25.
3. Од најголемиот трицифрен број со збир на цифри 16 Методиј го одзел најмалиот трицифрен број со збир на цифри 16. Кој број го добил Методиј?
4. Замислив еден трицифрен број. Збирот на неговите цифрите е 15. Цифрата на единици е за 5 помала од 14. Цифрата на десетки е поголема од 0 и помала од 2. Кој број го замислив?
5. Елена го запишала бројот 654 и забележала дека цифрата на десетките е помала од цифрата на стотките, а е поголема од цифрата на единиците. Кој е следниот по големина број со истото својство?
6. Дадени се три броја. Првиот број е за 4 поголем од вториот и е седум пати помал од третиот. Определи го збирот на броевите, ако најголемиот број е еднаков на 49.
7. Разликата на два броја е еднаква на 29. Ако од намаленикот одземеме 15, а на намалителот му додадеме 14, добиваме два нови броја. Определи ја разликата на новите броеви.
8. Од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 се составени три трицифрени броја (секоја цифра е употребена по еднаш).

- а) Определи го најмалиот можен збир на овие три броја?
 - б) Определи го најголемиот можен збир на овие три броја?
 - в) Определи ја разликата на броевите добиени под а) и б).
9. Определи го најмалиот двоцифрен број кој е делив и на збирот и на производот на неговите цифри.
10. Определи ги двата последователни двоцифрени броеви такви што збирот на цифрите на првиот од нив е 8, а вториот е делив со 8.
11. Светлана замислила некој број на кој му додаде 5. Добиениот резултат прво го поделила со 3, потоа бројот кој го добила го помножила со 4 и од производот одзела 6. На крајот добиениот број го поделила со 7 и го добила бројот 2. Кој број го замислила Светлана?
12. Учителката се обратила кон Иван и Петар: „Замислете си по еден број, потоа дадете му 5 или поделете го со 2, ако е можно делењето. Истото направете го со добиениот број и продолжете натаму со новите броеви на ист начин.“ Иван и Петар ги примениле точно по три пати секоја од двете операции. На крајот и двајцата го добиле бројот 75. Ако знаеш дека бројот замислен од Иван е најмалиот можен број, од кој после шест такви операции се добива бројот 75, а бројот замислен од Петар, е најголемиот може број, определи го збирот на двата замислени броја.
13. Милка прочитала неколку последователни страници на една книга. Збирот на броевите на првата и втората страна бил 35, а збирот на броевите на последните две прочитани страни бил 83. Колку страни прочитала Милка?
14. Управата на паркот решила во туристичкото вовче да ги нумерира седиштата како вовчето да има еден вагон. Се покажало дека има 11 картончиња повеќе со цифрата 1, отколку што има картончиња со цифрата 0. Кој е најмалиот број места што може да ги има вовчето?

15. Страните на една книга се нумерирани со броевите 1, 2, 3 итн. Коста преброил дека за нумерирање на страните е искористена 15 пати цифрата 3. Колко страни најмногу може да има книгата?
16. Една книга, без кориците, има 200 страници. Нумерацијата, т.е. означувањето на страниците почнува од бројот 1. Колку цифри се употребени за нумерирање на таа книга?
17. За означување на броевите на страните на една од книгите за Хари Потер се искористени 1623 цифри. Притоа со број е означена секоја страница на оваа книга, а првата страница е означена со бројот 1. Колку страници има оваа книга?
18. Определи го бројот на страниците на книга, ако за означување на сите страници се употребени 345 цифри.
19. Куќите во една улица се нумерирани со броевите од 1 до 128. Колку цифри вкупно се употребени за запишување на сите куќни броеви во оваа улица?
20. На една улица куќите се нумерирани со броевите 1, 3, 5, ... од едната страна и 2, 4, 6, ... од другата страна на улицата. Употребени се вкупно 44 парни и 65 непарни броеви, кои се напишани со боја.
 - а) Колку цифри се употребени за нумерирање на куќите?
 - б) Сопствениците на куќите сакаат броевите со боја да ги заменат со метални цифри. Во продавницата ги има само цифрите 1 и 6 (во доволен број). Колку сопственици можат да ги заменат броевите со метални цифри?
21. Збирот на два броја е еднаков на 2346. Ако едниот број се зголеми за 89, а другиот број се намали за 57 тогаш се добиваат еднакви броеви. Определи ги почетните броеви.
22. Фросина едноподруго напишала 10 броеви. Првиот број бил 3. Производот на секои два соседни броја бил еднаков на 12. Определи го збирот на запишаните броеви.

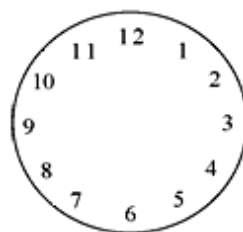
23. Мартин наредил шест плочки од домино во форма на буквата Р, почитувајќи го правилото половинките кои се допираат со страна да имаат еднаков број точки (цртеж десно). Збирот на сите точки бил еднаков на 37. Мартин ги нацртал поставените плочки, но заборавил да ги означи точките на некои половинки. Колку точки имало на местото на ѕвездичката?



24. Маргарита собрала неколку броеви и добила збир 33. Кога секој собирик го зголемила за 3 и ги собрала новодобиените броеви таа добила збир 57. Колку броеви собрала Маргарита?
25. Горјан помножил три различни броја поголеми од 1 и добил производ 36. Кои броеви ги помножил Горјан?
26. Ако $ac = 14$, $ba = 12$, $a > 1$ определи ја вредноста на изразот $bc : a$.

27. Петар ги брои становите во својот влез: 1, 2, 3, 4, ... Ако бројот на станот е делив со 11, тој свирнува, а ако бројот на катот е делив со 4, Петар се накашлува. Катот на кој Петар првпат и се накашлал и свирнал е претпоследниот кат. Секој кат во влезот на Петар има по 4 стана. Колку ката има влезот на Петар?

28. На цртежот десно е прикажан стаклен бројчаник на часовник. Часовникот паднал и бројчаникот се скршил на три дела. Самоил пресметал дека збиравите на броевите од секој од трите дела се три последователни броеви. Нацртај како може да се скрши бројчаникот на часовникот.



29. Определи ја разликата меѓу најмалиот и најголемиот четирицифрен број кои завршуваат на цифрата 5 и збирот на цифрите на секој од овие броеви е за 5 помал од најмалиот непарен двоцифрен број запишан со различни цифри.

30. Определи го збирот на стоте производи кои фигурираат во таблицата за множење од 1 до 10.
31. Определи го најголемиот можен збир на цифрите на 80 различни двоцифрени броеви.

II.2. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

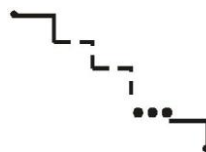
32. Четири дрвја се засадени во права линија. Растојанијата меѓу дрвјата се 63 m , 18 m и 54 m . Определи го најмалиот број дрвја кои треба да се засадат меѓу веќе засадените дрвја (во права линија) така што растојанијата меѓу секои две соседни дрвја се еднакви.

33. Гроздан на два еднакви ластиси ги означил средините и потоа закачил по еден тег на секој ластик. Едниот ластик станал двапати подолг од другиот. Гроздан измерил колку средината на едниот ластик е подолу од средината на другиот ластик. Колку пати измерената должина е пократка од должината на подолгиот ластик?



34. Девет камиони, долги по 9 метри, застанале во колона еден зад друг, при што меѓу секои два камиони има растојание по 3 метри. Колку метри е долга колоната?

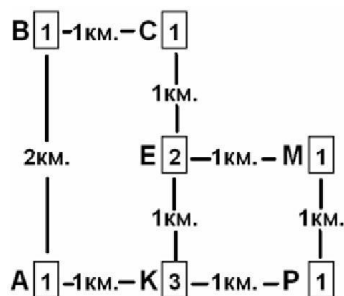
35. Скалите во куќата на Златко се со еднакви скалила високи 20 cm и широки 30 cm и се покриени со патека долга 9 m . Колку скалила имаат скалите?



36. Во понеделник наутро пајак виси 30 cm од таванот. Секој ден тој се спушта 50 cm надолу, а секоја ноќ се качува 20 cm нагоре. Таванот е висок 255 cm . Во кој ден од седмицата пајакот ќе стапне на подот?

37. На автопатот Марко забележал знак на кој со двоцифрен број е запишано растојанието од патарината до знакот, изразено во километри. По извесно време на друг знак го забележал бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед. Определи го најмалото можно растојание кое го поминал Марко.
38. Куќите на Марко и Илија се на ист пат до училиштето. Куќата на Марко е оддалечена 5 km и 400 m , а куќата на Илија е 150 m поблиску до училиштето. Двајцата истовремено тргнуваат на училиште. Додека Илија прави 7 чекори, Марко прави 6 чекори. Кој побрзо ќе стигне на училиште ако должината на чекорот на Илија е 50 cm , а должината на чекорот на Марко е 60 cm ?
39. На секој километар на патот меѓу селата А и В има табла на која на едната страна е запишано колку километри има до селото А, а на другата страна на таблата е запишано колку километри има до селото В. Горјан забележал дека збирот на броевите запишани на двете страни на секоја табла е еднаков на 19. Колку е долг патот меѓу селата А и В?
40. Во 7:10 Мартин тргнал со велосипед од Скопје кон Битола. Тој возел со постојана брзина и за 10 минути поминувал 4 km . Во 8:30 минути Мартин застанал да одмори. Колку километри поминал до одморот Мартин?
41. Марко од местото А до местото В со автомобил патувал 2 часа, кога застанал да се одмори. Секој час изминувал по 71 km . До местото В му останале 53 km помалку од изминатиот пат. Определи ја должината на патот од А до В.

42. Машина за чистење снег треба да го расчисти патот меѓу секои две места, кои на цртежот се означени со букви. Во секое квадратче е запишано по колку пати машината поминува низ стоа место. Колку километри ќе по-



мине машината? Дали постои маршрута при која машината ќе помине пократок пат? Ако постои испиши една таква маршрута.

43. Од 7:00 до 8:00 Марко со велосипед трипати одел до супермаркетот кој е на 2 km од неговата кука и се враќал дома. Неговиот татко во 8:00 часот со автомобил тргнал во посета на соседниот град и таму стигнал во 9:00. Тој се движел седум пати побрзо од Марко. Определи ја должината на патот до соседниот град.
44. Кој број треба да се запише на местото на свездата за да се добие точно равенство:
$$(26\text{ cm} + 3\text{ dm}) - 18\text{ cm} = (1\text{ m} - * \text{ cm}) + 2\text{ dm}.$$
45. По улица одела Тамара и ја поздравила Сашка која стоела на тротоарот. Откако поминала 30 m , по неа тргнала Сашка. После колку чекори Сашка ќе ја престигне Тамара, ако должината на чекорот на Сашка е 85 cm , а должината на чекорот на Тамара е 75 cm ? Образложи го својот одговор!
46. За време на летниот одмор Горјан од 13 јули до 19 август секој дена по четири пати пливал во Охридското езеро. При едно влегување тој испливувал по 250 метри. Колку километри испливал Горјан во текот на целиот одмор?
47. Кенгурите Том и Томи тргнуваат од едно и исто место и скокаат по права линија во спротивни насоки. Том скока 3 m и одмара 1 минута, скока нови 3 m и одмара 1 минута, одново скока 3 m и одмара 1 мин итн., т.е. Том прави скокови со должина 3 m и одмара по 1 минута после секој скок. Томи скока по 2 m при секој втор скок на Том, а во останатото време одмара. Определи го растојанието на кое ќе се наоѓаат Том и Томи после 24 минути и 30 секунди.
48. Секогаш кога Алиса изедува по една банана таа станува двапати повисока, а кога испива по еден сок се намалува за 6 cm . Еден ден Алиса прво изела две банани, а потоа испила два сока и

потоа била висока 3 m . Колку ќе била висока Алиса, ако пред да ја изеде втората банана го испила првиот сок?

49. Секој ден од 1 до 10 мај заклучно чичко Мирослав поставувал по 10 m жица од оградата на неговата нива. Чичко Никола работел само на непарните од овие дати и на првите две парни дати. Тој дневно поставувал по 3 m повеќе жица отколку чичко Мирослав. Чичко Герасим започнал на 1 мај, работел 2 дена, одмарал 2 дена и така редум до 10 мај. Тој дневно поставувал 3 m повеќе жица отколку чичко Никола.

1) Колку метри жица се поставени на 6 мај?

2) На која дата се поставени најмалку метри од оградата?

3) Колку метри заедно оградили чичко Герасим и чичко Никола?

50. Пат со должина 100 km започнува од градот А и завршува во градот Б. На патот има уште населени места распоредени така што растојанието меѓу две соседни места е или 3 km или 7 km .

Кој е најмалиот можен број населени места на патот, вклучувајќи ги и градовите А и Б?

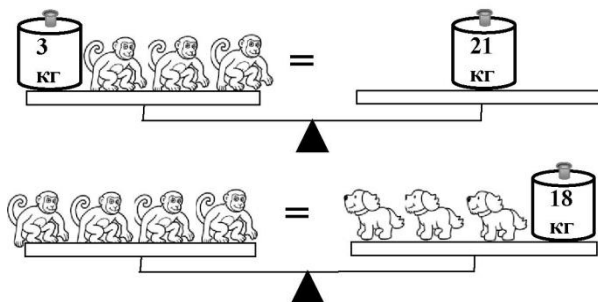
Кој е најголемиот можен број населени места на патот, вклучувајќи ги и градовите А и Б?

51. Пет исти книги и 21 исти тетратки тежат колку 8 книги и 3 тетратки. Колку тетратки тежи една книга?

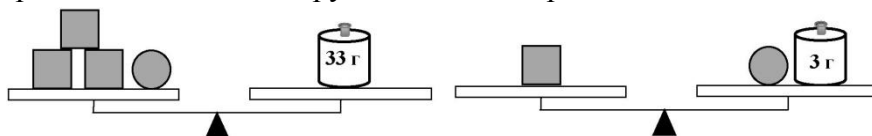
52. Две коцки заедно имаат маса од 126 kg . Масата на едната коцка е 30 kg поголема од масата на другата коцка. Определи ја масата на секоја од коцките.

53. Во една продавница има куфери и ташни. Еден куфер тежи 5 kg , а една ташна тежи 2 kg . Во продавницата има двапати повеќе ташни од куфери. Вкупната тежина на куферите и ташните е еднаква на 36 kg . Колку куфери и колку ташни има во продавницата?

54. Дедо Матеј има куче, маче, коза и теле. Кучето, мачето и козата заедно тежат 32 kg . Кучето, мачето и телето заедно тежат 93 kg . Кучето, козата и телето заедно тежат 107 kg . Козата, мачето и телето заедно тежат 98 kg . Колку килограми тежи секое животно?
55. Тројца рибари заедно уловиле 296 kg риба. Кога првиот продал 51 kg , вториот 42 kg и третиот 23 kg риба им останале еднакви количества риба. Колку килограми риба уловил секој рибар поединечно?
56. Кофа полна со вода тежи 16 kg , а кога коњот Вранец ќе испие четвртина од водата во кофата таа ќе тежи $12\text{ kg } 200\text{ g}$. Колку тежи празната кофа?
57. Кутија со 9 бомбони тежи 160 g , а кога во неа ќе останат 3 бомбона ќе тежи 55 g . Колку грама тежи празната кутија?
58. Кутија со 24 еднакви по тежина бомбони тежи 550 g , а кога во неа ќе останат 15 бомбони, таа ќе тежи 379 g . Колку бомбони ќе тежи кутијата кога во неа ќе останат 7 бомбони?
59. Два бисквити и пет чоколадца заедно тежат 66 g . Седум бисквити и четири чоколадца заедно тежат 123 g . Колку тежат заедно осум бисквити и осум чоколадца?
60. Вагите на долните цртежи се во рамнотежа. Колку килограми тежи едно куче?



61. Вагите прикажани на долните цртежи се во рамнотежа. Колку грама заедно тежат 3 кругчиња и 1 квадратче?



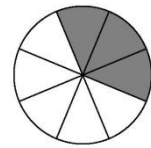
62. За роденденската забава Елисавета купила сок. Кога половината од сокот се испил, Елисавета купила уште 10 литри сок. Се испиле уште 30 литри и 1 литар сок останал. Колку литри сок се испиле на забавата?

II.3. КУПУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

63. Ана, Марија и Јанко заедно имале 1200 денари и одлучиле да купат роденденски поклон на нивната другарка Елена. Откако за поклонот дале: Ана 210, Марија 186 и Јанко 174 денари, на секој од нив му останала еднаква сума пари. Колку пари пред купувањето на поклонот имал секој од нив?
64. Борјанка и Јасмин купуваат подарок за нивниот пријател Марко. Тие заедно имаат 1600 денари. Борјанка има 300 денари помалку од цената на подарокот, а Јасмин има 500 денари повеќе од цената на подарокот. Определи ја цената на подарокот.
65. Марко има три пати повеќе пари од Александар, кој има четири пати помалку пари од Павле. Заедно имаат 56 денари. Колку пари има Павле?
66. Ангелина има трипати повеќе пари од Бојана, а Бојана има 16 денари помалку од Веселка. Бојана и Веселка вкупно имаат 136 денари. Колку денари вкупно имаат Ангелина и Веселка?
67. Три лалиња и пет рози чинат колку седум лалиња и три рози. Кирјана купила едно лале и две рози, а Лилјана купила само

лалиња. Се покажало дека Кирјана платила колку што платила Лилјана. Колку лалиња купија Лилјана?

68. Пет чоколади и 14 кроасани чинат колку седум чоколади и 11 кроасани. Колку кроасани чинат шест чоколади?
69. Пет моливи и шест хемиски пенкала чинат колку два моливи и осум хемиски пенкала. Колку моливи чинат 12 хемиски пенкала?
70. Три моливи чинат колку два моливи и две гуми. Осум моливи чинат колку острилка и пет моливи. Колку острилки чинат колку 24 гуми?
71. Две круши, три сливи и седум ореви заедно чинат колку 65 вишни. Осум ореви, четири сливи и три круши заедно чинат колку 83 вишни. Колку вишни заедно чинат една круша, еден орех и една слива?
72. Еден еклер и два сока заедно чинат колку 17 мастики. Еден сок и две тулумби заедно чинат колку 20 мастики. Една тулумба и два еклери заедно чинат колку 23 мастики. Колку мастики заедно чинат колку еден сок, еден еклер и една толумба?
73. Тортата во слаткарницата е поделена на 8 еднакви парчиња. Ангела купија 3 парчиња и за нив платила 150 денари. Другиот дел од тортата го купил Максим. Колку пари платил Максим?



74. Две и половина риба чинат колку една риба и 1050 денари. Колку чини една риба?
75. Два и половина килограм лимони чинат колку еден килограм лимони и 105 денари. Колку чини еден килограм лимони?
76. Цената на еден молив е 8 денари, а на една гума е 7 денари. Михаил купил 7 моливи и 3 гуми. На продавачот му дал банкнота од 100 денари. Колку денари му вратил продавачот на Михаил?

77. Една кифла чини 25 денари, а еден сок чини 35 денари. Горјан купил две кифли и два сока. На продавачот му дал банкното од 200 денари. Колку пари му вратил продавачот?
78. Кутија со 5 боици чини 58 денари, а поединечно се продава по 14 денари боица. Колку денари ќе заштеди Мирко ако купи три кутии боици, наместо истите боици да ги купува поединечно?
79. Петар сака да купи 11 тетратки, но за тоа му недостасуваат 140 денари. Затоа купил 8 тетратки и му останале 40 денари. Определи ја цената на една тетратка.
80. Ако Маре купи од пазар 20 јајца, ќе и останат 30 денари од сумата што ја понела, а за да купи 30 јајца, и недостасуваат 20 денари. Колку денари понела Маре на пазар?
81. Десанка сака да купи неколку исти тетратки. Ако купи 6 тетратки, ќе и останат 70 денари, а ако сака да купи 10 тетратки ќе и недостасуваат 50 денари. Колкава е цената на една тетратка? Колку пари има Десанка?
82. Филип, Илија и Петар заедно купиле книга. Илија дала трипати повеќе пари од Филип, а Петар дал 25 денари повеќе од Илија. Колку пари дал секој од нив ако книгата чинела 186 денари.
83. Четири тетратки чинат 160 денари. Комплет моливи, нотез и две тетратки чинат 240 денари, а три нотези и комплет моливи чинат 340 денари. Горјан купил две тетратки и два комплети моливи. Колку пари потрошил Горјан?
84. Матеј сака да купи моливи. Во книжарницата има два вида моливи чии цени се 8 денари и 9 денари. Колку моливи може најмногу да купи Матеј, ако располага со 146 денари и треба да ги потроши сите пари?
85. За една театарска претстава на касата на театарот стои следнава објава:
- 1) Цената на еден билет 80 денари,

- 2) Цената на групен билет за 12 особи е 820 денари,
3) При купување на 17 билети по цена од 80 денари, добивате 5 билети бесплатно.

Од училиштето на Марко се пријавиле да ја гледаат претставата 37 ученици. Која е најмалата сума пари со која можат да набават билети за претставата?

86. Превоз на фериброд чини 21 евра за автобус со шофер и по 8 евра за секој дополнителен патник. Платени се 165 евра. Колку луѓе биле во автобусот?

87. Во една слаткарница се продаваат големи и мали торти. Големата торта е двапати поскапа од малата. Павел купил 5 големи и 3 мали торти, а Томи купил 5 мали и 3 големи торти. Павел платил 20 евра повеќе од Томи. Определи ја цената на големата торта.

88. Ангела, Фросина и Вера во златара купиле златни украси:

Ангела: ♡ ⊙ ⊙ ,

Фросина: ♡ ♡ ♡ ,

Вера: ♡ ♡ ⊙ .

За нејзините украси Ангела платила 80 евра, а Фросина платила 90 евра. Колку пари платила Вера?

89. Четири деца решиле да купат топка за која секое од нив ќе даде иста сума пари. Тие забележале дека ако мсекој од нив даде по 9 евра, тогаш нема да имаат доволно пари да ја купат топката, а ако секој од нив даде по 10 евра, тогаш ќе можат да ја купат топката и ќе им останат пари. Цената на топката е парен број. Колку пари треба да даде секое дете?

II.4. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

90. Електронскиот часовник ги покажува часовите и минутите. Колку минути од 17:55 до 23:55 на екранот се гледа цифрата 0.
91. Електронскиот часовник ги покажува часовите и минутите. Колку минути во текот на едно деноноќие на екранот се гледа цифрата 7?
92. Колку време на екранот на електронскиот часовник во текот на едно деноноќие се гледа цифрата 2?
93. Методиј има електронски часовник кој покажува 10:23 (десет часот и дваесет и три минути). Цифрите 0, 1, 2 и 3 во 10:23 се различни. После колку минути најмалку Методиј треба да го погледне часовникот за да прочита време во кое три цифри се еднакви?
94. Марко го набљудувал неговото куче Шарко и забележал дека:
- ако Шарко лае, тогаш после една минута јаде,
 - ако мафта со опшаката, тогаш после една минута игра,
 - ако кивне, тогаш после една минута лае,
 - ако јаде, тогаш после една минута мафта со опшаката,
 - ако игра, тогаш после една минута кивнува.
- Шарко сега кивнал. Што ќе прави по 72 минути?
95. Во понеделник во волшебната градина на Снежана имало 7 јаболкници и на секоја јаболкница имало по едно јабољко. Секоја ноќ ламјата Огненка корнела по една јаболкница и ги јадела сите јабољка од таа јаболкница. Секое утро на преостанатите јаболкници растело по едно ново јабољко. Кој ден во седмицата имало најмногу јабољка во градината?
96. Во градината на Снегулка има волшебно дрво на кое во средата на пладне имало 23 златни јабољка. Секој ноќ принцот Мразуљко од дрвото берел по 5 јабољка, а секое утро на дрвото растат по 9 нови јабољка. Определи го денот од седмицата во кој за прв пат на дрвото ќе има повеќе од 50 златни јабољка.

97. Денес е 4 јуни 2018 година и е понеделник. Кој ден од седмицата ќе биде 15 септември 2018 година?
98. На 22 ноември во градината на волшебникот од Оз има јаболкница со 20 јаболка. Кога волшебникот ќе скине едно јаболко на еднаш израснуваа три нови јаболка. Секој ден за ручек волшебникот бере по едно јаболко. На која дата за првпат бројот на јаболката на јаболкницата ќе биде трицифрен број?
99. Мечокот Спанко легнал да спие на 15 ноември, но секој осми ден него го будели веселите зајаци. На десеттото будење Спанко излегол и им ги истегнал упите на зајациите. На која дата Спанко им ги истегнал ушите на зајациите?
100. Билјана, Марија и Елена често одат во библиотека. Билјана оди на секои 3 дена, Марија на секои 8 дена, а Елена на секои 15 дена. На кој следен датум сите ќе се сретнат во библиотека, ако претходно во библиотеката се сретнале на 11 април?
101. Во текот на летниот одмор Јован секој ден пливал во базен. Првиот и последниот ден тој препливал по една должина на базенот. Секој ден, после првиот, тој во однос на претходниот ден го менувал бројот на препливаните должини најмногу за една, т.е. или пливал една должина повеќе, или пливал една должина помалку или пливал еднаков број должини како претходниот ден. Јован препливал вкупно 117 должини за време на целиот одмор. Колку денови најмалку може да траел одморот на Јован?
102. Александар сече салама при што двете крајни парчиња му ги дал на кучето, а останатите осумнаесет кружни парчиња ги подготвил за сендвичи. За едно сечење му се потребни 3 секунди. Колку време ја сечел саламата Александар?
103. За колку најмалку минути може метална прачка да се расече на 25 еднакви делови, ако за едно сечење се потребни 4 минути, а меѓу секои две сечења машината треба да одмара 2 минути?
104. Горјан тргнал на концерт во 17:23. Концертот почнувал во 18:30 и траел 2 часа. При одење Горјан одмарал 12 минути и стигнал 5

минути пред почетокот на концертот. Кога се враќал дома тој одел со иста брзина, но не одмарал по патот. Во колку часот се вратил дома Горјан?

105. Андреј од дома на училиште патувал со автомобил, а од училиште дома се вратил пешки. Тој патувал вкупно 18 минути. На враќање патувал 4 минути подолго отколку при одење на училиште. Колку минути патувал при враќањето дома?
106. Костадин патува до училиште со автобус. Тој се качува на четвртата постојка и се симнува на тринаесеттата постојка, од каде до училиштето оди уште 4 минути пешки. Автобусот го поминува растојанието меѓу две соседни постојки за 2 минути. Костадин пристигнал во училиштето во 7:15 часот. Во колку часот тој се качил во автобусот?
107. Часовникот на Горјан оди напред 3 минути во текот на 1 час. Горјан часовникот го наместил точно во 21 часот. Во колку часот тој треба да го навие за да часовникот звони точно во 7 часот следното утро?
108. Катерина и Милка договориле да се сретнат во слаткарница. Часовникот на Катерина бил напред 15 минути, но таа сметала дека часовникот заостанал 15 минути. Часовникот на Милка заостанал 15 минути, но таа сметала дека е напред 15 минути. Која од нив прва ќе дојде во слаткарницата и колку време ќе чека?
109. Ламбе, Рампо и Горазд во текот на два часа се обидуваа да поместат еден голем сандак. Ламбе 10 минути турка лево, 10 минути турка право, 10 минути турка десно, 10 минути турка назад, па 10 минути – лево итн. Рампо 15 минути турка право, 15 минути турка десно, 15 минути турка напред, 15 минути турка право итн. Горазд 20 минути турка напред, 20 минути турка десно, 20 минути турка лево, 20 минути – напред итн. Сандакот се поместува само кога сите тројца туркаат во една иста насока. Колку минути во текот на двата часа сандакот се поместувал во некоја насока?

110. На прашањето колку години има Марио одговорил: „Ако од најмалиот трицифрен број го одземете најмалиот двоцифрен број и разликата ја поделите со најголемиот едноцифрен број, ќе ги добиете моите години.“ Колку години има Марио?
111. Збирот на годините на мајката, таткото и нивните три деца е 75. Колку ќе изнесува збирот на нивните години по четири години?
112. Ангел, Марија и Михаил пред 5 години заедно имале 18 години. Колку години тие заедно ќе имаат после 4 години.
113. Пред осум години Магде била двапати постара од Дејан. Сега заедно имаат 22 години. Колку години има секој од нив?
114. Таткото има 30 години. После 6 години синот ќе биде четирипати помал од таткото. Пред 2 години збирот на годините на мајката и синот беше еднаков на возраста на таткото. Колку години има мајката сега?
115. Збирот на годините на таткото, ќерката и синот е еднаков на 41. После една година ќерката ќе има двапати помалку години од синот, а таткото ќе биде четири пати постар од синот. Колку години ќе има таткото по две години?
116. Семејствата Петрески и Црвенкоски се состојат од по мајка, татко и едно дете. Двајцата таковци заедно имаат 70 години, двете мајки заедно имаат 65 години и двете деца заедно имаат 18 години. Семејството Петрески заедно има 79 години. Колку години имаат заедно членовите на семејството Црвенкоски?
117. Иван Има толку години колку што има месеци неговото куче. Иван и кучето заедно имаат 208 месеци. Колку е старо кучето на Иван?
118. Пред три години збирот на годините на Иван и Петар бил 13. Пред една година збирот на годините на Елеонора и Петар бил

14. Следната година збирот на годините на Иван и Елеонора ќе биде 15. Колку години има секој од нив сега?

119. Кога мајката го родила синот имала 24 години, а кога ја родила ќерката имале 29 години. Колку години денес имаат мајката, синот и ќерката ако збирот на нивните години е еднаков на 55?

120. Едно семејство се состои од татко, мајка, син и две ќерки. Возраста на поголемата ќерка е најголемиот едноцифрен број, а збирот на годините на другите две деца е 20. Синот имал 8 години, кога неговата 31 годишна мајка ја родила помалата сестра. Пред една година таткото имал толку години колку што ќе има мајката следната година.

а) Колку години има секој член на семејството?

б) После колку години мајката ќе има толку години колку што ќе имаат трите деца?

в) После колку години таткото ќе биде четири пати постар од помалата ќерка?

121. Во 2015 година Алекса имал една година повеќе отколку што е збирот на цифрите со кои е запишана годината во која е роден. Во која година е роден Алекса?

II.5. РАЗНИ ЗАДАЧИ

122. Во градината на Катерина има 44 нерасцветани и 20 расцветани каранфили. Ако секој ден цветаат по три каранфили, после колку дена ќе има еднаков број расцветаните и нерасцветани каранфили?

123. Илија, Цветан и Кирил скинале 7 јаболка од овошната градина на нивниот дедо Марко. Секој од нив скинал најмалку по едно јаболко и сите скинале различен број јаболка. Илија скинал најмалку, а Цветан скинал најмногу јаболка. Колку јаболка скинал Кирил?

124. Во една торба има зелени и жолти јаболка и зелени и жолти круши. Вкупно има 15 јаболка, а бројот на крушите е за 2 поголем од бројот на јаболката. Зелени плодови има за 6 повеќе од жолти. Жолти круши се 9. Определи го бројот на зелените јаболка.
125. Во четири кутии има вкупно 95 топчиња. Во црвената и жолтата кутија заедно има 38 топчиња, во жолтата и зелената заедно има 40 топчиња и во жолтата, зелената и сината заедно има 63 топчиња. Во која кутија има најмногу топчиња?
126. Во една кутија има 13 црвени топки, а во друга кутија има сини топки, кои се помалку од црвените. Калина зела неколку сини топки, а Радица зела толку црвени топки колку што останале сини во втората кутија. Колку топки останале вкупно во двете кутии?
127. Пет деца се наредени во редица и држат вкупно 37 балони. Десно од Алекса има 14 балони, десно од Бојан има 32 балони, десно од Ванчо има 20 балони и десно од Даниел има 8 балони. Колку балони заедно држат Бојан и Даниел?
128. За Новогодишната прослава учениците од IV^4 одделение ја украсиле училницата со црвени, сини и бели балони. По колку балони имало од секоја боја, ако се знае дека имало 37 сини и црвени, имало 33 сини и бели и имало 40 црвени и бели балони.
129. Во IV^a одделение 6 ученици јадат сладолед секој ден, 8 ученици јадат сладолед преку еден ден, а останатите ученици не јадат сладолед. Вчера 12 ученици од IV^a одделение јаделе сладолед. Колку ученици денес ќе јадат сладолед?
130. Во едно стадо има 37 едногрби и двогрби камили, кои заедно имаат 53 грбки. Кои камили се повеќе, едногрбите или двогрбите и за колку?
131. Павел, Томи и Ана купија исти кутии со бомбони. Павел изеде осум од своите бомбони, Ана – шест од своите и Томи – два од

- своите бомбони. Колку бомбони останаа во трите кутии, ако половината од бомбоните се во кутијата на Томи?
132. Од понеделник до петок Горјан решил вкупно 55 задачи, при што секој ден решавал по 2 задачи повеќе од претходниот. Колку задачи решил Горјан во понеделникот?
133. Мартин и Марио заедно изеле 20 кебапчиња. Мартин изел 4 кебапчиња повеќе од Марио. По колку кебапчиња изел секој од нив?
134. На еден натпревар биле поделени вкупно 54 медали, од кои 22 биле бронзени, а останатите се сребрени и златни. Златните медали се 12 помалку од сребрените. Колку сребрени медали биле поделени на натпреварот?
135. Горјан чита расказ долг 26 страници. Досега прочитал 8 страници повеќе отколку што му останале за читање. Колку страници прочитал Горјан?
136. Ивана и Милка набрале вкупно 60 јаболка. Во кошницата на Ивана имало двапати помалку јаболка отколку во кошницата на Милка. Ивана и дала неколку јаболка, по што во нејзината кошница имало четирипати помалку јаболка отколку во кошницата на Милка. Колку јаболка ѝ дала Ивана на Милка?
137. За празникот Божиќ бабата Вера направила колачи за своите внуци. Ако на секој внук му даде по 4 колачи и остануваат 3 колачи, а за на секој внук да му даде по 6 колачи и недостасуваат 7 колачи. Колку внуци има бабата Вера?
138. Седум цуциња товарат еден вагон со дијаманти за 7 часа. Колку цуциња се потребни за да се товари истиот вагон за еден час?
139. Али Баба има три пара обувки, а секој разбојник од неговата дружина има по еден пар обувки. Колку обувки имаа Али Баба и четириесетте разбојници?

140. Во петок Јана започнала да чита книга која имала 147 страници. Таа секој ден читала по 21 страница. Во кој дена Јана ја прочитала целата книга?
141. Во една кутија има 93 топчиња, во друга – 8 топчиња, во трета – 6 топчиња и во четврата 5 топчиња. За да во сите кутии има еднаков број топчиња треба да префрлиме определен број топчиња од првата во останатите три кутии. Колку топчиња треба да префрлиме во четвртата кутија?
142. Учениците от трето одделение се построиле во неколку редови – во секој ред еднаков број девојчиња и по 4 момчиња. Имало 28 момчиња. Потоа децата од првите 3 реда се тргнале и построени останале 36 ученици. Колку девојчиња биле построени на почетокот и колку останале на крајот?
143. На ливадата пасат овци и кози. Спасе пребројал дека ушите на козите се за 8 повеќе од ушите на овците. Колку нозе имаат повеќе козите од овците?
144. Во хотел за животни има неколку кучиња и мачки, при што бројот на кучешките шепи е двапати поголем од бројот на мачкините опашки. Колко пати бројот на мачкините шепи е поголем од бројот на кучешките опашки?
145. Една такси компанија вкупно има 123 возила и тоа автомобили со 4 тркала и ципови со 6 тркала. Возилата заедно имаат 666 тркала. Колку автомобили има компанијата?
146. Вера спакувала 60 колачи во 7 пакети. Таа направила 2 пакета со по 9 колачи и 4 пакета со по 8 колачи. Колку колачи спакувала Вера во седмиот пакет?
147. Весна има тетратка со 60 страници, од кои 22 се испишани. Таа секој ден испишува по 3 страници. После колку денови бројот на испишаните страници ќе биде двапати поголем од бројот на неиспишаните?

148. Во една слаткарница има 43 деца. На девет маси седнале по 3 деца, а останатите деца седнале по 4 на маса. Ако сите маси се зафатени, колку маси има во слаткарницата?
149. Марија јаде по 8 бомбони дневно. Таа купува бомбони кои се запакувани по 20 во една кутија. Колку кутии бомбони купила Марија во текот на 30 дена?
150. Во паралелката на Петар има 24 ученици. За роденден Петар купил 3 кутии бомбони со по 15 бомбони во секоја кутија. Ја почестил учителката и сите соученици, при што не се заборавил и себе. Некои од соучениците изеле по два бомбона. На крајот бомбоните во трите кутии се потрошиле. Колку деца од паралелката изеле само по една бомбона?
151. Црвени и бели топчиња се подредени на следниов начин: во првиот ред има едно бело топче, во вториот ред – две црвени топчиња, во третиот – три бели, во четвртиот – 4 црвени итн. Во последниот ред има 30 црвени топчиња. Определи го бројот на белите топчиња во добиената фигура.
152. Во едно одделение има 15 девојчиња и 13 момчиња, при што 17 деца имаат кафеави очи, а очите на другите се сини. Шест девојчиња имаат сини очи. Колку момчиња имаат кафеави очи?
153. На почетната постојка на еден автобус се качиле возачот и 45 патници. На втората постојка слегле 16, а се качиле 29 патници. На следната постојка станица слегле тројца, а се качиле 25 патници.
Колку луѓе имало во тој момент во автобусот?
154. Во автобус на градски сообраќај патуваат неколку мажи и 37 жени. На првата постојка слегле 24 патници, од кои половината се жени, а се качиле 16 патници, од кои 7 се мажи. Тогаш во автобусот имало 18 повеќе жени од мажи. Колку мажи имало на почетокот во автобусот?

155. На втората, третата и четвртата постојка од еден автобус се симнувале половината од патниците, а се качувале по 15 патници. На петтата постојка слегле сите 33 патници. Колку патници имало во автобусот при поаѓањето од првата постојка?
156. Павел, Томи и Даниел собрале вкупно 30 јаболка. Даниел му дал половина од неговите јаболка на Томи, Томи му дал 2 јаболка на Павел, а Павел му дал едно јаболко на Даниел. Така секој добил еднаков број јаболка. Колку јаболка имал Даниел на почетокот?
157. Баба Марија подготвила 15 круши за компот. Шест круши поделила на по две парчиња, а останатите круши ги поделила на по четири парчиња. На колку вкупно парчиња ги поделила крушите баба Марија?
158. Во еден тениски клуб членуваат 25 момчиња и 19 девојчиња. Секоја седмица во клубот се зачленуваат 2 момчиња и 3 девојчиња. После колку седмици бројот на девојчињата ќе биде еднаков на бројот на момчињата?
159. Во еден парк сите момчиња и неколку девојчиња носат патики, а останатите девојчиња носат сандалки. Во паркот има 16 момчиња повеќе од девојчињата кои носат сандалки. Вкупно има 57 девојчиња. Колку деца носат патики?
160. Мартин последователно девет пати фрлил коцка за играње и кога ги собрал точките кои паднале во сите девет фрлања добил збир 53. Колку пати паднала шестка?
161. Над овошната градина на дедо Мирко летаат врапчиња. Ако на секое дрво слета само по едно врапче, тогаш за едно врапче нема да има дрво. Ако на дрво слетаат по 2 врапчиња, тогаш на едно дрво нема да слета ниту едно врапче. Колку врапчиња летале и колку дрвја имало во градината на дедо Мирко?
162. Маја, Симона, Елена и Катерина шетале по ливадата и береле темјанушки. Тие заедно набрале 134 темјанушки. Маја, Симона и Катерина заедно набрале 96 темјанушки, а Маја, Катерина и

Елена заедно набрале 93 темјанушки. Маја набрала една темјанушка повеќе од Катерина. Колку темјанушки набрало секое од девојчињата?

163. Во градината на дедо Марко има девет дрва и на секое дрво има по 24 јаболка. Горјан набрал 15 јаболка, Марко набрал 17 јаболка, а Матеа и Маргарите набрале по 14 јаболка. Колку јаболка останале на дрвјата?

164. Кловнот Бозо за училишната забава донел црвени, зелени и жолти балони. На учениците од прво одделение им дал половина од вкупниот број балони. На учениците од второ одделение им дал половина од останатите балони. На учениците од трето одделение им дал половина од останатите балони и на учениците од четврто одделение повторно им дал половина од останатите балони. Бозо во секое одделение давал по еднаков број црвени, зелени и жолти балони. На крајот му останале 4 жолти и 2 црвени балони. По колку балони од секоја боја донел Бозо?

165. За Денот на шегата се маскирале 97 ученици, од кои 13 не биле маскирани како принцези, Спајдермен и Бетмен. Колку биле принцези, ако се знае дека во Бетмен се маскирале четари пати повеќе ученици отколку во принцези, во Спајдермен 12 повеќе отколку во Бетмен.

166. На полицата се наоѓаат книги од математика и книги од природни науки. Има вкупно 44 книги, но книги од математика има 8 повеќе отколку книги од природни науки. Определи го бројот на книги од математика и бројот на книги од природни науки.

167. Во книжарницата има тетратки спакувани во пакети, секој од кои содржи 3 или 4 тетратки. Колку пакети од 3, а колку од 4 тетратки треба да се купат за да секој од 35 ученици од IV^4 одделение добие точно по една тетратка?

168. Марија за нејзината баба Славица купила букет од 51 роза, од кои 27 се црвени, а останатите се бели и жолти рози. Белите

рози се двапати повеќе од жолтите. Определи го бројот на бели-те рози.

169. Четвртоодделенците од едно училиште отишле на екскурзија. Биле распоредени во 3 автобуси по 32 ученици. Во хотелот во кој биле сместени, спиеле во двокреветни соби. Колку вкупно соби биле зафатени од учениците?

170. Во градината на дедо Марко има само зајаци и кокошки. Горјан вкупно избројал 50 нозе и 11 кокошкини глави. Колку зајаци има во градината на дедо Марко?

171. Ана, Соња, Никола и Елена заедно имаат 15 бомбони, при што секој од нив има барем една бомбона. Никола има двапати повеќе бомбони од Ана. Соња има две бомбони повеќе од Елена. Колку бомбони има секое од децата?

172. На екскурзија 32 ученици од четврто одделение биле сместени на следниов начин: девојчињата биле сместени во двокреветни соби, а момчињата во трикреветни соби. За семестување на девојчињата била искористена една соба повеќе отколку за сместување на момчињата. Колку девојчиња и колку момчиња биле на екскурзија?

173. Во едно училиште во четврто, петто и шесто одделение вкупно има 110 ученици. Бројот на учениците во четврто одделение е за 3 поголем од бројот на учениците во петто одделение, а бројот на учениците во петто одделение е за 8 помал од бројот на учениците во шесто одделение. Определи го бројот на учениците во секое одделение.

174. Во клубот „Најди број“ членуваат определен број ученици од четврто одделение од едно училиште. Секоја седмица тие ги проверуваат своите знаења во една иста училница. Бројот на учениците е еднаков на вредноста на изразот

$$A = 2 \cdot (2+1) \cdot [12 - 2 \cdot (2+2 \cdot 1)] \cdot [2+12 : (2 \cdot 1+2)] : 4 : 2.$$

Бројот на училницата, во која се проверуваат знаењата, е еднаков на бројот x кој го задоволува равенството $(242 - x) : 2 = B$, каде

$$B = 12 \cdot 11 - 11 \cdot 10 + 10 \cdot 9 - 9 \cdot 8 + 8 \cdot 7 - 7 \cdot 6 + 6 \cdot 5 - 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2.$$

Опредиeli колку ученици од четврто одделение од ова училиште членуваат во клубот и кој е бројот на училницата во која се проверуваат знаењата.

175. Учениците од едно одделение отишле во слаткарница и сите јаделе сладолед. Во одделението има 34 ученици при што
- 12 деца сакаат сладолед од јагоди,
 - 5 деца сакаат сладолед од јагода и од ванила,
 - 9 деца сакаат сладолед само од чоколадо, и
 - другите деца сакаат само сладолед од ванила.
- Колку деца сакаат сладолед од ванила?
176. Марија по неколку пати го напишала секој од зборовите КРАК и МАРКА. Притоа буквата Р ја запишала 7 пати, а буквата А ја запишала 12 пати. Колку пати Марија ја запишала буквата К?
177. Матеа неколку пати го напишала зборот БАРАБАН и неколку пати го напишала зборот БАНАНИ. Се покажало дека буквата А е напишана 21 пат, а буквата Б е напишана 13 пати. Колку пати Матеа ја напишала буквата Н?
178. Весна по неколку пати го напишала секој од зборовите МЕЧКА, МЕЧОК и МЕЧЕ. Вкупно ја напишала 17 пати буквата М, 25 пати буквата Е и 5 пати буквата А. Колку пати Весна ја напишала буквата О?
179. На еден натпревар по математика во Прилеп учествувале 219 ученици повеќе отколку во Велес и 307 ученици помалку отколку во Битола, а учениците во Скопје биле за 675 повеќе од учениците во Битола. Колку ученици учествувале повеќе во Скопје отколку во Битола?

180. На еден натпревар во спортски риболов неколку рибари уловиле по 9 риби, а неколку по 7 риби. Сите заедно уловиле 50 риби. Колку рибари уловиле по 9 риби?
181. На еден натпревар се зададени 5 задачи, а на натпреварот учествувале 9 ученици. Едно од момчињата решило двапати повеќе задачи од друго момче, а едно од девојчињата решили трипати повеќе задачи од друго девојче. Вкупно биле решени 34 задачи. Колку натпреварувачи ги решиле сите задачи.
182. Во фудбалски натпревар за победа, нерешен резултат и пораз се добиваат 3, 1 и 0 бодови. Еден фудбалски клуб во првенството после одиграни 30 натпревари освоил 35 бодови. Клубот одиграл 8 натпревари нерешено. Колку натпревари загубил овој клуб?
183. Храбирот кројач убил 78 муви и рекол: „Кога ќе замавнам налево убивам 7 муви, а кога ќе замавнам надесно убивам 9 муви одеднаш.“ Со колку удари кројачот ги убил мувите?
184. Виолета наредила 39 играчки во 4 кутии, при што во секоја кутија поставила различен број играчки, поголем од 7. Колку играчки ставила Виолета во секоја од кутиите?
185. Билјана има неколку кутии со по 7 топчиња во кутија, а Павел има неколку кутии со по 10 топчиња во кутија. Ако Павел и даде определен број топчиња на Билјана, тогаш двајцата ќе имаат по 118 топчиња. Колку топчиња имал Павел на почетокот?
186. Пет празни кутии са подредени во ред и се означени последователно со броевите од 1 до 5. Роботот на Горјан е програмиран да става истовремено по едно топче во две соседни кутии. Роботот ставил вкупно 2014 топчиња, при што во секоја кутија ставил барем по едно топче. Колку е збирот на топчињата во кутиите означени со парни броеви? Ако во кутијата со број 2 има 7 топчиња повеќе отколку во кутијата 4, а во кутијата 1 има четирипати помалку топчиња, отколку во кутијата 4 и двапати

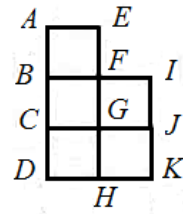
помалку топчиња отколку во кутијата 5, определи го бројот на топчињата со секоја от петте кутии.

187. Зајациите Ушко и Долгоушко имале заедничка градина со моркови. Во текот на една седмица секој од нив по неколку дена берел моркови. Ушко во еден ден бери по 3 моркови, а Долгоушко во еден ден бери по 5 моркови. Во текот на таа седмица бројот на морковите во градината се намалил за 36. Колку дена набрал моркови Долгоушко, а колку Ушко?

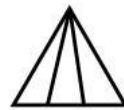
III ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

III.1. БРОИМЕ ФИГУРИ ВО РАМНИНА

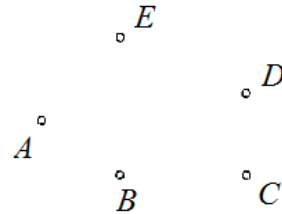
1. Колку отсечки чии крајни точки се точките $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ и K се прикажани на цртежот десно?



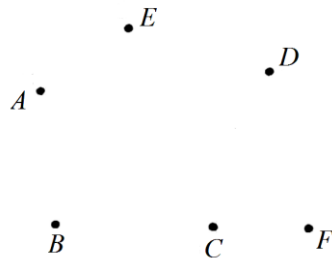
2. Колку триаголници се прикажани на цртежот десно?



3. Во рамнината се дадени пет точки A, B, C, D, E такви што никои три од нив не лежат на една права (цртеж десно). Колку триаголници постојат такви што дадените точки се нивни темиња? Испиши ги овие триаголници.



4. Дадени се точките A, B, C, D, E и F (цртеж десно), при што точките B, C и F лежат на една права. Испиши ги триаголниците чии темиња се 3 од дадените 6 точки.



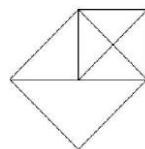
Колку вакви триаголници има?

5. Нацртај права p и на неа земи четири точки: A, B, C и D . Потоа нацртај права t , паралелна со правата p и на неа земи две точки: E и F . Испиши ги сите триаголници чии темиња се точките A, B, C, D, E, F .

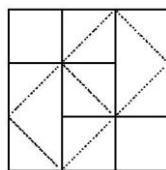


6. Колку триаголници се прикажани на фигурата дадена на цртежот десно?

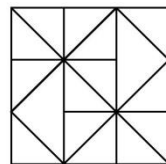
7. Колку триаголници содржи фигурата прикажана на цртежот десно?



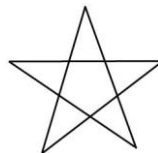
8. Колку триаголници содржи фигурата прикажана на цртежот десно?



9. Колку триаголници содржи фигурата прикажана на цртежот десно?



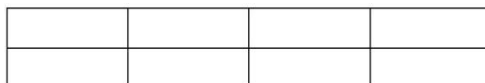
10. Колку триаголници се содржани во петтокраката звезда прикажана на цртежот десно?



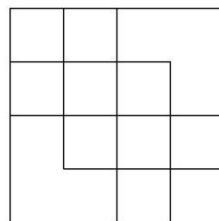
11. Колку правоаголници содржи фигурата прикажана на цртежот десно? (Внимавај, и квадратите се правоаголници?)



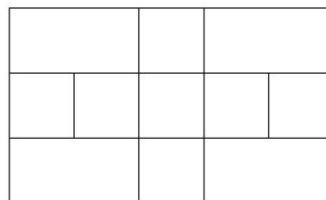
12. Колку правоаголници содржи фигурата прикажана на цртежот десно?



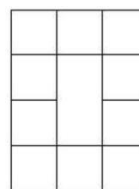
13. Колку квадрати содржи фигурата дадена на цртежот десно?



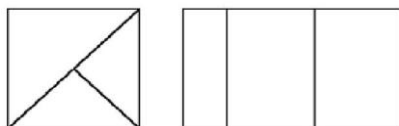
14. Колку квадрати содржи фигурата прикажана на цртежот десно?



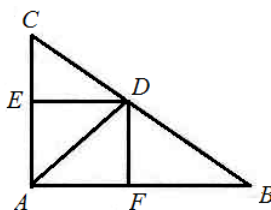
15. Колку квадрати содржи фигурата прикажана на цртежот десно?



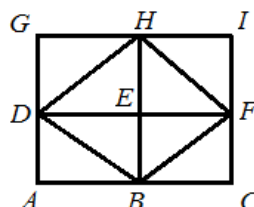
16. Определи го производот на бројот на триаголниците содржани во фигурата на цртежот лево и бројот на четириаголниците содржани во фигурата на цртежот десно.



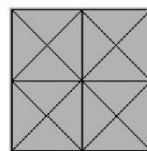
17. Колку триаголници и колку четириаголници се наоѓаат на цртежот десно.



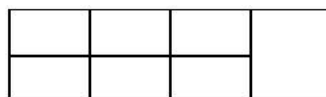
18. Колку триаголници и колку правоаголници има на цртежот десно. Што има повеќе и за колку? Испиши ги сите триаголници и сите правоаголници.



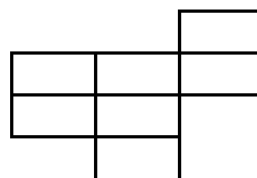
19. Колку триаголници повеќе од квадрати содржи фигурата прикажана на цртежот десно?



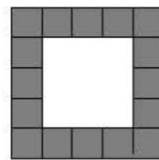
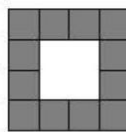
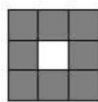
20. Колку правоаголници се прикаани на цртежот десно?



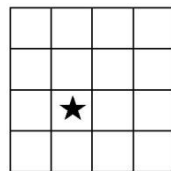
21. Определи го бројот на правоаголниците на цртежот десно.



22. Веселинка има квадратни плочки и со нив прави квадратни рамки (види цртеж). Колку плочки употребила Веселинка за да ја направи единаесеттата рамка?



23. Колку квадрати на цртежот десно ја содржат ѕвездата?



24. Колку правоаголници на фигурата прикажана на цртежот десно содржат точно по едно срце?

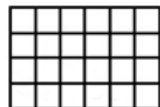


25. Определи го бројот на правоаголниците кои се содржат во фигурата прикажана на цртежот десно и кои содржат по едно срце.



26. На масата се наредени триаголни и четириаголни логички плочки. Вкупно имало 12 плочки, кои имале 43 темиња. Колку плочки имало од секој вид?

27. Правоаголникот на цртежот десно е поделен на 24 исти квадрати.



- а) Колку квадрати ќе пресече отсечката која ги поврзува темињата на горниот лев и долниот десен агол на правоаголникот?
б) Колку најмногу квадрати може да пресече една права линија?

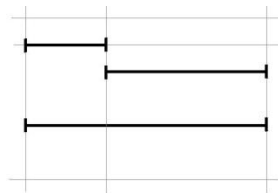
28. Светлана и Мишко исекле од хартија триаголници и квадрати. Мишко исекол неколку квадрати и трипати помалку триаголници. Светлана исекла 8 триаголници и толку квадрати, колку што исекол триаголници Мишко. Се покажало дека бројот на страните на сите фигури на Светлана е еднаков 36.

- а) Колку квадрати исекла Светлана?
б) Колку страни имаат сите фигури на Мишко?

29. Кој број ќе го добиеме ако бројот на страните на 5 триаголници го намалиме за бројот на страните на 2 квадрати и еден петаголник?

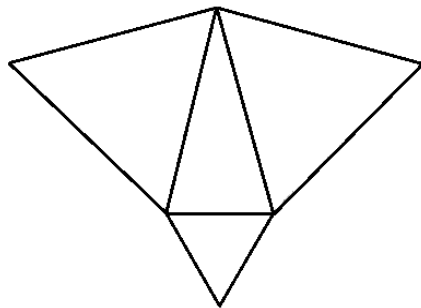
III.2. ПРЕСМЕТУВАМЕ ПЕРИМЕТРИ

30. На цртежот десно во квадратна мрежа се нацртани три отсечки. Долната отсечка е за 3 cm подолга од средната, а горната отсечка е двапати помала од средната. Определи ги должините на отсечките.



31. На отсечката AB избрана е точка C . Отсечката AB е 4 пати подолга од отсечката AC . Определи ги должините на отсечките AB и AC , ако должината на отсечката CB е 24 cm .
32. Должината на едната страна на триаголникот е 7 cm и е за 3 cm поголема од должината на втората страна, а е 1 cm пократка од должината на третата страна. Определи го периметарот на триаголникот.
33. Ако количникот на броевите 16 и 2 го собереме со количникот на броевите 21 и 3, ќе го добиеме периметарот на рамностранот триаголник. Определи ја должината на страната на триаголникот.

34. Даден е рамнокрак триаголник кај кој должината на кракот е двапати поголема од должината на основата. Над секоја од страните на овој триаголник се нацртани рамнострани триаголници (види цртеж). Периметарот на така добиената фигура е 225 cm поголем од периметарот на почетниот рамнокрак триаголник. Определи ги должините на страните на почетниот рамнокрак триаголник.



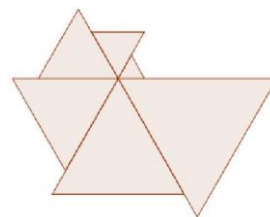
35. Даден е рамнокрак триаголник ABC . Должината на кракот е трипати поголема од должината на основата, а периметарот на

триаголникот е 252 mm . Определи ги должините на основата и кракот на триаголникот ABC .

36. Елеонора во квадратна мрежа, со страна 1 cm на квадратчињата, нацрнала шест рамнострани триаголници (види цртеж долу).



Потоа триаголниците ги исекла и откако ги обоила од нив ја составила фигурата прикажана на цртежот десно. Определи го периметарот на фигурата која ја направила Елеонора.

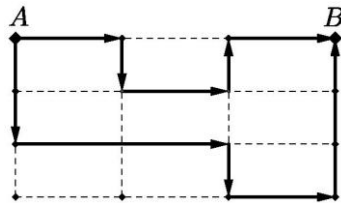


37. Збирот на периметрите на два рамнострани триаголници е 144 cm . Определи ги должините на страните на тие триаголници, ако периметарот на поголемиот триаголник е трипати поголем од периметарот на помалиот триаголник.
38. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на 60 cm , а должината на едната страна е еднаква на 18 cm . Определи ја должината на другата страна на правоаголникот.
39. Од 48 m се изработени рамностран триаголник и квадрат со еднакви периметри. Колку метри е подолга страната на триаголникот од страната на квадратот?
40. Должините на страните на квадрат и рамностран триаголник се изразени со природни броеви. Збирот на периметрите на рамностран триаголник и квадрат е еднаков на 32 cm . Разликата на должините на нивните страни е еднаква на 1 cm . Определи ја должината на страната на квадратот.
41. Слика во вид на правоаголник вrameна е во рамка со ширина 5 cm . Периметарот на надворешниот раб на рамката е еднаков

на 128 cm . Определи го периметарот на внатрешниот раб на рамката.

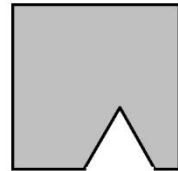
42. Иван има маса широка 6 dm и долга 8 dm . Тој купил покривка која висела по 1 dm на секоја страна на масата. Ако сака да постави тантела по крајот на покривката, колку дециметри тантела му е потребна?

43. Алеите на еден правоаголен парк се поделени на еднакви градини (цртеж десно). На цртежот се прикажани две маршрути од A до B , едната од кои е со должина 36 km , а другата со должина 60 km . Колку километри е растојанието од A до B по права линија?

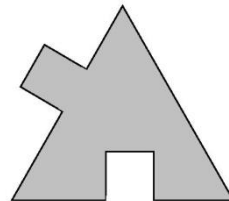


44. Правоаголна нива со должина 100 m и ширина 20 m треба да се подели на 5 еднакви квадратни градини. Колку метри ограда се потребни вкупно за оградување и делење на градината?

45. Од квадратен лист хартија е отсечен рамностран триаголник со должина на страна 4 cm (цртеж десно). Периметарот на добиената фигура е еднаков на 32 cm . Определи ја должината на страната на квадратот.



46. Од триаголник е отсечен квадрат со должина на страна 7 cm , а потоа истиот е додаден на другата страна на триаголникот (види цртеж). Ако периметарот на триаголникот изнесува 36 cm , определи го периметарот на добиената фигура.



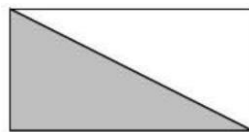
47. Периметарот на правоаголникот е еднаков на 180 mm . Над страна со должина a и страна со должина b на правоаголникот се

нацртани рамнострани триаголници. Должината на страната на едниот од овие триаголници е еднаква на 30 mm .

а) Пресметај ги разликите на периметрите на правоаголникот и секој од двата рамнострани триаголници.

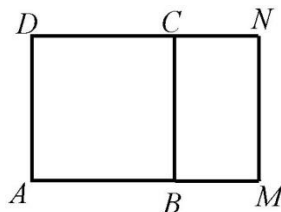
б) Пресметај го периметарот на добиената фигура.

48. Периметарот на правоаголникот прикажан на цртежот десно е еднаков на 28 cm . Периметарот на осенчениот триаголник е еднаков на 24 cm . Определи ја должината на најголемата страна на триаголникот.

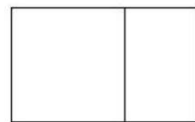


49. Должината на страната на рамностран триаголник е еднаква на најмалиот двоцифрен непарен број запишан со различни цифри. Периметарот на квадратот е за 3 cm помал од периметарот на триаголникот. Определи ја должината на страната на квадратот?

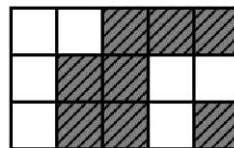
50. Периметарот на квадратот $ABCD$ е за 24 cm поголем од периметарот на правоаголникот $BMNC$. Ако периметарот на правоаголникот $AMND$ е еднаков на 96 cm , определи ја должината на страната AD .



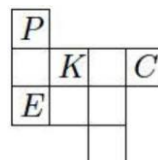
51. Горјан залепил квадрат со периметар 36 cm до правоаголник со периметар 28 cm и добил нов правоаголник (цртеж десно). Определи го периметарот на новиот правоаголник.



52. Периметарот на штрафираниот дел од правоаголникот е еднаков на 54 cm . Определи го периметарот на нештрафираниот дел на правоаголникот.



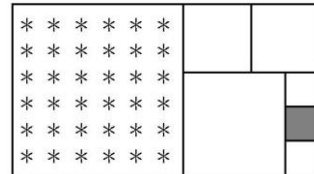
53. Катерина од идентични квадратни плочки ја направила фигурата прикажана на цртежот десно.



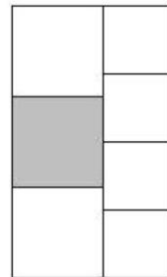
Која плочка може да ја отстрани Катерина без притоа да се промени периметарот на фигурата?

54. Градина има форма на правоаголник со ширина 10 m и трипати поголема должина. Дедо Славе сака градината да ја огради со мрежа од тел, при што ќе остави врата широка 1 m . Определи ја должината на мрежата.
55. Збирот на периметрите на правоаголник и квадрат е еднаков на 4 dm . Определи ја должината на правоаголникот, ако неговата ширина е за 2 cm поголема од страната на квадратот и периметарот на квадратот е еднаков на периметарот на рамностран триаголник со должина на страна 4 cm .

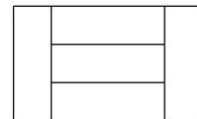
56. Правоаголникот на цртежот десно е составен од 7 квадрати. Периметарот на сивиот квадрат е еднаква на 12 cm . Определи ја должината на страната на квадратот со звездиците.



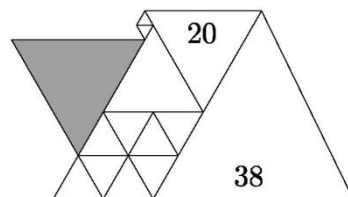
57. Од 7 квадрати Горјан го составил правоаголникот даден на цртежот десно. Периметарот на обоениот квадрат е еднаков на 32 cm . Определи го периметарот на целиот правоаголник.



58. Правоаголник со периметар еднаков на 70 mm е расечен на пет еднакви правоаголници (цртеж десно). Определи го периметарот на малиот правоаголник.



59. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од рамнострани триаголници. Должината на страната на едниот триаголник е 38 cm , а должината на страната на другиот е

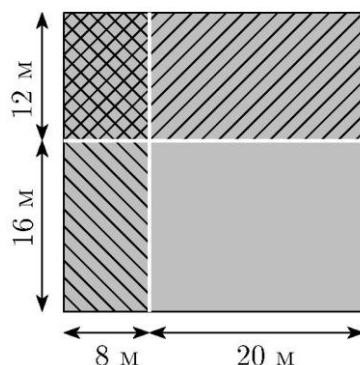


20 cm. Определи ја должината на страната на сивиот триаголник.

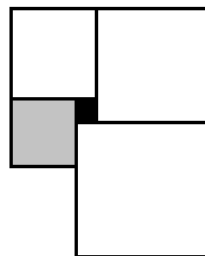
60. Определи го бројот на различните триаголници кои имаат периметар еднаков на 14 cm.

61. Должината на правоаголникот е еднаква на 26 cm, а ширината е 67 cm помала од периметарот. Определи го периметарот на правоаголникот.

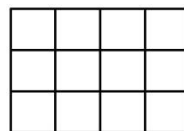
62. Марко, Зоран, Павле и Јане имаат правоаголни зелечукови градини (види цртеж). Градината на Јане има периметар 48 m и има заедничка страна со градината на Павле. Градината на Павел има заедничка страна со градината на Марко. Определи го периметарот на градината на Марко.



63. Фигурата на цртежот десно е составена од пет квадрати. Должината на страната на црниот квадрат зинесува 1 cm, а должината на страната на сивиот квадрат изнесува 3 cm. Пресметај го периметарот на фигурата?



64. Правоаголникот даден на цртежот десно е составен од 12 исти квадратчиња. По линиите на квадратчињата расечи го правоаголникот на два дела кои имаат еднакви периметри, но различни плоштини.



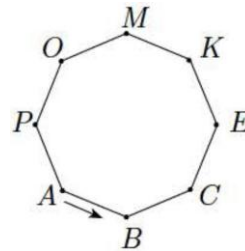
65. Определи го бројот на различните правоаголници чии должини на страни се природни броеви и кои имаат периметар еднаков на 208 cm. (Правоаголникот со должини на страна 1 cm и 2 cm

сметаме дека е ист со правоаголникот со должини на страна 2 cm и 1 cm .)

66. Скалата на цртежот десно е добиена кога од квадрат со страна 4 cm се отстранети 6 квадратчиња со страна 1 cm . Ако фигурата на долниот цртеж се состои од 104 такви скали, пресметај го нејзиниот периметар.



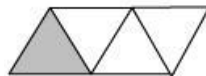
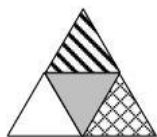
67. Атомската Мравка трча по работ на масата прикажана на цртежот десно. Таа тргнала од точката A и во прикажаната насока изминала 5 m . Во која точка застанала Атомската Мравка, ако должината на секоја страна на масата е еднаква на 1 dm ?



III.3. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

68. Антонио, Борис, Васил и Ѓорѓи купиле чоколадо. Пред да го отворат чоколадото им паднало и се скршило на пет дела (цртеж десно). Борис го изел најголемото парче. Антонио и Ѓорѓи изеле еднакви делови од чоколадото, но Ѓорѓи изел две парчиња, а Антониот само едно парче. Васил го изел остатокот од чоколадото. Кој дел од чоколадото го изел Васил?
69. Дадени се две исти пирамиди. Марко по рабовите ја расекол едната пирамида и го добил триаголникот прикажан на долниот лев цртеж. Павел ја расекол другата пирамида, која е обоена на истиот начин и го добил четириаголникот во кој прв е сивиот триаголник.



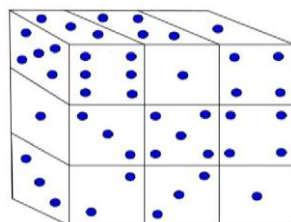


Опреди го распоредот на останатите три триаголници во четириаголникот на Павел.

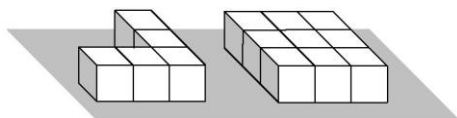
70. Коцка со димензии $2 \times 2 \times 2$ е составена со лепење на 8 коцки со димензии $1 \times 1 \times 1$. На колку сидови од малите коцки има лепило?



71. Зар е коцка на чии страни се наоѓаат од 1 до 6 точки распоредени така што збирот на точките на спротивните страни е еднаков на 7. На цртежот десно е прикажана фигура направена од 9 зарови. Опреди го збирот на точките кои се наоѓаат на невидливите страни на заровите од кои е составена фигурата.

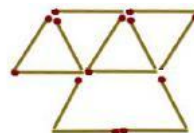


72. Фигурите прикажани на цртежот десно се направени од идентични коцки. Едната фигура е 32 грама потешка од другата. Колку тежат заедно двете фигури?

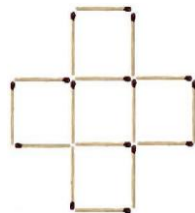


73. Кој е најголемиот можен број правоаголници кои може да се формираат со помош на шест кибритчиња? Кибритчињата не смеат да се кршат.

74. Фигурата прикажана на цртежот десно содржи 5 триаголници. Премести две чкорчиња така што новата фигура ќе содржи 4 триаголници.



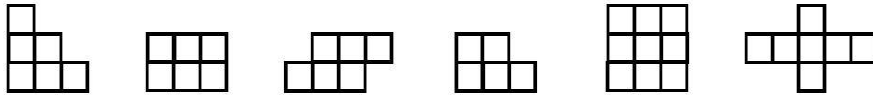
75. Од кибритени чкорчиња е направена фигурата која е прикажана на цртежот десно и која содржи 5 квадрати.



а) Премести 4 чкорчиња така што ќе добиеш 3 квадрати и нема да има отворена линија.

б) Премести 4 чкорчиња така што ќе добиеш 6 квадрати и нема да има отворена линија.

76. Секоја од фигурите на долниот цртеж е составена од квадрати чии 4 страни се 4 кибритени чкорчиња.



Од првата фигура тргни 2 чкорчиња така што ќе останат 4 квадрати; од втората фигура тргни 5 чкорчиња така што ќе останат 3 квадрати; од третата фигура тргни 2 чкорчиња така што ќе останат 4 квадрати; од четвртата фигура тргни 3 чкорчиња така што ќе останат 3 квадрати; од петтата фигура тргни 8 чкорчиња така што ќе останат 4 квадрати; од шестата фигура тргни 6 чкорчиња така што ќе останат 4 квадрати. После тргнувањето на некои чкорчиња не смее да остане отворена линија (висечки чкорчиња).

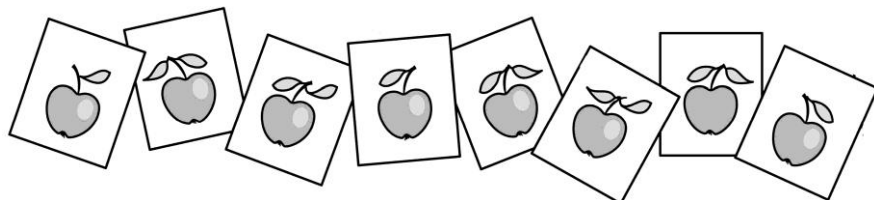
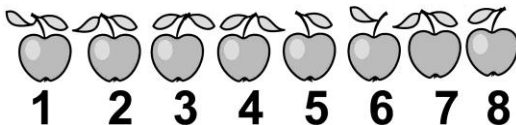
IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. ЕЛЕМЕНТАРНИ ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

1. На почетната станица во еден автобус се качиле 45 патници. На втората станица слегле 17, а се качиле 29 патници. На следната слегле тројца, а се качиле петмина. На следната станица слегле 27, а се качиле тројца. Следната станица е последната, на која сите патници слегле. Колку станици има на линијата на која сообраќа автобусот?
2. Мартин има брат, кој секогаш се облекува различно од него. Затоа неговите обувки и алишта се разликуваат од оние на Мартин (цртеж долу). Како се вика братот на Мартин?



3. Горјан на 8 јаболка (цртеж десно) го фотографирал одразот во огледало и изработил фотографија од секое од јаболко (цртеж долу).



Јована заменила една од фотографиите со нејзина фотографија. Кое јаболко не се наоѓа на фотографиите после замената?

Која фотографија е на Јована?

4. Торта се сече на дванаесет парчиња, при што секое сечење почнува од центарот на тортата. Колку сечења се направени?
5. Торта се сече на девет парчиња, при што секое сечење почнува од центарот на тортата. Колку сечења се направени?

6. Определи ги петтиот и шестиот член во низата:
НЕДЕЛА, ВТОРНИК, ЧЕТВРТОК, САБОТА.

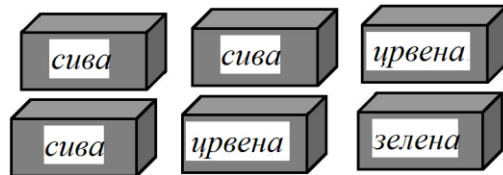
7. Месеците во долната низа се подредени според определено правило:

јули, декември, мај, октомври, ____, ____.

Кои два месеци треба да се запишани на линиите?

8. Костадин има 6 синцири со по 4 алки во секој синцир. Определи го најмалиот број алки кои треба Костадин да ги расече, а потоа да ги поврзи за да добие еден синцир.

9. Една зелена, две црвени и три сиви колички се поставени по една во секоја од кутиите прикажани на цртежот десно. Бојата на



количката во секоја кутија не соодветствува на натписот на кутијата. Кој е најмалиот број кутии кои мора да ги отвориме за да може со сигурност да се определи бојата на количката во секоја од кутиите?

10. Секое од осум деца самостојно нацртало најмалку по 17 цртежи. Децата заедно нацртале 140 цртежи. Колку цртежи може најмногу да нацрта некое од децата?
11. Петар купил бомбони кои биле со иста опаковка, но со различен вкус. Девет бомбони биле со вкус на карамела, седум со вкус на чоколадо и 5 со вкус на јагода. Колку бомбони треба да изеде Петар за да ги проба сите три вида бомбони?

12. Матеј има 27 еднакви на изглед колачи. Осум од колачите се со вкус на вишни, други 5 се со вкус на чоколадо, а останатите се со вкус на банана. Кој е најмалиот број колачи кои треба Матеј да ги поклони на неговата мајка за да биде сигурен дека меѓу нив има најмалку 5 колачи со ист вкус?
13. Имам 16 карти за играње: 4 аса, 4 кралеви, 4 дами, 3 цандари и 1 десетка. Колку карти треба да извлечам за да сум сигурен дека меѓу нив има три еднакви?
14. Магдалена има 23 еднакви на изглед луковици од зумбули и тоа: девет се за розеви зумбули, шест се за лилјакови, а останатите се за бели зумбули. Колку луковици најмалку треба да засади Магдалена, за да биде сигурна дека од секој вид засадила барем по три зумболи?
15. Во една кутија има 58 еднакви по големина топки и тоа: 14 се црвени, 15 се сини, 16 се жолти, а останатите се зелени. Определи го најмалиот број топки кои треба без гледање да се земат за да е сигурно дека меѓу земените топки барем 12 се еднобојни.
16. Елеонора купила бомбониера во која 18 бомбони се со вкус на чоколадо, 15 со вкус на ментол, 12 со вкус на малина и 7 со вкус на јагода. Сите бомбони се со иста опаковка. Кој е најмалиот број бомбони што треба да се извадат од бомбониерата за да е сигурно дека меѓу нив има барем по пет бомбони од најмалку три вида?
17. Во една бомбониера има 7 бомбони со вкус на чоколадо, 8 со вкус на ментол и 9 со вкус на јагода. Бомбоните се запаковани во исти опаковки. Кој е најмалиот број бомбони што треба да го земеме за да со сигурност меѓу нив има:
 - а) барем три со ист вкус,
 - б) барем три со различен вкус?
18. Седум златни, 14 сребрени и 21 бронзен медал се ставени во еднакви кутии (по еден медал во кутија).

Колку најмалку кутии треба да отвориме за сме сигурни дека ќе извадиме:

а) барем пет исти медали,

б) по еден медал од секој вид?

19. Марко има корпа со овошје во која има 7 јаболка, 8 круши и 12 сливи. Меѓу плодовите 2 јаболка, 5 круши и 9 сливи се зрели, а другите се незрели. Колку најмалку плодови треба без гледање да земе Марко за да е сигурен дека зел барем еден зрел плод?
20. На шест дрвја има вкупно 53 јаболка, при што нема дрво на кое нема јаболка. На секое дрво има различен број јаболка. Колку најмалку јаболка може да има на дрвото со најголем број јаболка?
21. Сите двоцифрени броеви се запишани на 90 картончиња (по еден број на картонче). Определи го најмалиот број картончиња што треба да се изберат без гледање за да сме сигурни дека меѓу нив има две картончиња со еднаков збир на цифри.
22. Во племето Убубунту деновите на седмицата имаат имиња на животни. Денес е 5 март и е денот на мачката, а 8 март е денот на кучето. Денот на козата е меѓу денот на овцата и денот на свињата. Денот на кравата е точно пред денот на коњот. После кој ден е денот на кравата?
23. На плажата има 9 кули за спасувачи. Меѓу секои две соседни кули има по 13 песочни замоци. Колку песочни замоци има меѓу првата и последната кула за спасувачи?
24. Елена во еден ред посадила лалиња, а потоа меѓу секои две лалиња посадила по еден каранфил. По една недела таа меѓу секои две цвеќиња посадила по една момина солза. Горјан избројал дека мајка му посадила 93 цвеќиња. Колку лалиња посадила Елена?
25. Во ред за сладолед чекаат четири деца: Петар, Васил, Олгица и Марија. Знаеме дека девојчињата не се едно зад друго. Васил е

одма по Олгица, а Марија е одма по Петар. Како се наредени децата во редот?

26. Неколку карти, меѓу кои има само една дама, се поставени една врз друга. Ако броиме одгоре-надолу дамата е четиринесетта, а ако броиме оддолу-нагоре таа е дваесет и деветта. Колку карти има во купчето?
27. Дваесет и пет ученици од IV^a одделение се построиле еден до друг во редица. Десно од Марко има 19 ученици и тие се тројца помалку од учениците на десната страна на Марија. Колку ученици има меѓу Марко и Марија?
28. Во ред за да купат сладолед Ана е точно пред Бојан, а тој е точно пред Виолета. Пред Виолета има 15 деца, а Ана е осма кога броиме одназад-напред. Колку деца чекаат да купат сладолед?
29. Ангел и Тимотеј патувале во два соседни вагони на еден воз. Ангел патувал во седумнаесеттиот по ред вагон од почетокот на возот, а Тимотеј во десеттиот по ред вагон од крајот на возот. Кој е најмалиот можен број вагони што може да ги има овој воз?
30. Емил и Илија се договориле да се качат во осмиот вагон на возот. Меѓутоа, Емил ги броел вагоните од исток кон запад, а Илија од запад кон исток, и двајцата се качиле во различни вагони, меѓу кои имало уште 4 други вагони. Колку вагони имал возот, ако Емил бил на запад од Илија?
31. Неколку деца после часовите отишле на сладолед. Наташа рекла: „Ако не ме броите мене, тогаш момчињата се повеќе од девојчињата“, а Костадин рекол: „Ако не ме броите мене, тогаш девојчињата се повеќе од момчињата.“ Славчо забележал: „Двајцата сте во право!“ Кој најмалиот број момчиња и девојчиња што биле на сладолед?
32. Неколку деца чекаат во ред за купување сладолед. Јасна е осма во редот кога се брои однапред-наазад. Непосредно пред неа е

Елена, која е непосредно зад Цветанка. Непосредно пред Цветанка е Христина, која е шеста во редот ако се брои одназад-напред. Колку деца чекаат во редот за сладолед?

33. Се сретнале четири мачори: Дивко, Црнко и Шаренко. Едниот бил со сини очи, другиот со жолти, а третиот има едно жолто и едно зелено око. Ако Црнко има такви очи какви што има Дивко, тогаш мачорите заедно ќе имаат по две зелени, сини и жолти очи. Каква боја на очите има секој од мачорите?
34. Еден зад друг во ред се распоредени 99 лажливци и витези. Лажливците секога лажат, а витезите секогаш ја говорат вистината. Секој од нив, без првиот кажал дека пред него стои лажливец. Колку витези има во редицата?
35. Учителката Мирјана за својот роденден купила бомбони за да ги почести учениците од IV^a одделение. Ако на секое момче му даде по 2 бомбони, а на секое девојче му даде по 3 бомбони, тогаш ќе ѝ недостасува 1 бомбона. Ако на секое момче му даде по 3 бомбони, а на секое девојче му даде по 2 бомбони, тогаш ќе ѝ останат 2 бомбони. Што има во одделението повеќе, момчиња или девојчиња и за колку?

IV.2. ЛОГИЧКИ ГЛАВОБОЛКИ

36. Ирена, Теодора и Елена имаат по една мајца. Маиците се бела, жолта и црвена. Елена нема бела мајца. Името на девојчето со црвена маица започнува со согласка. Каква боја е маицата на Ирена?
37. Ана, Даниела, Катерина и Јана во косите имаат панделка, шнола, ластиче и дијадема, при што секоја има само по еден украс. Јана и Ана немаат ниту панделка, ниту шнола. Панделката не е кај Даниела. Ластичето не е кај Јана. Што има Даниела?

38. Весна, Живка и Десанка дома имаат куче, маче и папагал, при што секоја има само едно животно. Весна кажала дека има куче. Живка кажала дека нема куче, а Десанка кажала дека нема маче. Притоа само едно од трите девојчиња говорело вистина. Кое девојче има маче?
39. Шест топки – бела, жолта, црвена, црна, сина и зелена се наоѓаат во две пакувања. Белата и жолтата топка се во едно исто пакување. Црвената и црната се во различни пакувања. Сината топка е во пакувањето со црната, но не е со зелената. Во пакувањето со црвената топка има само уште една топка. Определи ја бојата на оваа топка.
40. Наум и Бранко имаат пет разнобојни камиончиња. Синото и зеленото се на еден од нив. Жолтото и црвеното се на различни сопственици. Наум има само две камиончиња. Каква боја може да бидат камиончињата на Наум?
41. Секој од браќата Огнен и Дамјан лаже само на својот роденден, а во другите денови ја говори вистината. Огнен рекол: „Денес е 1 април, а утре е твојот роденден.“ На тоа Дамјан му одговорил: „Денес е твојот роденден, а утре е 1 април.“ Кога е роден Огнен?
42. Љупчо секогаш дава две изјави, едната од кои е вистинита, а другата е неистинита. Денес рече: „Вчера беше среда. Задутре ќе биде вторник.“ Малку размисли и рече: „Денес е среда. Вторник беше завчера.“ Кој ден од седмицата е денес?
43. Четири девојчиња, Васка, Ирена, Магдалена и Теодора имаат сина, зелена, жолта и црвена кошула. Кошулата на Васка не е сина, Теодора нема ниту црвена ниту сина кошула, а кошулата на Ирена е жолта. Кое девојче има црвена кошула?

	С	З	Ж	Ц
В	0			
И			1	
М				
Т	0			0

44. Филип, Борис и Благоја учествувале на крос и ги освоиле првите три места. Филип рекол дека го освоил второто место. Борис рекол дека Филип го освоил првото место, а Благоја рекол дека тој победил на натпреварот. Познато е дека освојувачот на третото место кажал вистина. Кое место го освоил Благоја?
45. Се сретнале тројца жители на островот на витезите и лажговците. Првиот жител изјавил: „Сите тројца сме лажливци.“ Вториот изјавил: „Сите тројца сме витези.“, а третиот молчел. Определи кој жител е витез, а кој лажливец, ако се знае дека витезите секогаш ја говорат вистината, а лажливците секогаш лажат.
46. Разговараат тројца пријатели.
Гроздан кажал: „Моите реченици содржат помалку од шест збора.“
Алекса кажал: „Сите реченици со шест збора се невестинити.“
Мартин кажал: „Барем еден од нас денес лаже.“
Определи кој лаже, а кој ја говори вистината.
47. Марсовците имаат по 3, 4 или 5 уши. Тие што имаат 4 уши секогаш лажат, а тие што имаат непарен број уши секогаш ја говорат вистината. Марсовците Арс, Барс и Варс рекле:
Арс: *Тројцата заедно имаме 12 уши.*
Барс: *Тројцата заедно имаме 13 уши.*
Варс: *Тројцата заедно имаме 14 уши.*
Колку уши заедно имаат Арс, Барс и Варс?
48. Сношти четири телевизиски станици кажаа по две тврдења за времето денес наутро во Скопје:
ТВ1: Ќе врне. Температурата ќе биде 7°C .
ТВ2: Нема да врне. Температурата ќе биде помала од 9°C .
ТВ3: Ќе врне. Температурата ќе биде 6°C .
ТВ4: Нема да врне. Температурата ќе биде поголема од 6°C .
Секоја од станиците искажа по едно точно и по едно гречно тврдење. Колку степени е утрово наутро температурата во Скопје?

49. Тројца витези ја победија ламјата Огненка.
Првиот витез рече: „Ламјата имаше повеќе од 99 глави!“
Вториот витез рече: „Ламјата имаше повеќе од 100 глави!“
Третиот витез рече: „Ламјата имаше повеќе од 101 глава!“
Само двајца витези кажаа вистина. Колку глави имаше Огненка?
50. Еден фудбалски натпревар завршил со резултат 1:0. По натпреварот четири играчи ги дале следниве изјави.
Емил: „Сашо даде прекрасен гол.“
Сашо: „На натпреварот јас не дадов гол.“
Никола: „Јас дадов гол.“
Петар: „Голот го даде Емил или Сашо“
Еден од овие четири играчи го дал голот. Кој го дал голот, ако се знае дека само една изјава е вистинита?
51. Ангел, Бојан, Ванчо и Горјан играат фудбал. Во текот на играта еден од нив го скршил стаклото на прозорецот на куќата на дедо Никола. На прашањето кој го скршил стаклото тие одговориле:
Ангел: „Не сум јас!“
Бојан: „Не сум јас!“
Ванчо: „Бојан лаже!“
Горјан: „Ванчо го скриши стаклото!“
Ако се знае дека само еден ја говори вистината, определи кој го скршил стаклото.
52. Ангелина, Виолета и Елена се на различна возраст. Најстарата кажала дека се вика Елена. Средната кажала дека Ангелина е најмлада. Најмладата кажала дека Виолета е најстара. Познато е дека изјавата на Виолета е вистинита. Подреди ги девојчињата по возраст, почнувајќи од најстарата.
53. Секој од четворицата пријатели Стојан, Киро, Никола и Бранко или секогаш лаже или секогаш ја говори вистината. Секој од нив има или круша или јаболко. Тие ги дале следниве изјави.
Стојан: „Имам јаболко. Бранко има круша.“
Киро: „Имам круша. Денес е вторник.“
Никола: „Стојан има јаболко. Денес е петок.“

Бранко: „Имам круша. Киро има круша.“

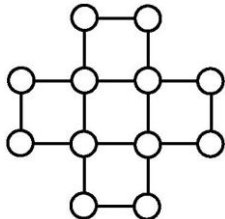
Колку од овие луѓе секогаш лажат?

54. Со мојата сопруга отидов на гости, каде освен нас имаше уште два брачни пара. Некои од нас се ракуваа, но никој не се ракуваше сам со себе и со својата сопруга. Некои двајца меѓу себе не се ракуваа повеќе од еднаш. Го прашав секој од присутните колку пати се ракувал и добив пет различни одговори. (Никој не излага.) Колку пати се ракуваше мојата сопруга? Колку пати се ракував јас?
55. Во три чаши се наоѓаат 12, 14 и 22 топчиња. Изедначи го бројот на топчињата во сите три чаши со само три преместувања. Преместување може да се направи само така што од една чаша се преместат во друга чаша онолку топчиња колку што веќе има во другата чаша.
56. На масата во еден ред има четири монети од кои две се неисправни. Неисправните монети имаат иста тежина, но се полесни од исправните. Неисправните монети не се една до друга. Како со едно мерење на вага без тегови ќе ги определиме неисправните монети?
57. Горјан има 2 златни, 3 сребрени и 4 бронзени монети. Една негова монета е неисправна. Притоа, ако е неисправна сребрена монета, тогаш таа е полесна од останатите сребрени монети, а ако е неисправна златна или бронзена монета, тогаш таа е потешка од соодветно од златната или бронзените монети. Како на вага без тегови Горјан само со помош на две мерења може да определи која е неисправната монета?
- Забелешка.* Исправните монети од различен метал може да тежат различно.

IV.3. ЗАНИМЛИВИ БРОЕЊА

58. Мартина има две блузи – бела и сина и три пантолони – бели, црни и црвени. На колку различни начини може да се облече Мартина така што блузата и пантолоните да се со различна боја?
59. Фросина има три пара летни обувки: бели, црвени и кафеави. Таа има и четири пара чорапи: бели, жолти, сини и портокалови. На колку различни начини Фросина може да облечи чорапи и чевли, но така што обувките и чорапите да се со различна боја?
60. Запиши ги сите четирицифрени броеви коишто се запишани со две петки и две седумки. Пресметај ја разликата меѓу најголемиот и најмалиот број од добиените броеви.
61. На таблата се напишани сите трицифрени броеви. Михајло ги избришал сите броеви чиј збир на цифри е еднаков на 3. Колку броеви останале запишани на таблата?
62. Испиши ги сите трицифрени броеви чиј производ на цифрите на десетките и стотките е еднаков на цифрата на единиците, а цифрата на стотките е помала од цифрата на единиците.
63. Определи го збирот на сите трицифрени броеви кои се запишани со цифрите 0, 5 и 9, и кај кои цифрите не се повторуваат.
64. Со цифрите 0, 1, 2, 3 и 4 Методиј ги запишал сите двоцифрени броеви со различни цифри, а со цифрите 5, 6, 7, 8 и 9 ги запишал сите двоцифрени броеви на кои цифрата на десетките им е поголема од цифрата на единиците. Колку вкупно броеви запишал Методиј?
65. а) Што има повеќе, трицифрени броеви чија цифра на единиците е 1 или трицифрени броеви чија цифра на десетките е 1?
б) Што има повеќе, трицифрени броеви чија цифра на десетките е 1 или трицифрени броеви чија цифра на стотките е 1?

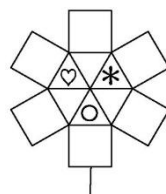
66. Определи го бројот на трицифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4. Испиши ги овие броеви.
67. Определи го бројот на трицифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на 5. Испиши ги овие броеви.
68. Во регистарските таблици на моторните возила се содржи четирицифрен број, при што најмалиот број е 0001, а најголемиот број е 9999. Колку различни четирицифрени броеви чиј збир на цифрите е еднаков на 2 се содржат во регистарските таблици на моторните возила?
69. Определи го бројот на петцифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на 3. Испиши ги сите такви броеви.
70. За еден трицифрен број ќе велиме дека е *симетричен* ако цифрата на стотките е еднаква на цифрата на единиците, а цифрата на десетките е помала од цифрата на стотките. На пример, броевите 434 и 757 се симетрични. Определи го бројот на симетричните трицифрени броеви.
71. Запиши ги сите четирицифрени броеви чиј производ на цифри е еднаков на 4.
72. Определи го бројот на двоцифрените броеви чиј производ на цифри е помал или еднаков на 7.
73. Определи го бројот на трицифрените броеви такви што цифрата на единиците е еднаква на производот на останатите две цифри.
74. Определи го бројот на трицифрените броеви чиј производ на цифри е поголем од 8 и е помал од 12? Испиши ги овие броеви?
75. За роденденската забава Матеј прави сендвичи, при што располага со четири продукти: кашкавал, салама, филе и шунка. Во секој сендвич тој става еден или два продукта. Колку различни видови сендвичи може да направи Матеј?

76. Елена има праски, банани, јагоди и грозје. Таа подготвува овошни салати така што во секоја салата има најмалку три од четирите видови овошје. Колку различни видови салати може да подготви Елена?
77. На секој километар од автопат долг 150 km има табла која го покажува изминатиот пат од почетокот на автопатот. Колку табли содржат точно две исти цифри?
78. Определи го бројот на двоцифрените броеви во кои едната цифра е 1, 2 или 3, а другата цифра е 3, 4 или 5.
79. Определи го бројот на двоцифрените броеви кај кои и двете цифри се поголеми од 4? Испиши ги овие броеви.
80. На цртежот десно се прикажани фигура составена од 5 квадрати, чии дванаесет темиња (некои се заеднички) се обележани со кругчиња. Темињата се обоени во сина или црвена боја така што секој квадрат има точно 2 сини и 2 црвени темиња. На колку различни начини може да се направи споменатото боење, ако не е дозволено вртење и превртување на фигурата?
- 
81. За еден шестцифрен број ќе велиме дека е *четирисвезден* ако во неговиот запис се наоѓаат цифрите 1, 0, 2, 3 во овој редослед, при што меѓу нив нема друга цифра. Определи го бројот на четирисвездените броеви.
82. Колку трицифрени броеви може да се запишат со една цифра 2, една цифра 4 и една непарна цифра?
83. Андријана, Елеонора и Марија се родени во некои од деновите од вторник до недела во една иста седмица, но секои две по возраст се разликуваат за најмалку два дена. Определи го бројот на распоредите на деновите во кои може да се родени девојчињата?

84. Една кука има неколку простории. Секоја просторија има по две врати. Две од вратите во куќата водат надвор од неа, а останатите водат кон друга просторија во куќата. Куќата има вкупно 10 врати. Колку простории има оваа кука?

85. Борјан прави куќарка за птици. За бојадисување на сидовите на куќарката може да користи сива, сина или зелена боја, а за бојадисување на покривот на куќарката црвена или кафеава боја. На колку различни начини може да ја обои куќарката Борјан?

86. Во секој квадрат и секој триаголник на цртежот десно треба да се нацрта ѕвезда, кругче и срце, така што фигурите кои имаат заедничка страна содржат различни цртежи? Определи го бројот на начините на кои може да се нацртаат ѕвездата, кругчето и срцето.



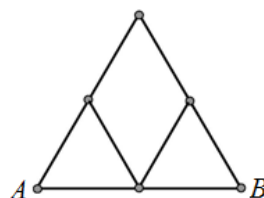
87. На колку различни начини може една до друга да се наредат:

- а) една златна и две сребрени монети,
- б) една златна и 3 сребрени монети,
- в) две златни и две сребрени монети.

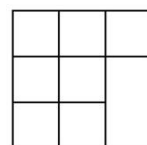
88. На тениски турнир учествувале 5 тенисери. Секој тенисер со секој од останатите тенисери изиграл по една игра.

- а) Колку игри вкупно се изиграле на турнирот?
- б) Колку игри изиграл секој од тенисерите?

89. На цртежот десно се дадени 6 точки, некои од кои се поврзани со отсечки. На колку различни начини може да се стигне од точката *A* до точката *B* ако се движиш само по нацртаните отсечки и во секоја точка можеш да поминеш најмногу еднаш?



90. На цртежот десно е прикажан план на парк, линиите се патеките. Определи го бројот на најкратки-

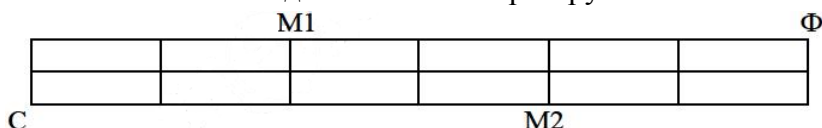


те различни патишта од горниот лев до долниот десен агол?

91. На цртежот десно кучето K треба да стигне до чинијата со храна $\otimes$. Тоа може да преминува само во соседно поле кое е одгоре или оддесно на полето во кое се наоѓа. На колку различни може мачето да стигне до храната?

			$\otimes$
K			

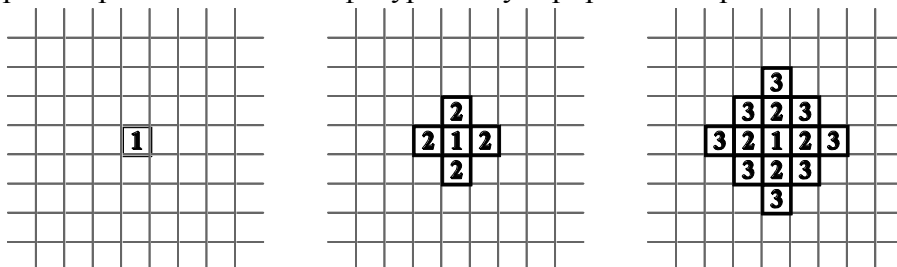
92. На долниот цртеж е дадена мрежа од улици по кои се одвива училишниот кроз. Учениците тргнуваат од раскрсницата C , прво минуваат низ првата контрола (раскрсницата $M1$), потоа низ втората контрола (раскрсницата $M2$) и пристигнуваат на целта (раскрсницата Φ). Определи го бројот на најкратките различни патишта по кои можат да поминат натпреварувачите.



93. Во квадратна мрежа ги извршуваме следниве операции: прво поставуваме едно квадратче, кое го означуваме со 1. На секоја од страните на квадратчето залепуваме квадратчиња, кои ги означуваме со 2. После тоа, на слободните страни на квадратчињата со број 2 залепуваме други квадратчиња, кои ги означуваме со 3. Продолжуваме на истиот начин, како што е покажано на шемата, додека не ги поставиме квадратчињата со број 10.

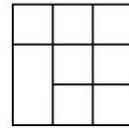
а) Колку вкупно квадратчиња со броевите од 1 до 10 се поставени.

б) Ако страната на едно квадратче е долга 1cm , определи го периметарот на добиената фигура од нумерирани квадратчиња.



IV.4. РАСПОРЕДУВАЊА

94. Во секое од полињата на цртежот десно е запишан по еден од броевите 1, 2 или 3. Определи го најмалиот можен збир на запишаните броеви. (Соседни се полињата кои имаат заедничка страна)



95. Во квадратчето на цртежот десно треба да се запишат цифрите 1, 2, 3 или 4, така што во секој ред и во секоја колона запишаните цифри се различни. Некои цифри се веќе запишани. Која цифра треба да се запише на местото на ѕвездичката?

1		4	
	3		2
	1		
3		*	

96. Во табелата на цртежот десно се запишани броевите 1, 2, 3 и 4 така што во секој ред, во секоја колона и во секоја фигура ограничена со задебелени линии има по еден од овие броеви. Некои броеви се веќе запишани. Определи го збирот на броевите запишани во аголните квадратчиња на табелата.

		1	
		4	
2			

97. Во табелата на цртежот десно се запишани броевите 1, 2, 3 и 4 така што во секој ред, во секоја колона и во секоја фигура ограничена со задебелени линии има по еден од овие броеви. Некои броеви се веќе запишани. Определи го збирот на броевите запишани во аголните квадратчиња на табелата.

2		1	
		4	
	3		

98. Во секое поле на табелата прикажана на цртежот десно запиши по еден од броевите од 1 до 5 така што во секој ред, секоја колона и во секоја од петте означени фигури се запишани сите пет броја.

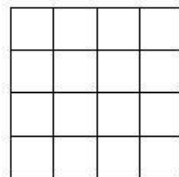
5				
				3
				5
	2	1		
			1	

99. Во полињата на табелата дадена на цртежот десно треба да се запишат буквите *A*, *B*, *C* и *D*, така

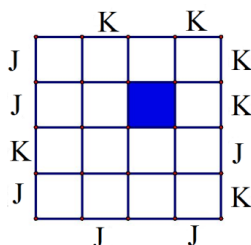
<i>C</i>	<i>A</i>	<i>B</i>	

што сите четири букви треба да се запишани во секој ред и во полињата кои имаат заедничка страна или заедничко теме да се запишани различни букви. Три букви се веќе запишани. Дополни ја табелата.

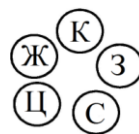
100. Шеснаесет празни квадратчиња се поставени во форма на квадрат со димензии 4×4 (цртеж десно). Во секое квадратче запиши 0 или 1 така што зборовите на броевите запишани во редовите се еднакви, а зборовите на броевите запишани во колоните се различни.



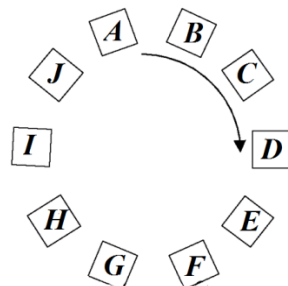
101. На масата се наредени 16 кутии (цртеж десно). Во секоја кутија има или круша или јаболко или кутијата е празна. Во секој ред и во секоја колона има по една круша и по едно јаболко. На цртежот е означено кое овошје е поблиску до секој од краевите на некој ред или некоја колона. Горјан открил дека една кутија е празна и истата ја обоил. Определи во која кутија каков плод има и кои кутии се празни.



102. Баба Елисавета има 5 чоколади со различна боја на опаковката: кафена (К), жолта (Ж), сина (С), црвена (Ц) и зелена (З). Нејзините пет внуци застанале во круг и Елисавета ги поделила чоколадите при делењето прескокнувајќи по едно дете. Во кој редослед се поделени чоколадите, ако последното дадено чоколадо е со жолта опаковка и внуците добиле чоколади како што е прикажано на цртежот десно.



103. Десет картончиња се поставени во круг и на нив се напишани последователно буквите А, В, ..., Ј (види цртеж). Марија започнува од картончето со буквата А и следејќи ја покажаната насока го зема



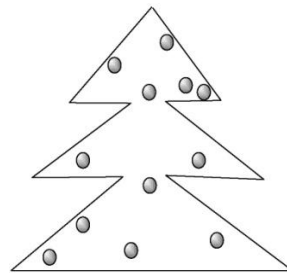
секое второ картонче. Прво го зема картончето со буквата *B*, потоа со буквата *D* итн. се додека не остане едно картонче. Која буква е напишана врз последното картонче.

104. Во круг има 12 деца. Секое момче е меѓу две девојчиња, а секое девојче е меѓу момче и девојче. Колку момчиња има во кругот?

105. Во една редица застанале 25 луѓе. Ниту еден маж не стои до маж и ниту една жена не е меѓу двајца мажи. Определи го најмалиот можен број жени во редицата.

IV.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

106. На цртежот десно е прикажана украсена новогодишна елка. Со помош на две прави подели ја елката на неколку делови така што во секој дел ќе има еднаков број украси.



107. Секоја вечер Гроздан пред спиење може да ги гледа цртаните филмови кои се означени со броевите 1, 2, 3, 4 и 5. Но, ако Гроздан направи грешки неговата мајка му забранува да гледа некои од филмовите и тоа:

- за покажување јазик – филмовите 1, 2 и 3,
- за цртање по сид – филмовите 2, 4 и 5,
- за газење во цвеќињата – филмовите 1 и 5,
- за играње со топка во соба – филмовите 1 и 4,
- за удирање на кучето – филмот 5.

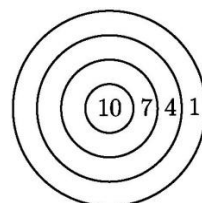
Денес Гроздан реши да гледа само еден цртан филм. Кој е најголемиот број различни грешки од дадената листа што Гроздан може да ги направи?

108. Ѓорѓи, Петар и Тодор ја играат „Не лути се човече“. Секој од нив на почетокот на играта има определен број жетони. Играчот

кој ја губи играта на другите двајца играчи им ги удвојува жетоните. Ѓорѓи, Петар и Тодор изиграле три игри. Првата игра изгубил Ѓорѓи, втората – Петар, а третата Тодор. По третата игра секој имал по 24 жетони. Колку жетони имал на почетокот секој од нив?

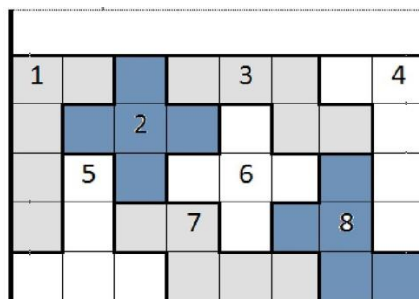
109. Во девет купчиња има 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 топчиња. Имаме право од две различни купчиња да земеме по земеме еднаков број топчиња и да ги префрлиме во трето купче. Дали може за помалку од 6 префрлања сите топчиња да ги собереме во едно купче?

110. Горјан фрлил четири еднави стрелички во метата прикажана на цртежот десно и освоил 22 поени. Определи го бројот на начините на кои Горјан може да ја погоди метата?

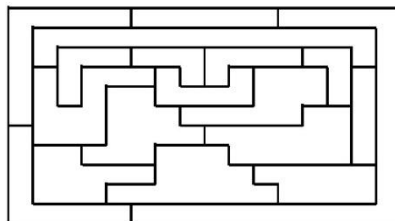


111. На колку начини може да се плати сума од 450 денари, ако располагаме со 10 монети од 50 денари, и 10 банкноти од 100 и 10 банкноти од 200 денари?

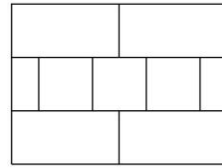
112. По кој редослед во играта паѓале фигурите пентонима ако истите се распоредени како на цртежот десно?



113. Сопственикот на една уметничка галерија решиле да ги бојадисаат изложбените сали во 4 бои така што соседните сали да се бојадисани во различни бои. На цртежот десно е прикажан планот на галеријата. Покажи како може да се бојадисаат салиите за да се исполни барањето на сопственикот на галеријата.

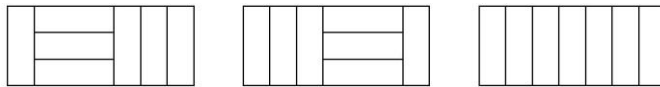


114. Колку бои се потребни најмалку за да се обојат правоаголниците на фигурата дадена на цртежот десно така што секои два соседни правоаголници се обоени во различни бои?



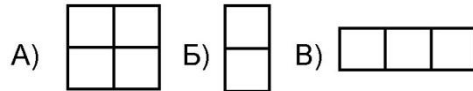
115. Вељан има книга од 60 страници. Тој решил да ги обои броевите на страниците така што во различни бои ги боел кругчињата на цифрите 0, 6, 8 и 9, што значи дека за секои две кругчиња на цифрата 8 користи две бои. Колку различни боици искористил Вељан ако не ги повторувал боите?

116. На долните цртежи се прикажани три различни начини за покривање на правоаголен под со седум еднакви правоаголници.



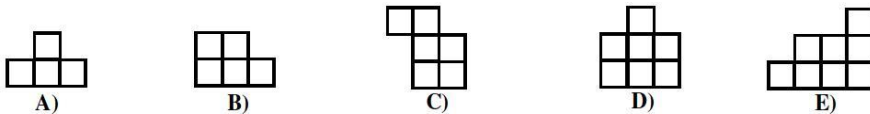
На колку други начини може да се покрие подот со седумте еднакви правоаголници?

117. Во еден автомат има чоколади од три вида А, Б и В

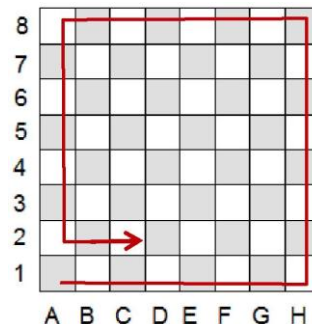


(цртеж десно). Марија сака да купи неколку чоколади и да направи квадрат 3×3 . Видела дека во автоматот има 1 чоколадо од видот А, 3 чоколади од видот Б и 7 чоколади од видот В. Едно чоколадо чини 10 денари. Колку денари треба да потроши Марија за да може да го направи саканиот квадрат?

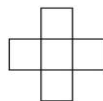
118. Со четири од петте фигури прикажани на долниот цртеж состави квадрат. Која фигура нема да се употреби?



119. Горјан, како што е прикажано на цртежот десно, на шаховска табла наредил по една од сите домино плочки со точки од 0 до 6. На кои полиња го поставил последното домино?

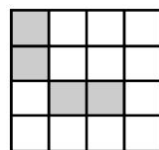


120. На цртежот десно е прикажан крст составен од единични квадратчиња. Дали може на табла со димензии 7×7 да се обојат неколку полиња така што при секое поставување на крстот врз таблата (полињата се преклопуваат) од крстот да биде покриено точно едно поле.

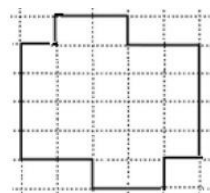


121. Определи го најголемиот можен број полиња кои во квадрат со димензии 4×4 можат да се обојат со црвена боја, но така што да не постојат две обоени полиња кои имаат заедничка страна или заедничко теме.

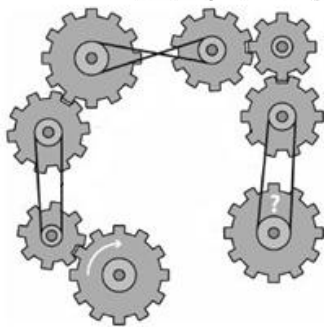
122. Подели го на четири еднакви делови квадратот прикажан на цртежот десно така што во секој дел ќе има по едно сиво квадратче. Деловите може да се вртат, но не и да се превртуваат.



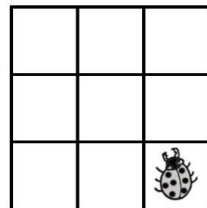
123. Подели ја фигурата дадена на цртежот десно на четири еднакви делови. Деловите може да се вртат и превртуваат.



124. Осум запчаници се поврзани како на цртежот десно и се вртат. Левиот долен запчаник се врти во насока спротивно од движењето на стрелките на часовникот. Во која насока се врти долниот десен запчаник?



125. Во долното десно поле на табла со димензии 3×3 се наоѓа бубамара. Таа минува преку четири различни квадратчиња и застапува да се одмори на петтото квадратче, при што не смее двапати да помине преку исто квадратче. Од положбата во која се наоѓа бубамарата во секое квадратче може да се сврти налево или надесно. Во кое квадратче застанала бубамарата ако при патувањето направила еднаков број леви и десни свртувања?



РЕШЕНИЈА НА ЗАДАЧИТЕ

I ПРЕСМЕТУВАЊА И БРОЈНИ РЕБУСИ

I.1. ПРЕСМЕТУВАЊА

1. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 6$$

Решение. Имаме:

$$2 \cdot 9 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 6 = 18 + 24 + 28 + 30 = 100.$$

2. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $(90 : 5) \cdot 2 + 12$,

б) $2 \cdot 7 + 4 \cdot 4 - 7 \cdot 8 + 4 \cdot 9$,

в) $7 \cdot 13 - 3 \cdot 17 + 8 \cdot 14 - 4 \cdot 18$,

г) $9 \cdot 6 - 4 \cdot 8 - 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2$

д) $6 \cdot 14 - 4 \cdot 16 + 9 \cdot 17 - 7 \cdot 19$.

Решение. а) Имаме:

$$(90 : 5) \cdot 2 + 12 = 18 \cdot 2 + 12 = 36 + 12 = 48.$$

б) Имаме:

$$2 \cdot 7 + 4 \cdot 4 - 7 \cdot 8 + 4 \cdot 9 = 14 + 16 - 56 + 36 = 66 - 56 = 10.$$

в) Имаме:

$$7 \cdot 13 - 3 \cdot 17 + 8 \cdot 14 - 4 \cdot 18 = 91 - 51 + 112 - 72 = 40 + 40 = 80.$$

г) Имаме:

$$9 \cdot 6 - 4 \cdot 8 - 3 \cdot 4 - 5 \cdot 2 = 54 - 32 - 12 - 10 = 22 - 12 - 10 = 12 - 12 = 0.$$

д) Имаме:

$$6 \cdot 14 - 4 \cdot 16 + 9 \cdot 17 - 7 \cdot 19 = 84 - 64 + 153 - 133 = 20 + 20 = 40.$$

3. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $(14 + 54 + 86 + 46) - 200$,

б) $100 - (32 : 4 - 2 + 4 : 2) \cdot 2$

в) $(280 - 34 \cdot 5) \cdot (180 - 12 \cdot 15) + 51 \cdot 2 : 3$

Решение. а) Имаме:

$$\begin{aligned}(14 + 54 + 86 + 46) - 200 &= (14 + 86 + 54 + 46) - 200 \\ &= (100 + 100) - 200 = 0.\end{aligned}$$

б) Имаме:

$$100 - (32 : 4 - 2 + 4 : 2) \cdot 2 = 100 - (8 - 2 + 2) \cdot 2 = 100 - 8 \cdot 2 \\ = 100 - 16 = 84.$$

в) Имаме:

$$(280 - 34 \cdot 5) \cdot (180 - 12 \cdot 15) + 51 \cdot 2 : 3 = \\ = (280 - 170) \cdot (180 - 180) + 102 : 3 \\ = 10 \cdot 0 + 34 = 34.$$

4. Пресметај ја вредноста на изразот:

а) $150 : 5 + 60 \cdot (100 - 91)$

б) $15 \cdot (12 - 5) + 606 : (92 + 54 : 6)$

в) $420 - 350 : 7 + 270 : 3 + 3$

Решение. а) Имаме:

$$150 : 5 + 60 \cdot (100 - 91) = 30 + 60 \cdot 9 = 30 + 540 = 570.$$

б) Имаме:

$$15 \cdot (12 - 5) + 606 : (92 + 54 : 6) = 15 \cdot 7 + 606 : (92 + 9) \\ = 105 + 606 : 101 \\ = 105 + 6 = 111.$$

в) Имаме

$$420 - 350 : 7 + 270 : 3 + 3 = 420 - 50 + 90 + 3 \\ = 370 + 90 + 3 = 460 + 3 = 463.$$

5. Пресметај ја вредноста на изразот:

$$(345 - ((720 : 6) \cdot 2 - 4 + 2) : 2 + 44) : 3 - 25 : 5.$$

Решение. Имаме:

$$(345 - ((720 : 6) \cdot 2 - 4 + 2) : 2 + 44) : 3 - 25 : 5 = \\ = (345 - (120 \cdot 2 - 4 + 2) : 2 + 44) : 3 - 25 : 5 \\ = (345 - (240 - 4 + 2) : 2 + 44) : 3 - 25 : 5 \\ = (345 - (236 + 2) : 2 + 44) : 3 - 25 : 5 \\ = (345 - 238 : 2 + 44) : 3 - 25 : 5 \\ = (345 - 119 + 44) : 3 - 25 : 5 \\ = (226 + 44) : 3 - 25 : 5 \\ = 270 : 3 - 25 : 5 = 90 - 5 = 85.$$

6. Ако $a = 5 \cdot 6 + 78$, $b = 56 + 7 \cdot 8$ и $c = (5 + 67) : 8$, определи го збирот на најмалиот и најголемиот од добиените броеви.

Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} a &= 5 \cdot 6 + 78 = 30 + 78 = 108, \\ b &= 56 + 7 \cdot 8 = 56 + 56 = 112 \text{ и} \\ c &= (5 + 67) : 8 = 72 : 8 = 9. \end{aligned}$$

Според тоа, $c < a < b$, па затоа бараниот збир е еднаков на $b + c = 112 + 9 = 121$.

7. Фросина купила четири кутии со тениски топчиња. Во три кутии има еднаков број жолти, а во четвртата кутија се бели топчиња (види цртеж). Колку бели топчиња и колку жолти топчиња купила Фросина? Кулку вкупно топчиња купила Фросина?



Решение. Имаме:

$$\begin{aligned} 8 \cdot 8 + 6 &= 64 + 6 = 70, \\ 4 + 6 \cdot 7 &= 4 + 42 = 46, \\ 6 \cdot 8 - 2 &= 48 - 2 = 46, \\ 1 + 9 \cdot 5 &= 1 + 45 = 46. \end{aligned}$$

Значи, Фросна купила 70 бели и $3 \cdot 46 = 138$ жолти топчиња. Таа вкупно купила $70 + 138 = 208$ топчиња.

8. Меѓу цифрите прикажани на долниот цртеж постави еден аритметички знак и еден знак за равенство така што ќе добиеш точно равенство.

2 0 0 0 2 0 1 2 1 2

Решение. Очигледно

$$2000 = 2012 - 12.$$

9. Меѓу некои од цифрите додадете знаци за аритметичките операции така што ќе добиете точно равенство:

1 2 0 2 2 0 1 7 = 5

Дозволена е употреба на загради.

Решение. Постојат повеќе решенија на задачата. Две решенија на задачата се:

$$(120:2-20):(1+7)=5$$

$$(12+0-2):2+0\cdot1\cdot7=5.$$

Обиди се да најдеш уште некое решение.

10. Меѓу цифрите 9876543 се ставени 5 знаци + така што збирот на петте едноцифрени и двоцифрениот број е еднаков на 87. Кои броеви се собрани?

Решение. Имаме $9+8+7+6+5+4+3=42$, а цифрата на единици на збирот на двоцифрениот број е петте едноцифрени броеви треба да е 7. Според тоа, 5 не е цифра на единиците, што значи дека се собрани броевите 9, 8, 7, 6, 54 и 3. Навистина

$$9+8+7+6+54+3=87.$$

11. Собирањето прикажана на цртежот десно не е точно. Смени ги местата на две цифри така што собирањето ќе биде точно.

$$\begin{array}{r} 438 \\ + 259 \\ \hline 751 \end{array}$$

Решение. За да збирот на единиците биде точен не може цифрата 1 да го замени местот со цифрата 7, а исто така не може и цифрата 8 да го замени местото со цифрата 2. Меѓутоа, ако цифрата 9 го замени местото со цифрата 3 добиваме

$$498+253=751,$$

т.е. собирањето е точно.

12. Кој од броевите 12, 14, 10, 16 и 18 не може да се запише како збир на два или повеќе последователни природни броја?

Решение. Имаме,

$$12=3+4+5,$$

$$14=2+3+4+5,$$

$$10=1+2+3+4,$$

$$18=3+4+5+6.$$

Јасно, бројот 16 не може да се запише како збир на два последователни броја. Ако може да се запише како збир на три последователни броја, тогаш тоа се броевите $n, n+1, n+2$, па затоа треба да важи $n+n+1+n+2=16$, т.е. $3n=13$, што не е можно. Ако може да се запише како збир на четири последователни броја, тогаш тоа се броевите $n, n+1, n+2, n+3$, па затоа треба

да важи $n+n+1+n+2+n+3=16$, т.е. $4n=10$ што не е можно. Слично, во случај на пет последователни броја добиваме $5n=6$, што повторно не е можно, а најмалиот збир на шест последователни броја е еднаков на $1+2+3+4+5+6=21$. Конечно, од дадените броеви само бројот 16 не може да се запише како збир на два или повеќе последователни броја.

13. Со кибритени чкорчиња Горјан ги пишува цифрите од 0 до 9 (цртеж десно). Тој го напишал бројот



Премести 4 чкорчиња така што ќе го добиеш најголемиот можен број.

Решение. Дадениот број е трицифрен и тој е помал од било кој четирицифрен број, а овој е помал од било кој петцифрен број. Според тоа, најголем број ќе добиеме ако со поместување на 4 чкорчиња запишеме број со најмногу цифри. Бидејќи за цифрата 1 се користат само 2 чкорчиња, а за секоја друга цифра се користат повеќе чкорчиња треба чкорчињата да ги преместиме така што ќе го запишуваме само цифрата 1. Ако од нулите ги извадиме четирите хоризонтални чкорчиња ќе добиеме 4 единици, па ако со овие 4 чкорчиња составиме 2 единици ќе го добиеме бројот:



т.е. бројот 1111111 и тоа е најголемиот можен број.

1.2. БРОЈНИ РЕБУСИ

14. Нека A, B, C и D се различни цифри такви што $D \cdot D = B$ и $A + C = D$. Определи го производот $A \cdot B \cdot C \cdot D$.

Решение. Бидејќи цифрите A, B, C и D се различни, од $A + C = D$ следува дека ниту една од цифрите A и C не е 0.

Затоа, $D \geq 3$. Но, од $D \cdot D = B$ и B е цифра следува дека $D \leq 3$. Според тоа, $D = 3, B = 9$ и $A = 1, C = 2$ или $D = 3, B = 9$ и $A = 2, C = 1$. Во секој случај $A \cdot B \cdot C \cdot D = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 9 = 54$.

15. Нека A, B, C и D се различни цифри такви што

$$A + A + A = \overline{BC}, D + D = B, B + B = C.$$

Пресметај го збирот $A + B$.

Решение. Од $D + D = B, B + B = C$ следува дека цифрите B и C се парни и дека $C > B > D > 0$. Понатаму, бидејќи збир на три еднакви едноцифрени броеви е помал или еднаков на 27, заклучуваме дека $\overline{BC} \leq 27$, т.е. $B = 1$ или $B = 2$. Но, B е парна цифра, па затоа $B = 2$ и сега $C = B + B = 4$. Значи, $A + A + A = 24$, од каде следува дека $A = 8$. Конечно, $A + B = 10$.

16. Реши го бројниот ребус даден на цртежот десно, во кој на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

$$\begin{array}{r} A \ X \ A \\ + \quad A \ X \\ \hline A \\ \hline III \ A \ X \end{array}$$

Решение. Од $A + X + A = *X$ следува дека A треба да е или 5 или 0. Бидејќи A е цифра на десетките во двоцифрен број и цифра на стотките во трицифрен број не може да е 0, па затоа A е 5. Тогаш од $A + X + A$ имаме пренос на 1 и од збирот на десетките добиваме $X + 5 + 1 = *5$, па затоа X е 9 и имаме пренос 1. Затоа III ќе биде еднаква на $5 + 1 = 6$. Конечно, имаме

$$595 + 59 + 5 = 659.$$

17. Во бројниот ребус прикажан на цртежот десно на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри. Ако на буквата Γ соодветствува цифрата 0, определи го бројот $\overline{BAM}$.

$$\begin{array}{r} B \ A \ M \\ + \quad A \ M \\ \hline M \ A \ \Gamma \end{array}$$

Решение. Збирот на единиците $M + M$ завршува на 0, па затоа M е 0 или 5. Но, M не е 0, бидејќи Γ е нула. Значи, M е 5. Сега збирот $A + A$ собран со преносот 1 треба да даде цифра на еди-

ниците A , а тоа е можно само ако A е 9. Понатаму, $B+1=M$, па затоа B е 4. Конечно, $\overline{BAM}=495$.

18. Во бројниот ребус прикажан на цртежот десно на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри. Ако на буквата P соодветствува цифрата 2, која цифра е означена со A ?

$$\begin{array}{r} K \ P \ O \\ + \quad \quad K \ O \\ \hline T \ A \ K \end{array}$$

Решение. Во едниот собирок стотките се K , а збирот е T . Тоа значи дека при собирањето на десетките има пренос. Збирот на десетките е $2+K$ и може да има пренос 1 само ако K е 7, 8 или 9. Но, во збирот $O+O$ цифрата на единиците е K , па затоа K е парна цифра, т.е. $K=8$. Тоа значи дека $T=9$. Бидејќи $O+O$ завршува на 8, добиваме дека O е 4 или 9. Но, $T=9$, па затоа $O=4$. Сега, конечно добиваме дека $A+10=2+8$, т.е. $A=0$.

19. Во долните равенства на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

$$\overline{CB}+B=\overline{BA}, \quad \overline{CB}-B=\overline{CA}.$$

Пресметај ја разликата $\overline{CC}-B$?

Решение. Од $\overline{CB}-B=\overline{CA}$ следува дека $A=0$. Сега од првото равенство следува дека $B=5$ и затоа $C=4$. Според тоа, бараната разлика е $\overline{CC}-B=44-5=39$.

20. Во долните равенства на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

$$\overline{BC}+\overline{BE}=\overline{CA}, \quad \overline{AA}+\overline{BE}=\overline{DBC}.$$

Пресметај ја разликата $\overline{CB}-\overline{BA}$?

Решение. Од второто равенство следува

$10A+A+10B+E=100+10B+C$, т.е. $10A+A+E=100+C$, па затоа $A=9$, од каде добиваме дека $C=E+1$. Сега од првото равенство имаме

$$10B+C+10B+E=10C+9, \text{ т.е. } 5B=2(C+1).$$

Бидејќи B и C се едноцифрени броеви, од последното равенство добиваме дека $B=2$ и $C=4$. Конечно,

$$\overline{CB} - \overline{BA} = 42 - 29 = 13.$$

21. На местото на секоја ѕвезда во равенството $86 + * = **$ стои по една цифра. Ако збирот на овие цифри е еднаков на 19, определи го непознатиот собирок.

Решение. Имаме $86 + a = 10b + c$, па затоа $b = 8$ или $b = 9$. Ако $b = 8$, тогаш $6 + a = c$. Сега од $a + b + c = 19$ следува $a + c = 11$, па затоа $6 + 2a = 11$, што не е можно (зошто?). Ако $b = 9$, тогаш $a = 4 + c$. Сега, од $a + b + c = 19$ следува $a + c = 10$, па затоа $4 + 2c = 10$, од каде наоѓаме $c = 3$. Конечно, $a = 10 - 3 = 7$, т.е. непознатиот собирок е еднаков на 7.

22. Во бројниот ребус $\overline{NOS} + \overline{ROG} = 777$ на исти букви соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри. Пресметај го збирот

$$N + O + S + O + R + O + G.$$

Решение. Збирот на десетките $O + O$ е парен број, а десетките во збирот се 7, па затоа има пренос 1 од збирот на единиците. Според тоа, $S + G = 17$, па затоа S и G се 8 и 9 во некој редослед. Освен тоа, $O + O$ е или 6 или 16, т.е. O е 3 или 8. Последното не е можно, бидејќи една од цифрите S или G е 8. Значи, $O + O = 6$, па затоа $N + R = 7$. Конечно,

$$N + O + S + O + R + O + G = 3 \cdot O + N + R + S + G = 3 \cdot 3 + 7 + 17 = 33.$$

23. Во бројниот ребус на цртежот десно на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри и на различни букви соодветствуваат различни цифри. Ако K е 3, определи го збирот

$$\begin{array}{r} \text{Б} \text{А} \\ + \text{К} \text{Л} \text{А} \\ \hline \text{В} \text{А} \\ \hline \text{А} \text{А} \text{А} \end{array}$$

$$\text{Б} + \text{А} + \text{К} + \text{Л} + \text{А} + \text{В} + \text{А}.$$

Решение. Единствени едноцифрени броеви кои трипати собрани даваат збир со цифра на единиците истиот едноцифрен број се 0 и 5. Но, A не може да е 0, па затоа $A = 5$. Сега, бидејќи K е 3 при собирањето на десетките имаме пренос 2, што значи дека $\text{Б} + \text{Л} + \text{В} + 1 = 25$, т.е. $\text{Б} + \text{Л} + \text{В} = 24$. Конечно,

$$\text{Б} + \text{А} + \text{К} + \text{Л} + \text{А} + \text{В} + \text{А} = \text{Б} + \text{Л} + \text{В} + \text{К} + 3 \cdot \text{А} = 24 + 3 + 15 = 42.$$

24. Во долното равенство на различните букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

$$\overline{AA} + A + A = \overline{AK}.$$

Која е најголемата можна вредност на бројот $\overline{KA}$?

Решение. Бидејќи при собирање на единиците имаме собирање на три исти броја, а нема пренос заклучуваме дека најголемата можна вредност на A е 3. Притоа $K=9$, па затоа најголемата можна вредност на бројот $\overline{KA}$ е 93.

25. Реши го ребусот:

$$\overline{AAAA} + \overline{BBB} + \overline{AA} + C = 2017.$$

Решение. Ако $A \geq 2$, тогаш левата страна е поголема од 2222, што не е можно. За $A=1$ добиваме:

$$\overline{BBB} + C = 2017 - 1111 - 11 = 895.$$

Ако $B \leq 7$, тогаш левата страна на последното равенство е помала од 787, што не е можно, а ако $B=9$, тогаш таа е поголема од 999, што повторно не е можно. За $B=8$ добиваме

$$C = 895 - 888 = 7.$$

Конечно,

$$1111 + 888 + 11 + 7 = 2017.$$

26. Во бројниот ребус на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

$$\overline{AB} + A = \overline{BCC}.$$

Опреди го збирот $A+B+C$.

Решение. Збир на двоцифрен запишан со различни цифри и едноцифрен број е помал од $99+9=108$. Оттука следува дека $B=1$. Понатаму, бидејќи $\overline{A1} + A$ е трицифрен број добиваме $A=9$. Конечно, од $91+9=100$ следува дека $C=0$, па затоа $A+B+C=10$.

27. Реши го бројниот ребус даден на цртежот десно, во кој на еднакви букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри.

$$\begin{array}{r} B \\ + A A \\ \hline C C C \end{array}$$

Решение. Збирот на еден двоцифрен и два едноцифрени броеви е помал или еднаков на $99+9+9=117$. Затоа, $C=1$, па имаме $10A+A+2B=111$, т.е. $11A+2B=111$. Затоа, A е непарен број. Но, за да збирот на двоцифрен и два едноцифрени броја биде трицифрен број, двоцифрениот број мора да биде поголем од 81, што значи дека $A=9$. Според тоа, $11\cdot 9+2B=111$, т.е. $2B=12$, односно $B=6$. Конечно, решението на ребусот е

$$6+99+6=111.$$

28. Свездичките замени ги со соодветни цифри така што пресметувањата бидат точни: :

$$\begin{array}{r} 4*.3* \\ *** \\ \\ *.1 \\ \hline ***5 \end{array}$$

Решение. Од $4*.3=*.1$ заклучуваме дека на местото на свездичката во двоцифрениот број треба да стои цифрата 7. Според тоа, $47\cdot 3=141$, па затоа имаме

$$\begin{array}{r} 47.3* \\ *** \\ \\ 141 \\ \hline ***5 \end{array}$$

Бидејќи 5 е цифра на единиците на производот добиваме дека $47.*=*.5$. Но, 5 како цифра на единици во производот $47.*$ може да се добие само ако едноцифрениот множител е 5, па затоа имаме $47\cdot 5=235$. Конечно, од претходните разгледувања имаме $47\cdot 35=1645$

29. Во долните равенства на различни букви соодветствуваат различни цифри, а на исти букви соодветствуваат исти цифри.

$$B+C+D=\overline{AA}, \quad \overline{AD}-C=\overline{EB}.$$

Која цифра соодветствува на буквата D ?

Решение. Збирот на три различни едноцифрени броеви е помал или еднаков на 24. Од второто равенство следува дека $\overline{AD}>\overline{EB}$,

а како $A \leq 2$ и на букците A и E соодветствуваат различни цифри добиваме $A=2, E=1$. Значи, $B+C+D=22$. Јасно, $B, C, D \geq 5$, бидејќи ако еден од овие броеви е помал или еднаков на 4, тогаш збирот на другите два треба да е поголем или еднаков на 18, што не е можно за два различни едноцифрени броеви. Ако најмалиот од трите броја е еднаков на 5, тогаш збирот на другите два треба да е $22-5=17$, што значи дека другите два броја се 8 и 9. Ако најмалиот од трите броја е еднаков на 6, тогаш збирот на другите два треба да е $22-6=16$, што значи дека другите два броја се 7 и 9. Ако најмалиот од трите броја е еднаков на 7, тогаш другите два броја се 8 и 9, што не е можно, бидејќи $B+C+D=22$, а $7+8+9=24$. Сега, од $\overline{AD}-C=\overline{EB}$ добиваме $\overline{2D}-C=\overline{1B}$ и како броевите B, C, D се 5, 8, 9 или 6, 7, 9, во некој редослед, следува дека во некој редослед B и C се 7 и 9, па затоа $D=6$.

30. Во долните равенства на еднаквите букви соодветствуваат еднакви цифри, а на различните букви соодветствуваат различни цифри:

$$A \cdot \overline{BA} = \overline{B\Gamma\Gamma}, \quad \overline{\Gamma A} + \overline{B\mathcal{D}} = \overline{E\mathcal{J}A}, \quad \overline{BB} \cdot B = \overline{E\mathcal{D}B}.$$

Пресметај го збирот $A+B+\Gamma$.

Решение. Од средното равенство следува $E=1$ и $\mathcal{D}=0$. Сега од последното равенство добиваме $\overline{BB} \cdot B = \overline{10B}$, па затоа $B=3$, па од $\overline{3B} \cdot 3 = \overline{E\mathcal{D}B}$ наоѓаме $B=5$. Цифрите 0 и 1 се веќе зафатени, па затоа $\mathcal{J} \geq 2$. Понатаму, $\Gamma \leq 9$ а од

$$\overline{\Gamma A} + \overline{30} = \overline{1\mathcal{J}A}$$

следува $\Gamma = 7 + \mathcal{J}$, па затоа $\mathcal{J} = 2$ и $\Gamma = 9$. Понатаму, од првото равенство добиваме $A \cdot \overline{5A} = \overline{399}$, што е можно само за $A=7$. Според тоа, равенствата се

$$7 \cdot 57 = 399, \quad 97 + 30 = 127, \quad 35 \cdot 3 = 105,$$

а бараниот збир е $A+B+\Gamma = 7+5+9 = 21$.

1.3. НИЗИ БРОЕВИ

31. Определи ги дваесеттиот и дваесет и првиот член на низата:

2, 5, 12, 15, 22, 25, 32, 35, ...

Решение. Забележуваме дека непарните членови на низата се 2, 12, 22, 32, ... и секој следен е за 10 поголем од претходниот. Дваесет и првиот член на низата е единаесеттиот непарен член, што значи дека тој е еднаков на $2+10\cdot 10=102$. Понатаму, парните членови на низата се 5, 15, 25, 35, ... и секој следен е за 10 поголем од претходниот. Дваесеттиот член на низата е десеттиот парен член, што значи дека тој е еднаков на $5+9\cdot 10=95$.

32. Во низа се запишани природните броеви од 1 до 1000 на следниот начин:

1, 10, 100, 1000, 2, 11, 20, ...,

т.е. во растечки редосле се запишани броевите со збир на цифрите 1, потоа во растечки редослед се запишани броевите со збир на цифрите 2, па во растечки редослед се запишани броевите со збир на цифрите 3, потоа со збир на цифрите 4 итн.

а) Напиши ги подредувањето на броевите чиј збир на цифрите е помал или еднаков на 3.

б) На кое место во низата од сите броеви е бројот 112?

в) На кое место во низата од сите броеви е бројот 996?

Решение. а) Бараните броеви од низата се:

1, 10, 100, 1000,
2, 11, 20, 101, 110, 200,
3, 12, 21, 30, 102, 111, 120, 201, 210, 300,

б) Имаме

1, 10, 100, 1000, – 4 места

2, 11, 20, 101, 110, 200, – 6 места

3, 12, 21, 30, 102, 111, 120, 201, 210, 300, – 10 места

4, 13, 22, 31, 40, 103, 112 – 7 места

Од $4+6+10+7=27$ следува дека бројот 112 е на дваесет и седмото место.

в) За да определиме на кое место се наоѓа бројот 996 ќе броиме одназад-нанапред. Број со збир на цифрите 27 е еден – 999. Бро-

еви со збир на цифрите 26 се три – во опаѓачки редослед 998, 989 и 899. Броеви со збир на цифрите 25 се 997, 988, 979, 898, 889, 799. Бројот 996 е со збир на 24 и е најголем.

Значи 996 е на 990-тото место.

33. Определи го збирот на следните два члена во низата броеви:

5, 9, 17, 33, 65, ...

Решение. Имаме:

$$9 = 2 \cdot 5 - 1, 17 = 2 \cdot 9 - 1, 33 = 2 \cdot 17 - 1, 65 = 2 \cdot 33 - 1.$$

Затоа следните два броја на низата се

$$2 \cdot 65 - 1 = 130 - 1 = 129 \text{ и } 2 \cdot 129 - 1 = 258 - 1 = 257.$$

Нивниот збир е еднаков на $129 + 257 = 386$.

34. Дадена е низата

2, 9, 23, 44, 72, ...

Определи го збирот на првите осум членови на оваа низа.

Решение. Последователно имаме:

$$9 = 2 + 7 \cdot 1, 23 = 9 + 7 \cdot 2, 44 = 23 + 7 \cdot 3, 72 = 44 + 7 \cdot 4,$$

па затоа следните три членови на низата се:

$$72 + 7 \cdot 5 = 107, 107 + 7 \cdot 6 = 149 \text{ и } 149 + 7 \cdot 7 = 198.$$

Збирот на првите осум членови на низата е еднаков на

$$2 + 9 + 23 + 44 + 72 + 107 + 149 + 198 = 604.$$

35. Кои броеви треба да се запишат во квадратчињата за да се запази правилото според кое е составена долната низа?

41	1	40	2	38	3	35		31		
----	---	----	---	----	---	----	--	----	--	--

Решение. Во првите три парни места последователно се запишани броевите 1, 2 и 3, па затоа во осмото и десеттото квадратче треба да се запишат 4 и 5. Првиот запишан број во непарните квадратчиња е 41, а во секое следно непарно квадратче е запишана разликата на броевите запишани во претходните две квадратчиња. Според тоа, во единаесеттото квадратче треба да се запише бројот $31 - 5 = 26$. Збирот на броевите кои треба да се запишат во празните квадратчиња е еднаков на $4 + 5 + 26 = 35$.

36. Со помош на кибритени чкорчиња се составуваат „триаголни“ и „квадратни“ фигури прикажани на



цртежот десно, а потоа од нив се составува низата фигури прикажана на долниот цртеж.



Колку кибритени чкорчиња се искористени за да горната низа се продолжи до петнаесеттата „триаголна“ фигура.

Решение. После секои две „триаголни“ фигури имаме една „квadratна“ фигура. Бидејќи $15 = 7 \cdot 2 + 1$ во низата ќе имаме 15 „триаголни“ и 7 „квadratни“ фигури. Значи, за да горната низа се продолжи до петнаесеттата „триаголна“ фигура се искористени $15 \cdot 2 + 7 \cdot 3 = 51$ кибритено чкорче.

37. Ана една до друга ги напишала цифрата 1 – еднаш, цифрата 2 – три пати, цифрата 3 – пет пати, цифрата 4 – седум пати, цифрата 5 – девет пати, цифрата 6 – единаесет пати, цифрата 7 – тринаесет пати, цифрата 8 – петнаесет пати, цифрата 9 седумнаесет пати и цифрата 0 – деветнаесет пати. Потоа неколку пати ја поворила истата низа. Која цифра е 2019-тата по ред?

Решение. Групата цифри од 1 до 9 содржи

$$1+3+5+7+9+11+13+15+17+19=100$$

цифри. Бидејќи $2019 = 20 \cdot 100 + 19$ на местото 2019 се наоѓа 19-тата цифра од почетокот на низата. Бидејќи

$$1+3+5+7 < 19 < 1+3+5+7+9$$

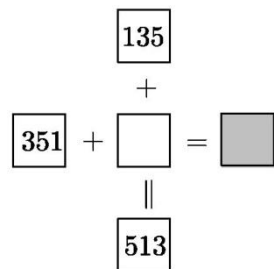
заклучуваме дека 2019-тата цифра по ред е 5.

I.4. РАВЕНКИ И НЕРАВЕНСТВА

38. Кој број треба да биде запишан во сивото квадратче на дијаграмот даден на цртежот десно?

Решение. Во централното квадратче на дијаграмот треба да биде запишан бројот

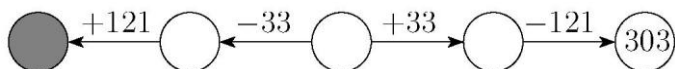
$$513 - 135 = 378.$$



Во сивото квадратче треба да биде запишан бројот

$$351 + 378 = 729.$$

39. Определи го бројот кој треба да се запише во сивото квадратче на дијаграмот прикажан на долниот цртеж.



Решение. *Прв начин.* Задачата ќе ја решиме со враќање одназад-напред. Последователно во кругчињата треба да ги запишеме броевите:

$$303 + 121 = 424,$$

$$424 - 33 = 389,$$

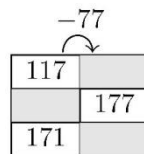
$$389 + 33 = 424,$$

$$424 - 121 = 303.$$

Според тоа, во сивото квадратче треба да го запишеме бројот 303.

Втор начин. Забележуваме дека за да го добиеме бројот 303 додаваме и одземаме исти броеви. Тоа значи дека резултатот од извршените операции е 0. Според тоа, во сивото квадратче треба да го запишеме бројот 303.

40. Пресметај го збирот на броевите кои треба да се запишат во сивите квадратчиња на дијаграмот прикажан на цртежот десно за да пресметувањата се точни.



Решение. Во сивите квадратчиња последователно почнувајќи од горниот ред треба да се запишат броевите:

$$117 - 77 = 40,$$

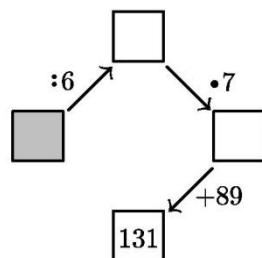
$$177 + 77 = 254,$$

$$171 - 77 = 94.$$

Нивниот збир е еднаков на

$$40 + 254 + 94 = 388.$$

41. Кој број треба да биде запишан во сивото квадратче на дијаграмот даден на цртежот десно?



Решение. Одејќи одназад-нанапред последователно добиваме дека во квадратчињата треба да се запишуваат броевите:

$$131 - 89 = 42,$$

$$42 : 7 = 6,$$

$$6 \cdot 6 = 36.$$

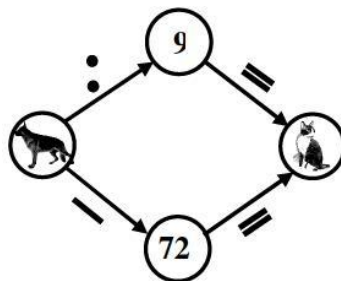
Значи, во сивото квадратче треба да се запише бројот 36.

42. Во равенствата дадени на цртежот десно под кучето и мачето е скриен по еден број. Определи го производот на овие два броја.

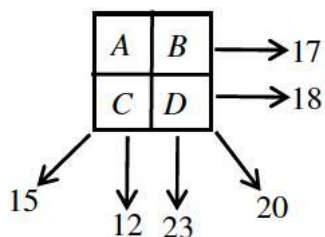
Решение. Ако под кучето е бројот a , а под мачето бројот b , тогаш $a = 9b$ и $a = b + 72$. Значи,

$$9b = b + 72,$$

од каде наоѓаме $b = 9$. Значи, $a = 81$ и $ab = 9 \cdot 81 = 729$.



43. Во полињата на квадратот даден на цртежот десно се запишани броевите A, B, C и D така што збирите на броевите запишани во двата реда, двете колони и на двете дијагонали се еднаков на посочените броеви. Определи го бројот D .



Решение. Од $D + B = 23$, $D + C = 18$ и $B + C = 15$, Добиваме

$$2D + B + C = 23 + 18$$

$$2D + 15 = 41$$

$$2D = 26$$

$$D = 13.$$

44. Во равенствата

$$\spadesuit + \clubsuit + \diamondsuit + \heartsuit = 20, \clubsuit + \spadesuit + \clubsuit = 12 \text{ и } \heartsuit + \diamondsuit + \heartsuit = 19$$

на секоја од четирите фигури соодветствува број. Определи го збирот $\clubsuit + \heartsuit$.

Решение. Во второто и третото равенство детелинката и срцето се јавуваат по двапати, а другите два знака се јавуваат по еднаш,

а додека во првото равенство сите четири знаци се јазуваат по еднаш. Затоа ако ги собереме второто и третото равенство, а потоа го одземеме првото равенство добиваме дека збирот $\clubsuit + \heartsuit$ е еднаков на $12 + 19 - 20 = 11$.

45. На таблата се запишани два бројни ребуси во кои на исти букци соодветствуваат исти цифри, а на различни букви соодветствуваат различни цифри:

$$D + V + A + E + S + E + T + I + D + V + A = 32$$

$$T + R + I + E + S + E + T + I + T + R + I = 38.$$

Пресметај го збирот

$$D + V + A + E + S + E + T + I + T + R + I.$$

Решение. Ако ги разбиеме сите зборови на помали делови, тогаш ќе ги добиеме деловите DVA (од $D + V + A$), $ESETI$ (од $E + S + E + T + I$) и TRI (од $T + R + I$). Според тоа имаме

$$DVA + DVA + ESETI = 32 \text{ и } TRI + TRI + ESETI = 38.$$

Значи, $TRI + TRI$ е поголемо од $DVA + DVA$ за 6, па затоа TRI е поголемо од DVA за 3. Последното значи дека

$$D + V + A + E + S + E + T + I + T + R + I = 32 + 3 = 35.$$

Ова е можно, на пример, за

$$2 + 3 + 5 + 1 + 6 + 1 + 4 + 0 + 2 + 3 + 5 = 32$$

$$4 + 9 + 0 + 1 + 6 + 1 + 4 + 0 + 4 + 9 + 0 = 38.$$

46. Кој е најголемиот број кој може да се стави на местото на ѕвездата за да е точно неравенството:

$$32 - * > 43 - (41 - 17).$$

Решение. Последователно добиваме

$$32 - * > 43 - (41 - 17)$$

$$32 - * > 43 - 24$$

$$32 - * > 19.$$

Ако на местото на ѕвездата ставиме 13 или поголем број, тогаш разликата на десната страна на неравенството ќе биде еднаква или помала од 19, т.е. неравенството нема да биде точно. Значи, најголемиот број кој може да се стави на местото на ѕвездата е бројот 12.

47. Колку различни природни броеви може да се запишат на местото на свездичката за да се точни неравенствата:

$$48:6 - 28:7 < 3 \cdot * < 45:5 + 24:3?$$

Решение. Последователно добиваме

$$48:6 - 28:7 < 3 \cdot * < 45:5 + 24:3$$

$$8 - 4 < 3 \cdot * < 9 + 8$$

$$4 < 3 \cdot * < 17$$

што значи дека на местото на $*$ може да се запишат броевите: 2, 3, 4 и 5, односно може да се запишат 4 природни броеви.

48. Колку парни и колку непарни броеви x ги задоволуваат неравенствата

$$9872:8 - 77 \cdot 13 < x < 7020:45 + 1001:11?$$

Решение. Последователно добиваме

$$9872:8 - 77 \cdot 13 < x < 7020:45 + 1001:11$$

$$1234 - 1001 < x < 156 + 91$$

$$233 < x < 247.$$

Сите броеви кои ги задоволуваат неравенствата се 234, 235, 236, 237, 238, 239, 240, 241, 242, 243, 244, 245 и 246. Меѓу нив има 7 парни и 6 непарни броеви.

49. Нека $a < c$. Кој од изразите

$$M = 100 - (10 \cdot 4 - 10 + 0 \cdot 80) - a \text{ и } P = 9 \cdot 5 + 5 + 2 \cdot 2 \cdot 5 - c$$

прима поголема вредност?

Решение. Имаме

$$M = 100 - (10 \cdot 4 - 10 + 0 \cdot 80) - a = 100 - (40 - 10 + 0) - a$$

$$= 100 - 30 - a = 70 - a$$

и

$$P = 9 \cdot 5 + 5 + 2 \cdot 2 \cdot 5 - c = 45 + 5 + 4 \cdot 5 - c = 45 + 5 + 20 - c = 70 - c.$$

Бидејќи $a < c$, заклучуваме дека изразот P прима помала вредност.

50. Во шемата дадена на цртежот десно замени ја секоја буква со еден од броевите од 1 до 9 така што ќе се исполнети неравенствата. Притоа на

$$\begin{array}{ccccc} A & > & B & > & B \\ \vee & & \wedge & & \wedge \\ \Gamma & > & Д & < & E \\ \vee & & \wedge & & \wedge \\ Ж & > & 3 & > & И \end{array}$$

различните букви соодветствуваат различни броеви. Кој број соодветствува на буквата И.

Решение. Од дијаграмот можеме да ги запишеме следниве низи неравенства:

$$A > B > V,$$

$$A > \Gamma > \text{Ж} > 3 > Д > Б > В$$

$$A > \Gamma > \text{Ж} > 3 > И > Е > В$$

$$A > \Gamma > \text{Ж} > 3 > И > Е > Д > Б > В.$$

Според тоа, имаме 9 букви на кои треба да им ги придружиме броевите од 1 до 9. Во четвртата низа се содржат сите девет букви, па затоа

$$A=9, \Gamma=8, \text{Ж}=7, 3=6, И=5, Е=4, Д=3, Б=2, В=1.$$

51. Во квадратчињата запиши ги броевите 1, 2, 3, и 4 така што во секој ред и во секоја колона се запишани сите четири броја и се точни посочените неравенства.

$$\begin{array}{cccc} \square & < & \square & \square & \square \\ \vee & & & & \\ \square & > & \square & \square & \square \\ & & & & \\ \square & & \square & < & \square < \square \\ & & & & \\ \square & & \square & & \square > \square \end{array}$$

Решение. Да ја разгледаме низата неравенства меѓу четирите броја кои треба да се запишат во четирите квадратчиња во горниот лев агол. За запишување на дадените броеви во овие четири квадратчиња постои единствена можност $4 > 3 > 2 > 1$.

Понатаму, во втората колона не може повторно да се запише бројот 1, па затоа во второто квадратче на третиот ред мора да се запише бројот 2. Сега е јасно дека во третото и четвртото квадратче на третиот ред треба да се запишат броевите 3 и 4 соодветно, а во првото квадратче треба да се запише бројот 1.

Јасно, во третото и четвртото квадратче на вториот ред треба да се запишат редоследно броевите 4 и 3, а во првото и второто квадратче на четвртиот ред редоследно треба да се запишат броевите 4 и 3. Затоа во третото и четвртото квадратче на четвртиот ред треба да се запишат броевите 2 и 1, соодветно и конечно во третото и четвртото квадратче на првиот ред треба да се запишат броевите 1 и

$$\begin{array}{cccc} \boxed{3} & < & \boxed{4} & \boxed{1} & \boxed{2} \\ \vee & & & & \\ \boxed{2} & > & \boxed{1} & \boxed{4} & \boxed{3} \\ & & & & \\ \boxed{1} & \boxed{2} & < & \boxed{3} & < & \boxed{4} \\ & & & & \\ \boxed{4} & \boxed{3} & \boxed{2} & > & \boxed{1} \end{array}$$

2, соодветно. Решението е дадено на горниот цртеж.

52. Илија запишал четири трицифрени броеви чии цифри се 0, 2 и 3. Тој броевите ги запишал во кругчињата на цртежот десно во растечки редослед. Определи ја разликата на броевите запишани во сивите кругчиња.
- Решение.** Трицифрени броеви чии цифри се 0, 2 и 3 се: 203, 230, 302 и 320. Ако броевите ги запишеме во растечки редослед добиваме



$$203 < 230 < 302 < 320.$$

Според тоа, бараната разлика е еднаква на

$$320 - 230 = 90.$$

I.5. МАГИЧНИ ФИГУРИ

53. Во празните полиња на квадратот даден на цртежот десно треба да се запишат броеви така што збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков. Кој број треба да се запише на местото на ѕвездичката?

	*	9
12	18	
	6	21

Решение. Горниот ред и дијагоналата од лево на десно имаат заедничко поле. Збирите на броевите запишани во нив се еднакви, што значи дека се еднакви збирите запишани во соодветните други две полиња. Конечно, на местото на ѕвездичката треба да стои бројот $21 + 18 - 9 = 30$.

54. Во празните полиња на табелата дадена на цртежот десно треба да се запишат броеви така што збирот на броевите во секој ред, секоја колона и двете дијагонали ќе биде еднаков. Кој број треба да се запише на местото на прашалникот? Пополни ја табелата!

7		3
	9	
	?	

Решение. Збирот на броевите во горниот ред е еднаков на збирот на броевите во средната колона. Во случајотв имаме едно

заедничко поле, па затоа збирите на броевите во останатите полиња мора да се еднакви. Според тоа, на местото на прашалникот треба да се запише бројот $7+3-9=1$.

Понатаму, левото долно аголно поле на табелата е заедничко за третиот ред и дијагоналата од десно кон лево, па затоа во долното десно аголно поле треба да се запише бројот $9+3-1=11$. Значи, збирот по редици, колони и на дијагонали е еднаков на $7+9+11=27$. Сега лесно се добива табелата дадена на цртежот десно.

7	17	3
5	9	13
15	1	11

55. Во празните полиња на табелата дадена на цртежот десно треба да се запишат броеви така што збирот на броевите во секој ред, секоја колона и двете дијагонали ќе биде еднаков. Кој број треба да се запише на местото на прашалникот?

		32
?		
8	28	

Решение. Третиот ред и третата колона имаат заедничко поле, па затоа во средното поле на третата колона треба да е запишан бројот $8+28-32=4$. Вториот ред и едната дијагонала имаат заедничко поле, па затоа на местото на прашалникот треба да стои бројот $8+32-4=36$.

56. Во табелата прикажана на цртежот десно запиши броеви така што збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на двете дијагонали е еднаков. Кој број треба да се запише во полето во кое се наоѓа прашалникот? Пополни ја табелата!

11	14	?
12		15

Решение. Збирите на броевите запишани на двете дијагонали се еднакви, па затоа во полето во кое се наоѓа прашалникот треба да се запише бројот $15+11-12=14$. Значи, збирот на броевите запишани во секој ред, секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков на $11+14+14=39$. Сега лесно се добива табелата прикажана на цртежот десно.

11	14	14
16	13	10
12	12	15

57. Пополни ги празните полиња на табелата дадена на цртежот десно така што збирот на запишаните броеви во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала ќе биде еднаков.

	21	13
25		

Решение. Нека во празните полиња на табелата се запишани броевите a, b, c, d, e, f (види цртеж). Тогаш $a + d + 25 = d + 21 + 13$, од каде наоѓаме $a = 9$. Понатаму, $25 + 21 + c = 13 + f + c$, па затоа $f = 33$.

a	b	c
d	21	13
25	e	f

Значи, збирот на броевите запишани во секој ред, во секоја колона и на секоја дијагонала е еднаков на $9 + 21 + 33 = 63$. Конечно, пополнетата табела е дадена на цртежот десно.

9	37	17
29	21	13
25	5	33

58. Во магичниот квадрат даден на цртежот десно запиши броеви така што збирите на броевите во секоја колона, збирите на броевите во секој ред и збирите на броевите во секоја дијагонала се еднакви.

224		448
	392	

Решение. Да ги разгледаме дијагоналата од лево на десно и третата колона. На дијагоналата се броевите 224 и 392 и еден непознат број, а во колоната како собирук се јавува бројот 448, истиот непознат број кој е на дијагоналата и уште еден непознат број. Бидејќи збирот на броевите на дијагоналата е еднаков на збирот на броевите во колоната, а во двата збира се јавува ист непознат број, заклучуваме дека вториот непознат број во колоната е $(224 + 392) - 448 = 168$. Така ја добиваме табелата на горниот цртеж.

224		448
	392	168

Сега на ист начин да ја разгледаме другата дијагонала и првата колона на магичниот квадрат. Во двата збира се јавува бројот кој се јавува во долниот лев агол, а во збирот на колоната се јавува уште еден

224		448
616	392	168

непознат број кој мора да биде еднаков на

$$(448 + 392) - 224 = 616.$$

Понатаму, броевите во вториот ред се 616, 392, 168 и нивниот збир е еднаков на $616 + 392 + 168 = 1176$. Бидејќи овој збир мора да биде во секој ред, секоја колона и на двете дијагонали добиваме дека бројот што недостасува во првиот ред е

$$1176 - (224 + 448) = 504.$$

Конечно, броевите во третиот ред почнувајќи од левото поле се:

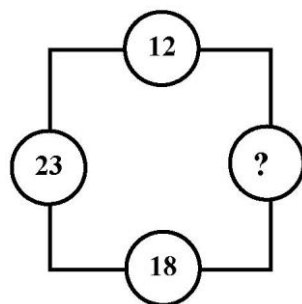
$$1176 - (224 + 616) = 336,$$

$$1176 - (504 + 392) = 280,$$

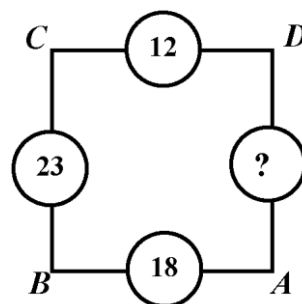
$$1176 - (448 + 168) = 560.$$

224	504	448
616	392	168
336	280	560

59. Во секое теме од квадратот даден на цртежот десно бил запишан по еден број, а врз секоја страна е запишана разликата меѓу поголемиот и помалиот број запишани во двете крајни точки. Потоа некои броеви се избришани. Кој број бил запишан на местото на прашалникот?



Решение. Нека во темињата на квадратот се запишани броевите A, B, C и D (цртеж десно). Можни се неколку случаи:



- 1) A е за 18 поголем од B , B е за 23 поголем од C и C е за 12 поголем од D . Тогаш A е за 53 поголем од D и бараниот број е 53,
- 2) A е за 18 поголем од B , B е за 23 поголем од C и C е за 12 помал од D . Тогаш A е за 29 поголем од D и бараниот број е 29,
- 3) A е за 18 поголем од B , B е за 23 помал од C и C е за 12 поголем од D . Тогаш A е за 7 поголем од D и бараниот број е 7,

- 4) A е за 18 поголем од B , B е за 23 помал од C и C е за 12 помал од D . Тогаш A е за 7 помал од D и бараниот број е 17,
 - 5) A е за 18 помал од B , B е за 23 поголем од C и C е за 12 поголем од D . Тогаш A е за 17 помал од D и бараниот број е 17,
 - 6) A е за 18 помал од B , B е за 23 поголем од C и C е за 12 помал од D . Тогаш A е за 7 помал од D и бараниот број е 7,
 - 7) A е за 18 помал од B , B е за 23 помал од C и C е за 12 поголем од D . Тогаш A е за 29 помал од D и бараниот број е 29,
 - 8) A е за 18 помал од B , B е за 23 помал од C и C е за 12 помал од D . Тогаш A е за 53 помал од D и бараниот број е 53.
- Според тоа, на местото на прашалникот може да се запише еден од броевите: 7, 17, 29 и 53.

II ТЕКСТУАЛНИ ЗАДАЧИ

II.1. БРОЕВИ И ЦИФРИ

1. Од сите броеви до 999 Горјан ги избрал само броевите кои текстуално се запишуваат со најмал можен број букви. Определени го збирот на овие броеви.

Решение. Броевите 2 (два), 3 (три), 5 (пет) и 100 (сто) текстуално се запишуваат само со три букви, а останатите броеви се запишуваат со четири или повеќе букви. Значи, Горјан ги избрал броевите 2, 3, 5 и 100 и нивниот збир е еднаков на

$$2+3+5+100=110.$$

2. Определи го најмалиот четирицифрен број чиј збир на цифри е еднаков на 25.

Решение. За да четирицифрениот број чиј збир на цифри е еднаков на 25 биде најмал потребно е цифрата на илјадитите да е 1. Понатаму, потребно е цифрата на стотките да е најмала можна, а тоа е случај кога цифрите на десетките и единиците се 9 и притоа за цифрата на стотките добиваме $25-(1+9+9)=6$. Конечно, бараниот број е еднаков на 1699.

3. Од најголемиот трицифрен број со збир на цифри 16 Методиј го одзел најмалиот трицифрен број со збир на цифри 16. Кој број го добил Методиј?

Решение. Најголем трицифрен број со збир на цифри 16 е бројот 970, а најмал трицифрен број со збир на цифри 16 е бројот 169. Значи, Методиј го добил бројот $970-169=801$.

4. Замислив еден трицифрен број. Збирот на неговите цифрите е 15. Цифрата на единици е за 5 помала од 14. Цифрата на десетки е поголема од 0 и помала од 2. Кој број го замислив?

Решение. Ако цифрата на единици е за 5 помала од 14, значи таа е $14-5=9$. Ако цифрата на десетки е поголема од 0 и помала од 2, тогаш таа е 1. Бидејќи збирот на цифрите е 15, цифрата на стотки е: $15-9-1=5$. Значи, замислениот број е 519.

5. Елена го запишала бројот 654 и забележала дека цифрата на десетките е помала од цифрата на стотките, а е поголема од цифрата на единиците. Кој е следниот по големина број со истото својство?

Решение. Броевите од 655, 656, 657, 658 и 659 до 699 имаат цифра на единиците поголема или еднаква на цифрата на десетките, а броевите од 660 до 699 имаат цифра на десетките поголема или еднаква на цифрата на стотките, па затоа ниту еден од овие броеви не е бараниот број. Понатаму, кај броевите од 700 до 709 цифрата на единиците е поголема или еднаква од цифрата на десетките, па затоа ниту еден од овие броеви не е бараниот број. Конечно, првиот број поголем од 654 кој го има саканото својство е бројот 710 и тоа е бараниот број.

6. Дадени се три броја. Првиот број е за 4 поголем од вториот и е седум пати помал од третиот. Определи го збирот на броевите, ако најголемиот број е еднаков на 49.

Решение. Јасно, најголемиот број е третиот. Понатаму, првиот број е седум пати помал од третиот, па затоа првиот број е еднаков на $49:7=7$. Конечно, вториот број е еднаков на $7-4=3$, а збирот на трите броја е еднаков на $3+7+49=59$.

7. Разликата на два броја е еднаква на 29. Ако од намаленикот одземеме 15, а на намалителот му додадеме 14, добиваме два нови броја. Определи ја разликата на новите броеви.

Решение. Бидејќи од намалителот одземеме 15, разликата се намалува за 15, а бидејќи на намаленикот му додаваме 14 разликата се намалува за уште 14. Значи, разликата на новите броеви е помала за $15+14=29$ од разликата на старите броеви и таа изнесува $29-29=0$.

8. Од цифрите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 се составени три трицифрени броја (секоја цифра е употребена по еднаш).

а) Определи го најмалиот можен збир на овие три броја?

б) Определи го најголемиот можен збир на овие три броја?

в) Определи ја разликата на броевите добиени под а) и б).

Решение. а) Најмалиот можен збир ќе го добиеме ако цифрите на стотките се 1, 2, 3, цифрите на десетките се 4, 5, 6, а цифрите на единиците се 7, 8, 9. Тогаш независно од тоа како сме ги комбинирале цифрите збирот е еднаков на $147 + 258 + 369 = 774$.

б) Најголемиот можен збир ќе го добиеме ако цифрите на стотките се 7, 8, 9 цифрите на десетките се 4, 5, 6, а цифрите на единиците се 1, 2, 3. Тогаш независно од тоа како сме ги комбинирале цифрите збирот е еднаков на $741 + 852 + 963 = 2556$.

в) Бараната разлика е еднаква на $2556 - 774 = 1782$

9. Определи го најмалиот двоцифрен број кој е делив и на збирот и на производот на неговите цифри.

Решение. Јасно, тоа не е бројот 10, бидејќи неговиот производ на цифрите е еднаков на 0, а делењето со 0 не е дозволено. Бројот 11 е непарен број, а збирот на неговите цифри е еднаков на 2, па затоа и тој не е решение на задачата. Збирот на цифрите на бројот 12 е еднаков на 3, а нивиот производ е еднаков на 2. Бидејќи $12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ заклучуваме дека бараниот број е 12.

10. Определи ги двата последователни двоцифрени броеви такви што збирот на цифрите на првиот од нив е 8, а вториот е делив со 8.

Решение. Двоцифрени броеви чиј збир на цифри е 8 се: 17, 26, 35, 44, 53, 62, 71 и 80. Следбеници на овие броеви се: 18, 27, 36, 45, 54, 72 и 81, соодветно. Притоа само бројот 72 е делив со 8, па затоа бараните броеви се: 71 и 72.

11. Светлана замислила некој број на кој му додаде 5. Добиениот резултат прво го поделила со 3, потоа бројот кој го добила го помножила со 4 и од производот одзела 6. На крајот добиениот број го поделила со 7 и го добила бројот 2. Кој број го замислила Светлана?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад нанапред. Последователно добиваме:

$$2 \cdot 7 = 14,$$

$$14 + 6 = 20,$$

$$20 : 4 = 5,$$

$$5 \cdot 3 = 15,$$

$$15 - 5 = 10.$$

Според тоа, Светлана го замислила бројот 10.

12. Учителката се обратила кон Иван и Петар: „Замислете си по еден број, потоа дадете му 5 или поделете го со 2, ако е можно делењето. Истото направете го со добиениот број и продолжете натаму со новите броеви на ист начин.“ Иван и Петар ги примениле точно по три пати секоја од двете операции. На крајот и двајцата го добиле бројот 75. Ако знаеш дека бројот замислен од Иван е најмалиот можен број, од кој после шест такви операции се добива бројот 75, а бројот замислен од Петар, е најголемиот може број, определи го збирот на двата замислени броја.

Решение. Бидејќи бројот на Иван е најмалиот замислен број од кој шесте операции се добива бројот 75, Иван прво трипати делел со 2, а потоа трипати го додал бројот 5. Според тоа, одејќи одназад-нанапред Иван ги добивал броевите:

$$75 - 5 = 70,$$

$$70 - 5 = 65,$$

$$65 - 5 = 60,$$

$$2 \cdot 60 = 120,$$

$$2 \cdot 120 = 240,$$

$$2 \cdot 240 = 480.$$

Значи, Иван го замислил бројот 480. Петар го замислил најголемиот можен број, што значи тој прво трипати додал по 5, а потоа трипати делел со 2. Според тоа, одејќи одназад-нанапред Петар ги добивал броевите:

$$2 \cdot 75 = 150,$$

$$2 \cdot 150 = 300,$$

$$2 \cdot 300 = 600,$$

$$600 - 5 = 595,$$

$$595 - 5 = 590,$$

$$590 - 5 = 585.$$

Значи, Петар го замислил бројот 595. Збирот на замислените броеви изнесува $595 + 480 = 1065$.

13. Милка прочитала неколку последователни страници на една книга. Збирот на броевите на првата и втората страна бил 35, а збирот на броевите на последните две прочитани страни бил 83. Колку страни прочитала Милка?

Решение. Бидејќи $35 - 1 = 34$ и $34 : 2 = 17$, почетните страници биле 17 и 18. Понатаму, $83 - 1 = 82$ и $82 : 2 = 41$, што значи дека последните прочитани страници биле 41 и 42. Значи, Милка прочитала $42 - 16 = 26$ страници од книгата.

14. Управата на паркот решила во туристичкото вовче да ги нумерира седиштата како вовчето да има еден вагон. Се покажало дека има 11 картончиња повеќе со цифрата 1, отколку што има картончиња со цифрата 0. Кој е најмалиот број места што може да ги има вовчето?

Решение. Последователно ги запишуваме природните броеви 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, ... Забележуваме дека при запишувањето на првата 0 имаме запишано две единици, а при запишувањето на втората нула имаме запишано дванаесет единици. Според тоа, пред да го запишеме бројот 20 сме запишале 11 единици повеќе од нули. Значи, туристичкото вовче може да има најмалку 19 места.

15. Страните на една книга се нумерирани со броевите 1, 2, 3 итн. Коста преброил дека за нумерирање на страните е искористена 15 пати цифрата 3. Колко страни најмногу може да има книгата?

Решение. Во броевите до 43 цифрата 3 се појавува точно 15 пати (преброј!). Следното појавување на цифрата 3 е во бројот 53. Според тоа, книгата може да има најмногу 52 страници

16. Една книга, без кориците, има 200 страници. Нумерацијата, т.е. означувањето на страниците почнува од бројот 1. Колку цифри се употребени за нумерирање на таа книга?

Решение. За нумерирање на првите 9 страни се употребени $9 \cdot 1 = 9$ цифри. За нумерирање на страниците од 10 до 99 кои ги

има $99 - 9 = 90$ се употребени $90 \cdot 2 = 180$ цифри. За нумерирање на страниците од 100 до 200 кои ги има $200 - 99 = 101$ се употребени $101 \cdot 3 = 303$ цифри. Конечно, за нумерирање на целата книга се употребени $9 + 180 + 303 = 492$ цифри.

17. За означување на броевите на страните на една од книгите за Хари Потер се искористени 1623 цифри. Притоа со број е означена секоја страница на оваа книга, а првата страница е означена со бројот 1. Колку страници има оваа книга?

Решение. За означување на страна чиј реден број е едноцифрен е потребна една цифра, за страна чиј реден број е двоцифрен се потребни две цифри, за страна чик реден број е трицифрен потребни се три цифри итн.

Бидејќи означувањето на страни почнува со бројот 1 и имаме 9 едноцифрени броеви, за означување на првите 9 страници се искористени 9 цифри. Следните страни се означени со двоцифрените броеви 10, 11, ..., 99. Двоцифрени броеви има 90, па за означување на соодветните страници се искористени $2 \cdot 90 = 180$ цифри. До сега означивме $9 + 90 = 99$ страници и искористивме $9 + 180 = 189$ цифри. Значи, остануваат $1623 - 189 = 1434$ цифри. За означување на следните страници користиме трицифрени броеви, па со 1434 цифри можеме да означиме $1434 : 3 = 478$ страници.

Конечно, книгата има $9 + 90 + 478 = 577$ страници.

18. Определи го бројот на страниците на книга, ако за означување на сите страници се употребени 345 цифри.

Решение. Со едноцифрен број се означени 9 страници. Понатаму, со двоцифрен број се означени 90 страници и за нив се искористени $2 \cdot 90 = 180$ цифри. Значи, преостанатите

$$345 - (9 + 90) = 345 - 99 = 156$$

цифри се искористени за означување на страници со трицифрени броеви. Според тоа, има $156 : 3 = 52$ страници означени со трицифрени броеви.

Конечно, книгата има $9 + 90 + 52 = 151$ страница.

19. Куќите во една улица се нумерирани со броевите од 1 до 128. Колку цифри вкупно се употребени за запишување на сите куќни броеви во оваа улица?

Решение. Меѓу броевите од 1 до 128 има 9 едноцифрени, 90 двоцифрени и 29 трицифрени броеви. Според тоа, за запишување на сите куќни броеви се употребени

$$9 + 2 \cdot 90 + 3 \cdot 29 = 9 + 180 + 87 = 276 \text{ цифри.}$$

20. На една улица куќите се нумерирани со броевите 1, 3, 5, ... од едната страна и 2, 4, 6, ... од другата страна на улицата. Употребени се вкупно 44 парни и 65 непарни броеви, кои се напишани со боја.

а) Колку цифри се употребени за нумерирање на куќите?

б) Сопствениците на куќите сакаат броевите со боја да ги заменат со метални цифри. Во продавницата ги има само цифрите 1 и 6 (во доволен број). Колку сопственици можат да ги заменат броевите со метални цифри?

Решение. а) Едноцифрени броеви се 9, од кои 4 се парни. Парните двоцифрени броеви се $44 - 4 = 40$ и за нив се искористени $2 \cdot 40 = 80$ цифри. Непарни двоцифрени броеви се 45 и за нив се употребени $2 \cdot 45 = 90$ цифри. Остануваат $65 - 5 - 45 = 15$ трицифрени броеви и за нив се употребени $3 \cdot 15 = 45$ цифри. Според тоа, за означување на куќите во улицата вкупно се употребени $9 + 80 + 90 + 45 = 224$ цифри.

б) Прво да забележиме дека со вртење можеме да ја запишеме и цифрата 9. Бидејќи имаме 65 непарни броеви, последниот непарен број во улицата е 129, а бидејќи имаме 44 парни броеви, последниот парен број во улицата е 88. Значи, можеме да ги запишеме броевите: 1, 6, 9, 11, 16, 19, 61, 66, 69, 91, 99, 111 и 119. Според тоа, само 13 куќи ќе имаат метални броеви.

21. Збирот на два броја е еднаков на 2346. Ако едниот број се зголеми за 89, а другиот број се намали за 57 тогаш се добиваат еднакви броеви. Определи ги почетните броеви.

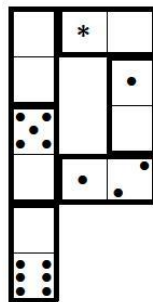
Решение. Кога едниот број се зголемува за 89, а другиот број се намалува за 57 збирот се зголемува за $89 - 57 = 32$, т.е. се добива

збирот $2346 + 32 = 2378$. Значи, после промената е добиен бројот $2378 : 2 = 1189$. Конечно, едниот број е $1189 - 89 = 1100$, а другиот број е $1189 + 57 = 1246$.

22. Фросина едноподруго напишала 10 броеви. Првиот број бил 3. Производот на секои два соседни броја бил еднаков на 12. Определи го збирот на запишаните броеви.

Решение. Фросина последователно ги запишала броевите 3, $12 : 3 = 4$, $12 : 4 = 3$, 4, 3, 4, 3, 4, 3 и 4. Нивниот збир е еднаков на $3 + 4 + 3 + 4 + 3 + 4 + 3 + 4 + 3 + 4 = 35$.

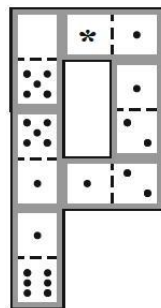
23. Мартин наредил шест плочки од домино во форма на буквата Р, почитувајќи го правилото половинките кои се допираат со страна да имаат еднаков број точки (цртеж десно). Збирот на сите точки бил еднаков на 37. Мартин ги нацртал поставените плочки, но заборавил да ги означи точките на некои половинки. Колку точки имало на местото на ѕвездичката?



Решение. Според правилото за поставување на домино плочките ги пополнуваме празните места (види цртеж десно). Збирот на точките кои можеме да ги пополниме е еднаков на

$$6 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 5 + 5 = 25.$$

Збирот на точките на двете празни места треба да е еднаков на $37 - 25 = 12$. На овие места треба да има еднаков број точки, што значи дека на местото на ѕвездичката има $12 : 2 = 6$ точки.



24. Маргарита собрала неколку броеви и добила збир 33. Кога секој собирок го зголемила за 3 и ги собрала новодобиените броеви таа добила збир 57. Колку броеви собрала Маргарита?

Решение. После зголемувањето на броевите за 3 збирот се променил за $57 - 33 = 24$. Според тоа, Маргарита собрала $24 : 3 = 8$ броеви.

25. Горјан помножил три различни броја поголеми од 1 и добил производ 36. Кои броеви ги помножил Горјан?

Решение. Бидејќи $36 = 6 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \cdot 6$ заклучуваме дека Горјан ги помножил броевите 2, 3 и 6.

26. Ако $ac = 14$, $ba = 12$, $a > 1$ определи ја вредноста на изразот $bc : a$.

Решение. Бидејќи $14 = 2 \cdot 7 = 1 \cdot 14$ од $ac = 14$ и $a > 1$ следува дека a може да биде 2, 7 или 14. Но, $ba = 12$, што значи дека a треба да биде делител на 12, па затоа $a = 2$. Сега, $c = 14 : 2 = 7$ и $b = 12 : 2 = 6$, па затоа $bc : a = 6 \cdot 7 : 2 = 42 : 2 = 21$.

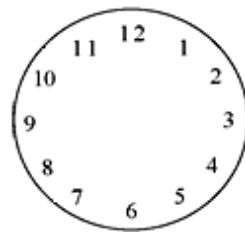
27. Петар ги брои станите во својот влез: 1, 2, 3, 4, ... Ако бројот на станот е делив со 11, тој свирнува, а ако бројот на катот е делив со 4, Петар се накашлува. Катот на кој Петар првпат и се накашлал и свирнал е претпоследниот кат. Секој кат во влезот на Петар има по 4 стана. Колку ката има влезот на Петар?

Решение. Станите пред кои Петар свирнува се: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, ... Бидејќи

$$\begin{aligned} 11 &= 2 \cdot 4 + 3, & 22 &= 5 \cdot 4 + 2, & 33 &= 8 \cdot 4 + 1, & 44 &= 11 \cdot 4 \\ 55 &= 13 \cdot 4 + 3, & 66 &= 16 \cdot 4 + 2, & 77 &= 19 \cdot 4 + 1 \end{aligned}$$

овие стани се наоѓаат на 3, 6, 9, 11, 14, 17 и 20 кат. Од броевите 3, 6, 9, 11, 14, 17 и 20 само 20 е делив со 4, па затоа Петар првпат свирнува и се накашлува на 20 кат. Ова е претпоследниот кат, што значи дека влезот на Петар има 21 кат.

28. На цртежот десно е прикажан стаклен бројчаник на часовник. Часовникот паднал и бројчаникот се скршил на три дела. Самоил пресметал дека зборовите на броевите од секој од трите дела се три последователни броеви. Нацртај како може да се скрши бројчаникот на часовникот.

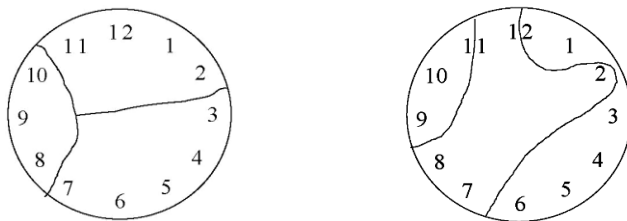


Решение. Збирот на броевите запишани на бројчаникот на часовникот е еднаков на

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 78.$$

Бидејќи $78 : 3 = 26$, бројот 78 е еднаков на збирот на броевите 25, 26 и 27. Значи, бројчаникот на часовникот треба да го поде-

лиме на три дела во кои зборовите на броевите се 25, 26 и 27. Една таква поделба е дадена на долниот цртеж лево.



Постојат и други разделувања на три дела на броевите запишани на бројчаникот часовникот, при што зборовите на броевите во секој од деловите се три последователни броја. Уште една поделба е дадена на горниот цртеж десно.

29. Определи ја разликата меѓу најмалиот и најголемиот четирицифрен број кои завршуваат на цифрата 5 и збирот на цифрите на секој од овие броеви е за 5 помал од најмалиот непарен двоцифрен број запишан со различни цифри.

Решение. Најмалиот непарен двоцифрен број запишан со различни цифри е бројот 13. Значи, збирот на цифрите на двата броја е еднаков на $15 - 5 = 8$. Нека броевите се $\overline{abc5}$ и $\overline{def5}$. Тогаш $a + b + c = 3$ и $a = 1$ и $b \leq c$, а $d + e + f = 3$ и $d \geq e \geq f$. Бројот $\overline{abc5}$ е најмалиот можен број ако $b = 0, c = 2$, т.е. тоа е бројот 1025. Бројот $\overline{def5}$ е најголемиот можен број ако $d = 3, e = f = 0$, т.е. тоа е бројот 3005. Конечно, бараната разлика е еднаква на $3005 - 1025 = 1980$.

30. Определи го збирот на стоте производи кои фигурираат во таблицата за множење од 1 до 10.

Решение. Во таблицата за множење од 1 до 10 со бројот 1 се множи секој од броевите 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Затоа збирот на овие производи е еднаков на

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 1 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 8 + 1 \cdot 9 + 1 \cdot 10 &= \\ &= 1 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) = 1 \cdot 55. \end{aligned}$$

Слично, збирот на производите кога множиме со 2 е еднаков на $2 \cdot 55$, кога множиме со 3 е еднаков на $3 \cdot 55$ итн. кога множиме со 10 е еднаков на $10 \cdot 55$. Затоа бараниот збир е еднаков на

$$\begin{aligned}
 &1 \cdot 55 + 1 \cdot 55 + 1 \cdot 55 + 1 \cdot 55 + 1 \cdot 55 + 1 \cdot 55 + 1 \cdot 55 + 1 \cdot 55 + 1 \cdot 55 + 1 \cdot 55 = \\
 &= 55 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \\
 &= 55 \cdot 55 = 3025.
 \end{aligned}$$

31. Определи го најголемиот можен збир на цифрите на 80 различни двоцифрени броеви.

Решение. Вкупно има 90 различни двоцифрени броеви. Збирот на цифрите на единиците на овие броеви е еднаков на

$$9 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 9 \cdot 45 = 405.$$

Збирот на цифрите на десетките е еднаков на

$$10 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 10 \cdot 45 = 450.$$

Значи, збирот на цифрите на сите двоцифрени броеви е еднаков на $405 + 450 = 855$. За да го добиеме најголемиот можен збир на цифрите на 80 различни двоцифрени броеви треба да отфрлиме 10 броеви со најмал збир на цифри. Тоа се броевите: 10, 11, 20, 12, 21, 30, 13, 22, 31 и 40. Збирот на нивните цифри е еднаков на

$$1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 4 = 1 + 4 + 9 + 16 = 30.$$

Значи, бараниот збир е еднаков на $855 - 30 = 825$.

II.2. ЗАДАЧИ СО МЕРНИ БРОЕВИ

32. Четири дрвја се засадени во права линија. Растојанијата меѓу дрвјата се 63 m , 18 m и 54 m . Определи го најмалиот број дрвја кои треба да се засадат меѓу веќе засадените дрвја (во права линија) така што растојанијата меѓу секои две соседни дрвја се еднакви.

Решение. Треба да го определиме најголемиот број со кој се деливи броевите 63, 18 и 54. Бидејќи $63 = 9 \cdot 7$, $18 = 9 \cdot 2$ и $54 = 9 \cdot 6$, тоа е бројот 9. Значи, меѓу првите две дрвја треба да засадиме 6 дрвја, меѓу вторите две дрвја треба да засадиме 1 дрво и меѓу третите две дрвја треба да засадиме 5 дрвја. Конечно, бараниот број дрвја е еднаков на $6 + 1 + 5 = 12$.

33. Гроздан на два еднакви ластици ги означил средините и потоа закачил по еден тег на секој ластик. Едниот ластик станал двапати подолг од другиот. Гроздан измерил колку средината на едниот ластик е подолу од средината на другиот ластик. Колку пати измерената должина е пократка од должината на подолгиот ластик?



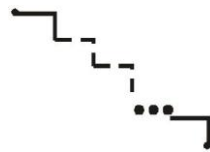
Решение. Бидејќи подолгиот ластик има двапати поголема должина од пократкиот ластик, заклучуваме дека крајот на пократкиот ластик се наоѓа наспроти средината на подолгиот ластик. Значи, растојанието кое го измерил Гроздан е еднакво на растојанието од долниот крај на пократкиот ластик до неговата средина. Јасно, ова растојание е двапати помало од должината на пократкиот ластик, што значи дека тоа е четири пати помало од должината на подолгиот ластик.

34. Девет камиони, долги по 9 метри, застанале во колона еден зад друг, при што меѓу секои два камиони има растојание по 3 метри. Колку метри е долга колоната?

Решение. Меѓу деветте камиони долги по 9 има осум растојанија од по 3 метри. Затоа колната е долга

$$9 \cdot 9 + 8 \cdot 3 = 81 + 24 = 105 \text{ m.}$$

35. Скалите во куќата на Златко се со еднакви скалила високи 20 cm и широки 30 cm и се покриени со патека долга 9 m . Колку скалила имаат скалите?



Решение. За да се покрие едно скалило се потребни

$$20 + 30 = 50 \text{ cm}$$

од патеката. Според тоа, скалата има

$$9 \text{ m} : 50 \text{ cm} = 900 : 50 = 18$$

скалила.

36. Во понеделник наутро пајак виси 30 cm од таванот. Секој ден тој се спушта 50 cm надолу, а секоја ноќ се качува 20 cm наго-

ре. Таванот е висок 255 cm . Во кој ден од седмицата пајакот ќе стапне на подот?

Решение. На почетокот пајакот се наоѓа на $255 - 30 = 225\text{ cm}$ од подот. Секое следно утро пајакот ќе биде $50 - 20 = 30\text{ cm}$ поблиску до подот. Бидејќи $225 = 6 \cdot 30 + 45$ заклучуваме дека после шест утра пајакот ќе биде на 45 cm до подот и во текот на тој ден, а тоа е недела ќе стапне на подот.

37. На автопатот Марко забележал знак на кој со двоцифрен број е запишано растојанието од патарината до знакот, изразено во километри. По извесно време на друг знак го забележал бројот запишан со истите цифри, но во обратен редослед. Определи го најмалото можно растојание кое го поминал Марко.

Решение. За да го определиме растојанието треба да одземе два броја запишани со истите цифри, но во обратен редослед. Имаме, $\overline{AB} - \overline{BA} = 10A + B - (10B + A) = 9(A - B)$. Јасно, растојанието е најмало, ако разликата $A - B$ е различна од 0 и е најмала, т.е. ако $A - B = 1$. Според тоа, најмалото можно растојание кое го поминал Марко е 9 km . На пример, такви броеви се 12 и 21, потоа 23 и 32 итн.

38. Куќите на Марко и Илија се на ист пат до училиштето. Куќата на Марко е оддалечена 5 km и 400 m , а куќата на Илија е 150 m поблиску до училиштето. Двајцата истовремено тргнуваат на училиште. Додека Илија прави 7 чекори, Марко прави 6 чекори. Кој побрзо ќе стигне на училиште ако должината на чекорот на Илија е 50 cm , а должината на чекорот на Марко е 60 cm ?

Решение. За да стигне на училиште на Марко му требаат

$$5\text{ km } 400\text{ m} : 60\text{ cm} = 5400\text{ m} : 60\text{ cm} = 540000\text{ cm} : 60\text{ cm} = 9000$$

чекори, а на Илија му требаат

$$\begin{aligned}(5\text{ km } 400\text{ m} - 150\text{ m}) : 50\text{ cm} &= 5250\text{ m} : 50\text{ cm} \\ &= 525000\text{ cm} : 50\text{ cm} = 10500\end{aligned}$$

чекори. Марко прави $9000 : 6 = 1500$ пати по шест чекори, а Илија прави $10500 : 7 = 1500$ пати по седум чекори, што значи дека тие истовремено ќе стигнат на училиште.

39. На секој километар на патот меѓу селата А и В има табла на која на едната страна е запишано колку километри има до селото А, а на другата страна на таблата е запишано колку километри има до селото В. Горјан забележал дека збирот на броевите запишани на двете страни на секоја табла е еднаков на 19. Колку е долг патот меѓу селата А и В?

Решение. Збирот на броевите запишани на двете страни на секоја табла е еднаков на должината на патот меѓу селата А и В. Според тоа, должината на патот е 19 km .

40. Во 7:10 Мартин тргнал со велосипед од Скопје кон Битола. Тој возел со постојана брзина и за 10 минути поминувал 4 km . Во 8:30 минути Мартин застанал да одмори. Колку километри поминал до одморот Мартин?

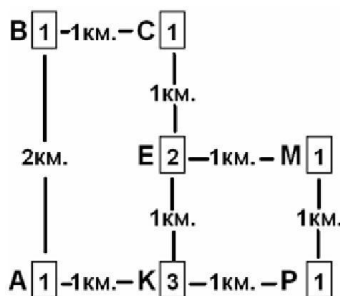
Решение. Од 7:10 до 8:30 поминале $80 = 8 \cdot 10$ минути. Бидејќи секои 10 минути Мартин поминувал по 4 km , добиваме дека до одморот тој поминал $8 \cdot 4 = 32 \text{ km}$.

41. Марко од местото А до местото В со автомобил патувал 2 часа, кога застанал да се одмори. Секој час изминувал по 71 km . До местото В му останале 53 km помалку од изминатиот пат.

Опреди ја должината на патот од А до В.

Решение. За 2 часа Марко изминал $2 \cdot 71 = 142 \text{ km}$. Од местото на кое одмарал до местото В му останале $142 - 53 = 89 \text{ km}$. Значи, должината на патот од А до В е еднаква на $142 + 89 = 251 \text{ km}$.

42. Машина за чистење снег треба да го расчисти патот меѓу секои две места, кои на цртежот се означени со букви. Во секое квадратче е запишано по колку пати машината поминува низ стоа место. Колку километри ќе помине машината? Дали постои маршрута при која машината ќе помине пократок пат? Ако постои испиши една таква маршрута.



Решение. При дадените услови една од можните маршрути на машината е: К, А, В, С, Е, К, Р, М, Е, К. Притоа машината ќе помине пат долг 10 km . Одговорот на второто прашање е позитивен. На пример, таква маршрута е: К, А, В, С, Е, М, Р, К, Е и притоа машината ќе помине пат долг 9 km .

43. Од 7:00 до 8:00 Марко со велосипед трипати одел до супермаркетот кој е на 2 km од неговата кука и се враќал дома. Неговиот татко во 8:00 часот со автомобил тргнал во посета на соседниот град и таму стигнал во 9:00. Тој се движел седум пати побрзо од Марко. Определи ја должината на патот до соседниот град.

Решение. Марко од 7:00 до 8:00, т.е. патот меѓу неговата кука и супермаркетот го поминал вкупно шест пати, што значи дека тој за 1 час поминал пат долг $6 \cdot 2 = 12\text{ km}$. Неговиот татко исто така возел 1 час, па како тој се движел седум пати побрзо заклучуваме дека тој изминал пат долг $7 \cdot 12 = 84\text{ km}$ и тоа е должината на патот до соседниот град.

44. Кој број треба да се запише на местото на ѕвездата за да се добие точно равенство:

$$(26\text{ cm} + 3\text{ dm}) - 18\text{ cm} = (1\text{ m} - * \text{ cm}) + 2\text{ dm}.$$

Решение. Последователно добиваме

$$(26\text{ cm} + 3\text{ dm}) - 18\text{ cm} = (1\text{ m} - * \text{ cm}) + 2\text{ dm}$$

$$(26\text{ cm} + 30\text{ cm}) - 18\text{ cm} = (100\text{ cm} - * \text{ cm}) + 20\text{ cm}$$

$$56\text{ cm} - 18\text{ cm} = 120\text{ cm} - * \text{ cm}$$

$$38\text{ cm} = 120\text{ cm} - * \text{ cm}$$

$$* \text{ cm} = 120\text{ cm} - 38\text{ cm}$$

$$* \text{ cm} = 82\text{ cm}.$$

Според тоа, на местото на ѕвездата треба да се запише бројот 82.

45. По улица одела Тамара и ја поздравила Сашка која стоела на тротоарот. Откако поминала 30 m , по неа тргнала Сашка. После колку чекори Сашка ќе ја прстигне Тамара, ако должината на чекорот на Сашка е 85 cm , а должината на чекорот на Тамара е 75 cm ? Образложи го својот одговор!

Решение. Со секој изминат чекор Сашка ја пристигнува Танара за $85-75=10\text{ cm}$. Предноста на Тамара е $30\cdot 100=3000\text{ cm}$. Сашка ќе ја стигне Тамара по $3000:10=300$ чекори.

46. За време на летниот одмор Горјан од 13 јули до 19 август секој дена по четири пати пливал во Охридското езеро. При едно влегување тој испливувал по 250 метри. Колку километри испливал Горјан во текот на целиот одмор?

Решение. Во еден ден Горјан пливал по четири пати и секој пат испливувал по 250 метри, што значи дека тој дневно испливувал по $4\cdot 250=1000\text{ m}=1\text{ km}$. Бидејќи месецот јули има 31 ден, тој во текот на месец јули во Охрид престојувал $31-12=19$ дена и исто толку дена престојувал во текот на месец август. Значи, Горјан пливал $19+19=38$ дена, па затоа испливал $38\cdot 1=38\text{ km}$.

47. Кенгурите Том и Томи тргнуваат од едно и исто место и скокаат по права линија во спротивни насоки. Том скока 3 m и одмара 1 минута, скока нови 3 m и одмара 1 минута, одново скока 3 m и одмара 1 мин итн., т.е. Том прави скокови со должина 3 m и одмара по 1 минута после секој скок. Томи скока по 2 m при секој втор скок на Том, а во останатото време одмара. Определи го растојанието на кое ќе се наоѓаат Том и Томи после 24 минути и 30 секунди.

Решение. Додека изминат 24 минути и 30 секунди, Том ќе направи 25 скока и од почетната точка ќе се оддалечи $25\cdot 3=75\text{ m}$. Бидејќи Томи скока после секој втор скок на Том и $25=2\cdot 12+1$, тој ќе направи 12 скока и од почетната точка ќе се оддалечи $2\cdot 12=24\text{ m}$. Според тоа, после 24 минути и 30 секунди Том и Томи еден од друг ќе се наоѓаат на растојание од $75+24=99\text{ m}$.

48. Секогаш кога Алиса изедува по една банана таа станува двапати повисока, а кога испива по еден сок се намалува за 6 cm . Еден ден Алиса прво изела две банани, а потоа испила два сока и потоа била висока 3 m .

Колку ќе била висока Алиса, ако пред да ја изеде втората банана го испила првиот сок?

Решение. Пред да го испие првиот сок Алиса била висока $3\text{ m} + 6\text{ cm} + 6\text{ cm} = 312\text{ cm}$. Значи, пред да ја изеде втората банана таа била висока $312 : 2 = 156\text{ cm}$. Ако сега испие сок таа ќе биде висока $156 - 6 = 150\text{ cm}$. Потоа јаде банана и ќе биде висока $150 \cdot 2 = 300\text{ m}$, па откако ќе го испие вториот сок ќе биде висока 294 cm .

49. Секој ден од 1 до 10 мај заклучно чичко Мирослав поставувал по 10 m жица од оградата на неговата нива. Чичко Никола работел само на непарните од овие дати и на првите две парни дати. Тој дневно поставувал по 3 m повеќе жица отколку чичко Мирослав. Чичко Герасим започнал на 1 мај, работел 2 дена, одмарал 2 дена и така редум до 10 мај. Тој дневно поставувал 3 m повеќе жица отколку чичко Никола.

- 1) Колку метри жица се поставени на 6 мај?
- 2) На која дата се поставени најмалку метри од оградата?
- 3) Колку метри заедно оградили чичко Герасим и чичко Никола?

Решение. Во деновите кога работел чичко Никола поставувал $10 + 3 = 13\text{ m}$, а во деновите кога работел чичко Герасим поставувал $13 + 3 = 16\text{ m}$ жица. Од условите на задачата ја имаме следнава табела:

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Вк.
Мирослав	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10	100
Никола	13	13	13	13	13		13		13		91
Герасим	16	16			16	16			16	16	96
Вкупно	39	39	23	23	39	26	23	10	39	26	

Значи:

- 1) На 6 мај се поставени 26 m жица.
- 2) Најмалку жица е поставена на 8 мај и тоа само 10 m .
- 3) Чичко Герасим и Чичко Никола заедно оградили $91 + 96 = 187\text{ m}$.

50. Пат со должина 100 km започнува од градот А и завршува во градот Б. На патот има уште населени места распоредени така што растојанието меѓу две соседни места е или 3 km или 7 km .

Кој е најмалиот можен број населени места на патот, вклучувајќи ги и градовите А и Б?

Кој е најголемиот можен број населени места на патот, вклучувајќи ги и градовите А и Б?

Решение. Нека меѓу населените места имаме x растојанија по 3 km и y растојанија по 7 km километри. Тогаш $3x+7y=100$, а бројот на населените места ќе биде $x+y+1$. Јасно, бидејќи $7 \cdot 15 = 105 > 100$ важи $y \leq 14$. Понатаму, кога y се менува од 1 до 14, можни вредности за x се само оние за кои бројот $100-7y$ е делив со 3. Така ја добиваме табелата:

y	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$100-7y$	93	86	79	72	65	58	51	44	37	30	23	16	9	2
x	31	—	—	24	—	—	17	—	—	10	—	—	3	—
$x+y+1$	33	—	—	29	—	—	25	—	—	21	—	—	17	—

Од табелата гледаме дека најмалиот можен број населени места на патот е 17, а најголемиот можен број населени места е 33.

51. Пет исти книги и 21 исти тетратки тежат колку 8 книги и 3 тетратки. Колку тетратки тежи една книга?

Решение. Ако од двете групи книги и тетратки отстраниме по 5 книги и 3 тетратки во едната група ќе останат 18 тетратки, а во другата група ќе останат 3 книги. На почеток групите книги и тетратки имаат иста тежина, па како од секоја од групите отстрануваме ист број книги и тетратки добиваме дека 3 книги тежат колку 18 тетратки. Значи, една книга тежи колку $18:3=6$ тетратки.

52. Две коцки заедно имаат маса од 126 kg . Масата на едната коцка е 30 kg поголема од масата на другата коцка. Определи ја масата на секоја од коцките.

Решение. *Прв начин.* Условот на задачата можеме да го прикажеме



како на цртежот десно. Двата празни правоаголници и 30 dkg заедно даваат 126 dkg . Според тоа, на двата празни правоаголници соодветствува маса $126 - 30 = 96\text{ dkg}$. Значи, на еден празен правоаголник соодветствува маса $96 : 2 = 48\text{ dkg}$. Според тоа, едната коцка тежи 48 dkg , а другата тежи $48 + 30 = 78\text{ dkg}$.

Втор начин. Ако со x ја означиме масата на полесната коцка, тогаш масата на потешката коцка е $x + 30$. Според тоа, $x + x + 30 = 126$, од каде добиваме $2x = 96$, т.е. $x = 48\text{ dkg}$. Според тоа, едната коцка тежи 48 dkg , а другата тежи $48 + 30 = 78\text{ dkg}$.

53. Во една продавница има куфери и ташни. Еден куфер тежи 5 kg , а една ташна тежи 2 kg . Во продавницата има двапати повеќе ташни од куфери. Вкупната тежина на куферите и ташните е еднаква на 36 kg . Колку куфери и колку ташни има во продавницата?

Решение. *Прв начин.* Бидејќи во продавницата има двапати повеќе ташни од куфери, куферите и ташните можеме да ги поделиме во еднакви групи од по еден куфер и две ташни. Тежината на една група е $5 + 2 \cdot 2 = 9\text{ kg}$. Но, вкупната тежина на куферите и ташните е 36 kg , па затоа имаме $36 : 9 = 4$ вакви групи. Конечно, во продавницата има $4 \cdot 1 = 4$ куфери и $4 \cdot 2 = 8$ ташни.

Втор начин. Нека во продавницата има x куфери. Ташни има двапати повеќе, па затоа нивниот број е еднаков на $2x$. Според тоа, вкупната тежина на куферите и ташните е еднаква на $5x + 2 \cdot 2x = 9x$, па затоа $9x = 36$, т.е. $x = 4$. Значи, во продавницата има 4 куфери и $2 \cdot 4 = 8$ ташни.

54. Дедо Матеј има куче, маче, коза и теле. Кучето, мачето и козата заедно тежат 32 kg . Кучето, мачето и телето заедно тежат 93 kg . Кучето, козата и телето заедно тежат 107 kg . Козата, мачето и телето заедно тежат 98 kg . Колку килограми тежи секое животно?

Решение. Во збирот $32+93+107+98=330\text{ kg}$ секое од животните е броено трипати. Значи, четирите животни заедно тежат $330:3=110\text{ kg}$. Според тоа, телето тежи $110-32=78\text{ kg}$, козата тежи $110-93=17\text{ kg}$, мачето тежи $110-107=3\text{ kg}$ и кучето тежи $100-98=12\text{ kg}$.

55. Тројца рибари заедно уловиле 296 kg риба. Кога првиот продал 51 kg , вториот 42 kg и третиот 23 kg риба им останале еднакви количества риба. Колку килограми риба уловил секој рибар поединечно?

Решение. Тројцата рибари заедно продале $51+42+23=116\text{ kg}$ риба, после што им останале $296-116=180\text{ kg}$ риба. Бидејќи сега сите имаат еднакви количества риба, секој од нив има $180:3=60\text{ kg}$ риба.

Првиот рибар уловил $51+60=111\text{ kg}$ риба.

Вториот рибар уловил $42+60=102\text{ kg}$ риба.

Третиот рибар уловил $23+60=83\text{ kg}$ риба.

56. Кофа полна со вода тежи 16 kg , а кога коњот Вранец ќе испие четвртина од водата во кофата таа ќе тежи $12\text{ kg } 200\text{ g}$. Колку тежи празната кофа?

Решение. Четвртина од водата во кофата тежи

$$16\text{ kg} - 12\text{ kg } 200\text{ g} = 3\text{ kg } 800\text{ g}.$$

Според тоа водата во кофата тежи

$$4 \cdot 3\text{ kg } 800\text{ g} = 15\text{ kg } 200\text{ g}.$$

Значи, празната кофа тежи

$$16\text{ kg} - 15\text{ kg } 200\text{ g} = 800\text{ g}.$$

57. Кутија со 9 бомбони тежи 160 g , а кога во неа ќе останат 3 бомбона ќе тежи 55 g . Колку грама тежи празната кутија?

Решение. Бидејќи $9-2=7$ бомбони тежат $160-55=105$ грама, добиваме дека 1 бомбон тежи $105:7=15\text{ g}$. Значи, празната кутија тежи $55-2 \cdot 15=30\text{ g}$.

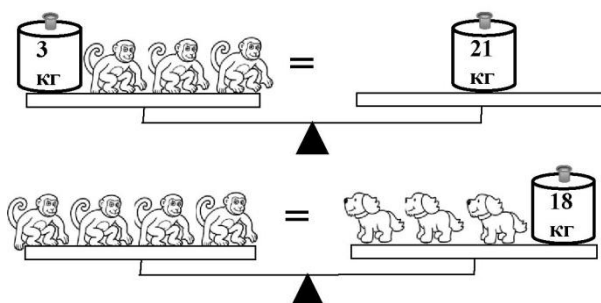
58. Кутија со 24 еднакви по тежина бомбони тежи 550 g , а кога во неа ќе останат 15 бомбони, таа ќе тежи 379 g . Колку бомбони ќе тежи кутијата кога во неа ќе останат 7 бомбони?

Решение. Кога од кутијата ќе извадиме $24 - 15 = 9$ бомбони, тежината на кутијата се намалува за $550 - 379 = 171\text{ g}$. Значи, една бомбона тежи $171 : 9 = 19\text{ g}$. Ако извадиме уште 8 бомбони тогаш во кутијата ќе останат 7 бомбони, а нејзината тежина ќе се намали $8 \cdot 19 = 152\text{ g}$. Значи, кога во кутијата ќе останат 7 бомбони таа ќе тежи $379 - 152 = 227\text{ g}$.

59. Два бисквити и пет чоколадца заедно тежат 66 g . Седум бисквити и четири чоколадца заедно тежат 123 g . Колку тежат заедно осум бисквити и осум чоколадца?

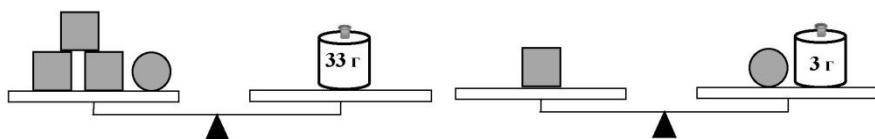
Решение. Бидејќи $2 + 7 = 9 = 4 + 5$ добиваме дека 9 бисквити и 9 чоколадца заедно тежат $66 + 123 = 189\text{ g}$. Значи, еден бисквит и едно чоколадце заедно тежат $189 : 9 = 21\text{ g}$. Конечно, 8 бисквити и 8 чоколадца заедно тежат $8 \cdot 21 = 168\text{ g}$.

60. Вагите на долните цртежи се во рамнотежа. Колку килограми тежи едно куче?



Решение. Три мајмуни тежат $21 - 3 = 18\text{ kg}$, што значи дека еден мајмун тежи $18 : 3 = 6\text{ kg}$. Според тоа, четири мајмуни тежат $4 \cdot 6 = 24\text{ kg}$, па затоа три кучиња тежат $24 - 18 = 6\text{ kg}$. Конечно, едно куче тежи $6 : 3 = 2\text{ kg}$.

61. Вагите прикажани на долните цртежи се во рамнотежа. Колку грама заедно тежат 3 кругчиња и 1 квадратче?



Решение. *Прв начин.* Бидејќи втората вага е во рамнотежа 3 квадратчиња заедно тежат колку 3 кругчиња и 9 g . Значи, три квадратчиња и 1 кругче заедно тежат колку 4 кругчиња и 9 g . Според тоа, 4 кругчиња и 9 g заедно тежат 33 g , па затоа 4 кругчиња заедно тежат $33 - 9 = 24\text{ g}$. Значи, 1 кругче тежи $24 : 4 = 6\text{ g}$, па затоа 1 квадратче тежи $6 + 3 = 9\text{ g}$. Конечно, 3 кругчиња и 1 квадратче заедно тежат $3 \cdot 6 + 9 = 27\text{ g}$.

Втор начин. Од втората вага добиваме дека две квадратчиња заедно тежат колку 2 кругчиња и 6 g . Значи, 3 кругчиња, 1 квадратче и 6 g заедно тежат 33 g . Според тоа, 3 кругчиња и 1 квадратче заедно тежат $33 - 6 = 27\text{ g}$.

62. За роденденската забава Елисавета купила сок. Кога половината од сокот се испил, Елисавета купила уште 10 литри сок. Се испиле уште 30 литри и 1 литар сок останал. Колку литри сок се испиле на забавата?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-напред. Откако Елисавета купила уште 10 литри сок имало $30 + 1 = 31$ литри сок. Пред тоа, имало $31 - 10 = 21$ литар сок и тоа е половината од сокот кој на почетокот го купила Елисавета. Значи, на почетокот Елисавета купила $2 \cdot 21 = 42$ литри сок. Таа вкупно купила $42 + 10 = 52$ литри сок и како останал 1 литар, заклучуваме дека на забавата се испиле $52 - 1 = 51$ литар сок.

II.3. КУПУВАМЕ И ПРЕСМЕТУВАМЕ ПАРИ

63. Ана, Марија и Јанко заедно имале 1200 денари и одлучиле да купат роденденски поклон на нивната другарка Елена. Откако за поклонот дале: Ана 210, Марија 186 и Јанко 174 денари, на се-

кој од нив му останала еднаква сума пари. Колку пари пред купувањето на поклонот имал секој од нив?

Решение. За поклонот Ана, Марија и Јанко заедно дале $210+186+174=570$ денари. Според тоа, од сумата кои тие заедно ја имале пред купувањето на поклонот им останале $1200-510=630$ денари. Бидејќи после купувањето на поклонот сите имале иста сума пари, добиваме дека секој од нив имал по $630:3=210$ денари.

Според тоа, пред купувањето на поклонот Ана имала $210+210=420$ денари, Марија имала $210+186=396$ денари и Јанко имал $210+174=384$ денари.

64. Борјанка и Јасмин купуваат подарок за нивниот пријател Марко. Тие заедно имаат 1600 денари. Борјанка има 300 денари помалку од цената на подарокот, а Јасмин има 500 денари повеќе од цената на подарокот. Определи ја цената на подарокот.

Решение. Бидејќи Јасмин има 500 денари повеќе, а Борјанка 300 денари помалку од цената на подарокот, тие заедно имаат $500-300=200$ денари повеќе отколку што чинат два подарока. Значи, два подарока чинат $1600-200=1400$ денари. Конечно, цената на еден подарок е еднаква на $1400:2=700$ денари.

65. Марко има три пати повеќе пари од Александар, кој има четири пати помалку пари од Павле. Заедно имаат 56 денари. Колку пари има Павле?

Решение. Со x да го означиме бројот на денарите кои ги има Александар. Од условот на задачата следува дека Марко има $3x$ денари, а Павле има $4x$ денари. Значи, тие заедно имаат $x+3x+4x=8x$ денари. Според тоа, $8x=56$, т.е. $x=56:8=7$. Значи, Павле има $4\cdot 8=32$ денари.

66. Ангелина има трипати повеќе пари од Бојана, а Бојана има 16 денари помалку од Веселка. Бојана и Веселка вкупно имаат 136 денари. Колку денари вкупно имаат Ангелина и Веселка?

Решение. Бојана и Веселка вкупно имаат 136 денари, а Бојана има 16 денари помалку од Веселка. Значи, Бојана има

$$(136-16):2=120:2=60 \text{ денари.}$$

Веселка има $60+16=76$ денари. Ангелина има трипати повеќе пари од Бојана, што значи дека таа има $3\cdot 60=180$ денари. Конечно, Ангелина и Веселка вкупно имаат $180+76=256$ денари.

67. Три лалиња и пет рози чинат колку седум лалиња и три рози. Кирјана купила едно лале и две рози, а Лилјана купила само лалиња. Се покажало дека Кирјана платила колку што платила Лилјана. Колку лалиња купила Лилјана?

Решение. Ако од групите три лалиња и пет рози и седум лалиња и три рози одземеме три лалиња и три рози, добиваме дека 2 рози чинат колку четири лалиња. Според тоа, една роза чини колку две лалиња. Кирјана купила едно лале и две рози, кои чинат колку $1+2\cdot 2=5$ лалиња. Бидејќи Лилјана платила колку што платила Кирјана, а купила само лалиња заклучуваме дека таа купила 5 лалиња.

68. Пет чоколади и 14 кроасани чинат колку седум чоколади и 11 кроасани. Колку кроасани чинат шест чоколади?

Решение. Ако од двете групи извадиме по 5 чоколади и 11 кроасани добиваме дека 3 кроасани чинат колку 2 чоколади. Бидејќи $6=3\cdot 2$ заклучуваме дека 6 чоколади чинат колку $3\cdot 3=9$ кроасани.

69. Пет моливи и шест хемиски пенкала чинат колку два моливи и осум хемиски пенкала. Колку моливи чинат 12 хемиски пенкала?

Решение. Ако од двете групи отстраниме по два моливи и шест хемиски пенкала, добиваме дека три моливи чинат колку две хемиски пенкала. Бидејќи $12=6\cdot 2$ заклучуваме дека 12 хемиски пенкала чинат колку $6\cdot 3=18$ моливи.

70. Три моливи чинат колку два моливи и две гуми. Осум моливи чинат колку острилка и пет моливи. Колку острилки чинат колку 24 гуми?

Решение. Бидејќи три моливи чинат колку два моливи и две гуми, заклучуваме дека еден молив чини колку две гуми. Слично,

една остричка чини колку три моливи. Значи, 24 гуми чинат колку $24:2=12$ моливи, а тоа се $12:3=4$ острилки.

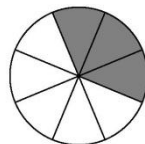
71. Две круши, три сливи и седум ореви заедно чинат колку 65 вишни. Осум ореви, четири сливи и три круши заедно чинат колку 83 вишни. Колку вишни заедно чинат една круша, еден орех и една слива?

Решение. Ако на две круши, три сливи и седум ореви додадеме еден орех, една круша и една слива, добиваме осум ореви, четири сливи и три круши. Значи, разликата меѓу вториот и првиот збир е еднаква на една круша, еден орех и една слива, па затоа тие чинат $83-65=18$ вишни.

72. Еден еклер и два сока заедно чинат колку 17 мастици. Еден сок и две тулумби заедно чинат колку 20 мастици. Една тулумба и два еклери заедно чинат колку 23 мастици. Колку мастици заедно чинат колку еден сок, еден еклер и една толумба?

Решение. Ако ги собереме тулумбите, еклерите и соковите за кои по групи знаеме колку заедно чинат, добиваме дека три сока, три еклери и три тулумби заедно чинат колку $17+20+23=60$ мастици. Конечно, еден сок, еден еклер и една толумба заедно чинат колку $60:3=20$ мастици.

73. Тортата во слаткарницата е поделена на 8 еднакви парчиња. Ангела купила 3 парчиња и за нив платила 150 денари. Другиот дел од тортата го купил Максим. Колку пари платил Максим?



Решение. За едно парче торта Ангела платила $150:3=50$ денари. Максим купил 5 парчиња и за нив платил $5\cdot 50=250$ денари.

74. Две и половина риба чинат колку една риба и 1050 денари. Колку чини една риба?

Решение. Од условот на задачата следува дека една и половина риба чини 1050 денари. Во една и половина риба имаме три половини риби, па затоа половина риба чини $1050:3=350$ денари. Според тоа, една риба чини $2\cdot 350=700$ денари.

75. Два и половина килограм лимони чинат колку еден килограм лимони и 105 денари. Колку чини еден килограм лимони?

Решение. Ако два и половина килограм лимони чинат колку еден килограм лимони и 105 денари, тогаш еден и половина килограм лимони чинат 105 денари. Но, еден и половина килограм лимони е еднаков на трипати по половина килограм лимони, па затоа половина килограм лимони чини $105:3=35$ денари. Конечно, еден килограм лимони чини $2\cdot 35=70$ денари.

76. Цената на еден молив е 8 денари, а на една гума е 7 денари. Михаил купил 7 моливи и 3 гуми. На продавачот му дал банкнота од 100 денари. Колку денари му вратил продавачот на Михаил?

Решение. Седум моливи и три гуми чинат

$$7\cdot 8+3\cdot 7=56+21=77$$

денари. Михаил на продавачот му дал банкнота од 100 денари, што значи дека тој му вратил $100-77=23$ денари.

77. Една кифла чини 25 денари, а еден сок чини 35 денари. Горјан купил две кифли и два сока. На продавачот му дал банкнота од 200 денари. Колку пари му вратил продавачот?

Решение. За две кифли и два сока Горјан требало да плати

$$2\cdot 25+2\cdot 35=50+70=120 \text{ денари.}$$

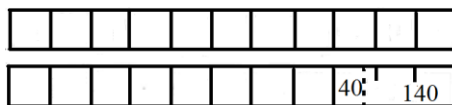
Тој дал банкнота од 200 денари, што значи дека продавачот му вратил $200-120=80$ денари.

78. Кутија со 5 боици чини 58 денари, а поединечно се продава по 14 денари боица. Колку денари ќе заштеди Мирко ако купи три кутии боици, наместо истите боици да ги купува поединечно?

Решение. Ако поединечно купи 5 боици, Мирко ќе плати $5\cdot 14=70$ денари. Значи, со купување на една кутија боици тој заштедува $70-58=12$ денари. Конечно, со купување три кутии боици Мирко ќе заштеди $3\cdot 12=36$ денари.

79. Петар сака да купи 11 тетратки, но за тоа му недостасуваат 140 денари. Затоа купил 8 тетратки и му останале 40 денари. Определи ја цената на една тетратка.

Решение. Ако со едно квадратче ја означиме цената на една тетратка, тогаш условите од задачата можеме да ги



претставиме како на цртежот десно. Двата реда квадратчиња се разликуваат за 3 квадратчиња, односно за $40+140=180$ денари. Според тоа, една тетратка чини $180:3=60$ денари.

80. Ако Маре купи од пазар 20 јајца, ќе и останат 30 денари од сумата што ја понела, а за да купи 30 јајца, и недостасуваат 20 денари. Колку денари понела Маре на пазар?

Решение. *Прв начин.* Разликата во јајца е 10, а тие би чинеле $30+20=50$ денари. Значи, едно јајце чинело 5 денари. Па, сумата пари што ја понела Маре со себе на пазар е $20 \cdot 5 + 30 = 130$ денари.

Втор начин. Ако едно јајце чинело x денари, тогаш имаме:

$$20x + 30 = 30x - 20$$

$$10x = 50$$

$$x = 5$$

Значи, едно јајце чинело 5 денари. Конечно, сумата пари што ја понела Маре со себе на пазар е $20 \cdot 5 + 30 = 130$ денари.

81. Десанка сака да купи неколку исти тетратки. Ако купи 6 тетратки, ќе и останат 70 денари, а ако сака да купи 10 тетратки ќе и недостасуваат 50 денари. Колкава е цената на една тетратка? Колку пари има Десанка?

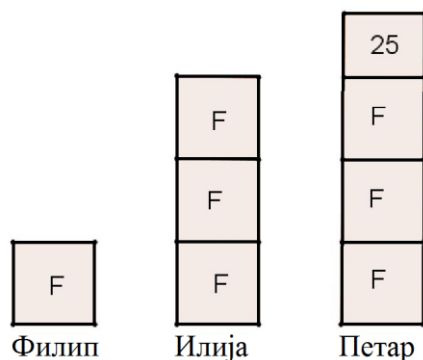
Решение. Ако Десанка имала 50 денари повеќе, тогаш таа може да купи 10 тетратки. Бидејќи кога купува 6 тетратки и остануваат 70 денари, заклучуваме дека 4 тетратки чинат $70+50=120$ денари.

Според тоа, една тетратка чини $120:4=30$ денари.

Конечно, Десанка имала $6 \cdot 30 + 70 = 250$ денари.

82. Филип, Илија и Петар заедно купиле книга. Илија дала трипати повеќе пари од Филип, а Петар дал 25 денари повеќе од Илија. Колку пари дал секој од нив ако книгата чинела 186 денари.

Решение. Ако со едно квадратче ги означиме парите кои ги дал Филип, тогаш условот на задачата може да го прикажеме со помош на цртежот десно. Сега од цртежот имаме $7F + 25 = 186$, од каде добиваме $7F = 186 - 25 = 163$, односно $F = 163 : 7 = 23$ денари.



Значи, Филип дал 23 денари, Илија дал $3 \cdot 23 = 69$ денари и Петар дал $69 + 25 = 94$ денари.

83. Четири тетратки чинат 160 денари. Комплет моливи, нотез и две тетратки чинат 240 денари, а три нотези и комплет моливи чинат 340 денари. Горјан купил две тетратки и два комплети моливи. Колку пари потрошил Горјан?

Решение. Според условот на задачата цената на една тетратка е $160 : 4 = 40$. Бидејќи комплет моливи, нотез и две тетратки чинат 240 денари добиваме дека комплет моливи и нотез заедно чинат, $240 - 2 \cdot 40 = 160$ денари. Но, три нотези и комплет моливи чинат 340 денари, што значи дека два нотези чинат $340 - 160 = 180$ денари. Според тоа, еден нотез чини $180 : 2 = 90$ денари и комплет моливи чини $160 - 90 = 70$ денари. Конечно, за две тетратки и два комплета моливи Горјан платил $2 \cdot 40 + 2 \cdot 70 = 220$ денари.

84. Матеј сака да купи моливи. Во книжарницата има два вида моливи чии цени се 8 денари и 9 денари. Колку моливи може најмногу да купи Матеј, ако располага со 146 денари и треба да ги потроши сите пари?

Решение. Најмногу моливи ќе купи ако купи најголем можен број моливи од 8 денари. Бидејќи

$$146 = 8 \cdot 18 + 2 \text{ и } 9 \cdot 18 = 152 > 146,$$

Матеј може да купи најмногу 18 моливи, при што ќе купи 16 моливи од по 8 денари и 2 молива од по 9 денари.

85. За една театарска претстава на касата на театарот стои следнава објава:

- 1) Цената на еден билет 80 денари,
- 2) Цената на групен билет за 12 особи е 820 денари,
- 3) При купување на 17 билети по цена од 80 денари, добивате 5 билети бесплатно.

Од училиштето на Марко се пријавиле да ја гледаат претставата 37 ученици. Која е најмалата сума пари со која можат да набават билети за претставата?

Решение. Условите 2) и 3) обезбедуваат намалување на цената на билетите.

Ако учениците купат 17 билети по цена од 80 денари, тогаш треба да купат групен биле за 12 особи, со што ќе добијат билети за $17+5+12=34$ ученици, па затоа треба да купат уште 3 билети по 80 денари. Притоа вкупната сума која ќе ја плата че изнесува: $20 \cdot 80 + 820 = 2420$ денари.

Ако не купат најмалку 17 билети по 80 денари, тогаш најмалку ќе платат ако купат 3 групни билети за по 12 особи и 1 билет од 80 денари. Така ќе имаат билети за $3 \cdot 12 + 1 = 37$ ученици и ќе платат $3 \cdot 820 + 80 = 2460 + 80 = 2540$ денари.

Значи, најмалата сума со која можат да набават билети е еднаква на 2420 денари.

86. Превоз на фериброд чини 21 евра за автобус со шофер и по 8 евра за секој дополнителен патник. Платени се 165 евра. Колку луѓе биле во автобусот?

Решение. За патниците е платено $165 - 21 = 144$ евра. Цената за превоз на еден патник е 8 евра, што значи дека во автобусот има $144 : 8 = 18$ патници. Конечно, шоферот е во автобусот, па затоа во автобусот има $18 + 1 = 19$ луѓе.

87. Во една слаткарница се продаваат големи и мали торти. Големата торта е двапати поскапа од малата. Павел купил 5 големи и 3 мали торти, а Томи купил 5 мали и 3 големи торти. Павел платил 20 евра повеќе од Томи. Определи ја цената на големата торта.

Решение. Бидејќи големата торта чини колку две мали торти, со парите што ги платил Павел можел да купи $5 \cdot 2 + 3 = 13$ мали

торти. Со парите што ги платил Томи можел да купи $5+2\cdot 3=11$ мали торти. Бидејќи Павел платил 20 евра повеќе од Томи, а повеќе платил колку што чинат 2 мали торти, односно колку што чини една голема торта заклучуваме дека една голема торта чини 20 евра.

88. Ангела, Фросина и Вера во златара купиле златни украси:

Ангела: ♥ ◎ ◎ ,

Фросина: ♥ ♥ ♥ ,

Вера: ♥ ♥ ◎ .

За нејзините украси Ангела платила 80 евра, а Фросина платила 90 евра. Колку пари платила Вера?

Решение. *Прв начин.* За едно срце Фросина платила $90:3=30$ евра. Значи, за една алка Ангела платила $(80-30):2=25$ евра. Вера купила две срца и една алка, па затоа таа платила $2\cdot 30+25=85$ евра.

Втор начин. Ангела и Фросина заедно купиле 4 срца и 2 алки, за што вкупно платиле $90+80=170$ евра. Вера купила 2 срца и 1 алка, т.е. половина од украсите кои заедно ги купиле Ангела и Фросина, па затоа таа платила $170:2=85$ евра.

89. Четири деца решиле да купат топка за која секое од нив ќе даде иста сума пари. Тие забележале дека ако секој од нив даде по 9 евра, тогаш нема да имаат доволно пари да ја купат топката, а ако секој од нив даде по 10 евра, тогаш ќе можат да ја купат топката и ќе им останат пари. Цената на топката е парен број. Колку пари треба да даде секое дете?

Решение. Според условот на задачата цената на топката е парен број поголем од $4\cdot 9=36$ и помал од $4\cdot 10=40$ евра. Значи, цената на топката е еднаква на 38 евра. Бидејќи

$$\begin{aligned} 4\cdot 9 \text{ евра } 50 \text{ евроценти} &= 36 \text{ евра } 200 \text{ евроценти} \\ &= (36+2) \text{ евра} = 38 \text{ евра}, \end{aligned}$$

секое од децата треба да плати по 9 евра и 50 евроценти.

II.4. ВРЕМЕТО Е ВАЖНО

90. Електронскиот часовник ги покажува часовите и минутите. Колку минути од 17:55 до 23:55 на екранот се гледа цифрата 0.

Решение. За целиот период од 20:00 до 20:59, т.е. во текот на 60 минути се гледа цифрата 0. Понатаму, од 18:00 до 18:59 цифрата 0 се гледа во:

18:00, 18:01, 18:02, 18:03, 18:04, 18:05, 18:05, 18:07,
18:08, 18:09 18:10, 18:20, 18:30, 18:40 и 18:50,

што значи 15 пати. Последното важи и за периодите од 19:00 до 19:59, од 21:00 до 21:59, од 22:00 до 22:59 и од 23:00 до 23:55. Конечно цифрата 0 се гледа $60 + 5 \cdot 15 = 60 + 75 = 135$ минути.

91. Електронскиот часовник ги покажува часовите и минутите. Колку минути во текот на едно деноноќие на екранот се гледа цифрата 7?

Решение. Имаме два случаи:

- 1) од 00:00 до 6:59, потоа од 8:00 до 16:59 и на крајот од 18:00 до 24:00 во секој час цифрата 7 се покажува по 6 минути,
- 2) од 7:00 до 7:59 и од 17:00 до 17:59 цифрата 7 се покажува по 6 минути.

Значи, во текот на едно деноноќие цифрата 7 се покажува

$$22 \cdot 6 + 2 \cdot 60 = 132 + 120 = 252 \text{ пати.}$$

92. Колку време на екранот на електронскиот часовник во текот на едно деноноќие се гледа цифрата 2?

Решение. Имаме неколку случаи:

- од 01:59 до 2:59, од 11:59 до 12:59 и од 20:00 до 23:59, т.е. 6 часа екранот се гледа цифрата 2, а тоа е $6 \cdot 60 = 360$ минути.
- во секој од останатите 18 часа цифрата 2 се гледа во: xx:02, xx:12, од xx:19 до xx:29, xx:32, xx:42, xx:52, т.е. се гледа 15 минути.

Според тоа, во текот на едно деноноќие на екранот на часовникот цифрата 2 се гледа $360 + 18 \cdot 15 = 360 + 270 = 630$ минути. Односно 10 часа и 30 минути.

93. Методиј има електронски часовник кој покажува 10:23 (десет часот и дваесет и три минути). Цифрите 0, 1, 2 и 3 во 10:23 се различни. После колку минути најмалку Методиј треба да го погледне часовникот за да прочита време во кое три цифри се еднакви?

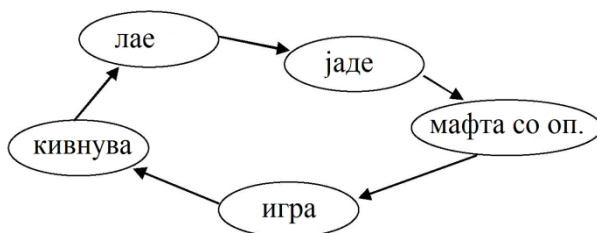
Решение. Од 10:23 до 11:00 часовникот нема да покаже време запишано со најмалку три еднакви цифри. Во 11:01 три цифри се еднакви. Од 10:23 до 11:01 има 38 минути и тоа е одговорот на задачата.

94. Марко го набљудувал неговото куче Шарко и забележал дека:

- ако Шарко лае, тогаш после една минута јаде,
- ако мафта со опшаката, тогаш после една минута игра,
- ако кивне, тогаш после една минута лае,
- ако јаде, тогаш после една минута мафта со опшаката,
- ако игра, тогаш после една минута кивнува.

Шарко сега кивнал. Што ќе прави по 72 минути?

Решение. На цртежот десно е прикажана шема на последователните дејства на Шарко. Бидејќи тој сега кив-



нал и според шемата тој кивнува по секои 5 минути, заклучуваме дека Шарко ќе кивне по 70 минути. Значи, по 71 минута ќе лае, а по 72 минути тој ќе јаде.

95. Во понеделник во волшебната градина на Снежана имало 7 јаболкници и на секоја јаболкница имало по едно јабољко. Секоја ноќ ламјата Огненка корнела по една јаболкница и ги јадела сите јабољка од таа јаболкница. Секое утро на преостанатите јаболкници растело по едно ново јабољко. Кој ден во седмицата имало најмногу јабољка во градината?

Решение. Во понеделникот има $7 \cdot 1 = 7$ јабољка, во вторникот има $6 \cdot 2 = 12$ јабољка, во средата има $5 \cdot 3 = 15$ јабољка, во четвртокот има $4 \cdot 4 = 16$ јабољка, во петокот има $3 \cdot 5 = 15$ јабољка, во

саботата има $2 \cdot 6 = 12$ јаболка, во неделата има $1 \cdot 7 = 7$ јаболка и потоа нема јаболка. Според тоа, најмногу јаболка има во четвртокот и тоа 16.

96. Во градината на Снегулка има волшебно дрво на кое во средата на пладне имало 23 златни јаболка. Секој ноќ принцот Мразулко од дрвото берел по 5 јаболка, а секое утро на дрвото растат по 9 нови јаболка. Определи го денот од седмицата во кој за прв пат на дрвото ќе има повеќе од 50 златни јаболка.

Решение. *Прв начин.* Задачата може да ја решиме користејќи ја следнава табела:

Ден од седмицата	Наутро	Навечер
Среда	23	$23 - 5 = 18$
Четврток	$18 + 9 = 27$	$27 - 5 = 22$
Петок	$22 + 9 = 31$	$31 - 5 = 26$
Сабота	$26 + 9 = 35$	$35 - 5 = 30$
Недела	$30 + 9 = 39$	$39 - 5 = 34$
Понеделник	$34 + 9 = 43$	$43 - 5 = 38$
Вторник	$38 + 7 = 47$	$47 - 5 = 42$
Среда	$42 + 9 = 51$	

Според тоа, следната среда наутро на јаболкницата ќе има 51 јаболко и тоа е бараниот ден.

Втор начин. Во текот на ноќта Мразулко бере 5 јаболка, а утрото израснуваат 9 нови јаболка. Значи следниот ден на пладне бројот на јаболката се зголемува за 4. Така ја добиваме низата 23, 27, 31, 35, 39, 43, 47, 51, 55, Според тоа, осмиот член на оваа низа е поголем од 50, што значи дека после седум дена бројот на јаболката ќе биде поголем од 50, а тоа е следната среда.

97. Денес е 4 јуни 2018 година и е понеделник. Кој ден од седмицата ќе биде 15 септември 2018 година?

Решение. Од 4 јуни до 15 септември има $26 + 31 + 31 + 15 = 93$ дена. Бидејќи $93 = 7 \cdot 13 + 2$ заклучуваме дека 15 септември 2018 година ќе биде во сабота.

98. На 22 ноември во градината на волшебникот од Оз има јаболкница со 20 јаболка. Кога волшебникот ќе скине едно јаболко на еднаш израснуваа три нови јаболка. Секој ден за ручек волшебникот бере по едно јаболко. На која дата за првпат бројот на јаболката на јаболкницата ќе биде трицифрен број?

Решение. Секоја вечер јаболката се за 2 повеќе од јаболката претходната вечер. Јаболката треба да се зголемат за 80, што значи дека волшебникот треба 40 пати да скине јаболко. Во ноември има 8, а во декември 31 берење, и тоа се $31+8=39$ берења. Значи, на 1 јануари за првпат бројот на јаболката на јаболкницата ќе биде трицифрен број.

99. Мечокот Спанко легнал да спие на 15 ноември, но секој осми ден него го будели веселите зајаци. На десеттото будење Спанко излегол и им ги истегнал упите на зајациите. На која дата Спанко им ги истегнал ушите на зајациите?

Решение. Зајациите го разбудиле Спанко 10 пати, што значи дека тој спиел $10 \cdot 8 = 80$ дена. Осумдесеттиот ден, сметајќи го и 15 ноември, кога Спанко спиел е 2 февруари.

100. Билјана, Марија и Елена често одат во библиотека. Билјана оди на секои 3 дена, Марија на секои 8 дена, а Елена на секои 15 дена. На кој следен датум сите ќе се сретнат во библиотека, ако претходно во библиотеката се сретнале на 11 април?

Решение. Најмалиот заеднички содржател на броевите 3, 8, и 15 е 120. Тоа значи дека сите три повторно ќе се сретнат во библиотеката после 120 денови. Имајќи во предвид дека април и јуни имаат 30 денови, а мај и јули по 31 ден, и се сретнале на 11 април, заедно ќе се сретнат на

$$11+120-(2 \cdot 30+2 \cdot 31)=131-122=9 \text{ август.}$$

101. Во текот на летниот одмор Јован секој ден пливал во базен. Првиот и последниот ден тој препливал по една должина на базенот. Секој ден, после првиот, тој во однос на претходниот ден го менувал бројот на препливаните должини најмногу за една, т.е. или пливал една должина повеќе, или пливал една должина помалку или пливал еднаков број должини како претходниот ден.

Јован препливал вкупно 117 должини за време на целиот одмор. Колку денови најмалку може да траел одморот на Јован?

Решение. За да определиме колку денови најмалку може да трае одморот на Јован треба да определиме колку најмногу може да исплива во првите и во последните денови од одморот. Во првите 8 дена Јован може да исплива најмногу

$$1+2+3+4+5+6+7+8=36$$

должини на базенот, а исто толку најмногу може да исплива и во последните 8 дена. Според тоа, за $8+8=16$ дена тој може најмногу да исплива $36+36=72$ должини на базенот. Бидејќи $117-72=45$, а овие 45 должини може да ги исплива ако во 5 последователни денови секој ден после осмиот ден плива по 9 должини на базенот, заклучуваме дека одморот на Јован траел $16+5=21$ ден. Еден распоред на пливањето по денови е:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 9, 9, 9, 9, 8, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

Постојат и други распореди на пливањето по денови, како на пример,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 8, 9, 10, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1.

102. Александар сече салама при што двете крајни парчиња му ги дал на кучето, а останатите осумнаесет кружни парчиња ги подготвил за сендвичи. За едно сечење му се потребни 3 секунди. Колку време ја сечел саламата Александар?

Решение. Александар насекол $2+18=20$ парчиња салама и тоа го направил со $20-1=19$ сечења. Според тоа, тој саламата ја сечел $19\cdot 3=57$ секунди.

103. За колку најмалку минути може метална прачка да се расече на 25 еднакви делови, ако за едно сечење се потребни 4 минути, а меѓу секои две сечења машината треба да одмара 2 минути?

Решение. За да се направат 25 еднакви делови се потребни 24 сечења по 4 минути. Понатаму, меѓу секои две сечења се прави одмор од по 2 минути, а тоа се 23 одмори. Значи, за да се расече прачката потребни се најмалку $24\cdot 4+23\cdot 2=96+46=152$ минути, односно 2 часа и 32 минути.

104. Горјан тргнал на концерт во 17:23. Концертот почнувал во 18:30 и траел 2 часа. При одење Горјан одмарал 12 минути и стигнал 5 минути пред почетокот на концертот. Кога се враќал дома тој одел со иста брзина, но не одмарал по патот. Во колку часот се вратил дома Горјан?

Решение. Горјан стигнал на концертот во 18:25. Значи, тој одејќи на концертот потрошил $37 + 25 = 62$ минути, од кои 12 минути одмарал. Според тоа, Горјан одел $62 - 12 = 50$ минути. Концертот траел часа, што значи дека завршил во 20:30. Конечно Горјан се вратил дома во 21:20.

105. Андреј од дома на училиште патува со автомобил, а од училиште дома се вратил пешки. Тој патува вкупно 18 минути. На враќање патува 4 минути подолго отколку при одење на училиште. Колку минути патува при враќањето дома?

Решение. *Прв начин.* Ако од вкупното време го одземеме времето за кое Андреј подолго патува од училиштето до дома, тогаш добиеното време ќе биде двојно поголемо од времето за кое Андреј патува од дома до училиштето. Значи, Андреј од дома до училиштето патува $(18 - 4) : 2 = 7$ минути. Конечно, тој од училиштето до дома патува $7 + 4 = 11$ минути.

Втор начин. Нека Андреј од дома до училиштето патува за x минути. Тогаш од училиштето до дома патува $x + 4$ минути, па затоа $x + x + 4 = 18$, од каде добиваме $x = 7$ минути. Конечно, тој од училиштето до дома патува $x + 4 = 7 + 4 = 11$ минути.

106. Костадин патува до училиште со автобус. Тој се качува на четвртата постојка и се симнува на тринаесеттата постојка, од каде до училиштето оди уште 4 минути пешки. Автобусот го поминува растојанието меѓу две соседни постојки за 2 минути. Костадин пристигнал во училиштето во 7:15 часот. Во колку часот тој се качил во автобусот?

Решение. Костадин се вози од четвртата до тринаесеттата постојка, што значи дека тој со автобус патува $(13 - 4) \cdot 2 = 18$ минути. Според тоа, тој вкупно патува $18 + 4 = 22$ минути. Тоа значи,

дека Костадин во автобусот се качил $22-15=7$ минути пред 7:00, односно во 7:53.

107. Часовникот на Горјан оди напред 3 минути во текот на 1 час. Горјан часовникот го наместил точно во 21 часот. Во колку часот тој треба да го навие за да часовникот звони точно во 7 часот следното утро?

Решение. Од 21 часот вечерта до 7 часот следното утро има 10 часа. За овие 10 часот часовникот на Горјан ќе побрза $10 \cdot 3 = 30$ минути. Значи, Горјан треба часовникот да го навие да звони во 7:30.

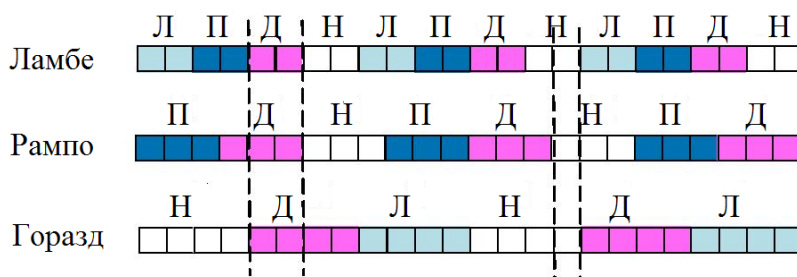
108. Катерина и Милка договориле да се сретнат во слаткарница. Часовникот на Катерина бил напред 15 минути, но таа сметала дека часовникот заостанал 15 минути. Часовникот на Милка заостанал 15 минути, но таа сметала дека е напред 15 минути. Која од нив прва ќе дојде во слаткарницата и колку време ќе чека?

Решение. Нека претпоставиме дека Катерина и Милка се договориле да се сретнат во 12:00. Бидејќи Катерина смета дека нејзиниот часовник заостанал 15 минути, таа според нејзиниот часовник ќе дојде во 11:45. Но, часовникот на Катерина е напред 15 минути, што значи дека точното време кога таа ќе дојде е 11:30. Милка смета дека часовникот е напред 15 минути, па таа според нејзиниот часовник ќе дојде во 12:15. Но часовникот на Милка заостанал 15 минути, што значи дека точното време кога таа ќе дојде е 12:30. Конечно, Катерина прва ќе дојде во слаткарницата и ќе чека од 11:30 до 12:30, т.е. 1 час.

109. Ламбе, Рампо и Горазд во текот на два часа се обидуваат да поместат еден голем сандак. Ламбе 10 минути турка лево, 10 минути турка право, 10 минути турка десно, 10 минути турка назад, па 10 минути – лево итн. Рампо 15 минути турка право, 15 минути турка десно, 15 минути турка напред, 15 минути турка право итн. Горазд 20 минути турка напред, 20 минути турка десно, 20 минути турка лево, 20 минути – напред итн. Сандакот се поместува само кога сите тројца туркаат во една иста насока.

Колку минути во текот на двата часа сандакот се поместувал во некоја насока?

Решение. На долниот цртеж е даден дијаграм како туркале Ламбе, Рампо и Горазд во текот на двата часа. Притоа секое квадратче означува 5 минути, а сандакот се движел во екоја насока кога едно под друго се наоѓаат квадратчиња обоени со иста боја.



Забележуваме дека само за три квадратчиња од првиот ред квадратчињата по нив се обоени со иста боја. Значи, сандакот се движел во некој насока $3 \cdot 5 = 15$ минути и тоа: 10 минути десно и 5 минути назад.

110. На прашањето колку години има Марио одговорил: „Ако од најмалиот трицифрен број го одземете најмалиот двоцифрен број и разликата ја поделите со најголемиот едноцифрен број, ќе ги добиете моите години.“ Колку години има Марио?

Решение. Најмалиот трицифрен број е 100, најмалиот двоцифрен број е 10, а најголемиот едноцифрен број е 9. Значи, Марио има $(100 - 10) : 9 = 90 : 9 = 10$ години.

111. Збирот на годините на мајката, таткото и нивните три деца е 75. Колку ќе изнесува збирот на нивните години по четири години?

Решение. За четири години секој од петте члена на семејството ќе биде постар 4 години. Значи, збирот на нивните години ќе се зголеми за $5 \cdot 4 = 20$ и тој ќе биде еднаков на $75 + 20 = 95$ години.

112. Ангел, Марија и Михаил пред 5 години заедно имале 18 години. Колку години тие заедно ќе имаат после 4 години.

Решение. Од пред 5 до после 4 години години минуваат 9 години. Значи, после 4 години секое од децата ќе има 9 години

повеќе отколку што имало пред 5 години. Значи, после 4 години тие заедно ќе имаат $18 + 3 \cdot 9 = 18 + 27 = 45$ години.

113. Пред осум години Магде била двапати постара од Дејан. Сега заедно имаат 22 години. Колку години има секој од нив?

Решение. Пред осум години Магде и Дејан заедно биле помлади $8 + 8 = 16$ години, што значи дека тие заедно имале $22 - 16 = 6$ години. Ако Дејан имал x години, тогаш Магде имала $2x$ години, па затоа $x + 2x = 6$, т.е. $x = 2$. Значи, денес Дејан има $2 + 8 = 10$ години, а Магде има $22 - 10 = 12$ години.

114. Таткото има 30 години. После 6 години синот ќе биде четирипати помал од таткото. Пред 2 години збирот на годините на мајката и синот беше еднаков на возраста на таткото. Колку години има мајката сега?

Решение. После 6 години таткото ќе има $30 + 6 = 36$ години, а синот ќе има $36 : 4 = 9$ години. Денес синот има $9 - 6 = 3$ години. Пред две години синот имал $3 - 2 = 1$ година, а таткото имал $30 - 2 = 28$ години. Значи, тогаш мајката имала $28 - 1 = 27$ години, што значи дека таа денес има $27 + 2 = 29$ години.

115. Збирот на годините на таткото, ќерката и синот е еднаков на 41. После една година ќерката ќе има двапати помалку години од синот, а таткото ќе биде четири пати постар од синот. Колку години ќе има таткото по две години?

Решение. По една година тројцата заедно ќе имаат 44 години и тогаш збирот на нивните години ќе биде $1 + 2 + 4 \cdot 2 = 11$ пати поголем од годините на ќерката. Значи, по една година ќерката ќе има $44 : 11 = 4$ години, братот ќе има $2 \cdot 4 = 8$ години и таткото ќе има $4 \cdot 8 = 32$ години. Конечно, по две години таткото ќе има $32 + 1 = 33$ години.

116. Семејствата Петрески и Црвенкоски се состојат од по мајка, татко и едно дете. Двајцата таковци заедно имаат 70 години, двете мајки заедно имаат 65 години и двете деца заедно имаат 18 години. Семејството Петрески заедно има 79 години. Колку години имаат заедно членовите на семејството Црвенкоски?

Решение. Двете семејства заедно имаат $70+65+18=153$ години. Семејството Петрески заедно има 79 години, што значи дека семејството Црвенкоски заедно има $153-79=74$ години.

117. Иван Има толку години колку што има месеци неговото куче. Иван и кучето заедно имаат 208 месеци. Колку е старо кучето на Иван?

Решение. Ако кучето на Иван има x месеци, тогаш бидејќи Иван има x години, тој ќе има $12x$ месеци. Значи, $x+12x=208$, од каде добиваме $x=16$. Според тоа, кучето на Иван е старо 16 месеци.

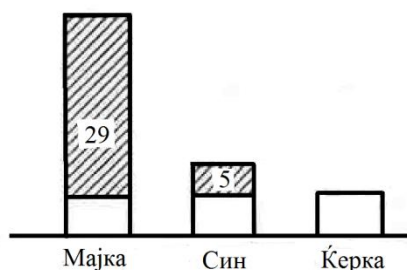
118. Пред три години збирот на годините на Иван и Петар бил 13. Пред една година збирот на годините на Елеонора и Петар бил 14. Следната година збирот на годините на Иван и Елеонора ќе биде 15. Колку години има секој од нив сега?

Решение. Сега Иван и Петар заедно имаат $13+6=19$ години, Елеонора и Петар заедно имаат $14+2=16$ години, а Иван и Елеонора заедно имаат $15-2=13$ години.

Во збирот $19+16+13=48$ годините на сите тројца се собрани двапати, па затоа сите заедно имаат $48:2=24$ години. Значи, сега Елеонора има $24-19=5$ години, Иван има $24-16=8$ години, а Петар има $24-13=11$ години.

119. Кога мајката го родила синот имала 24 години, а кога ја родила ќерката имале 29 години. Колку години денес имаат мајката, синот и ќерката ако збирот на нивните години е еднаков на 55?

Решение. Разликата меѓу годините на мајката и ќерката е 29, а разликата меѓу годините на синот и ќерката е 5, што графички е прикажано на цртежот десно. Бидејќи збирот на годините на мајката, синот и ќерката е 55, заклучуваме дека три правоаголници кои не се штрафирани соодветствуваат на бројот



$$55 - 29 - 5 = 21,$$

што значи дека еден правоаголник соодветствува на бројот $21:3=7$. Според тоа, ќерката има 7 години, синот има $5+7=12$ години и мајката има $29+7=36$ години.

120. Едно семејство се состои од татко, мајка, син и две ќерки. Возраста на поголемата ќерка е најголемиот едноцифрен број, а збирот на годините на другите две деца е 20. Синот имал 8 години, кога неговата 31 годишна мајка ја родила помалата сестра. Пред една година таткото имал толку години колку што ќе има мајката следната година.

а) Колку години има секој член на семејството?

б) После колку години мајката ќе има толку години колку што ќе имаат трите деца?

в) После колку години таткото ќе биде четири пати постар од помалата ќерка?

Решение. а) Постарата ќерка има 9 години. Синот е постар 8 години од помалата ќерка и бидејќи тие заедно имаат 20 години, добиваме дека помалата ќерка има $(20-8):2=6$ години. Значи, синот има $6+8=14$ години. Мајката е 31 постара од помалата ќерка, што значи дека таа има $31+6=37$ години. Значи, таткото кој е 2 години постар од мајката има $37+2=39$ години.

б) Во моментот мајката има 37 години, а трите деца заедно имаат $6+9+14=29$ години, т.е. $37-29=8$ години. Секоја година збирот на годините на децата се зголемува за 3, а годините на мајката се зголемуваат за 1, што значи дека разликата се намалува за 2 години. Според тоа, мајката ќе има еднаков број години колку трите деца заедно после $8:2=4$ години.

в) По n години малата ќерка ќе има $6+n$ години, а таткото ќе има $39+n$ години. Ако таткото е четири пати постар од малата ќерка, тогаш $39+n=4(6+n)$, од каде добиваме $n=5$. Значи, по 5 години таткото ќе биде четири пати постар од малата ќерка.

121. Во 2015 година Алекса имал една година повеќе отколку што е збирот на цифрите со кои е запишана годината во која е роден. Во која година е роден Алекса?

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на табела во која во првиот ред ќе ја запишеме годината во која може да е роден Алекса, во вториот ред ќе запишеме колку години има во тој случај Алекса, а во третиот ред ќе го запишеме збирот на цифрите на годината во која може да е роден.

Роден	2014	2013	2012	2011	2010	2009	2008	2007
Години во 2015	1	2	3	4	5	6	7	8
Збир на цифри	7	6	5	4	3	11	10	9
Роден	2006	2005	2004	2003	2002	2001	2000	1999
Години во 2015	9	10	11	12	13	14	15	16
Збир на цифри	8	7	6	5	4	3	2	28
Роден	1998	1997	1996	1995	1994	1993	1992	1991
Години во 2015	17	18	19	20	21	22	23	24
Збир на цифри	27	26	25	24	23	22	21	20
Роден	1990	1989	1988	1987	1986	1985	1984	1983
Години во 2015	25	26	27	28	29	30	31	32
Збир на цифри	19	27	26	25	24	23	22	21

Јасно, ако Алекса е роден пред 1988 година, тогаш тој е постар од 28 години, а збирот на цифрите на годината сигурно е помал од $1+9+7+9=26$, па не е исполнет условот на задачата. Конечно, од претходно изнесеното следува дека Алекса е роден во 2006 или во 1988 година.

II.5. РАЗНИ ЗАДАЧИ

122. Во градината на Катерина има 44 нерасцветани и 20 расцветани каранфили. Ако секој ден цветаат по три каранфили, после колку дена ќе има еднаков број расцветаните и нерасцветани каранфили?

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на следната табела:

Ден	0	1	2	3	4	5
Расцветани	20	23	26	29	32	35
Нерасцветани	44	41	38	35	32	29

Според тоа, после четири дена во градината на Катерина ќе има еднаков број расцветани и нерасцветани каранфили.

123. Илија, Цветан и Кирил скинале 7 јаболка од овошната градина на нивниот дедо Марко. Секој од нив скинал најмалку по едно јаболко и сите скинале различен број јаболка. Илија скинал најмалку, а Цветан скинал најмногу јаболка. Колку јаболка скинал Кирил?

Решение. Единствен начин да го запишеме бројот 7 како збир на три различни броја е $1+2+4=7$. Бидејќи Илија скинал најмалку, а Цветан најмногу јаболка добиваме дека тие скинале 1 и 4 јаболка, соодветно. Според тоа, Кирил скинал 2 јаболка.

124. Во една торба има зелени и жолти јаболка и зелени и жолти круши. Вкупно има 15 јаболка, а бројот на крушите е за 2 поголем од бројот на јаболката. Зелени плодови има за 6 повеќе од жолти. Жолти круши се 9. Определи го бројот на зелените јаболка.

Решение. Во торбата има $15+2=17$ круши, што значи вкупно има $15+17=32$ плодови. Бидејќи зелените плодови се 6 за повеќе од жолтите заклучуваме дека во торбата има $(32-6):2=13$ жолти плодови и $13+6=19$ зелени плодови. Но, во торбата има 9 жолти круши, што значи дека има $17-9=8$ зелени круши. Конечно, бројот на зелените јаболка е еднаков на $19-8=11$.

125. Во четири кутии има вкупно 95 топчиња. Во црвената и жолтата кутија заедно има 38 топчиња, во жолтата и зелената заедно има 40 топчиња и во жолтата, зелената и сината заедно има 63 топчиња. Во која кутија има најмногу топчиња?

Решение. Во црвената кутија има $95-63=32$ топчиња. Во жолтата кутија има $38-32=6$ топчиња. Во зелената има $40-6=34$ топчиња и во сината има $63-40=23$ топчиња. Според тоа, најмногу топчиња има во зелената кутија.

126. Во една кутија има 13 црвени топки, а во друга кутија има сини топки, кои се помалку од црвените. Калина зела неколку сини топки, а Радица зела толку црвени топки колку што останале сини во втората кутија. Колку топки останале вкупно во двете кутии?

Решение. Ако во втората кутија има A топки, тогаш во двете кутии има $13 + A$ топки. Калина зела B сини топки, а Радица зела $A - B$ црвени топки. Тие заедно зела $B + A - B = A$ топки, што значи дека во двете кутии вкупно останале $13 + A - A = 13$ топки.

127. Пет деца се наредени во редица и држат вкупно 37 балони. Десно од Алекса има 14 балони, десно од Бојан има 32 балони, десно од Ванчо има 20 балони и десно од Даниел има 8 балони. Колку балони заедно држат Бојан и Даниел?

Решение. Нека петтото дете се вика Мартин. Според условот на задачата Мартин држи 8 балони, Даниел држи $14 - 8 = 6$ балони, Алекса држи $20 - 14 = 6$ балони, Ванчо држи $32 - 20 = 12$ балони и Бојан држи $37 - 32 = 5$ балони. Значи, Бојан и Даниел држат $6 + 5 = 11$ балони.

128. За Новогодишната прослава учениците од IV^4 одделение ја украсиле училницата со црвени, сини и бели балони. По колку балони имало од секоја боја, ако се знае дека имало 37 сини и црвени, имало 33 сини и бели и имало 40 црвени и бели балони.

Решение. Во збирот $37 + 33 + 40 = 110$ црвените, сините и белите балони се двапати броеви, од што следува дека за украсување на училницата се искористени $110 : 2 = 55$ балони. Понатаму, сини и црвени има 37, што значи дека бели балони се $55 - 37 = 18$. Слично, црвени се $55 - 33 = 22$ и сини се $55 - 40 = 15$ балони.

129. Во IV^a одделение 6 ученици јадат сладолед секој ден, 8 ученици јадат сладолед преку еден ден, а останатите ученици не јадат сладолед. Вчера 12 ученици од IV^a одделение јаделе сладолед. Колку ученици денес ќе јадат сладолед?

Решение. *Прв начин.* Бидејќи 6 ученици јадат сладолед секој ден, од 12 ученици кои вчера јаделе сладолед $12 - 6 = 6$ ученици се од групата која јаде сладолед преку еден ден. Но преку еден ден сладолед јадат 8 ученици, па затоа од нив денес ќе јадат сладолед $8 - 6 = 2$ ученици. Значи, денес сладолед ќе јадат $6 + 2 = 8$ ученици.

Втор начин. Во два последователни дена сладолед јадат $6 + 8 + 6 = 20$ ученици. Вчера јаделе сладолед 12 ученици, што значи дека денес ќе јадат $20 - 12 = 8$ ученици.

130. Во едно стадо има 37 едногрби и двогрби камили, кои заедно имаат 53 грбки. Кои камили се повеќе, едногрбите или двогрбите и за колку?

Решение. Бројот на двогрбите камили е еднаков на разликата на бројот на грбките и бројот на камилите. Според тоа, во стадото имало $53 - 37 = 16$ двогрби камили. Значи, бројот на едногрбите камили е еднаков на $37 - 16 = 21$ и тој е за $21 - 16 = 5$ камили поголем од бројот на двогрбите камили.

131. Павел, Томи и Ана купија исти кутии со бомбони. Павел изеде осум од своите бомбони, Ана – шест од своите и Томи – два од своите бомбони. Колку бомбони останаа во трите кутии, ако половината од бомбоните се во кутијата на Томи?

Решение. На почетокот Павел и Ана заедно имаат една кутија повеќе од Томи, а на крајот имат толку бомбони колку што има Томи. Значи, Павел и Ана изеле една кутија бомбони. Бидејќи $8 + 6 - 2 = 12$, заклучуваме дека во една кутија има 12 бомбони. Децата изеле $8 + 6 + 2 = 16$ бомбини, што значи дека во трите кутии останале $3 \cdot 12 - 16 = 36 - 16 = 20$ бомбони.

132. Од понеделник до петок Горјан решил вкупно 55 задачи, при што секој ден решавал по 2 задачи повеќе од претходниот. Колку задачи решил Горјан во понеделникот?

Решение. *Прв начин.* Во вторникот Горјан решил 2 задачи повеќе отколку во понеделникот, во средат 4 задачи, во четвртокот 6 и во петокот 8 задачи повеќе отколку во понеделникот. Според

тоа, ако секој ден решавал еднаков број задачи, тогаш Горјан ќе решил $55 - (2 + 4 + 6 + 8) = 55 - 20 = 35$ задачи. Бидејќи тој решавал 5 дена, добиваме дека во понеделникот решил $35 : 5 = 7$ задачи.

Втор начин. Ако од четвртокот во вторникот префрлиме 2 задачи, добиваме дека трите дена Горјан решавал еднаков број задачи. Сега, ако од петокот во понеделникот префрлиме 4 задачи, добиваме дека тој сите пет дена решавал еднаков број задачи. Во овој случај добиваме дека Горјан решавал по $55 : 5 = 11$ задачи. Но, за понеделникот од овие 11 задачи 4 се задачи кои ги решил во петокот, што значи дека во понеделникот Горјан решил $11 - 4 = 7$ задачи.

133. Мартин и Марио заедно изеле 20 кебапчиња. Мартин изел 4 кебапчиња повеќе од Марио. По колку кебапчиња изел секој од нив?

Решение. *Прв начин.* Нека Марио изел x кебапчиња. Тогаш Мартин изел $x + 4$ кебапчиња. Значи, $x + x + 4 = 20$, од каде добиваме $x = 8$. Значи, Марио изел 8 кебапчиња, а Мартин изел $x + 4 = 12$ кебапчиња.

Втор начин. Ако од вкупниот број кебапчиња го одземеме бројот на кебапчињата кои повеќе ги изел Мартин од Марио, добиваме број кој е двојно поголем од бројот на кебапчињата што ги изел Марио. Значи, Марио изел $(20 - 4) : 2 = 8$ кебапчиња, а Мартин изел $8 + 4 = 12$ кебапчиња.

134. На еден натпревар биле поделени вкупно 54 медали, од кои 22 биле бронзени, а останатите се сребрени и златни. Златните медали се 12 помалку од сребрените. Колку сребрени медали биле поделени на натпреварот?

Решение. На натпреварот биле поделени вкупно $54 - 22 = 32$ златни и сребрени медали. Бројот на сребрените медали е за 12 поголем од бројот на златните, што значи дека биле поделени $(32 - 12) : 2 = 10$ златни медали. Конечно, на натпреварот биле поделени $10 + 12 = 22$ сребрени медали.

135. Горјан чита расказ долг 26 страници. Досега прочитал 8 страници повеќе отколку што му останале за читање. Колку страници прочитал Горјан?

Решение. *Прв начин.* Ако од вкупниот број страници го одземеме бројот на повеќе прочитаните страници, тогаш остануваат еднаков број прочитани и непрочитани страници. Значи, половина од $26 - 8 = 18$ страници се непрочитани и тоа се $18 : 2 = 9$ страници. Конечно, Горјан прочитал $9 + 8 = 17$ страници.

Втор начин. Нека бројот на непрочитаните страници го означиме со x . Тогаш бројот на прочитаните страници е еднаков на $x + 8$, па затоа $x + x + 8 = 26$, од каде наоѓаме $2x = 18$, т.е. $x = 9$. Конечно, Горјан прочитал $x + 8 = 9 + 8 = 17$ страници.

136. Ивана и Милка набрале вкупно 60 јаболка. Во кошницата на Ивана имало двапати помалку јаболка отколку во кошницата на Милка. Ивана и дала неколку јаболка, по што во нејзината кошница имало четирипати помалку јаболка отколку во кошницата на Милка. Колку јаболка ѝ дала Ивана на Милка?

Решение. Бидејќи на почетокот во кошницата на Ивана имало двапати помалку јаболка отколку во кошницата на Милка, заклучуваме дека имало трипати помалку од вкупниот број јаболка. Значи, Милка имала $60 : 3 = 20$ јаболка. На крајот во кошницата на Ивана имало четирипати помалку јаболка отколку во кошницата на Милка, што значи дека имало петпати помалку јаболка отколку во кошницата на Милка, т.е. имало $60 : 5 = 12$ јаболка. Значи, Ивана на Милка ѝ дала $20 - 12 = 8$ јаболка.

137. За празникот Божик бабата Вера направила колачи за своите внуци. Ако на секој внук му даде по 4 колачи и остануваат 3 колачи, а за на секој внук да му даде по 6 колачи и недостасуваат 7 колачи. Колку внуци има бабата Вера?

Решение. На секој внук да му поделиме по 4 колачи. Остануваат 3 колачи и ако кон нив додадеме 7 колачи, тогаш на секој внук можеме да му поделиме уште $6 - 4 = 2$ колачи. Значи, ако $7 + 3 = 10$ колачи поделиме на внуците, тогаш секој внук ќе добие по 2 колачи. Според тоа, бабата Вера има $10 : 2 = 5$ внуци.

138. Седум цуциња товарат еден вагон со дијаманти за 7 часа. Колку цуциња се потребни за да се товари истиот вагон за еден час?

Решение. Прво вагонот се товара за 7 часа, а потоа за 1 час, што значи за 7 пати пократко време. Затоа за товарање на вагонот за 1 час се потребни 7 пати повеќе цуциња, односно $7 \cdot 7 = 49$ цуциња.

139. Али Баба има три пара обувки, а секој разбојник од неговата дружина има по еден пар обувки. Колку обувки имаа Али Баба и четириесетте разбојници?

Решение. Бидејќи секој пар има по две обувки заклучуваме дека вкупниот број обувки е $3 \cdot 2 + 40 \cdot 2 = 6 + 80 = 86$.

140. Во петок Јана започнала да чита книга која имала 147 страници. Таа секој ден читала по 21 страница. Во кој дена Јана ја прочитала целата книга?

Решение. Бидејќи дневно читала по 21 страница, Јана вкупно читала $147 : 21 = 7$ дена. Таа книгата почнала да ја чита во петок, што значи дека со читањето на книгата завршила во четврток.

141. Во една кутија има 93 топчиња, во друга – 8 топчиња, во трета – 6 топчиња и во четвртата 5 топчиња. За да во сите кутии има еднаков број топчиња треба да префрлиме определен број топчиња од првата во останатите три кутии. Колку топчиња треба да префрлиме во четвртата кутија?

Решение. Бројот на топчињата во сите кутии е еднаков на $93 + 8 + 6 + 5 = 112$. Значи, во секоја од четирите кутии треба да има по $112 : 4 = 28$ топчиња. Во четвртата кутија има 5 топчиња, па затоа од првата кутија треба да префрлиме $28 - 5 = 23$ топчиња.

142. Учениците от трето одделение се построиле во неколку редови – во секој ред еднаков број девојчиња и по 4 момчиња. Имало 28 момчиња. Потоа децата од првите 3 реда се тргнале и построени останале 36 ученици. Колку девојчиња биле построени на почетокот и колку останале на крајот?

Решение. Имаме 28 момчиња, по 4 момчиња во ред. Значи, имало $28:4=7$ реда. Откако заминале 3 реда, останале построени 4 реда. Вкупниот број деца во секој ред бил $36:4=9$, од кои по 4 биле момчиња. Значи, во секој ред имало по $9-4=5$ девојчиња. На почетокот имало $7\cdot5=35$, а на крајот имало $4\cdot5=20$ девојчиња.

143. На ливадата пасат овци и кози. Спасе пребројал дека ушите на козите се за 8 повеќе од ушите на овците. Колку нозе имаат повеќе козите од овците?

Решение. Секоја коза има по две уши. Бидејќи козите имаат 8 уши повеќе, на ливадата пасат $8:2=4$ кози повеќе. Но, коза има 4 нозе, па затоа козите имаат $4\cdot4=16$ нозе повеќе од овците.

144. Во хотел за животни има неколку кучиња и мачки, при што бројот на кучешките шепи е двапати поголем од бројот на мачкините опашки. Колку пати бројот на мачкините шепи е поголем од бројот на кучешките опашки?

Решение. Нека има x мачки и y кучиња. Мачките имаат x опашки и $4x$ шепи, а кучињата имаат y опашки и $4y$ шепи. Од условот на задачата следува дека $4y=2x$, па затоа

$$4x = 2 \cdot 2x = 2 \cdot 4y = 8y,$$

што значи дека бројот на мачкините шепи е осум пати поголем од бројот на кучешките опашки.

145. Една такси компанија вкупно има 123 возила и тоа автомобили со 4 тркала и џипови со 6 тркала. Возилата заедно имаат 666 тркала. Колку автомобили има компанијата?

Решение. Ако сите возила имаат по 4 тркала, тогаш бројот на тркалата ќе биде еднаков на $123\cdot4=492$. Меѓутоа, бројот на тркалата е за $666-492=174$ поголем и тие им припаѓаат на џиповите. Бидејќи секој џип има по 2 тркала повеќе, заклучуваме дека компанијата има $174:2=87$ џипови. Конечно, бројот на автомобилите е еднаков на $123-87=36$.

146. Вера спакувала 60 колачи во 7 пакети. Таа направила 2 пакета со по 9 колачи и 4 пакета со по 8 колачи. Колку колачи спакувала Вера во седмиот пакет?

Решение. Во шесте пакети Вера спакувала

$$2 \cdot 9 + 4 \cdot 8 = 18 + 32 = 50$$

колачи. Останатите $60 - 50 = 10$ колачи ги спакувала во седмиот пакет.

147. Весна има тетратка со 60 страници, од кои 22 се испишани. Таа секој ден испишува по 3 страници. После колку денови бројот на испишаните страници ќе биде двапати поголем од бројот на неиспишаните?

Решение. Ако со x го означиме бројот на неиспишаните страници, тогаш $2x$ е бројот на испишаните страници. Значи, $x + 2x = 60$, од каде следува $x = 20$. Според тоа, треба да има $2x = 40$ испишани страници. Моментално има 22 испишани страници, т.е. Весна треба да испише уште $40 - 22 = 18$ страници. Весна дневно испишува 3 страници, па затоа после $18 : 3 = 6$ дена бројот на испишаните страници ќе биде двапати поголем од бројот на неиспишаните страници.

148. Во една слаткарница има 43 деца. На девет маси седнале по 3 деца, а останатите деца седнале по 4 на маса. Ако сите маси се зафатени, колку маси има во слаткарницата?

Решение. На масите со по 3 деца седнале вкупно $9 \cdot 3 = 27$ деца. Според тоа, на масите со по 4 деца седнале $43 - 27 = 16$ деца. Значи, имаме $16 : 4 = 4$ маси со по 4 деца. Во слаткарницата имало вкупно $9 + 4 = 13$ маси.

149. Марија јаде по 8 бомбони дневно. Таа купува бомбони кои се запакувани по 20 во една кутија. Колку кутии бомбони купила Марија во текот на 30 дена?

Решение. За 30 дена Марија изела $8 \cdot 30 = 240$ бомбони.

Секоја кутија содржи 20 бомбони, што значи дека Марија купила $240 : 20 = 12$ кутии бомбони.

150. Во паралелката на Петар има 24 ученици. За роденден Петар купил 3 кутии бомбони со по 15 бомбони во секоја кутија. Ја почестил учителката и сите соученици, при што не се заборавил и себе. Некои од соучениците изеле по два бомбона. На крајот бомбоните во трите кутии се потрошиле. Колку деца од паралелката изеле само по една бомбона?

Решение. Петар купил $3 \cdot 15 = 45$ бомбони. Тој почестил $24 + 1 = 25$ луѓе. Значи, $45 - 25 = 20$ деца изеле по два бомбона, а останатите $24 - 20 = 4$ деца изеле по една бомбона.

151. Црвени и бели топчиња се подредени на следниов начин: во првиот ред има едно бело топче, во вториот ред – две црвени топчиња, во третиот – три бели, во четвртиот – 4 црвени итн. Во последниот ред има 30 црвени топчиња. Определи го бројот на белите топчиња во добиената фигура.

Решение. Бели топчиња има:

$$\begin{aligned} &1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19 + 21 + 23 + 25 + 27 + 29 = \\ &= 1 + 29 + 3 + 27 + 5 + 25 + 7 + 23 + 9 + 21 + 11 + 19 + 13 + 17 + 15 \\ &= 7 \cdot 30 + 15 = 210 + 15 = 225. \end{aligned}$$

152. Во едно одделение има 15 девојчиња и 13 момчиња, при што 17 деца имаат кафеави очи, а очите на другите се сини. Шест девојчиња имаат сини очи. Колку момчиња имаат кафеави очи?

Решение. Во одделението има $15 + 13 = 28$ деца. Според условот 17 деца имаат кафеави очи, што значи дека $28 - 17 = 11$ деца имаат сини очи. Бидејќи 6 девојчиња имаат сини очи, добиваме дека $11 - 6 = 5$ момчиња имаат сини очи. Конечно, $13 - 5 = 8$ момчиња имаат кафеави очи.

153. На почетната постојка на еден автобус се качиле возачот и 45 патници. На втората постојка слегле 16, а се качиле 29 патници. На следната постојка станица слегле тројца, а се качиле 25 патници.

Колку луѓе имало во тој момент во автобусот?

Решение. На втората постојка бројот на патниците се зголемил за $29 - 16 = 13$ патници. На третата постојка тој број се зголемил

за $25-3=22$ патници. Според тоа, во тој момент во автобусот имало $1+45+13+22=81$ човек.

154. Во автобус на градски сообраќај патуваат неколку мажи и 37 жени. На првата постојка слегле 24 патници, од кои половината се жени, а се качиле 16 патници, од кои 7 се мажи. Тогаш во автобусот имало 18 повеќе жени од мажи. Колку мажи имало на почетокот во автобусот?

Решение. На првата станица слегле $24:2=12$ жени и 12 мажи. Значи, во автобусот останале $37-12=25$ жени и се качиле $16-7=9$ жени. Значи, бројот на жените е еднаков на $25+9=34$. Според тоа, бројот на мажите после првата станица е еднаков на $34-18=16$. Бидејќи на првата станица слегле 12, а се качиле 7 мажи, заклучуваме дека на почетокот во автобусот имало $16-7+12=21$ маж.

155. На втората, третата и четвртата постојка од еден автобус се симнувале половината од патниците, а се качувале по 15 патници. На петтата постојка слегле сите 33 патници. Колку патници имало во автобусот при поаѓањето од првата постојка?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-напред. Имаме:

$$\begin{aligned} 33-15 &= 18, & 2 \cdot 18 &= 36, & 36-15 &= 21, \\ 2 \cdot 21 &= 42, & 42-15 &= 27, & 2 \cdot 27 &= 54. \end{aligned}$$

Значи, по поаѓањето од првата постојка во автобусот имало 54 патници.

156. Павел, Томи и Даниел собрале вкупно 30 јаболка. Даниел му дал половина од неговите јаболка на Томи, Томи му дал 2 јаболка на Павел, а Павел му дал едно јаболко на Даниел. Така секој добил еднаков број јаболка. Колку јаболка имал Даниел на почетокот?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-напред. На крајот Даниел имал $30:3=10$ јаболка. Пред да добие 1 јаболко од Павел, тој имал $10-1=9$ јаболка. Пред да ги даде половината од неговите јаболка на Томи, што значи на почетокот Даниел имал $2 \cdot 9=18$ јаболка.

157. Баба Марија подготвила 15 круши за компот. Шест круши поделила на по две парчиња, а останатите круши ги поделила на по четири парчиња. На колку вкупно парчиња ги поделила крушите баба Марија?

Решение. Од шесте круши баба Марија добила $6 \cdot 2 = 12$ парчиња. Останале $15 - 6 = 9$ круши, секоја од кои ја поделила на 4 парчиња. Значи, од овие круши таа добила $9 \cdot 4 = 36$ парчиња. Значи, баба Марија ги поделила крушите на $12 + 36 = 48$ парчиња.

158. Во еден тениски клуб членуваат 25 момчиња и 19 девојчиња. Секоја седмица во клубот се зачленуваат 2 момчиња и 3 девојчиња. После колку седмици бројот на девојчињата ќе биде еднаков на бројот на момчињата?

Решение. *Прв начин.* На почетокот во клубот членуваат $25 - 19 = 6$ момчиња повеќе од девојчиња. Секоја седмица се зачленува по $3 - 2 = 1$ девојче повеќе. Значи, бројот на девојчињата ќе биде еднаков на бројот на девојчињата после $6 : 1 = 6$ седмици.

Втор начин. Нека бројот на девојчињата е еднаков на бројот на момчињата после x седмици. Од условот на задачата следува дека

$$25 + 2x = 19 + 3x,$$

од каде добиваме $3x - 2x = 25 - 19$, односно $x = 6$. Значи, бројот на девојчињата ќе биде еднаков на бројот на девојчињата после 6 седмици

159. Во еден парк сите момчиња и неколку девојчиња носат патики, а останатите девојчиња носат сандалки. Во паркот има 16 момчиња повеќе од девојчињата кои носат сандалки. Вкупно има 57 девојчиња. Колку деца носат патики?

Решение. Нека a е бројот на девојчињата кои носат патики, а b е бројот на девојчињата кои носат сандалки. Тогаш $a + b = 57$. Понатаму, сите момчиња носат патики и нивниот број е еднаков на $b + 16$. Значи, бројот на децата кои носат патики е еднаков на $a + (b + 16) = a + b + 16 = 57 + 16 = 73$.

160. Мартин последователно девет пати фрлил коцка за играње и кога ги собрал точките кои паднале во сите девет фрлања добил збир 53. Колку пати паднала шестка?

Решение. Ако во секое фрлање на коцката за играње паѓала шестка, тогаш Мартин ќе добиел збир $9 \cdot 6 = 54$. Но, збирот на паднатите точки е 53, т.е. за 1 помалку. Тоа значи дека во едно фрлање имаме пет точки, а во останатите фрлања имаме по шест точки. Според тоа, шестка паднала 8 пати.

161. Над овошната градина на дедо Мирко летаат врапчиња. Ако на секое дрво слета само по едно врапче, тогаш за едно врапче нема да има дрво. Ако на дрво слетаат по 2 врапчиња, тогаш на едно дрво нема да слета ниту едно врапче. Колку врапчиња летале и колку дрвја имало во градината на дедо Мирко?

Решение. Нека имаме x дрвја. Ако на секое дрво застанува по едно врапче, тогаш за едно врапче нема да има дрво. Ако имаме едно дрво помалку, т.е. $x-1$ дрво, тогаш за две врапчиња нема да има дрво.

Кога имаме $x-1$ дрво, тогаш на секое дрво треба да има по две врапчиња. На секое од овие $x-1$ дрво веќе има по едно врапче, па за да има по 2 врапчиња треба на секое од нив да слета уште по едно од двете врапчиња за кои немаше дрво. Затоа $x-1=2$, т.е. $x=3$.

Конечно, во градината на дедо Мирко имало 3 дрвја, а на нив слетале $3+1=4$ врапчиња.

162. Маја, Симона, Елена и Катерина шетале по ливадата и береле темјанушки. Тие заедно набрале 134 темјанушки. Маја, Симона и Катерина заедно набрале 96 темјанушки, а Маја, Катерина и Елена заедно набрале 93 темјанушки. Маја набрала една темјанушка повеќе од Катерина. Колку темјанушки набрало секое од девојчињата?

Решение. Бидејќи сите девојчиња набрале 134 темјанушки, а Маја, Симона и Катерина заедно набрале 96 темјанушки, добиваме дека Елена набрала $134-96=38$ темјанушки. Аналогно на-

оѓаме дека Симона набрала $134 - 93 = 41$ темјанушка.

Понатаму, Елена и Симона заедно набрале $39 + 41 = 79$ темјанушки, што значи дека Маја и Катерина заедно набрале $134 - 79 = 55$ темјанушки. Но, Маја набрала една темјанушка повеќе од Катерина, па затоа бројот $55 - 1 = 54$ е двапати поголем од бројот на темјанушките кои ги набрала Катерина. Според тоа, Катерина набрала $54 : 2 = 27$ темјанушки, а Маја набрала $27 + 1 = 28$ темјанушки.

163. Во градината на дедо Марко има девет дрва и на секое дрво има по 24 јаболка. Горјан набрал 15 јаболка, Марко набрал 17 јаболка, а Матеа и Маргарите набрале по 14 јаболка. Колку јаболка останале на дрвјата?

Решение. Вкуониот број јаболка во градината е еднаков на

$$9 \cdot 24 = 9 \cdot (20 + 4) = 9 \cdot 20 + 9 \cdot 4 = 180 + 36 = 216.$$

Четири деца заедно набрале

$$15 + 17 + 2 \cdot 14 = 15 + 17 + 28 = 60$$

јаболка. Значи, на дрвјата останале $216 - 60 = 156$ јаболка.

164. Кловнот Бозо за училишната забава донел црвени, зелени и жолти балони. На учениците од прво одделение им дал половина од вкупниот број балони. На учениците од второ одделение им дал половина од останатите балони. На учениците од трето одделение им дал половина од останатите балони и на учениците од четврто одделение повторно им дал половина од останатите балони. Бозо во секое одделение давал по еднаков број црвени, зелени и жолти балони. На крајот му останале 4 жолти и 2 црвени балони. По колку балони од секоја боја донел Бозо?

Решение. На Бозо му останале $4 + 2 = 6$ балони и тоа е половина од бројот на балоните пред учениците од четврто одделение да добија балони. Значи, пред да им даде балони на учениците од четврто одделение Бозо имал $6 + 6 = 12$ балони. Овие 12 балони останале откако учениците од трето одделение добиле балони и тоа е бројот на балоните пред учениците од трето одделение да добијат балони. Значи, пред да им даде балони на учениците од трето одделение Бозо имал $12 + 12 = 24$ балони. Аналогно заклучу-

чуваме дека пред да добијат балони учениците од второ одделение Бозо имал $24+24=48$ балони, а пред да добиат балони учениците од прво одделение Бозо имал $48+48=96$ балони.

Значи, Бозо донел 96 балони, а му останале 6 балони. Според тоа, тој на учениците им поделил $96-6=90$ балони. Бидејќи во секое одделение давал по еднаков број црвени, зелени и жолти балони, добиваме дека од секоја боја Бозо поделил по $90:3=30$ балони.

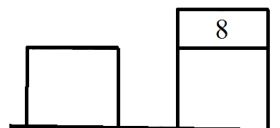
На Бозо не му останале зелени балони, што значи дека тој донел 30 зелени балони. Бидејќи му останале 2 црвени балони, следува дека Бозо донел $30+2=32$ црвени балони. Слично добиваме дека Бозо донел $30+4=34$ жолти балони.

165. За Денот на шегата се маскирале 97 ученици, од кои 13 не биле маскирани како принцези, Спајдермен и Бетмен. Колку биле принцези, ако се знае дека во Бетмен се маскирале четари пати повеќе ученици отколку во принцези, во Спајдермен 12 повеќе отколку во Бетмен.

Решение. Од условот на задачата следува дека за Денот на шегата се маскирале $97-13=84$ ученици. Понатаму, ако со x го означиме бројот на ученичките кои се маскирале во принцези, тогаш во Бетмен се маскирале $4x$ ученици, а во Спајдермен $4x+12$ ученици. Затоа, $x+4x+4x+12=84$, од каде добиваме $9x=84-12$, т.е. $9x=72$. Конечно, од последната равенка наоѓаме $x=72:9=8$, што значи дека 8 ученички се маскирале во принцези.

166. На полицата се наоѓаат книги од математика и книги од природни науки. Има вкупно 44 книги, но книги од математика има 8 повеќе отколку книги од природни науки. Определи го бројот на книги од математика и бројот на книги од природни науки.

Решение. *Прв начин.* Математички книги има колку и книги од природни науки и уште 8 повеќе (цртеж десно). Тоа значи дека вкупно книги има двапати повеќе отколку што има книги од природни науки и уште 8 книги.



Вкупниот број книги е 44, па затоа двократниот број книги од природни науки е еднаков на $44 - 8 = 36$. Значи, има $36 : 2 = 18$ книги од природни науки и $18 + 8 = 26$ математички книги.

Втор начин. Со x да го означиме бројот книги од природни науки. Тогаш $x + 8$ е бројот математички книги. Затоа, $x + x + 8 = 44$ од каде добиваме $2x = 44 - 8$, т.е. $x = 18$. Значи има 18 книги од природни науки и $18 + 8 = 26$ математички книги.

167. Во книжарницата има тетратки спакувани во пакети, секој од кои содржи 3 или 4 тетратки. Колку пакети од 3, а колку од 4 тетратки треба да се купат за да секој од 35. ученици од IV^4 одделение добие точно по една тетратка?

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на табела. Со x да го означиме бројот на пакетите со 4 тетратки. Тогаш вкупниот број тетратки во овие пакети ќе биде $4x$, па затоа пакетите со 3 тетратки треба да содржат $35 - 4x$ тетратки. Но, за да купиме цел број пакети кои содржат $35 - 4x$ тетратки, бројот $35 - 4x$ треба да е делив со 3, т.е. при делење со 3 да се добива остаток 0. Понатаму, бидејќи $9 \cdot 4 = 36 > 35$, можеме да купиме најмногу 8 пакети од по 4 тетратки. Така ја добиваме следнава табела:

x	$4x$	$35 - 4x$	$(35 - 4x) : 3$	Дали е решение
0	$4 \cdot 0 = 0$	$35 - 0 = 35$	$35 : 3 = 11$ и остаток 2	Не
1	$4 \cdot 1 = 4$	$35 - 4 = 31$	$31 : 3 = 10$ и остаток 1	Не
2	$4 \cdot 2 = 8$	$35 - 8 = 27$	$27 : 3 = 9$	Да
3	$4 \cdot 3 = 12$	$35 - 12 = 23$	$23 : 3 = 7$ и остаток 2	Не
4	$4 \cdot 4 = 16$	$35 - 16 = 19$	$19 : 3 = 6$ и остаток 1	Не
5	$4 \cdot 5 = 20$	$35 - 20 = 15$	$15 : 3 = 5$	Да
6	$4 \cdot 6 = 24$	$35 - 24 = 11$	$11 : 3 = 3$ и остаток 2	Не
7	$4 \cdot 7 = 28$	$35 - 28 = 7$	$7 : 3 = 2$ и остаток 1	Не
8	$4 \cdot 8 = 32$	$35 - 32 = 3$	$3 > 3 = 1$	Да

Според тоа, задачата има три решенија и тоа: 2 пакети од 4 тетратки и 9 пакети од 3 тетратки, 5 пакети од 4 тетратки и 5 пакети од 3 тетратки, 8 пакети од 4 тетратки и 1 пакет од 3

тетратки.

168. Марија за нејзината баба Славица купила букет од 51 роза, од кои 27 се црвени, а останатите се бели и жолти рози. Белите рози се двапати повеќе од жолтите. Определи го бројот на белите рози.

Решение. Бо букетот има $51 - 27 = 24$ бели и жолти рози. Ако со x го означиме бројот на жолтите рози, тогаш бројот на белите рози е $2x$. Значи, $x + 2x = 24$, од каде добиваме дека во букетот има $x = 8$ жолти рози. Конечно, бројот на белите рози е $2x = 16$.

169. Четвртоодделенците од едно училиште отишле на екскурзија. Биле распоредени во 3 автобуси по 32 ученици. Во хотелот во кој биле сместени, спиеле во двокреветни соби. Колку вкупно соби биле зафатени од учениците?

Решение. На екскурзија биле вкупно $3 \cdot 32 = 96$ ученици. Учениците биле сместени во $96 : 2 = 48$ соби.

170. Во градината на дедо Марко има само зајаци и кокошки. Горјан вкупно избројал 50 нозе и 11 кокошкини глави. Колку зајаци има во градината на дедо Марко?

Решение. Во градината имало 11 кокошки. Секоја кокошка има по 2 нозе, па затоа тие заедно имаат $11 \cdot 2 = 22$ нозе. Горјан избројал 50 нозе, што значи дека зајациите вкупно имале $50 - 22 = 28$ нозе. Секој зајак има по 4 нозе, што значи дека во градината на дедо Марко има $28 : 4 = 7$ зајаци.

171. Ана, Соња, Никола и Елена заедно имаат 15 бомбони, при што секој од нив има барем една бомбона. Никола има двапати повеќе бомбони од Ана. Соња има две бомбони повеќе од Елена. Колку бомбони има секое од децата?

Решение. Ако Ана има x бомбони, тогаш Никола има $2x$ бомбони. Ако Елена има y бомбони, тогаш Соња има $y + 2$ бомбони. Сите заедно имаат $x + 2x + y + y + 2 = 3x + 2y + 2$ бомбони, па затоа $3x + 2y + 2 = 15$, односно $3x + 2y = 13$. Бидејќи $2y$ е парен број, а 13 е непарен број заклучуваме дека x мора да биде непарен број. Јасно, $x < 5$, па затоа ја имаме следнава табела:

Ана - x	Елена - $y = (13 - 3x) : 2$	Никола - $2x$	Соња - $y + 2$
1	5	2	7
3	2	6	4

172. На екскурзија 32 ученици од четврто одделение биле сместени на следниов начин: девојчињата биле сместени во двокреветни соби, а момчињата во трикреветни соби. За сместување на девојчињата била искористена една соба повеќе отколку за сместување на момчињата. Колку девојчиња и колку момчиња биле на екскурзија?

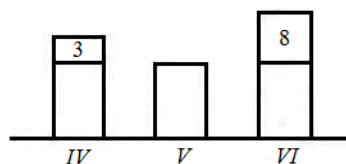
Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на табела. Бидејќи девојчињата биле сместени во двокреветни соби, заклучуваме дека нивниот број е парен. Понатаму, 32 е парен број, па затоа и бројот на момчињата е парен број. Сега, бидејќи момчињата биле сместени во трикреветни соби заклучуваме дека за нивното сместување е искористен парен број соби, кој е помал од 11 (зошто?). Така ја имаме следнава табела

Број на соби на момчињата	Број на соби на девојчињата	Број на момчиња	Број на девојчиња	Вкупно ученици
2	3	6	6	12
4	5	12	10	22
6	7	18	14	32
8	9	24	18	42

Од табелата гледаме дека кога се искористени 6 соби за сместување на момчињата и 7 соби за сместување на девојчињата, добиваме 32 ученика. Според тоа, на екскурзијата биле 18 момчиња и 12 девојчиња.

173. Во едно училиште во четврто, петто и шесто одделение вкупно има 110 ученици. Бројот на учениците во четврто одделение е за 3 поголем од бројот на учениците во петто одделение, а бројот на учениците во петто одделение е за 8 помал од бројот на учениците во шесто одделение. Определи го бројот на учениците во секое одделение.

Решение. Ако од четврто одделение одземеме 3 ученици, а од шесто одделение одземеме 8 ученици, то-



гаш во секое одделение ќе има еднаков број ученици (види цртеж десно). Притоа, во училиштето ќе останат $110 - 3 - 8 = 99$ ученици и овој број ќе биде трипати поголем од бројот на учениците во петто одделение. Според тоа, во петто одделение има $99 : 3 = 33$ ученици, што значи дека во четврто одделение има $33 + 3 = 36$ ученици и во шесто одделение има $33 + 8 = 41$ ученик.

174. Во клубот „Најди број“ членуваат определен број ученици од четврто одделение од едно училиште. Секоја седмица тие ги проверуваат своите знаења во една иста училница. Бројот на учениците е еднаков на вредноста на изразот

$$A = 2 \cdot (2+1) \cdot [12 - 2 \cdot (2+2 \cdot 1)] \cdot [2 + 12 : (2 \cdot 1 + 2)] : 4 : 2.$$

Бројот на училницата, во која се проверуваат знаењата, е еднаков на бројот x кој го задоволува равенството $(242 - x) : 2 = B$, каде

$$B = 12 \cdot 11 - 11 \cdot 10 + 10 \cdot 9 - 9 \cdot 8 + 8 \cdot 7 - 7 \cdot 6 + 6 \cdot 5 - 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2.$$

Опреди колку ученици од четврто одделение од ова училиште членуваат во клубот и кој е бројот на училницата во која се проверуваат знаењата.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot (2+1) \cdot [12 - 2 \cdot (2+2 \cdot 1)] \cdot [2 + 12 : (2 \cdot 1 + 2)] : 4 : 2 \\ &= 2 \cdot 3 \cdot [12 - 2 \cdot 4] \cdot [2 + 12 : 4] : 4 : 2 = 6 \cdot (12 - 8) \cdot (2 + 3) : 4 : 2 \\ &= (6 \cdot 4 \cdot 5) : 4 : 2 = 120 : 4 : 2 = 30 : 2 = 15, \end{aligned}$$

што значи дека бројот на учениците е 15. Понатаму,

$$\begin{aligned} B &= 12 \cdot 11 - 11 \cdot 10 + 10 \cdot 9 - 9 \cdot 8 + 8 \cdot 7 - 7 \cdot 6 + 6 \cdot 5 - 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3 - 3 \cdot 2 \\ &= 11 \cdot (12 - 10) + 9 \cdot (10 - 8) + 7 \cdot (8 - 6) + 5 \cdot (6 - 4) + 3 \cdot (4 - 2) \\ &= 11 \cdot 2 + 9 \cdot 2 + 7 \cdot 2 + 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 2 \cdot (11 + 9 + 7 + 5 + 3) = 2 \cdot 35 = 70, \end{aligned}$$

па затоа $(242 - x) : 2 = 70$, од каде наоѓаме $x = 102$, што значи дека бројот на училницата е 102.

175. Учениците од едно одделение отишле во слаткарница и сите јаделе сладолед. Во одделението има 34 ученици при што
- 12 деца сакаат сладолед од јагоди,
 - 5 деца сакаат сладолед од јагода и од ванила,
 - 9 деца сакаат сладолед само од чоколадо, и
 - другите деца сакаат само сладолед од ванила.

Колку деца сакаат сладолед од ванила?

Решение. Според условот на задачата, 9 деца сакаат сладолед само од чоколадо, па остануваат $34 - 9 = 25$ деца.

Понатаму, 12 деца сакаат сладолед од јагоди, а 5 деца сакаат сладолед од јагода и од ванила, па затоа 7 деца сакаат само сладолед од јагоди.

Значи, имаме $25 - 7 = 18$ деца што сакаат сладолед од ванила.

176. Марија по неколку пати го напишала секој од зборовите КРАК и МАРКА. Притоа буквата Р ја запишала 7 пати, а буквата А ја запишала 12 пати. Колку пати Марија ја запишала буквата К?

Решение. Буквата Р се јавува по еднаш во секој од двата збора, што значи дека Марија запишала 7 зборови. Во едниот збор буквата А се јавува 2 пати, а во другиот еднаш и како $12 - 7 = 5$, заклучуваме дека Марија 5 пати го запишала зборот МАРКА, а $7 - 5 = 2$ пати го запишила зборот КРАК. Конечно буквата К ја запишала $2 \cdot 2 + 5 = 9$ пати.

177. Матеа неколку пати го напишала зборот БАРАБАН и неколку пати го напишала зборот БАНАНИ. Се покажало дека буквата А е напишана 21 пат, а буквата Б е напишана 13 пати. Колку пати Матеа ја напишала буквата Н?

Решение. Во секој од двата збора буквата А е напишана еднаш повеќе од буквата Б. Значи, бројот на зборовите е $21 - 13 = 8$. Буквата Б во зборот БАРАБАН ја има двапати, а во зборот БАНАНИ ја има еднаш, што значи дека во $13 - 8 = 5$ збора буквата Б е напишана двапати. Според тоа, зборот БАРАБАН е напишан 5 пати, а зборот БАНАНИ е напишан $8 - 5 = 3$ пати. Конечно, во зборот БАРАБАН буквата Н ја има еднаш, а во зборот БАНАНИ ја има двапати, па затоа во сите 8 збора таа е напишана $2 \cdot 3 + 5 = 11$ пати.

178. Весна по неколку пати го напишала секој од зборовите МЕЧКА, МЕЧОК и МЕЧЕ. Вкупно ја напишала 17 пати буквата М, 25 пати буквата Е и 5 пати буквата А. Колку пати Весна ја напишала буквата О?

Решение. Бидејќи 17 пати е напишана бунквата М, а во секој збор има по една буква М, заклучуваме дека се запишани 17 зборови. Понатаму, буквата Е е напишана 25 пати, па како 17 пати е напишана во секој од зборовите по еднаш, а во зборот МЕЧЕ се јавува двапати, заклучуваме дека зборот МЕЧЕ е запишан $25 - 17 = 8$ пати. Конечно, буквата А е запишана 5 пати, па како ја има само во зборот МЕЧКА, заклучуваме дека зборот МЕЧОК е запишан $9 - 5 = 4$ пати. Според тоа, буквата О е запишана 4 пати.

179. На еден натпревар по математика во Прилеп учествувале 219 ученици повеќе отколку во Велес и 307 ученици помалку отколку во Битола, а учениците во Скопје биле за 675 повеќе од учениците во Битола. Колку ученици учествувале повеќе во Скопје отколку во Битола?

Решение. Со a, b, c и d да ги означиме броевите на учесниците на натпреварот во Прилеп, Велес, Битола и Скопје, соодветно. Тогаш, $a = b + 219$, $c = a + 307$ и $d = b + 675$. Треба да ја определиме разликата $d - c$. Имаме

$$c = a + 307 = b + 219 + 307 = b + 526,$$

па затоа

$$d - c = b + 675 - (b + 526) = 675 - 526 = 149.$$

180. На еден натпревар во спортски риболов неколку рибари уловиле по 9 риби, а неколку по 7 риби. Сите заедно уловиле 50 риби. Колку рибари уловиле по 9 риби?

Решение. Ако 1 рибар уловил 9 риби, тогаш останатите рибари треба да уловат $50 - 9 = 41$ риба, што не е можно бидејќи 41 не е делив со 7. Ако 2 рибара уловиле по 9 риби, тогаш останатите рибари треба да уловат $50 - 9 \cdot 2 = 32$ риба, што не е можно бидејќи 32 не е делив со 7. Ако 3 рибари уловиле по 9 риби, тогаш останатите рибари треба да уловат $50 - 9 \cdot 3 = 23$ риба, што не е можно бидејќи 23 не е делив со 7. Ако 4 рибари уловиле по 9 риби, тогаш останатите рибари треба да уловат $50 - 9 \cdot 4 = 14$ риби, што е можно бидејќи $14 = 2 \cdot 7$. Ако 5 рибари уловиле по 9 риби, тогаш останатите рибари треба да уловат

$50 - 9 \cdot 5 = 6$ риба, што не е можно бидејќи 6 не е делив со 7. Јасно, не е можно 6 или повеќе рибари да уловат по 9 риби, бидејќи $6 \cdot 9 = 54 > 50$.

Конечно, од претходните разгледувања следува дека 4 рибари уловиле по 9 риби, а 2 рибара уловиле по 7 риби.

181. На еден натпревар се зададени 5 задачи, а на натпреварот учествувале 9 ученици. Едно од момчињата решило двапати повеќе задачи од друго момче, а едно од девојчињата решило трипати повеќе задачи од друго девојче. Вкупно биле решени 34 задачи. Колку натпреварувачи ги решиле сите задачи.

Решение. Споменатите девојчиња решиле 1 и 3 задачи. Ако споменатите момчиња решиле 1 и 2 задачи, тогаш останатите петмина треба да решиле $34 - (1 + 3 + 1 + 2) = 34 - 7 = 27$ задачи, што не е можно бидејќи тие може да решат најмногу $5 \cdot 5 = 25$ задачи. Значи, споменатите момчиња решиле 2 и 4 задачи, а останатите 5 ученици решиле $34 - (1 + 3 + 2 + 4) = 34 - 10 = 24$ задачи. Бидејќи $24 = 5 \cdot 4 + 4$ заклучуваме дека 4 ученици решиле по 5 задачи и еден ученик решил 4 задачи. Конечно, сите задачи ги решиле 4 ученици.

182. Во фудбалски натпревар за победа, нерешен резултат и пораз се добиваат 3, 1 и 0 бодови. Еден фудбалски клуб во првенството после одиграни 30 натпревари освоил 35 бодови. Клубот одиграл 8 натпревари нерешено. Колку натпревари загубил овој клуб?

Решение. На 8 нерешени натпревари клубот освоил 8 бодови, што значи дека од победите освоил $35 - 8 = 27$ бодови. За една победа се добиваат 3 бода, што значи дека клубот победил во $27 : 3 = 9$ натпревари. Конечно, клубот загубил $30 - 8 - 9 = 13$ натпревари.

183. Храбирот кројач убил 78 муви и рекол: „Кога ќе замавнам налево убивам 7 муви, а кога ќе замавнам надесно убивам 9 муви одеднаш.“ Со колку удари кројачот ги убил мувите?

Решение. Со удари налево, тогаш кројачот може да убие 7, 14, 21, 28, 35, 43, 49, 56, 63, 70 или 77 муви, а со удари надесно тој може да убие 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63 или 72 муви. За да ги определиме ударите налево и ударите надесно, треба да најдеме два броја, по еден од секоја низа, чиј збир е 78. За таа цел ќе формираме нова низа така што од 78 ќе ги одземеме членовите на првата низа. Така ја добиваме низата: 71, 64, 57, 50, 43, 36, 29, 22, 15, 8 и 1. Сега во новата низа бараме број кој се содржи во втората низа и тоа е бројот $36 = 78 - 42$. Бидејќи $36 = 4 \cdot 9$ и $42 = 6 \cdot 7$, заклучуваме дека кројачот 6 пати замавнал налево и 4 пати замавнал надесно, што значи вкупно $6 + 4 = 10$ удари.

184. Виолета наредила 39 играчки во 4 кутии, при што во секоја кутија поставила различен број играчки, поголем од 7. Колку играчки ставила Виолета во секоја од кутиите?

Решение. *Прв начин.* Во секоја кутија бројот на играчките различен и е поголем од 7, па затоа Виолета во секоја од кутиите ставила по 8, 9, 10, 11, 12 или повеќе играчки. Јасно, ако нема кутија со 8 играчки, тогаш вкупниот број на играчки ќе биде поголем или еднаков на $9 + 10 + 11 + 12 = 42 > 39$, што не е точно. Ако нема кутија со 9 играчки, тогаш вкупниот број играчки ќе биде поголем или еднаков на $8 + 10 + 11 + 12 = 41 > 39$, што не е точно. Слично, ако нема кутија со 10 играчки добиваме $8 + 9 + 11 + 12 = 40 > 39$, што повторно не е можно. Конечно, ако нема кутија со 11 играчки, тогаш бидејќи $8 + 9 + 10 + 12 = 39$ заклучуваме дека Виолета во кутиите ставила по 8, 9, 10 и 12 играчки.

Втор начин. Бидејќи Виолета во секоја во секоја кутија ставила различен број играчки, поголем од 7, ако додадеме уште една кутија со различен број наши играчки, тогаш најмалиот збир на играчки ќе биде $8 + 9 + 10 + 11 + 12 = 50$. Овој збир е за $50 - 39 = 11$ поголем од бројот на играчките на Виолета, што значи дека сме додале кутија со 11 играчки. Конечно, во кутиите Виолета ставила по 8, 9, 10 и 12 играчки.

185. Билјана има неколку кутии со по 7 топчиња во кутија, а Павел има неколку кутии со по 10 топчиња во кутија. Ако Павел и даде определен број топчиња на Билјана, тогаш двајцата ќе имаат по 118 топчиња. Колку топчиња имал Павел на почетокот?

Решение. Билјана и Павел заедно имаат $118+118=236$ топчиња. На почетокот бројот на топчињата на Павел е делив со 10, т.е. тој завршува на 0. Значи, на почетокот бројот на топчињата на Билјана завршува на 6 и е помал од 118. Такви броеви се:

6, 16, 26, 36, 46, 56, 66, 76, 86, 96, 106 и 116.

Топчињата на Билјана се сметени во кутии по 7, што значи дека бројот на топчињата на Билјана е делив со 7. Меѓу броевите во горната низа единствен таков број е 56. Значи, Билјана има 56 топчиња, а Павел има $236-56=180$ топчиња, кои се сместени во $180:10=18$ кутии.

186. Пет празни кутии са подредени во ред и се означени последователно со броевите од 1 до 5. Роботот на Горјан е програмиран да става истовремено по едно топче во две соседни кутии. Роботот ставил вкупно 2014 топчиња, при што во секоја кутија ставил барем по едно топче. Колку е збирот на топчињата во кутиите означени со парни броеви? Ако во кутијата со број 2 има 7 топчиња повеќе отколку во кутијата 4, а во кутијата 1 има четирипати помалку топчиња, отколку во кутијата 4 и двапати помалку топчиња отколку во кутијата 5, определи го бројот на топчињата со секоја от петте кутии.

Решение. Ако во кутијата 1 има a топчиња, можеме да сметаме дека во кутијата 2 има $a+b$ топчиња. Тогаш можеме да сметаме дека во кутијата 3 има $b+c$ топчиња и оттука, дека во кутијата 4 има $c+p$ топчиња. Заклучуваме дека во кутијата 5 има точно p топчиња. Така добиваме дека збирот на топчињата во кутиите 2 и 4 е $(a+b)+(c+p)$, а во кутиите 1, 3 и 5 збирот на топчињата е $a+(b+c)+p=(a+b)+(c+p)$. Значи, збирот на топчињата во парните и во непарните кутии е еднаков и тој изнесува

$$2014:2=1007 \text{ топчиња.}$$

Од условот на задачата следува дека во кутијата 2 има

$$(1007+7):2=1014:2=507$$

топчиња. Значи, во кутијата 4 има 500 топчиња. Повторно од условот на задачата наоѓаме дека во кутијата 1 има $500:4=125$ топчиња, а во кутијата 5 има $125\cdot 2=250$ топчиња. Конечно, во кутијата 3 има $1007-125-250=632$ топчиња.

187. Зајациите Ушко и Долгоушко имале заедничка градина со моркови. Во текот на една седмица секој од нив по неколку дена берел моркови. Ушко во еден ден бери по 3 моркови, а Долгоушко во еден ден бери по 5 моркови. Во текот на таа седмица бројот на морковите во градината се намалил за 36. Колку дена набрал моркови Долгоушко, а колку Ушко?

Решение. Задачата ќе ја решиме разгледувајќи ја можноста Долгоушко да бере моркови 1, 2, 3, 4, 5, 6 и 7 дена.

- ако Долгоушко берел 1 ден, тогаш Ушко треба да набере $36-5=31=3\cdot 10+1$, што не е можно.
- ако Долгоушко берел 2 дена, тогаш Ушко треба да набере $36-2\cdot 5=26=3\cdot 8+2$, што не е можно,
- ако Долгоушко берел 3 дена, тогаш Ушко треба да набере $36-3\cdot 5=21=3\cdot 7$, што е можно во текот на една седмица,
- ако Долгоушко берел 4 дена, тогаш Ушко треба да набере $36-4\cdot 5=16=3\cdot 5+1$, што не е можно,
- ако Долгоушко берел 5 дена, тогаш Ушко треба да набере $36-5\cdot 5=11=3\cdot 3+2$, што не е можно,
- ако Долгоушко берел 6 дена, тогаш Ушко треба да набере $36-6\cdot 5=6=3\cdot 2$, што е можно во два дена во седмицата,
- ако Долгоушко берел 7 дена, тогаш Ушко треба да набере $36-7\cdot 5=9=3\cdot 3$, што е можно во три дена.

Конечно, задачата има две решенија и тоа: Ушко берел 7 дена и Долгоушко берел 5 дена, или Ушко берел 2 дена и Долгоушко берел 6 дена.

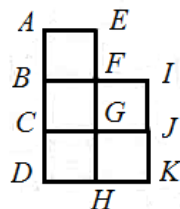
III ГЕОМЕТРИСКИ ФИГУРИ

III.1. БРОИМЕ ФИГУРИ ВО РАМНИНА

1. Колку отсечки чии крајни точки се точките $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J$ и K се прикажани на цртежот десно?

Решение. На цртежот ги воочуваме следниве отсечки чии крајни точки се соседни:

$$AB, BC, CD, AE, AF, CG, DH, \\ EF, FG, GH, FI, GJ, HK, IJ, JK$$



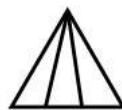
што значи дека има 15 такви отсечки. Понатаму, отсечки со двапати поголема должина се

$$AC, BD, EG, FH, IJ, BI, CJ, DK$$

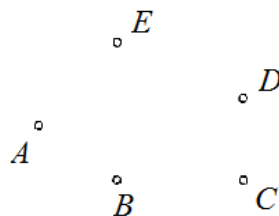
и нив ги има 8, а отсечки со трипати поголема должина се AD, EH и нив ги има 2. Според тоа, на цртежот се прикажани $15+8+2=25$ отсечки чии крајни точки се означените точки.

2. Колку триаголници се прикажани на цртежот десно?

Решение. Доволно е да ги преброиме отсечките кои лежат на хоризонталната страна на големиот триаголник (зошто?). Имаме 3 единечни отсечки, две отсечки составени од две единечни отсечки и 1 отсечка составена од три единечни отсечки. Според тоа, имаме $3+2+1=6$ отсечки, што значи дека на цртежот се прикажани 6 триаголници.



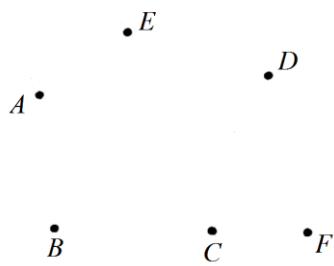
3. Во рамнината се дадени пет точки A, B, C, D, E такви што никои три од нив не лежат на една права (цртеж десно). Колку триаголници постојат такви што дадените точки се нивни темиња? Испиши ги овие триаголници.



Решение. Со дадените точки се определени 10 триаголници. Тие се:

$$ABC, ABD, ABE, ACD, ACE, ADE, BCD, BCE, BDE, CDE.$$

4. Дадени се точките A, B, C, D, E и F (цртеж десно), при што точките B, C и F лежат на една права. Исприши ги триаголниците чии темиња се 3 од дадените 6 точки.



Колку вакви триаголници има?

Решение. Тоа се триаголниците:

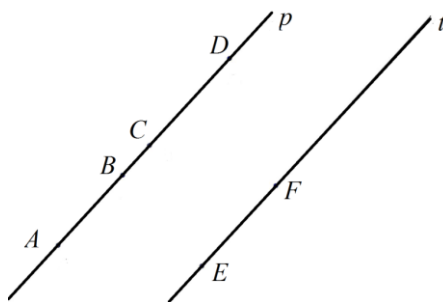
$ABC, ABD, ABE, ABF, ACD, ACE,$
 $ACF, ADE, ADF, AEF, BCD, BCE,$
 $BDE, BDF, BEF, CDE, CDF, CEF, DEF.$

Според тоа, има 19 триаголници чии темиња се дадените точки.

5. Нацртај права p и на неа земи четири точки: A, B, C и D . Потоа нацртај права t , паралелна со правата p и на неа земи две точки: E и F . Исприши ги сите триаголници чии темиња се точките A, B, C, D, E, F .

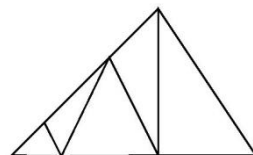
Решение. На цртежот десно се прикажани правите p и t со точките A, B, C, D, E, F , според условот на задачата. Триаголниците се:

$\triangle AEF, \triangle BEF, \triangle CEF, \triangle DEF,$
 $\triangle ABE, \triangle ABF, \triangle ACE, \triangle ACF,$
 $\triangle ADE, \triangle ADF, \triangle BCE, \triangle BCF,$
 $\triangle BDE, \triangle BDF, \triangle CDE, \triangle CDF.$



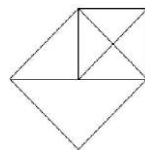
6. Колку триаголници се прикажани на фигурата дадена на цртежот десно?

Решение. На цртежот се прикажани 5 единечни триаголници, 1 триаголник составен од два единечни триаголници, 1 триаголник составен од три единечни триаголници, 1 триаголник составен од четири единечни триаголници и 1 триаголник составен од пет единечни триаголници. Според тоа, на цртежот се прикажани $5+1+1+1+1=9$ триаголници.



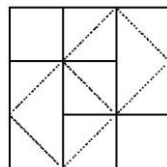
7. Колку триаголници содржи фигурата прикажана на цртежот десно?

Решение. Дадената фигура содржи 6 единчени триаголници, 4 триаголници составени од два единчени триаголници и 1 триаголник составен од три единчени триаголници. Значи, вкупно има $6+4+1=11$ триаголници.



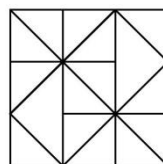
8. Колку триаголници содржи фигурата прикажана на цртежот десно?

Решение. Дадената фигура содржи 10 мали, 4 средни (составени од 2 мали триаголници) и 2 големи (составени од 2 мали триаголници и еден квадрат). Според тоа, вкупниот број триаголници е еднаков на $10+4+2=16$.



9. Колку триаголници содржи фигурата прикажана на цртежот десно?

Решение. Дадената фигура содржи 14 најмали, 8 мали (составени од 2 најмали триаголници) и 4 големи (составени од 4 најмали триаголници) и 2 најголеми (составени од 9 најмали триаголници). Според тоа, вкупниот број триаголници е еднаков на $14+8+4+2=28$.



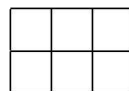
10. Колку триаголници се содржани во петтокраката звезда прикажана на цртежот десно?



Решение. Дадената фигура содржи 5 мали триаголници, кои на цртежот лево се означени со броевите 1, 2, 3, 4 и 5. Понатаму, таа содржи уште 5 големи триаголници кои се составени од два мали триаголници и петаголникот и тоа: 1, 6 и 4; 2, 6 и 5; 3, 6 и 1; 4, 6 и 2; 5, 6 и 3. Според тоа, во петтокраката звезда се содржани $5+5=10$ триаголници.



11. Колку правоаголници содржи фигурата прикажана на цртежот десно? (Внимавај, и квадратите се правоаголници?)



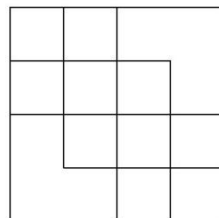
Решение. Имаме, 6 составени од едно квадратче, 7 составени од две квадратчиња (четири хоризонтални и три вертикални), 2 составени од три квадратчиња, 2 составени од четири квадратчиња и 1 составен од шест квадратчиња. Значи, вкупно има $6+7+2+2+1=18$ правоаголници.

12. Колку правоаголници содржи фигурата прикажана на цртежот десно?



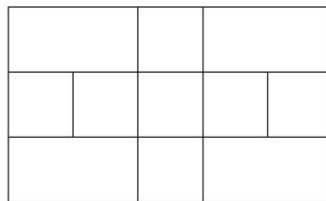
Решение. На дадената фигура има 8 единечни правоаголници, 10 правоаголници составени од два единечни правоаголници, 4 правоаголници составени од три единечни правоаголници, 5 правоаголници составени од четири единечни правоаголници, 2 правоаголници составени од шест единечни правоаголници и 1 правоаголник составени од осум единечни правоаголници. Според тоа, дадената фигура содржи $8+10+4+5+2+1=30$ правоаголници.

13. Колку квадрати содржи фигурата дадена на цртежот десно?



Решение. Нека должината на страната на најмалото квадратче е 1. Тогаш дадената фигура содржи: 10 квадрати со должина на страна 1, 5 квадрати со должина на страна 2, 2 квадрати со должина на страна 3 и 1 квадрат со должина на страна 4. Според тоа, вкупниот број квадрати содржани во дадената фигура е еднаков на $10+5+2+1=18$.

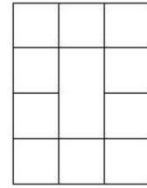
14. Колку квадрати содржи фигурата прикажана на цртежот десно?



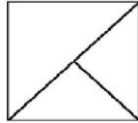
Решение. Нека должината на страната на најмалото квадратче е 1. Тогаш дадената фигура содржи: 7 квадрати со должина на страна 1, 4 квадрати со должина на страна 2 и 2 квадрати со должина на страна 3. Според тоа, дадената фигура вкупно содржи $7+4+2=13$ квадрати.

15. Колку квадрати содржи фигурата прикажана на цртежот десно?

Решение. Нека должината на најмалото квадратче на дадената фигура е 1. Дадената фигура содржи 10 квадрати со должина 1, 2 квадрати со должина 2 и 2 квадрати со должина 3. Според тоа, дадената фигура содржи $10 + 2 + 2 = 14$ квадрати.



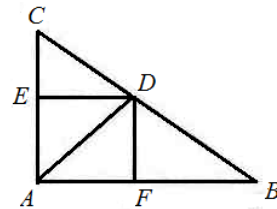
16. Определи го производот на бројот на триаголниците содржани во фигурата на цртежот лево и бројот на четириаголниците содржани во фигурата на цртежот десно.



Решение. Левата фигура содржи 4 триаголници, а десната содржи 6 правоаголници. Според тоа, бараниот број е еднаков на $4 \cdot 6 = 24$.

17. Колку триаголници и колку четириаголници се наоѓаат на цртежот десно.

Решение. На дадениот цртеж триаголници се:



$ABC, ABD, ADC, CED, EAD, DAF$ и DFB .

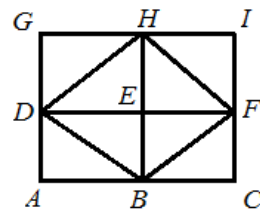
Според тоа, на цртежот се дадени 7 триаголници. Четириаголници се:

$ABDE, AFDE$ и $AFDC$,

што значи дека има 3 четириаголници.

18. Колку триаголници и колку правоаголници има на цртежот десно. Што има повеќе и за колку? Испиши ги сите триаголници и сите правоаголници.

Решение. На цртежот десно се дадени триаголниците:



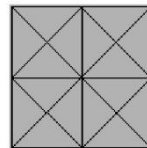
$ABD, BDE, BCF, BEF, EFH, HFI,$
 $DEH, DHG, DFH, DBF, DBH, HBF,$

и четириаголниците:

$ABED, BCFE, EFH, DEHG, ACFD, BCIH, DFIG, ABHG, ACIG.$

Значи, на цртежот има вкупно 12 триаголници и 9 правоаголници. Повеќе се триаголници, и тоа за $12 - 9 = 3$.

19. Колку триаголници повеќе од квадрати содржи фигурата прикажана на цртежот десно?

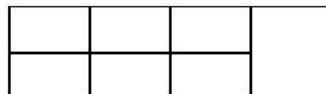


Решение. Дадената фигура содржи 16 единечни триаголници, 16 триаголници составени од по два триаголника, 8 триаголници составени од по четири триаголници и 4 триаголници составени од по осум триаголници. Според тоа, бројот на триаголниците содржани во дадената фигура е еднаков на $16 + 16 + 8 + 4 = 44$.

Имаме 4 квадрати составени од по два триаголника, 4 квадрати составени од по четири триаголници, 1 квадрат составен од осум триаголници и 1 квадрат е целата фигура. Значи, бројот на квадратите е еднаков на $4 + 4 + 1 + 1 = 10$.

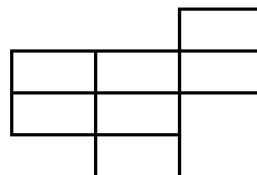
Значи, дадената фигура содржи $44 - 10 = 34$ триаголници повеќе од квадрати.

20. Колку правоаголници се прикажани на цртежот десно?



Решение. На цртеж се прикажани 7 единечни правоаголници, 7 правоаголници составени од два единечни, 3 составени од 3 единечни, 2 составени од четири единечни, 1 составен од пет единечни, 1 составен од шест единечни и 1 составен од седум единечни правоаголници. Значи, вкупниот број правоаголници прикажани на цртежот десно е еднаков на $7 + 7 + 3 + 2 + 1 + 1 + 1 = 22$.

21. Определи го бројот на правоаголниците на цртежот десно.



Решение. Има 7 правоаголници кои се формирани од 1 мал правоаголник.

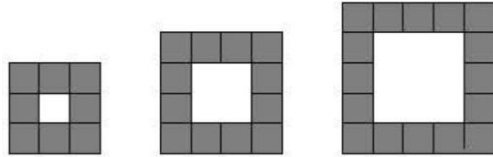
Има 7 правоаголници кои се формирани од 2 мали правоаголници.

Има 2 правоаголници кои се формирани од 3 мали правоаголници.

Има 1 правоаголник кој е формиран од 4 мали правоаголници.

Конечно, на цртежот има вкупно $7+7+2+1=17$ правоаголници.

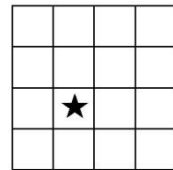
22. Веселинка има квадратни плочки и со нив прави квадратни рамки (види цртеж). Колку плочки употребила Веселинка за



да ја направи единаесеттата рамка?

Решение. За првите три квадратни рамки Веселинка употребила $8=2 \cdot 4$, $12=3 \cdot 4$, $16=4 \cdot 4$ квадратни плочки, соодветно. Забележуваме дека бројот на плочките употребени за да се направи секоја од овие рамки се добива кога бројот 4 ќе се помножи со број кој е за 1 поголем од редниот број на рамката. Значи, за единаесеттата рамка Веселинка употребила $(11+1) \cdot 4 = 12 \cdot 4 = 48$ плочки.

23. Колку квадрати на цртежот десно ја содржат ѕвездата?



Решение. Ѕвездата се содржи во: 1 единечен квадрат, 4 квадрати составени од четири единечни квадрати, 4 квадрати составени од девет единечни квадрати и 1 квадрат составен од шестнаесет единечни квадрати. Според тоа, вкупниот број квадрати кои ја содржат ѕвездата е еднаков на $1+4+4+1=10$.

24. Колку правоаголници на фигурата прикажана на цртежот десно содржат точно по едно срце?



Решение. На дадената фигура има 2 правоаголници составени од еден правоаголник, 4 составени од два правоаголници, 4

составени од три правоаголници, 2 составени од четири правоаголници и 2 составени од пет правоаголници. Според тоа, вкупниот број правоаголници кои содржат по едно срце е еднаков на $2+4+4+2+2=14$.

25. Определи го бројот на правоаголниците кои се содржат во фигурата прикажана на цртежот десно и кои содржат по едно срце.



Решение. Имаме 3 единечни правоаголници, 6 правоаголници составени од два единечни правоаголници, 4 правоаголници составени од три единечни правоаголници и 2 правоаголник составен од четири единечни правоаголници. Значи, бараниот број правоаголници е еднаков на $3+6+4+2=15$.

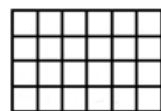
26. На масата се наредени триаголни и четириаголни логички плочки. Вкупно имало 12 плочки, кои имале 43 темиња. Колку плочки имало од секој вид?

Решение. Ако сите 12 плочки се триаголни плочки, тогаш бројот на темињата ќе биде еднаков на $3 \cdot 12 = 36$. Но, бројот на темињата е за $43 - 36 = 7$ поголем и како четириаголна плочка има едно теме повеќе од триаголна плочка заклучуваме дека на масата имало 7 четириаголни плочки. Значи, бројот на триаголните плочки е еднаков на $12 - 7 = 5$. Сите заедно имаат

$$5 \cdot 3 + 7 \cdot 4 = 15 + 28 = 43$$

темиња.

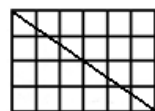
27. Правоаголникот на цртежот десно е поделен на 24 исти квадрати.



а) Колку квадрати ќе пресече отсечката која ги поврзува темињата на горниот лев и долниот десен агол на правоаголникот?

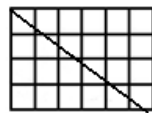
б) Колку најмногу квадрати може да пресече една права линија?

Решение. а) На цртежот десно е повлечена отсечката која ги поврзува темињата на горниот лев и



долниот десен агол на правоаголникот. Забележуваме дека таа сече 8 квадрати.

б) Квадратите на кои е поделен правоаголникот имаат 3 внатрешни хоризонтални и 5 внатрешни вертикални линии, што значи дека секоја права може да пресече најмногу 8 внатрешни граници, односно најмногу 9 квадрати. На цртежот десно е прикажана права која сече точно 9 квадрати.



28. Светлана и Мишко исекле од хартија триаголници и квадрати. Мишко исекол неколку квадрати и трипати помалку триаголници. Светлана исекла 8 триаголници и толку квадрати, колку што исекол триаголници Мишко. Се покажало дека бројот на страните на сите фигури на Светлана е еднаков 36.

а) Колку квадрати исекла Светлана?

б) Колку страни имаат сите фигури на Мишко?

Решение. а) Нека Светлана исекла a квадрати. Од условот на задачата следува $8 \cdot 3 + 4a = 36$, од каде добиваме $a = 3$. Значи, Светлана исекла 3 квадрати.

б) Мишко исекол 3 триаголници и $3 \cdot 3 = 9$ квадрати. Значи, бројот на страните на сите фигури на Мишко изнесува

$$3 \cdot 3 + 4 \cdot 9 = 9 + 36 = 45.$$

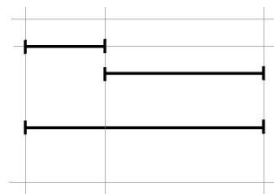
29. Кој број ќе го добиеме ако бројот на страните на 5 триаголници го намалиме за бројот на страните на 2 квадрати и еден петаголник?

Решение. Триаголникот има 3 страни, квадратот има 4 страни и петаголникот има 5 страни. Од условот на задачата добиваме дека бараниот број е еднаков на

$$5 \cdot 3 - (2 \cdot 4 + 1 \cdot 5) = 15 - (8 + 5) = 2.$$

III.2. ПРЕСМЕТУВАМЕ ПЕРИМЕТРИ

30. На цртежот десно во квадратна мрежа се нацртани три отсечки. Долната отсечка е



за 3 cm подолга од средната, а горната отсечка е двапати помала од средната. Определи ги должините на отсечките.

Решение. Нека должина на најмалата отсечка ја означиме со a . Должината на средната отсечка е еднаква на $2a$, а за должината на долната отсечка добиваме $2a+3$. Бидејќи должината на долната отсечка е еднаква на збирот на должините на горната и средната отсечка добиваме $a+2a=2a+3$, т.е. $a=3\text{ cm}$. Значи, средната отсечка има должина $2a=2\cdot 3=6\text{ cm}$, а долната отсечка има должина $2a+3=6+3=9\text{ cm}$.

31. На отсечката AB избрана е точка C . Отсечката AB е 4 пати подолга од отсечката AC . Определи ги должините на отсечките AB и AC , ако должината на отсечката CB е 24 cm .

Решение. *Прв начин.* Ако отсечката AB ја поделиме на 4 еднакви дела, бидејќи таа е 4 пати подолга од отсечката AC , тоа значи дека отсечката AC е еден од четирите еднакви дела на отсечката AB . Тоа пак значи дека отсечката CB ги содржи останатите три дела од отсечката AB . Бидејќи должината на отсечката CB е 24 cm , значи дека еден од четирите дела на отсечката AB е долг $24:3=8\text{ cm}$. Значи, отсечката AC е долга 8 cm , а отсечката AB е долга $8\cdot 4=32\text{ cm}$.

Втор начин. Ако должината на отсечката AC ја обележиме со x , тогаш за должината на отсечката AB важи:

$$\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$$

$$x + 24 = 4x$$

$$4x - x = 24$$

$$3x = 24$$

$$x = 8\text{ cm}$$

Отсечката AB е долга $8\cdot 4=32\text{ cm}$

32. Должината на едната страна на триаголникот е 7 cm и е за 3 cm поголема од должината на втората страна, а е 1 cm пократка од должината на третата страна. Определи го периметарот на триаголникот.

Решение. Должината на втората страна на триаголникот е еднаква на $7-3=4\text{ cm}$, а должината на третата страна е еднаква на $7+1=8\text{ cm}$. Значи, периметарот на триаголникот е еднаков на $7+4+8=19\text{ cm}$.

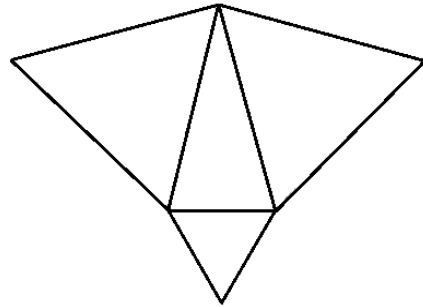
33. Ако количникот на броевите 16 и 2 го собереме со количникот на броевите 21 и 3, ќе го добиеме периметарот на рамностранот триаголник. Определи ја должината на страната на триаголникот.

Решение. Периметарот на триаголникот е еднаков на

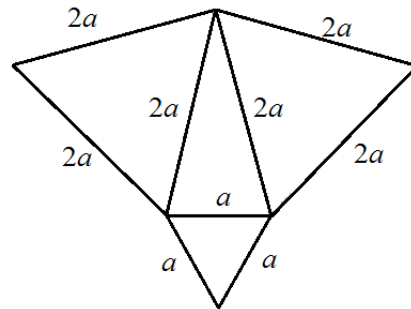
$$16:2+21:3=8+7=15\text{ cm}.$$

Должината на неговата страна е еднаква на $15:3=5\text{ cm}$.

34. Даден е рамнокрак триаголник кај кој должината на кракот е двапати поголема од должината на основата. Над секоја од страните на овој триаголник се нацртани рамнострани триаголници (види цртеж). Периметарот на така добиената фигура е 225 cm поголем од периметарот на почетниот рамнокрак триаголник. Определи ги должините на страните на почетниот рамнокрак триаголник.



Решение. Со a да ја означиме должината на основата на дадениот триаголник. Должината на неговиот крак изнесува $2a$, а неговиот периметар е $L = a + 2a + 2a = 5a$. Понатаму, периметарот на новата фигура е



$$L_1 = a + a + 2a + 2a + 2a + 2a = 10a.$$

Сега од условот на задачата добиваме $10a = 5a + 225$, па затоа

$$10a - 5a = 225$$

$$5a = 225$$

$$a = 45 \text{ cm.}$$

Според тоа, должината на основата на почетниот триаголник изнесува 45 cm , а должината на неговиот крак изнесува

$$2 \cdot 45 = 90 \text{ cm.}$$

35. Даден е рамнокрак триаголник ABC . Должината на кракот е трипати поголема од должината на основата, а периметарот на триаголникот е 252 mm . Определи ги должините на основата и кракот на триаголникот ABC .

Решение. Ако со a ја означиме должината на основата, а со b должината на кракот, тогаш $b = 3a$. Заменуваме во формулата за периметар $L = a + 2b$ и последователно добиваме

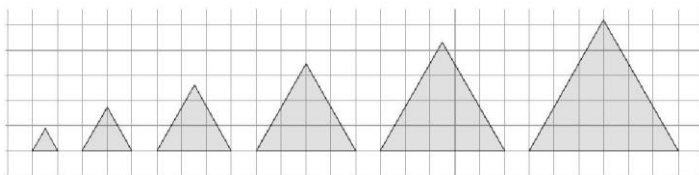
$$a + 2 \cdot 3a = 252$$

$$7a = 252$$

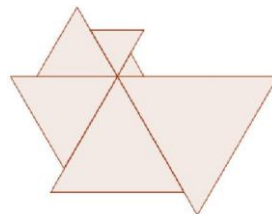
$$a = 36 \text{ mm.}$$

Според тоа, должината на кракот е $b = 3 \cdot 36 = 108 \text{ mm}$.

36. Елеонора во квадратна мрежа, со страна 1 cm на квадратчињата, нацртала шест рамнострани триаголници (види цртеж долу).



Потоа триаголниците ги исекла и откако ги обоила од нив ја составила фигурата прикажана на цртежот десно. Определи го периметарот на фигурата која ја направила Елеонора.



Решение. Разликата во должините на страните на секои два соседни триаголници е еднаква на 1 cm , а додека страната на најголемиот триаголник е за $6 - 1 = 5 \text{ cm}$ подолга од страната на најмалиот триаголник. Ако на фигурата

која ја направила Елеонора тргнеме од страната на најмалиот триаголник и одиме во насока обратна од насоката на движењето на стрелките на часовникот, тогаш добиваме дека периметарот на фигурата е еднаков на:

$$1+1+2+1+3+1+4+1+5+1+6+5=31\text{ cm}.$$

37. Збирот на периметрите на два рамнострани триаголници е 144 cm . Определи ги должините на страните на тие триаголници, ако периметарот на поголемиот триаголник е трипати поголем од периметарот на помалиот триаголник.

Решение. Ако со L го означиме периметарот на помалиот триаголник, тогаш периметарот на поголемиот триаголник изнесува $3L$. Според тоа, $L+3L=144$, т.е. $L=36\text{ cm}$.

Бидејќи периметарот на помалиот триаголник изнесува 36 cm , должината на неговата страна изнесува $36:3=12\text{ cm}$. Понатаму, периметарот на поголемиот триаголник изнесува $3L=3\cdot 36\text{ cm}$, па затоа должината на неговата страна изнесува 36 cm .

Втор начин. Нека a е должината на страната на помалиот триаголник. Тогаш неговиот периметар е $L=3a$, а периметарот на поголемиот триаголник е $3L=3\cdot 3a=9a$. Значи, $3a+9a=144$, т.е. $12a=144$, од каде добиваме $a=144:12=12\text{ cm}$. Значи, должината на страната на помалиот триаголник изнесува 12 cm , а должината на страната на поголемиот триаголник изнесува $3a=3\cdot 12\text{ cm}=36\text{ cm}$.

38. Периметарот на еден правоаголник е еднаков на 60 cm , а должината на едната страна е еднаква на 18 cm . Определи ја должината на другата страна на правоаголникот.

Решение. Збирот на должината и ширината на правоаголникот е половина од периметарот, па затоа тој е еднаков на

$$60:2=30\text{ cm}.$$

Едната страна е долга 18 cm , па затоа другата страна е долга $30-18=12\text{ cm}$.

39. Од 48 m се изработени рамностран триаголник и квадрат со еднакви периметри. Колку метри е подолга страната на триаголникот од страната на квадратот?

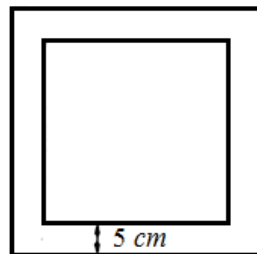
Решение. Периметрите на триаголникот и квадратот се еднакви на $48:2 = 24\text{ cm}$. Должината на страната на квадратот е еднаква на $24:4 = 6\text{ cm}$. Должината на страната на триаголникот е еднаква на $24:3 = 8\text{ cm}$ и таа е за $806 = 2\text{ cm}$ поголема од должината на страната на квадратот.

40. Должините на страните на квадрат и рамностран триаголник се изразени со природни броеви. Збирот на периметрите на рамностран триаголник и квадрат е еднаков на 32 cm . Разликата на должините на нивните страни е еднаква на 1 cm . Определи ја должината на страната на квадратот.

Решение. Можни се два случаја.

- 1) Страната на триаголникот е 1 cm подолга од страната на квадратот. Ако со x ја означиме должината на страната на квадратот, тогаш должината на страната на триаголникот е еднаква на $x+1$ и затоа $3(x+1) + 4x = 32$, т.е. $7x = 29$, што не е можно бидејќи 7 не е делител на 29 .
 - 2) Страната на триаголникот е 1 cm пократка од страната на квадратот. Ако со x ја означиме должината на страната на квадратот, тогаш должината на страната на триаголникот е еднаква на $x-1$ и затоа $3(x-1) + 4x = 32$, т.е. $7x = 35$, од каде добиваме $x = 5\text{ cm}$.
41. Слика во вид на правоаголник врамена е во рамка со ширина 5 cm . Периметарот на надворешниот раб на рамката е еднаков на 128 cm . Определи го периметарот на внатрешниот раб на рамката.

Решение. Секоја страна на внатрешниот раб на рамката е пократка за 10 cm од соодветната страна на надворешниот раб на рамката. Според тоа, периметарот на

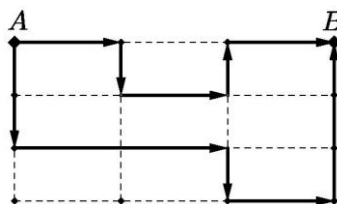


внатрешниот раб на рамката е пократок за $4 \cdot 10 = 40 \text{ cm}$ од периметарот на надворешниот раб на рамката и тој изнесува $128 - 40 = 88 \text{ cm}$.

42. Иван има маса широка 6 dm и долга 8 dm . Тој купил покривка која висела по 1 dm на секоја страна на масата. Ако сака да постави тантела по крајот на покривката, колку дециметри тантела му е потребна?

Решение. Бидејќи покривката виси по 1 dm на секоја страна на масата, нејзината должина е еднаква на $8 + 1 + 1 = 10 \text{ dm}$, а нејзината ширина е еднаква на $6 + 1 + 1 = 8 \text{ dm}$. Должината на тантелата која е потребна е еднаква на периметарот на покривката, т.е. на $2 \cdot (10 + 8) = 2 \cdot 18 = 36 \text{ dm}$.

43. Алеите на еден правоаголен парк се поделени на еднакви градини (цртеж десно). На цртежот се прикажани две маршрути од A до B , едната од кои е со должина 36 km , а другата со должина 60 km . Колку километри е растојанието од A до B по права линија?



Решение. Пократката маршрута е составена од три хоризонтални и 2 вертикални линии. Подолгата маршрута е составена од три хоризонтални и 6 вертикални линии. Значи, разликата е во 4 вертикални линии, па затоа една вертикална линија е долга $(60 - 36) : 4 = 6 \text{ km}$. Според тоа, три хоризонтални линии се долги $36 - 2 \cdot 6 = 24 \text{ km}$ и тоа е растојанието од A до B по права линија.

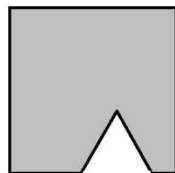
44. Правоаголна нива со должина 100 m и ширина 20 m треба да се подели на 5 еднакви квадратни градини. Колку метри ограда се потребни вкупно за оградување и делење на градината?

Решение. За да се огради нивата и подели на 5 еднакви квадратни градини се потребни две огради со должина по 100 m и шест

огради со должина по 20 m (направи цртеж). Според тоа, за постигнување на саканата цел се потребни

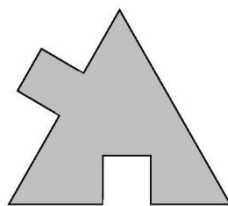
$$2 \cdot 100 + 6 \cdot 20 = 200 + 120 = 320\text{ m} \text{ ограда.}$$

45. Од квадратен лист хартија е отсечен рамностран триаголник со должина на страна 4 cm (цртеж десно). Периметарот на добиената фигура е еднаков на 32 cm . Определи ја должината на страната на квадратот.



Решение. Периметарот на добиената фигура е за една должина на страната на рамностраниот триаголник поголем од периметарот на квадратот (зошто?). Според тоа, периметарот на квадратот е еднаков на $32 - 4 = 28\text{ cm}$. Конечно, должината на страната на квадратот е еднаква на $28 : 4 = 7\text{ cm}$.

46. Од триаголник е отсечен квадрат со должина на страна 7 cm , а потоа истиот е додаден на другата страна на триаголникот (види цртеж). Ако периметарот на триаголникот изнесува 36 cm , определи го периметарот на добиената фигура.



Решение. Периметарот на добиената фигура е еднаков на збирот на периметрите на триаголник и квадратот (зошто?). Според тоа, периметарот на добиената фигура е еднаков на

$$36 + 4 \cdot 7 = 36 + 28 = 64\text{ cm}.$$

47. Периметарот на правоаголникот е еднаков на 180 mm . Над страна со должина a и страна со должина b на правоаголникот се нацртани рамнострани триаголници. Должината на страната на едниот од овие триаголници е еднаква на 30 mm .

а) Пресметај ги разликите на периметрите на правоаголникот и секој од двата рамнострани триаголници.

б) Пресметај го периметарот на добиената фигура.

Решение. а) Нека $b = 30\text{ mm}$. Од условот на задачата имаме

$$P = 2a + 2b$$

$$180 = 2a + 2 \cdot 30$$

$$2a = 180 - 60$$

$$2a = 120$$

$$a = 60 \text{ mm.}$$

Периметарот на првиот рамностран триаголник е

$$P_1 = 3 \cdot 30 = 90 \text{ mm.}$$

Разликата меѓу периметарот на правоаголникот и периметарот на првиот триаголник е еднаква на

$$P - P_1 = 180 - 90 = 90 \text{ mm.}$$

Периметарот на вториот рамностран триаголник е

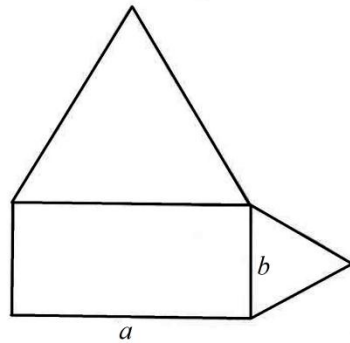
$$P_2 = 3 \cdot 60 = 180 \text{ mm.}$$

Разликата меѓу периметарот на правоаголникот и периметарот на вториот триаголник е

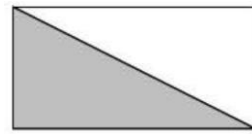
$$P - P_2 = 180 - 180 = 0 \text{ mm.}$$

б) Добиената фигура е составена од три страни со должини $b = 30 \text{ mm}$ и три страни со должини $a = 60 \text{ mm}$. Според тоа, нејзиниот периметар е еднаков на

$$3a + 3b = 3 \cdot 60 + 3 \cdot 30 = 270 \text{ mm.}$$



48. Периметарот на правоаголникот прикажан на цртежот десно е еднаков на 28 cm . Периметарот на осенчениот триаголник е еднаков на 24 cm . Определи ја должината на најголемата страна на триаголникот.



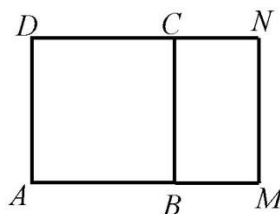
Решение. Збирот на должините на двете помали страни на триаголникот е еднаков на половина од периметарот на правоаголникот, т.е. тој е еднаков на $28 : 2 = 14 \text{ cm}$. Затоа должината на најголемата страна на триаголникот е еднаква на $24 - 14 = 10 \text{ cm}$.

49. Должината на страната на рамностран триаголник е еднаква на најмалиот двоцифрен непарен број запишан со различни цифри.

Периметарот на квадратот е за 3 cm помал од периметарот на триаголникот. Определи ја должината на страната на квадратот?

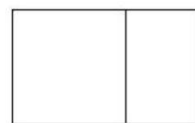
Решение. Должината на страната на триаголникот е 13 cm , па затоа неговиот периметар е еднаков на $3 \cdot 13 = 39\text{ cm}$. Периметарот на квадратот е еднаков на $39 - 3 = 36\text{ cm}$. Конечно должината на страната на квадратот е еднаква на $36 : 4 = 9\text{ cm}$.

50. Периметарот на квадратот $ABCD$ е за 24 cm поголем од периметарот на правоаголникот $BMNC$. Ако периметарот на правоаголникот $AMND$ е еднаков на 96 cm , определи ја должината на страната AD .



Решение. Од условот на задачата следува дека отсечките BM и CN се по 12 cm пократки од страните на квадратот. Ако ги зголемиме овие отсечки за по 12 cm добиваме правоаголник со ширина AD и должина која е двапати поголема од ширината. Периметарот на добиениот правоаголник е еднаков на $96 + 24 = 120\text{ cm}$. Според тоа, страната на квадратот е еднаква на $120 : 6 = 20\text{ cm}$.

51. Горјан залепил квадрат со периметар 36 cm до правоаголник со периметар 28 cm и добил нов правоаголник (цртеж десно). Определи го периметарот на новиот правоаголник.

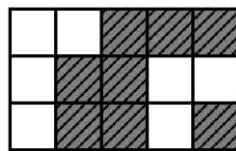


Решение. *Прв начин.* Должината на страната на квадратот е еднаква на $36 : 4 = 9\text{ cm}$. Сега должината на едната страна на малиот правоаголник е еднаква на 9 cm , а должината на другата страна е еднаква $(28 - 2 \cdot 9) : 2 = 5\text{ cm}$. Значи, должините на страните на новиот правоаголник се еднакви на 9 cm и $9 + 5 = 14\text{ cm}$. Конечно, периметарот на новиот правоаголник е еднаков на $2 \cdot (9 + 14) = 2 \cdot 23 = 46\text{ cm}$.

Втор начин. Должината на страната на квадратот е еднаква на $36 : 4 = 9\text{ cm}$. Периметарот на новиот правоаголник ќе го пресме-

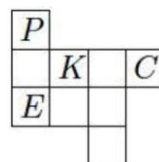
таме ако на периметарот на малиот правоаголник додадеме две должини на страната на квадратот (зошто?). Значи, периметарот на новиот правоаголник е еднаков на $28 + 2 \cdot 9 = 28 + 18 = 46 \text{ cm}$.

52. Периметарот на штрафираниот дел од правоаголникот е еднаков на 54 cm . Определи го периметарот на нештрафираниот дел на правоаголникот.



Решение. Периметарот на штрафираниот дел на правоаголникот е еднаков на 18 должини на страната на квадратчињата на кои е поделен правоаголникот. Исто така е периметарот на нештрафираниот дел е еднаков на 18 должини на страната на квадратчињата од кои е составен правоаголникот. Значи, двата дела имаат еднаков периметар, т.е. периметарот на нештрафираниот дел е еднаков на 54 cm .

53. Катерина од идентични квадратни плочки ја направила фигурата прикажана на цртежот десно. Која плочка може да ја отстрани Катерина без притоа да се промени периметарот на фигурата?



Решение. Ако ја отстраниме плочката P или друга плочка која во фигурата има слична положба, тогаш периметарот на фигурата се намалува за 2 должини на страната на квадратната плочка. Ако ја отстраниме плочката K или друга плочка која во фигурата има случна положба, тогаш периметарот на фигурата се зголемува за 2 должини на страната на квадратната плочка. Но, ако ја отстраниме плочката E , тогаш периметарот на фигурата останува непроменет.

54. Градина има форма на правоаголник со ширина 10 m и трипати поголема должина. Дедо Славе сака градината да ја огради со мрежа од тел, при што ќе остави врата широка 1 m . Определи ја должината на мрежата.

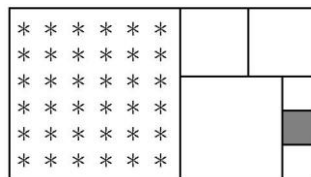
Решение. Должината на градината е еднаква на $3 \cdot 10 = 30 \text{ m}$. Нејзиниот периметар е еднаков на $2 \cdot (10 + 30) = 2 \cdot 40 = 80 \text{ m}$.

Значи, должината на мрежата која на дедо Славе му е потребна е еднаква на $80 - 1 = 79 \text{ m}$.

55. Збирот на периметрите на правоаголник и квадрат е еднаков на 4 dm . Определи ја должината на правоаголникот, ако неговата ширина е за 2 cm поголема од страната на квадратот и периметарот на квадратот е еднаков на периметарот на рамностран триаголник со должина на страна 4 cm .

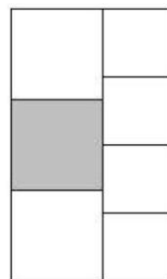
Решение. Од условот на задачата следува дека периметарот на квадратот е еднаков на $3 \cdot 4 = 12 \text{ cm}$, а должината на неговите страна е еднаква на $12 : 4 = 3 \text{ cm}$. Периметарот на правоаголникот е еднаков на $4 \text{ dm} = 12 \text{ cm} = 40 \text{ cm} - 12 \text{ cm} = 28 \text{ cm}$. Ширината на правоаголникот е еднаква на $3 + 2 = 5 \text{ cm}$, а неговата должина е еднаква на $(28 - 2 \cdot 5) : 2 = 18 : 2 = 9 \text{ cm}$.

56. Правоаголникот на цртежот десно е составен од 7 квадрати. Периметарот на сивиот квадрат е еднаква на 12 cm . Определи ја должината на страната на квадратот со звездиците.



Решение. Должината на страната на сивиот квадрат е еднаква на $12 : 4 = 3 \text{ cm}$. Должината на страната на квадратот лево од сивиот квадрат е еднаква на $3 \cdot 3 = 9 \text{ cm}$, а должината на страната на квадратот над сивиот квадрат еднаква на $(9 + 3) : 2 = 6 \text{ cm}$. Според тоа, должината на страната на квадратот со звездиците е еднаква на $9 + 6 = 15 \text{ cm}$.

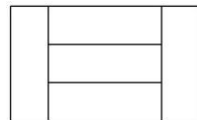
57. Од 7 квадрати Горјан го составил правоаголникот даден на цртежот десно. Периметарот на обоениот квадрат е еднаков на 32 cm . Определи го периметарот на целиот правоаголник.



Решение. Должината на страната на обоениот квадрат е еднаква на $32 : 4 = 8 \text{ cm}$. Еднаката страна на правоаголникот има должина $3 \cdot 8 = 24 \text{ cm}$. Должината на

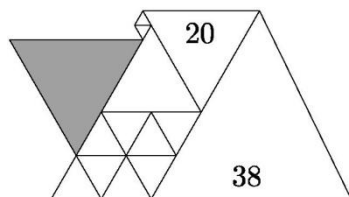
страната на малиот квадрат е еднаква на $24:4=6\text{ cm}$. Другата страна на правоаголникот има должина $8+6=14\text{ cm}$. Периметарот на правоаголникот изнесува $2\cdot(14+24)=2\cdot38=76\text{ cm}$.

58. Правоаголник со периметар еднаков на 70 mm е расечен на пет еднакви правоаголници (цртеж десно). Определи го периметарот на малиот правоаголник.



Решение. Нека a е должината и b е ширината на малиот правоаголник. Тогаш периметарот на големиот правоаголник е еднаков на $4a+4b=4(a+b)=2\cdot2(a+b)$. Бидејќи тој е еднаков на 70 mm добиваме $2\cdot2(a+b)=70$. Значи, $2(a+b)=35\text{ mm}$ и тоа е периметарот на малиот правоаголник.

59. Фигурата прикажана на цртежот десно е составена од рамнострани триаголници. Должината на страната на едниот триаголник е 38 cm , а должината на страната на другиот е 20 cm . Определи ја должината на страната на сивиот триаголник.



Решение. Должината на страната на секој од осумте исти триаголници е еднаква $(38-20):2=9\text{ cm}$. Должината на страната на триаголникот над нив е еднаква на $2\cdot9=18\text{ cm}$. Сега, должината на страната на најмалиот триаголник е еднаква на $20-18=2\text{ cm}$. Конечно, должината на страната на сивиот триаголник е еднаква на $9+18-2=25\text{ cm}$.

60. Определи го бројот на различните триаголници кои имаат периметар еднаков на 14 cm .

Решение. Бидејќи $3\cdot4=12<14$ заклучуваме дека најголемата страна на триаголникот мора да бид поголема или еднаква на 5. Понатаму, најголемата страна на триаголникот не може да биде поголема или еднаква на 7, бидејќи во тој случај збирот на другите две страни ќе биде помал или еднаков на $14-7=7$, што не

е можно (зошто?). Според тоа, за должините на страните ги имаме следниве можности:

$$6\text{ cm}, 6\text{ cm}, 2\text{ cm}; \quad 6\text{ cm}, 5\text{ cm}, 3\text{ cm};$$

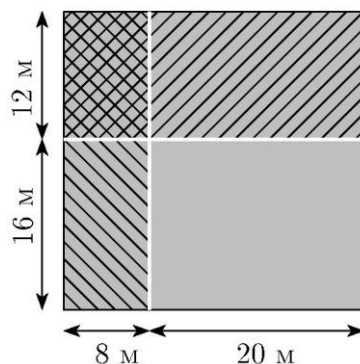
$$6\text{ cm}, 4\text{ cm}, 4\text{ cm}; \quad 5\text{ cm}, 5\text{ cm}, 5\text{ cm}.$$

Според тоа, постојат четири различни триаголници чиј периметар е еднаков на 14 cm .

61. Должината на правоаголникот е еднаква на 26 cm , а ширината е 67 cm помала од периметарот. Определи го периметарот на правоаголникот.

Решение. Нека a е должината и b е ширината на правоаголникот. Имаме, $a = 26\text{ cm}$ и $2a + 2b = 67 + b$, Значи, $b = 67 - 2 \cdot 26$, т.е. $b = 15\text{ cm}$. Значи, периметарот на правоаголникот е еднаков на $2a + 2b = 67 + 15 = 82\text{ cm}$.

62. Марко, Зоран, Павле и Јане имаат правоаголни зелечукови градини (види цртеж). Градината на Јане има периметар 48 m и има заедничка страна со градината на Павле. Градината на Павел има заедничка страна со градината на Марко. Определи го периметарот на градината на Марко.



Решение. Периметрите на градините се

$$2 \cdot (12 + 8) = 2 \cdot 20 = 40\text{ m},$$

$$2 \cdot (16 + 8) = 2 \cdot 24 = 48\text{ m},$$

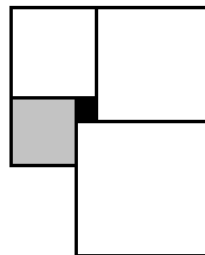
$$2 \cdot (12 + 20) = 2 \cdot 32 = 64\text{ m},$$

$$2 \cdot (16 + 20) = 2 \cdot 36 = 72\text{ m}.$$

Градината на Јане има периметар 48 m , па затоа должините на нејзините страни се 16 m и 8 m . Градината на Павле има заедничка страна со градините на Јане, па затоа таа е десно или над градината на Јане. Сега, градината на Марко има заедничка страна со градината на Павле, па во првиот случај таа е над, а во

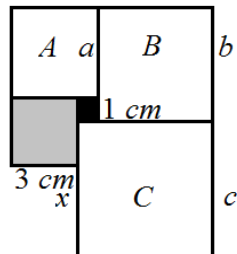
вториот случај таа е десно од градината на Павле. И во двата случаја тоа е градината со страни 12 m и 20 m и нејзиниот периметар е еднаков на 64 m .

63. Фигурата на цртежот десно е составена од пет квадрати. Должината на страната на црниот квадрат зинесува 1 cm , а должината на страната на сивиот квадрат изнесува 3 cm . Пресметај го периметарот на фигурата?



Решение. *Прв начин.* Белите квадрати да ги означиме со A, B, C , а должините на нивните страни со a, b, c , соодветно (види цртеж).

Тогаш должината на страната на квадратот A е $a = 3 + 1 = 4\text{ cm}$, должината на страната на квадратот B е $b = 1 + a = 1 + 4 = 5\text{ cm}$ и должината на страната на квадратот C е $c = 1 + b = 1 + 5 = 6\text{ cm}$.

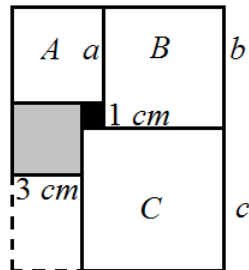


За да го определиме периметарот на фигурата треба уште да ја определиме должината на делот од страната на квадратот C која е означена со x . Имаме $x + 3 + a = b + c$, односно $x + 3 + 4 = 5 + 6$, од каде добиваме $x = 11 - 7 = 4\text{ cm}$.

Конечно, периметарот на дадената фигура изнесува

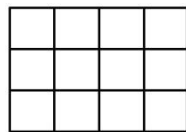
$$x + 3 + 3 + a + a + b + b + c + c = 4 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 = 40\text{ cm}.$$

Втор начин. Како и во првиот начин ги определуваме должините на страните $a = 4\text{ cm}$, $b = 5\text{ cm}$ и $c = 6\text{ cm}$ на квадратите A, B и C , соодветно. Понатаму, фигурата ја дополнуваме до правоаголник како што е прикажано на цртежот десно. Сега, ако искористиме дека периметарот на дадената фигура е еднаков на периметарот на добиениот правоаголник (зошто?), чии должини на страни се $a + b$ и $b + c$ добиваме дека периметарот на дадената фигура изнесува



$$2 \cdot (a + b) + 2 \cdot (b + c) = 2 \cdot (4 + 5) + 2 \cdot (5 + 6) = 18 + 22 = 40\text{ cm}.$$

64. Правоаголникот даден на цртежот десно е составен од 12 исти квадратчиња. По линиите на квадратчињата расечи го правоаголникот на два дела кои имаат еднакви периметри, но различни плоштини.



Решение. Задачата има повеќе решенија. Едно од нив е дадено на цртежот десно.

Обиди се да најдеш барем уште три различни решенија.



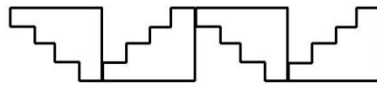
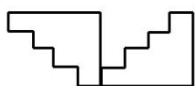
65. Определи го бројот на различните правоаголници чии должини на страни се природни броеви и кои имаат периметар еднаков на 208 cm . (Правоаголникот со должини на страна 1 cm и 2 cm сметаме дека е ист со правоаголникот со должини на страна 2 cm и 1 cm .)

Решение. Збирот на должините на страните на правоаголник со периметар 208 cm е еднаков на $208:2=104\text{ cm}$. Според тоа, должините на страните на правоаголниците може да бидат:

1 cm и 103 cm ; 2 cm и 102 cm ; 3 cm и 101 cm ;...; 52 cm и 52 cm

Значи, постојат 52 различни правоаголници со периметар 208 cm и должини на страни природни броеви,

66. Скалата на цртежот десно е добиена кога од квадрат со страна 4 cm се отстранети 6 квадратчиња со страна 1 cm . Ако фигурата на долниот цртеж се состои од 104 такви скали, пресметај го нејзиниот периметар.

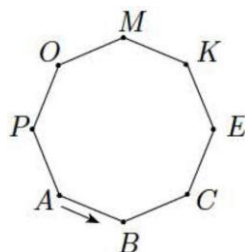


Решение. Периметарот на една скала е еднаков на $4 \cdot 4 = 16\text{ cm}$.

При поврзување на 104 скали имаме 103 поврзувања и со секое поврзување периметарот се намалува за 2 cm . Според тоа, периметарот на добиената фигура е еднаков на

$$104 \cdot 16 - 103 \cdot 2 = 1458\text{ cm}.$$

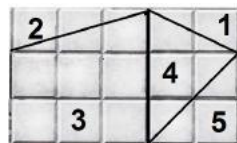
67. Атомската Мравка трча по работ на масата прикажана на цртежот десно. Таа тргнала од точката A и во прикажаната насока изминала 5 m . Во која точка застанала Атомската Мравка, ако должината на секоја страна на масата е еднаква на 1 dm ?



Решение. Масата има осум страни, па затоа при секоја обиколка на масата Атомската Мравка изминува $8 \cdot 1 = 8\text{ dm}$. Бидејќи $5\text{ m} = 50\text{ dm} = 6 \cdot 8 + 2\text{ dm}$ заклучуваме дека Атомската Мравка шест пати ја обиколила масата и поминала уште по 2 нејзини страни. Според тоа, таа застанала во точката C .

III.3. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

68. Антонио, Борис, Васил и Ѓорѓи купиле чоколадо. Пред да го отворат чоколадото им паднало и се скршило на пет дела (цртеж десно). Борис го изел најголемото парче. Антонио и Ѓорѓи изеле еднакви делови од чоколадото, но Ѓорѓи изел две парчиња, а Антониот само едно парче. Васил го изел остатокот од чоколадото. Кој дел од чоколадото го изел Васил?



Борис го изел најголемото парче. Антонио и Ѓорѓи изеле еднакви делови од чоколадото, но Ѓорѓи изел две парчиња, а Антониот само едно парче. Васил го изел остатокот од чоколадото. Кој дел од чоколадото го изел Васил?

Решение. Парчето означено со бројот 3 содржи повеќе од 6 квадратни плочки од чоколадото, што не е случај со останатите парчиња. Значи, Борис го изел парчето означено со бројот 3.

Да ги разгледаме парчињата означени со броевите 1, 4 и 5. Парчето означено со бројот 4 е големо колку парчињата означени со броевите 1 и 5 (на цртежот десно горните две квадратни плочи се поделени на два исти дела и долните четири квадратни плочки се поделени на два еднакви дела, а парчето 2 е поголемо од парчето 1 и е помало од парчето 5). Значи, Антонио го изел парчето означено со бројот 4, а Ѓорѓи ги изел парчињата означени со броевите 1 и 5. Конечно, Васил го изел парчето означено со бројот 2.

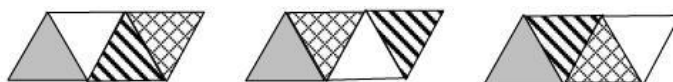


69. Дадени се две исти пирамиди. Марко по рабовите ја расекол едната пирамида и го добил триаголникот прикажан на долниот лев цртеж. Павел ја расекол другата пирамида, која е обоена на истиот начин и го добил четириаголникот во кој прв е сивиот триаголник.



Опреди го распоредот на останатите три триаголници во четириаголникот на Павел.

Решение. До сивиот триаголник може да биде секој од останатите три триаголници. Потоа, во секој од трите случаи распоредот на последните два триаголници е еднозначен. На долните цртежи се прикажани сите три случаи.

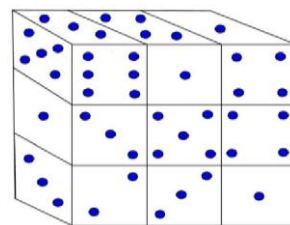


70. Коцка со димензии $2 \times 2 \times 2$ е составена со лепење на 8 коцки со димензии $1 \times 1 \times 1$. На колку сидови од малите коцки има лепило?



Решение. Имаме 8 мали коцки со по 6 сидови, што значи дека бројот на сидовите е еднаков $8 \cdot 6 = 48$. Секој сид на големата коцка содржи по 4 сидови на малите коцки и на нив нема лепило. Значи, лепило нема на $6 \cdot 4 = 24$ сидови, од каде добиваме дека лепило има на $48 - 24 = 24$ сидови.

71. Зар е коцка на чии страни се наоѓаат од 1 до 6 точки распоредени така што збирот на точките на спротивните страни е еднаков на 7. На цртежот десно е прикажана фигура направена од 9 зарови.



Опреди го збирот на точките кои се наоѓаат на невидливите страни на заровите од кои е составена фигурата.

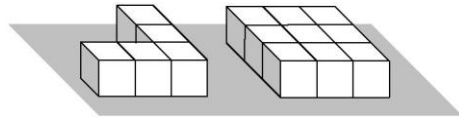
Решение. Збирот на точките кои се наоѓаат на еден зар е еднаков на $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$. Фигурата е составена од 9 зарови, па затоа збирот на точките кои се наоѓаат на сите зарови е ед-

наков на $9 \cdot 21 = 189$. Збирот на точките на видливите страни на фигурата е еднаков на

$$1+4+4+1+3+5+1+4+2+3+6+3+3+1+5=46.$$

Според тоа, збирот на точките кои се наоѓаат на невидливите страни на зарчињата е еднаков на $189 - 46 = 143$.

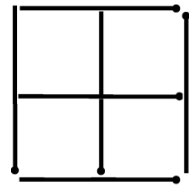
72. Фигурите прикажани на цртежот десно се направени од идентични коцки. Едната фигура е 32 грама потешка од другата. Колку тежат заедно двете фигури?



Решение. Во едната фигура има 4 коцки повеќе отколку во другата. Значи, една коцка тежи $32 : 4 = 8 \text{ g}$. Двете фигури заедно имаат $9 + 5 = 14$ коцки. Според тоа, нивната вкупна тежина е $14 \cdot 8 = 112 \text{ g}$.

73. Кој е најголемиот можен број правоаголници кои може да се формираат со помош на шест кибритчиња? Кибритчињата не смее да се кршат.

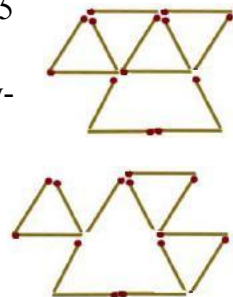
Решение. Најголем број правоаголници ќе добиеме ако кибритчињата ги поставиме како на цртежот десно. Во случајов имаме 4 единечни правоаголници, 2 хоризонтални и 2 вертикални правоаголници составени од по два правоаголници и 2 правоаголници составени од четири правоаголници. Според тоа, најголемиот број правоаголници кои може да се состават со шест кибритчиња е еднаков на $4 + 4 + 1 = 9$.



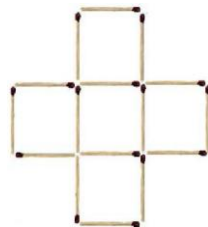
74. Фигурата прикажана на цртежот десно содржи 5 триаголници.

Премести две чкорчиња така што новата фигура ќе содржи 4 триаголници

Решение. Постојат повеќе решенија на задачата. Едно решение е прикажано на цртежот десно. Обиди се да најдеш барем уште едно решение.

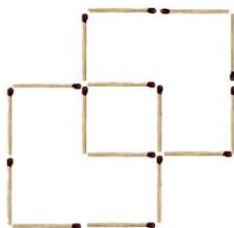


75. Од кибритени чкорчиња е направена фигурата која е прикажана на цртежот десно и која содржи 5 квадрати.



- а) Премести 4 чкорчиња така што ќе добиеш 3 квадрати и нема да има отворена линија.
б) Премести 4 чкорчиња така што ќе добиеш 6 квадрати и нема да има отворена линија.

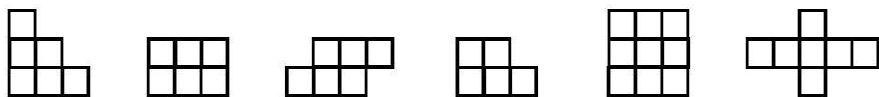
Решение. а) Решението на задачата е дадено на долниот цртеж лево.



- б) Решението на задачата е дадено на долниот цртеж десно.

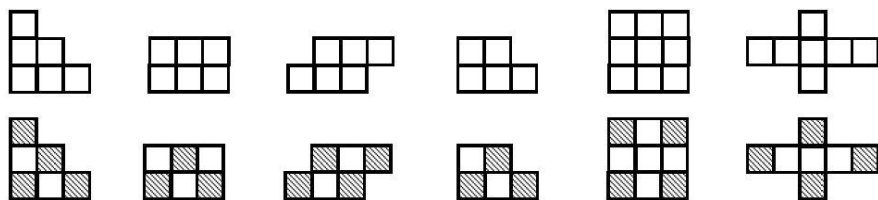


76. Секоја од фигурите на долниот цртеж е составена од квадрати чии 4 страни се 4 кибритени чкорчиња.



Од првата фигура тргни 2 чкорчиња така што ќе останат 4 квадрати; од втората фигура тргни 5 чкорчиња така што ќе останат 3 квадрати; од третата фигура тргни 2 чкорчиња така што ќе останат 4 квадрати; од четвртата фигура тргни 3 чкорчиња така што ќе останат 3 квадрати; од петтата фигура тргни 8 чкорчиња така што ќе останат 4 квадрати; од шестата фигура тргни 6 чкорчиња така што ќе останат 4 квадрати. После тргнувањето на некои чкорчиња не смее да остане отворена линија (висечки чкорчиња).

Решение. На долните цртежи прво се дадени фигурите какви што се на почетокот, а потоа се дадени фигурите кои се добиваат после отстранувањето на соодветниот број чкорчиња (тоа се фигурите составени од штрафираните квадрати).



IV ЛОГИКА И КОМБИНАТОРИКА

IV.1. ЕЛЕМЕНТАРНИ ЛОГИЧКИ ЗАДАЧИ

1. На почетната станица во еден автобус се качиле 45 патници. На втората станица слегле 17, а се качиле 29 патници. На следната слегле тројца, а се качиле петмина. На следната станица слегле 27, а се качиле тројца. Следната станица е последната, на која сите патници слегле. Колку станици има на линијата на која сообраќа автобусот?

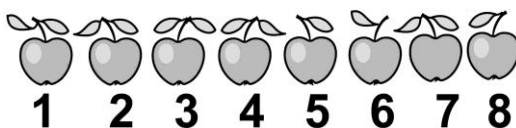
Решение. Треба да ги изброиме станиците, кои вклучувајќи ги почетната и последната се вкупно 5.

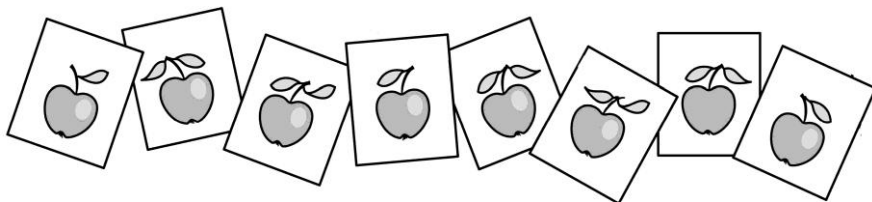
2. Мартин има брат, кој секогаш се облекува различно од него. Затоа неговите обувки и алишта се разликуваат од оние на Мартин (цртеж долу). Како се вика братот на Мартин?



Решение. Од цртежот гледаме дека само обувките на Максим и Алекса се различни од обувките на Мартин. Но, Алекса има иста марама како и Мартин, па останува братот на Мартин да е Максим. Навистина, Максим носи чорапи, а Мартин не носи чорапи, Максим има шарени панталони, а Мартин има црни панталони, Максим има шарена марама, а Мартин има еднобојна марама и Максим има мајца со јака, а додека мајцата на Мартин нема јака. Значи, братот на Мартин е Максим.

3. Горјан на 8 јаболка (цртеж десно) го фотографирал одразот во огледало и изработил фотографија од секое од јаболко (цртеж долу).





Јована заменила една од фотографиите со нејзина фотографија. Кое јаболко не се наоѓа на фотографиите после замената? Која фотографија е на Јована?

Решение. Седмото јаболко нема дамка и тоа е на седмата фотографија. Јаболката 5, 6 и 8 имаат по еден лист и тие се наоѓаат на четвртата, првата и осмата фотографија одлево. Јаболкото 1 се наоѓа на третата фотографија одлево, јаболкото 4 се наоѓа на втората фотографија одлево, јаболкото 2 се наоѓа на петтата фотографија одлево. Значи, на фотографиите не е јаболкото 3, а шестата фотографија одлево е на Јована.

4. Торта се сече на дванаесет парчиња, при што секое сечење почнува од центарот на тортата. Колку сечења се направени?

Решение. Со првото сечење не добиваме парче торта. Сега со следните десет сечења добиваме по едно парче торта, а со дванаесеттото сечење добиваме две парчиња торта. Значи, имаме 12 сечења за да се добијат 12 парчиња торта.

5. Торта се сече на девет парчиња, при што секое сечење почнува од центарот на тортата. Колку сечења се направени?

Решение. Аналогно како во решението на претходната задача добиваме дека се потребни 9 сечења за да се добијат 9 парчиња торта.

6. Определи ги петтиот и шестиот член во низата:

НЕДЕЛА, ВТОРНИК, ЧЕТВРТОК, САБОТА.

Решение. Почнувајќи од недела деновите на седмицата се запишани преку еден, па затоа петтиот член на низата е ПОНЕДЕЛНИК, а шестиот член на низата е СРЕДА.

7. Месеците во долната низа се подредени според определено правило:

јули, декември, мај, октомври, ____, ____.

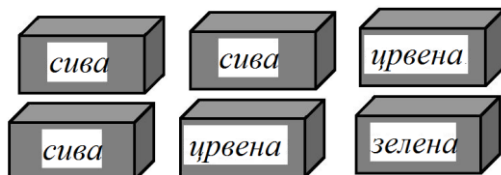
Кои два месеци треба да се запишани на линиите?

Решение. Пет месеци после јули е декември, пет месеци после декември е мај и пет месеци после мај е октомври. Понатаму, пет месеци после октомври е март, а пет месеци после март е август. Значи, на местото на цртите треба редоследно да стојат месеците март и август.

8. Костадин има 6 синџири со по 4 алки во секој синџир. Определи го најмалиот број алки кои треба Костадин да ги расече, а потоа да ги поврзи за да добие еден синџир.

Решение. Треба да поврземе 6 синџири, секој од кои има 4 алки во еден синџир. Тоа можеме да го направиме со 4 поврзувања. Навистина, ако едниот синџир го поделиме на 4 алки, тогаш ни остануваат 5 синџири, за чие поврзување ни се доволни токму алките кои ги добивме со разделувањето на шестиот синџир.

9. Една зелена, две црвени и три сиви колички се поставени по една во секоја од кутиите прикажани на цртежот десно. Бојата на



количката во секоја кутија не соодветствува на натписот на кутијата. Кој е најмалиот број кутии кои мора да ги отвориме за да може со сигурност да се определи бојата на количката во секоја од кутиите?

Решение. Јасно, сивите колички се наоѓаат во кутиите на кои пишува црвена и зелена. Сега за да определиме каде се црвените и зелената количка доволно е да отвориме две кутии на кои пишува сива (зошто?). Значи, треба да отвориме само две кутии.

10. Секое од осум деца самостојно нацртало најмалку по 17 цртежи. Децата заедно нацртале 140 цртежи. Колку цртежи може најмногу да нацрта некое од децата?

Решение. Седум од децата нацртале најмалку $7 \cdot 17 = 119$. Според тоа, осмото дете најмногу може да нацрта $140 - 119 = 21$ цртеж.

11. Петар купил бомбони кои биле со иста опаковка, но со различен вкус. Девет бомбони биле со вкус на карамела, седум со вкус на чоколадо и 5 со вкус на јагода. Колку бомбони треба да изеде Петар за да ги проба сите три вида бомбони?

Решение. Ако Петар изеде $7+9=16$ бомбони, тогаш сите може да бидат со вкус на карамела или чоколадо, т.е. да нема ниту еден бомбон со вкус на јагода. Ако изеде 17 бомбони, тогаш сигурно ќе изеде најмалку по еден бомбон со трите различни вкусови.

12. Матеј има 27 еднакви на изглед колачи. Осум од колачите се со вкус на вишни, други 5 се со вкус на чоколадо, а останатите се со вкус на банана. Кој е најмалиот број колачи кои треба Матеј да ги поклони на неговата мајка за да биде сигурен дека меѓу нив има најмалку 5 колачи со ист вкус?

Решение. Колачите со вкус на банана се $27-8-5=14$. Ако Матеј на неговата мајка ѝ поклони 12 колачи, тогаш може да се случи од секој вид да има по 4 колачи. Јасно, ако поклони 13 колачи, тогаш од еден вид мора да има најмалку 5 колачи.

13. Имам 16 карти за играње: 4 аса, 4 кралеви, 4 дами, 3 џандари и 1 десетка. Колку карти треба да извлечам за да сум сигурен дека меѓу нив има три еднакви?

Решение. Ако извлечам 9 карти, тогаш може да се случи тоа да е десетката и по 2 од останатите карти, што значи дека не е сигурно дека ќе извлечам три еднакви карти. Ако извлечам 10 карти, тогаш сигурно ќе извлечам 3 аса или 3 кралеви или 3 дами или 3 џандари.

14. Магдалена има 23 еднакви на изглед луковици од зумбули и тоа: девет се за розеви зумбули, шест се за лилјакови, а останатите се за бели зумбули. Колку луковици најмалку треба да засади Магдалена, за да биде сигурна дека од секој вид засадила барем по три зумболи?

Решение. Магдалена има $23-9-6=8$ луковици од бели зумбули. Ако таа засади 19, бидејќи $19=9+8+2$ може да се случи

тие да се: 9 розеви, 8 бели и 2 лилјакови. Но, ако засади 20, тогаш меѓу нив сигурно ќе има барем по 3 зсмбули од секој вид.

15. Во едн кутија има 58 еднакви по големина топки и тоа: 14 се црвени, 15 се сини, 16 се жолти, а останатите се зелени. Определи го најмалиот број топки кои треба без гледање да се земат за да е сигурно дека меѓу земените топки барем 12 се еднобојни.

Решение. Во кутијата има $58 - (14 + 15 + 16) = 58 - 45 = 13$ зелени топки. Ако од кутијата без гледање извадиме 44 топки, тогаш може да се случи топките да се: 11 црвени, 11 сини, 11 жолти и 11 зелени. Но, ако извадиме 45 топки тогаш сигурно ќе има 12 еднобојни топки.

16. Елеонора купила бомбониера во која 18 бомбони се со вкус на чоколадо, 15 со вкус на ментол, 12 со вкус на малина и 7 со вкус на јагода. Сите бомбони се со иста опаковка. Кој е најмалиот број бомбони што треба да се извадат од бомбониерата за да е сигурно дека меѓу нив има барем по пет бомбони од најмалку три вида?

Решение. Најлошиот случај е ако ги извадиме сите бомбони со вкус на чоколадо и ментол и извадиме по 4 бомбони со вкус на малина и јагода. Тогаш нема да имаме барем по пет бомбони од најмалку три вида. Значи, ако извадиме $18 + 15 + 4 + 4 = 41$ бомбони може да се случи да немаме барем по пет бомбони од најмалку три вида, што не може да се случи ако извадиме $41 + 1 = 42$ бомбони.

17. Во една бомбониера има 7 бомбони со вкус на чоколадо, 8 со вкус на ментол и 9 со вкус на јагода. Бомбоните се запаковани во исти опаковки. Кој е најмалиот број бомбони што треба да го земеме за да со сигурност меѓу нив има:

- а) барем три со ист вкус,
- б) барем три со различен вкус?

Решение. а) Ако земеме 6 бомбони, тогаш може да се случи од секој вкус да има по 2 бомбона. Ако земеме 7 бомбони, тогаш сигурно ќе има 3 бомбони со ист вкус.

б) Ако земеме 17 бомбони, може да се случи сите да се со вкус на ментол или јагода. Ако земеме 18 бомбони, тогаш сигурно ќе има барем три со различен вкус.

18. Седум златни, 14 сребрени и 21 бронзен медал се ставени во еднакви кутии (по еден медал во кутија). Колку најмалку кутии треба да отвориме за сме сигурни дека ќе извадиме:

а) барем пет исти медали,

б) по еден медал од секој вид?

Решение. а) Ако отвориме 12 кутии, тогаш може да се случи да имаме по 4 медали од секој вид, а ако отвориме 13 кутии тогаш ќе имаме пет медали од еден вид.

б) Ако отвориме 35 кутии, тогаш може да се случи да имаме 14 сребрени и 21 бронзен медал, т.е. да нема златен медал. Затоа треба да отвориме 36 кутии.

19. Марко има корпа со овошје во која има 7 јаболка, 8 круши и 12 сливи. Меѓу плодовите 2 јаболка, 5 круши и 9 сливи се зрели, а другите се незрели. Колку најмалку плодови треба без гледање да земе Марко за да е сигурен дека зел барем еден зрел плод?

Решение. Меѓу плодовите што не се дозрели има $7-2=5$ јаболка, $8-5=3$ круши и $12-9=3$ сливи. Ако Марко земе $5+3+3=11$ плодови, тогаш може да се случи да ги земе точно незрелите плодови. Но, ако земе 12 плодови, тогаш сигурно еден од нив ќе биде зрел.

20. На шест дрвја има вкупно 53 јаболка, при што нема дрво на кое нема јаболка. На секое дрво има различен број јаболка.

Колку најмалку јаболка може да има на дрвото со најголем број јаболка?

Решение. Дрвото со најголем број јаболка ќе има најмалку јаболка, ако останатите дрвја имаат најголем можен број јаболка. Тоа е случај кога почнувајќи од дрвото со најмалку јаболка секое следно дрво има за 1 јаболко повеќе. Бидејќи,

$$1+2+3+4+5=15 \text{ и } 53-15=38,$$

а $38=6\cdot 6+2$ добиваме дека дрвото со најмалку јаболка ќе има 6 јаболка, а бројот на јабоката на дрвјата може да биде: 6, 7, 8, 9,

10 и 13, или 6, 7, 8, 9, 11 и 12. Јасно, во вториот случај дрвото со најмногу јаболка има помал број јаболка, па затоа одговорот на задачата е 12 јаболка.

21. Сите двоцифрени броеви се запишани на 90 картончиња (по еден број на картонче). Определи го најмалиот број картончиња што треба да се изберат без гледање за да сме сигурни дека меѓу нив има две картончиња со еднаков збир на цифри.

Решение. Збирот на цифрите на секој двоцифрен број е број од 1 до 18. Ако избереме 18 картончиња, тогаш може да се случи да ги избереме броевите: 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 29, 39, 49, 59, 69, 79, 89 и 99, кај кои сите зборови на цифрите се различни. Меѓутоа, тоа не е можно ако избереме 19 картончиња. Значи, бараниот најмал број картончиња е 19.

22. Во племето Убубунту деновите на седмицата имаат имиња на животни. Денес е 5 март и е денот на мачката, а 8 март е денот на кучето. Денот на козата е меѓу денот на овцата и денот на свињата. Денот на кравата е точно пред денот на коњот. После кој ден е денот на кравата?

Решение. Меѓу 5 и 8 март има два дена. Понатаму, денот на козата е меѓу деновите на овцата и свињата, па затоа тие се три последователни денови и не може да се на 6 и 7 март. Останува деновите на коњот и кравата да се 6 и 7 март и бидејќи денот на кравата е пред денот на коњот, добиваме дека тој е на 6 март, што значи дека е пред денот на мачката.

23. На плажата има 9 кули за спасувачи. Меѓу секои две соседни кули има по 13 песочни замоци. Колку песочни замоци има меѓу првата и последната кула за спасувачи?

Решение. Меѓу 9 кули има 8 растојанија со по 13 песочни замоци. Според тоа, вкупниот број песочни замоци меѓу првата и последната кула за спасувачи е еднаков на $8 \cdot 13 = 104$.

24. Елена во еден ред посадила лалиња, а потоа меѓу секои две лалиња посадила по еден каранфил. По една недела таа меѓу секои две цвеќиња посадила по една момина солза. Горјан избројал

дека мајка му посадила 93 цвеќиња. Колку лалиња посадила Елена?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-напред. Момините солзи се за 1 помалку од останатите цвеќиња, што значи дека Елена посадила $(93-1):2=92:2=46$ момини солзи. Таа вкупно посадила $93-46=47$ лалиња и каранфили. Каранфилите се за 1 помалку од лалињата, што значи дека Елена посадила $(47-1):2=46:2=23$ каранфили. Конечно, таа посадила $47-23=24$ лалиња.

25. Во ред за сладолед чекаат четири деца: Петар, Васил, Олгица и Марија. Знаеме дека девојчињата не се едно зад друго. Васил е одма по Олгица, а Марија е одма по Петар. Како се наредени децата во редот?

Решение. Децата да ги означиме со почетните букви на нивните имиња. Бидејќи Васил е одма по Олгица, а Марија одма по Петар, можни се само два случаја: ОВПМ и ПМОВ. Вториот случај не е можен, бидејќи според условот на задачата девојчињата не се едно зад друго. Според тоа, редоследот во кој се децата е: Олгица, Васил, Петар и Марија.

26. Неколку карти, меѓу кои има само една дама, се поставени една врз друга. Ако броиме одгоре-надолу дамата е четиринесетта, а ако броиме оддолу-нагоре таа е дваесет и деветта. Колку карти има во купчето?

Решение. Над дамата има $14-1=13$ карти, а под неа има $29-1=28$ карти. Според тоа, во купчето има $13+28+1=42$ карти.

27. Дваесет и пет ученици од IV^a одделение се построиле еден до друг во редица. Десно од Марко има 19 ученици и тие се тројца помалку од учениците на десната страна на Марија. Колку ученици има меѓу Марко и Марија?

Решение. Од десната страна на Марија има $19+3=22$ ученици. Од $25-22=3$ заклучуваме дека Марија е трета одлево. Лево од

Марко има 19 ученици, што значи дека меѓу Марко и Марија има $19 - 3 = 16$ ученици.

28. Во ред за да купат сладолед Ана е точно пред Бојан, а тој е точно пред Виолета. Пред Виолета има 15 деца, а Ана е осма кога броиме одназад-нанапред. Колку деца чекаат да купат сладолед?
Решение. Пред Виолета има 15 деца, меѓу кои се Ана и Бојан. Значи, пред Ана има 13 деца, а зад Ана има 7 деца. Значи, вкупниот број деца во редот е еднаков на $13 + 7 + 1 = 21$.

29. Ангел и Тимотеј патувале во два соседни вагони на еден воз. Ангел патувал во седумнаесеттиот по ред вагон од почетокот на возот, а Тимотеј во десеттиот по ред вагон од крајот на возот. Кој е најмалиот можен број вагони што може да ги има овој воз?
Решение. Бидејќи вагоните на Ангел и Тимотеј се соседни, заклучуваме дека возот ќе има најмал број вагони, ако вагонот на Тимотеј е пред вагонот на Ангел и потоа има уште 9 вагони. Значи, вагонот на Тимотеј треба да е шеснаесетти од почетокот на возот и возот ќе има $16 + 9 = 25$ вагони.

30. Емил и Илија се договориле да се качат во осмиот вагон на возот. Меѓутоа, Емил ги броел вагоните од исток кон запад, а Илија од запад кон исток, и двајцата се качиле во различни вагони, меѓу кои имало уште 4 други вагони. Колку вагони имал возот, ако Емил бил на запад од Илија?
Решение. Бидејќи Емил ги броел вагоните од исток кон запад, а се качил во вагон кој бил на запад од Илија, заклучуваме дека во осумте вагони кои ги избројал Емил се наоѓаат вагонот во кој е Илија и четирите вагони кои се наоѓаат меѓу двајцата. Слично, во осумте вагони кои ги избројал Илија се наоѓаат возот во кој е Емил и четирите вагони кои се наоѓаат меѓу двајцата. Оттука следува дека возот има $8 + 8 - 1 - 1 - 4 = 10$ вагони.

31. Неколку деца после часовите отишле на сладолед. Наташа рекла: „Ако не ме броите мене, тогаш момчињата се повеќе од девојчињата“, а Костадин рекол: „Ако не ме броите мене, тогаш девојчињата се повеќе од момчињата.“ Славчо забележал: „Двај-

цата сте во право!“ Кој најмалиот број момчиња и девојчиња што биле на сладолед?

Решение. Во разговорот учествувале 2 момчиња и 1 девојче, па затоа биле најмалку 2 момчиња. Но, тогаш од изјавата на Наташа следува дека девојчињата не се помалку од 2. Јасно, ако се 2 момчиња и 2 девојчиња, тогаш се исполнети условите на задачата и тоа е најмалиот број момчиња и девојчиња кои биле на сладолед.

32. Неколку деца чекаат во ред за купување сладолед. Јасна е осма во редот кога се брои однапред-назад. Непосредно пред неа е Елена, која е непосредно зад Цветанка. Непосредно пред Цветанка е Христина, која е шеста во редот ако се брои одназад-напред. Колку деца чекаат во редот за сладолед?

Решение. Девојчињата да ги означиме со почетните букви на нивните имиња. Од условот на задачата следува дека тие се распоредени во следниот редослед ХЦЕЈ. Бидејќи Јасна е осма во редот кога се брои однапред назад, заклучуваме дека пред Христина има 4 деца. Бидејќи Христина е шеста кога се брои одназад-напред заклучуваме дека после Јасна има 2 деца. Според тоа, во редот има $4+4+2=10$ деца.

33. Се сретнале три мачори: Дивко, Црнко и Шаренко. Едниот бил со сини очи, другиот со жолти, а третиот има едно жолто и едно зелено око. Ако Црнко има такви очи какви што има Дивко, тогаш мачорите заедно ќе имаат по две зелени, сини и жолти очи. Каква боја на очите има секој од мачорите?

Решение. Јасно, при промена на бојата на сините или жолтите очи не може мачорите заедно да имаат по две очи од секоја од трите бои. Тоа може да се постигне ако мачорот со две жолти очи има жолто и зелено око. Според тоа, Дивко има шарени очи, Црнко има жолти очи и Шаренко има сини очи.

34. Еден зад друг во ред се распоредени 99 лажливци и витези. Лажливците секога лажат, а витезите секогаш ја говорат вистината. Секој од нив, без првиот кажал дека пред него стои лажливец. Колку витези има во редицата?

Решение. За лажливецот мора да стои витез, а зад витезот мора да стои лажливец. Ако редот започнува со витез, тогаш бидејќи $99 - 1 = 2 \cdot 49$ во редот им $49 + 1 = 50$ витези. Ако редот започнува со лажливец, тогаш има $98 : 2 = 49$ витези.

35. Учителката Мирјана за својот роденден купила бомбони за да ги почести учениците од IV^a одделение. Ако на секое момче му даде по 2 бомбони, а на секое девојче му даде по 3 бомбони, тогаш ќе ѝ недостасува 1 бомбона. Ако на секое момче му даде по 3 бомбони, а на секое девојче му даде по 2 бомбони, тогаш ќе ѝ останат 2 бомбони. Што има во одделението повеќе, момчиња или девојчиња и за колку?

Решение. Да ги формираме можните парови од девојче и момче, а децата кои не се во пар (или се сите момчиња или се сите девојчиња) нека стојат одделно. Тогаш, без разлика како учителката Мирјана ги дели бомбоните на секој пар ќе му даде по 5 бомбони. Според тоа, разликата во поделените бомбони ја прави групата што стои одделно. Ако се поделени по 2, тогаш се потребни помалку бомбони, а ако се поделени по 3, тогаш се потребни повеќе бомбони. Јасно, разликата меѓу потребните количества е еднаква на бројот на децата во групата. Во нашиот случај, прво недостасува 1 бомбона, а потоа остануваат 2 бомбони, т.е. разликата е $1 + 2 = 3$ бомбони. Значи, во групата има 3 деца и тоа се девојчиња.

IV.2. ЛОГИЧКИ ГЛАВОБОЛКИ

36. Ирена, Теодора и Елена имаат по една мајца. Мајците се бела, жолта и црвена. Елена нема бела мајца. Името на девојчето со црвена мајца започнува со согласка. Каква боја е мајцата на Ирена?

Решение. Само името на Теодора започнува со согласна, што значи дека Теодора има црвена мајца. Сега мајцата на Елена не е

ниту црвена ниту бела, што значи дека Елена има жолта мајца. Конечно, Ирена има бела мајца.

37. Ана, Даниела, Катерина и Јана во косите имаат панделка, шнола, ластиче и дијадема, при што секоја има само по еден украс. Јана и Ана немаат ниту панделка, ниту шнола. Панделката не е кај Даниела. Ластичето не е кај Јана. Што има Даниела?

Решение. Кај Јана не се панделката, шнолата и ластичето. Значи, кај Јана е дијадемата. Според тоа, кај Јана не се панделката, шнолата и дијадемата, па затоа кај неа е ластичето. Сега, кај Даниела не се ластичето, дијадемата и панделката, што значи кај неа е шнолата.

38. Весна, Живка и Десанка дома имаат куче, маче и папагал, при што секоја има само едно животно. Весна кажала дека има куче. Живка кажала дека нема куче, а Десанка кажала дека нема маче. Притоа само едно од трите девојчиња говорело вистина. Кое девојче има маче?

Решение. Весна не ја говори вистината, бидејќи тогаш и Живка ја говори вистината. Ако Живка ја говори вистината, тогаш бидејќи Весна лаже добиваме дека таа нема куче, па затоа кучето е кај Десанка. Но, тогаш Десанка ја говори вистината што не е можно. Значи, Весна и Живка лажат, а Десанка ја говори вистината. Според тоа, Живка има куче, Десанка има папагал и Весна има маче.

39. Шест топки – бела, жолта, црвена, црна, сина и зелена се наоѓаат во две пакувања. Белата и жолтата топка се во едно исто пакување. Црвената и црната се во различни пакувања. Сината топка е во пакувањето со црната, но не е со зелената. Во пакувањето со црвената топка има само уште една топка. Определи ја бојата на оваа топка.

Решение. Црвената и црната топка се во различни пакувања, па затоа заедно со црвената топка е топката која не е со црната топка. Сината и црната топка се во исто пакување, во кое не е зелената топка. Затоа, во пакувањето со црвената топка е зелената топка.

40. Наум и Бранко имаат пет разнобојни камиончиња. Синото и зеленото се на еден од нив. Жолтото и црвеното се на различни сопственици. Наум има само две камиончиња. Каква боја може да бидат камиончињата на Наум?

Решение. Бидејќи синото и зеленото се на еден сопственик, а жолтото и црвеното се на различни сопственици, а Бранко има три камиончиња заклучуваме дека тие се: сино, зелено и жолто, или сино, зелено и црвено. Значи, Наум има две камиончиња: едното е жолто или црвено, а другото има боја која не е спомената.

41. Секој од браќата Огнен и Дамјан лаже само на својот роденден, а во другите денови ја говори вистината. Огнен рекол: „Денес е 1 април, а утре е твојот роденден.“ На тоа Дамјан му одговорил: „Денес е твојот роденден, а утре е 1 април.“ Кога е роден Огнен?

Решение. Нека претпоставиме дека Огнен кажал вистина. Тоа значи дека утре е роденден на Дамјан и денес е 1 април. Значи, денес не е роденден на Дамјан, па затоа тој ја говори вистината. Последното значи дека утре е 1 април, што е противречност. Нека Огнен лаже. Тоа значи дека денес е неговиот роденден, па затоа Дамјан ја говори вистината. Според тоа, утре е 1 април, а денес 31 март е роденденот на Огнен.

42. Љупчо секогаш дава две изјави, едната од кои е вистинита, а другата е неистинита. Денес рече: „Вчера беше среда. Задутре ќе биде вторник.“ Малку размисли и рече: „Денес е среда. Вторник беше завчера.“ Кој ден од седмицата е денес?

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на табела.

	Прво кажување		Второ кажување	
	Прв дел	Втор дел	Прв дел	Втор дел
Понеделник	Неточно	Неточно	Неточно	Неточно
Вторник	Неточно	Неточно	Неточно	Неточно
Среда	Неточно	Неточно	Точно	Неточно
Четврток	Точно	Неточно	Неточно	Точно
Петок	Неточно	Неточно	Неточно	Точно

Сабота	Неточно	Неточно	Неточно	Неточно
Недела	Неточно	Точно	Неточно	Неточно

Забележуваме дека и во двата случаја само во четврток по една изјава е вистинита и неvistинита, што значи дека денес е четврток.

43. Четири девојчиња, Васка, Ирена, Магдалена и Теодора имаат сина, зелена, жолта и црвена кошула. Кошулата на Васка не е сина, Теодора нема ниту црвена ниту сина кошула, а кошулата на Ирена е жолта. Кое девојче има црвена кошула?

Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на табела. Во заедничкото поле на една редица (име на девојче) и колона (боја на кошула) ќе ставиме 1 ако девојчето има кошула со соодветната боја, а 0 во спротивен случај. Од условот на

	С	З	Ж	Ц
В	0			
И			1	
М				
Т	0			0

задачата ја добиваме табелата десно. Сега, во останатите три полиња на редот И и во останатите останатите три полиња на колоната Ж треба да ставиме 0. Значи, во заедничкото поле на колоната З и редот Т треба да стои 1, па затоа во останатите две полиња на колоната З се нули. Сега е јасно дека во заедничкото поле на редот В и колоната Ц стои 1, и во заедничкото поле на редот М и колоната С стои 1. Значи, црвена кошула има Васка, сина кошула има Магдалена и зелена кошула има Теодора.

	С	З	Ж	Ц
В	0	0	0	1
И	0	0	1	0
М	1	0	0	0
Т	0	1	0	0

44. Филип, Борис и Благоја учествувале на крос и ги освоиле првите три места. Филип рекол дека го освоил второто место. Борис рекол дека Филип го освоил првото место, а Благоја рекол дека тој победил на натпреварот. Познато е дека освојувачот на третото место кажал вистина. Кое место го освоил Благоја?

Решение. Филип рекол дека го освоил второто место, а освојувачот на третото место кажал вистина, па затоа Филип не го освоил третото место. Слично заклучуваме дека Благоја не го ос-

воил третото место. Според тоа, останува дека Борис го освоил третото место и бидејќи тој кажал вистина, добиваме дека Филип го освоил првото место. Значи, Благоја го освоил второто место.

45. Се сретнале тројца жители на островот на витезите и лажговците. Првиот жител изјавил: „Сите тројца сме лажливци.“ Вториот изјавил: „Сите тројца сме витези.“, а третиот молчел. Определи кој жител е витез, а кој лажливец, ако се знае дека витезите секогаш ја говорат вистината, а лажливците секогаш лажат.

Решение. Витез не може да каже дека сите тројца жители се лажливци, па затоа првиот жител е лажливец. Значи, неговата изјава е лажна, па затоа меѓу тројцата жители има барем еден витез. Но, изјавата на вториот жител е лажна, бидејќи првиот жител е лажливец. Значи и овој жител е лажливец. Останува третиот жител да е витез.

46. Разговараат тројца пријатели.

Гроздан кажал: „Моите реченици содржат помалку од шест збора.“

Алекса кажал: „Сите реченици со шест збора се неистинити.“

Мартин кажал: „Барем еден од нас денес лаже.“

Определи кој лаже, а кој ја говори вистината.

Решение. Реченицата на Гроздан содржи 7 збора, што значи дека тој лаже. Според тоа, барем еден од тројцата лаже, па затоа Мартин ја говори вистината. Реченицата на Мартин содржи точно шест збора, па затоа не се сите реченици со шест збора неистинити. Последното значи дека Алекса исто така излагал.

47. Марсовците имаат по 3, 4 или 5 уши. Тие што имаат 4 уши секогаш лажат, а тие што имаат непарен број уши секогаш ја говорат вистината. Марсовците Арс, Барс и Варс рекле:

Арс: *Тројцата заедно имаме 12 уши.*

Барс: *Тројцата заедно имаме 13 уши.*

Варс: *Тројцата заедно имаме 14 уши.*

Колку уши заедно имаат Арс, Барс и Варс?

Решение. Ако сите тројца лажат, тогаш треба да имаат 12 уши. Но, тогаш Арс ја говори вистината, што не е можно. Значи, најмалку еден ја говори вистината. Но, исказите на тројцата се противречни, па затоа само еден ја говори вистината. Значи, сите тројца заедно имаат или $3+4+4=11$ или $4+4+5=13$ уши. Првиот случај отпаѓа, бидејќи ниту еден од тројцата не кажал дека имаат 11 уши, т.е. ниту еден не кажал вистина. Значи, тројцата заедно имаат 13 уши и тогаш Барс кажал вистина, а Арс и Варс кажале лага.

48. Сношти четири телевизиски станици кажаа по две тврдења за времето денес наутро во Скопје:

TB1: Ќе врне. Температурата ќе биде 7°C .

TB2: Нема да врне. Температурата ќе биде помала од 9°C .

TB3: Ќе врне. Температурата ќе биде 6°C .

TB4: Нема да врне. Температурата ќе биде поголема од 6°C .

Секоја од станиците искажа по едно точно и по едно грешно тврдење. Колку степени е утрово наутро температурата во Скопје?

Решение. Вторите тврдења на TB1 и TB3 не може да се истовремено точни, па затоа првото тврдење на овие станици е точно. Значи, првото тврдење на TB2 и TB4 не е точно, а вторите се точни. Според тоа, температурата е поголема од 6°C , помала од 9°C и не е еднаква на 7°C , од каде следува дека температурата е еднаква на 8°C .

49. Тројца витези ја победија ламјата Огненка.

Првиот витез рече: „Ламјата имаше повеќе од 99 глави!“

Вториот витез рече: „Ламјата имаше повеќе од 100 глави!“

Третиот витез рече: „Ламјата имаше повеќе од 101 глава!“

Само двајца витези кажаа вистина. Колку глави имаше Огненка?

Решение. Огненка немала 99 или помалку глави, бидејќи тогаш изјавите на сите витези не се вистинити. Ако Огненка имала 100 глави, тогаш само изјавата на првиот витез е вистинита, што не е точно. Ако имала 101 глава, тогаш само изјавите на првиот и

вториот витез се вистинити. Ако Огненка имала 102 или повеќе глави, тогаш изјавите на сите три витези се вистинити што не е точно. Значи, Огненка имала 101 глава.

50. Еден фудбалски натпревар завршил со резултат 1:0. По натпреварот четири играчи ги дале следниве изјави.

Емил: „Сашо даде прекрасен гол.“

Сашо: „На натпреварот јас не дадов гол.“

Никола: „Јас дадов гол.“

Петар: „Голот го даде Емил или Сашо“

Еден од овие четири играчи го дал голот. Кој го дал голот, ако се знае дека само една изјава е вистинита?

Решение. Изјавите на Емил и Сашо се спротивни една на друга, па затоа една од овие две изјави е вистинита. Тоа значи дека изјавите на Никола и Петар не се вистините. Од изјавата на Никола следува дека тој не го дал голот, а од изјавата на Петар следува дека ниту Емил, ниту Сашо го дал голот. Според тоа, голот го дал Петар.

51. Ангел, Бојан, Ванчо и Горјан играат фудбал. Во текот на играта еден од нив го скршил стаклото на прозорецот на куќата на дедо Никола. На прашањето кој го скршил стаклото тие одговориле:

Ангел: „Не сум јас!“

Бојан: „Не сум јас!“

Ванчо: „Бојан лаже!“

Горјан: „Ванчо го скриши стаклото!“

Ако се знае дека само еден ја говори вистината, определи кој го скршил стаклото.

Решение. Изјавите на Бојан и Ванчо не може да се истовремено невистинити, бидејќи тие се спротивни една на друга. Според тоа, или Бојан ја говори вистината или Ванчо ја говори вистината. Тоа значи дека Ангел лаже, односно дека тој го скршил стаклото.

52. Ангелина, Виолета и Елена се на различна возраст. Најстарата кажала дека се вика Елена. Средната кажала дека Ангелина е најмлада. Најмладата кажала дека Виолета е најстара. Познато е

дека изјавата на Виолета е вистинита. Подреди ги девојчињата по возраст, почнувајќи од најстарата.

Решение. Виолета не е ниту најстара, ниту најмлада, бидејќи според изјавите таа во овие случаи би кажала лага, а таа кажала вистина. Значи, Виолета е средна и како нејзината изјава е вистинита, заклучуваме дека Ангелина е најмлада. Според тоа, Елена е најстара, т.е. бараниот редослед е: Елена, Виолета и Ангелина.

53. Секој од четворицата пријатели Стојан, Киро, Никола и Бранко или секогаш лаже или секогаш ја говори вистината. Секој од нив има или круша или јаболко. Тие ги дале следниве изјави.

Стојан: „Имам јаболко. Бранко има круша.“

Киро: „Имам круша. Денес е вторник.“

Никола: „Стојан има јаболко. Денес е петок.“

Бранко: „Имам круша. Киро има круша.“

Колку од овие луѓе секогаш лажат?

Решение. Киро и Никола дале различни изјави за тоа кој ден е денес, па затоа еден од нив е лажго.

Нека Киро е лажго. Бидејќи тој секогаш лаже, заклучуваме дека тој има јаболко. Понатаму, Бранко кажал дека Киро има круша, што значи дека и тој е лажго, па затоа тој има јаболко. Но, Стојан рекол дека Бранко има круша, што значи дека и Стојан е лажго, па затоа тој има круша. Конечно, Никола кажал дека Стојан има јаболко, што значи дека и тој е лажго. Според тоа, во овој случај добиваме дека сите четворица се лажговци.

Нека Никола е лажго. Бидејќи тој секогаш лаже, заклучуваме дека Стојан има круша. Но, Стојан рекол дека има јаболко, што значи дека тој е лажго, па затоа Бранко има јаболко. Сега, Бранко рекол дека тој има круша, што значи дека тој е лажго, па затоа Киро има јаболко. Конечно, Киро рекол дека има круша, што значи дека и тој е лажго. Според тоа, и во овој случај добиваме дека сите четворица се лажговци.

54. Со мојата сопруга отидов на гости, каде освен нас имаше уште два брачни пара. Некои од нас се ракуваа, но никој не се раку-

ваше сам со себе и со својата сопруга. Никои двајца меѓу себе не се ракуваа повеќе од еднаш. Го прашав секој од присутните колку пати се ракувал и добив пет различни одговори. (Никој не излага.) Колку пати се ракуваше мојата сопруга? Колку пати се ракував јас?

Решение. Секој може да се ракува со најмногу 4 лица. Затоа петте различни одговори се 0, 1, 2, 3 и 4. Притоа 4 се ракувал со сите лица со кои смеел да се ракува, но не се ракувал со 0. Тоа значи дека 4 и 0 се сопружници. Значи, 4 се ракувал со сите останати, што значи и со 1. Според тоа, 3 не се ракувал со 0 и не се ракувал со 1, бидејќи тој има едно задолжително ракување со 4. Но, тоа значи дека 3 и 1 се сопружници. Досега имаме два пара сопружници, па остануваме само јас и мојата сопруга. Според тоа, одговорот 2 е на мојата сопруга, т.е. таа се ракувала двапати. Јас не се ракувам со мојата сопруга, не се ракував со лицето 1, па останува дека се ракував со лицата 3 и 4. Според тоа, јас се ракував двапати.

55. Во три чаши се наоѓаат 12, 14 и 22 топчиња. Изедначи го бројот на топчињата во сите три чаши со само три преместувања. Преместување може да се направи само така што од една чаша се преместат во друга чаша онолку топчиња колку што веќе има во другата чаша.

Решение. Вкупно има $12+14+22=48$ топчиња, што значи дека во секоја чаша треба да има по 16 топчиња.

Ситуација после третото преместување		
Прва чаша	Втора чаша	Трета чаша
16	16	16

Задачата ќе ја решиме враќајќи се наназад. Ако на крајот во првата чаша има 16 топчиња, тоа значи дека од некоја чаша, на пример од втората во првата чаша се префрлени $16:2=8$ топчиња, а во првата и втората чаша дотогаш биле 8 и 24 топчиња, соодветно.

Ситуација после второто преместување		
Прва чаша	Втора чаша	Трета чаша
8	24	16

Во втората чаша после второто преместување се наоѓаат 24 топчиња, а тоа е можно само ако во второто преместување од некоја чаша во втората чаша се префрлени 12 топчиња. Можни се два случаја.

Ситуација после првото преместување		
Прва чаша	Втора чаша	Трета чаша
20	12	16

или

Ситуација после првото преместување		
Прва чаша	Втора чаша	Трета чаша
8	12	28

Првата ситуација после првото преместување не е можно, да се добие од почетната со само едно преместување, додека втората ситуација може да се добие со префрлање на 14 топчиња од првата во третата чаша. Според тоа, на почетокот во првата чаша имало 22 топчиња, во втората 12 и во третата 14 топчиња. Притоа:

- во првото префрлање од првата во третата чаша се префрлени 14 топчиња,
- во второто од третата во втората чаша се префрлени 12 топчиња и
- во третото од втората во првата чаша се префрлени 8 топчиња.

Преместувањата се прикажани во следнава табела.

Прва чаша	Втора чаша	Трета чаша
22	12	14
8	12	28
8	24	16
16	16	16

56. На масата во еден ред има четири монети од кои две се неисправни. Неисправните монети имаат иста тежина, но се полесни од исправните. Неисправните монети не се една до друга. Како

со едно мерење на вага без тегови ќе ги определиме неисправните монети?

Решение. Да ги означиме монетите со 1, 2, 3 и 4 (цртеж десно). Монетите 2 и 3 ги ставаме на вагата. Ако вагата е во рамнотежа, тогш неисправни се монетите 1 и 4 (неисправните монети не се една до друга). Ако е потешка монетата 2, тогаш неисправните монети се 1 и 3, а ако е потешка монетата 3, тогаш неисправните монети се 2 и 4.



57. Горјан има 2 златни, 3 сребрени и 4 бронзени монети. Една негова монета е неисправна. Притоа, ако е неисправна сребрена монета, тогаш таа е полесна од останатите сребрени монети, а ако е неисправна златна или бронзена монета, тогаш таа е потешка од соодветно од златната или бронзените монети. Како на вага без тегови Горјан само со помош на две мерења може да определи која е неисправната монета?

Забелешка. Исправните монети од различен метал може да тежат различно.

Решение. Златните и бронзените монети ќе ги поделиме на вагата, на секој тас по една златна и две бронзени монети. Можни се два случаја:

- 1) вагата не е во рамнотежа и тогаш неисправната монета е на тасот кој натежнува. Сега, на вагата ги ставаме двете бронзени монети. Повторно се можни два подслучаја:
 - ако вагата не е во рамнотежа, тогаш неисправна е бронзената монета на тасот кој натежнува,
 - ако вагата е во рамнотежа, тогаш неисправна е златната монета.
- 2) вагата е во рамнотежа и тогаш неисправната монета е сребрена. Ставаме по една сребрена монета на секој тас. Повторно се можни два подслучаја:
 - ако вагата е во рамнотежа, тогаш неисправна е сребрената монета која не е на вагата,
 - ако вагата не е во рамнотежа, тогаш неисправната монета е на подигнатиот тас.

III.3. ЗАНИМЛИВИ БРОЕЊА

58. Мартина има две блузи – бела и сина и три пантолони – бели, црни и црвени. На колку различни начини може да се облече Мартина така што блузата и пантолоните да се со различна боја?

Решение. Од долната табела

	бела	црна	црвена
бела	–	+	+
сина	+	+	+

е јасно дека Мартина може да се облече на 5 различни начини, при што блузата и пантолоните ќе бидат разнобојни.

59. Фросина има три пара летни обувки: бели, црвени и кафеави. Таа има и четири пара чорапи: бели, жолти, сини и портокалови. На колку различни начини Фросина може да облечи чорапи и чевли, но така што обувките и чорапите да се со различна боја?

Решение. Бројот на начините ќе го преброиме со помош на следнава табела:

боја на обувки	бела	црвена	кафеава
можна боја на чорапи	жолта, сина, портокалова	бела, жолта, сина, портокалова	бела, жолта, сина, портокалова
број на начини	3	4	4

Од табелата следува дека бараниот бројот е еднаков на

$$3+4+4=11.$$

60. Запиши ги сите четирицифрени броеви коишто се запишани со две петки и две седумки. Пресметај ја разликата меѓу најголемиот и најмалиот број од добиените броеви.

Решение. Бараните броеви се: 5577, 5757, 5775, 7557, 7575, 7755. Најголем од овие шест боеви е бројот 7755, а најмал е бројот 5577. Нивната разлика е $7755-5577=2178$.

61. На таблата се напишани сите трицифрени броеви. Михајло ги избришал сите броеви чиј збир на цифри е еднаков на 3. Колку броеви останале запишани на таблата?

Решение. Вкупно имаме 900 триацифрени броеви. Михајло ги избришал броевите: 102, 111, 120, 201, 210 и 300, т.е. избришал 6 броја. Значи, на таблата останале запишани $900 - 6 = 894$ броеви.

62. Испиши ги сите трицифрени броеви чиј производ на цифрите на десетките и стотките е еднаков на цифрата на единиците, а цифрата на стотките е помала од цифрата на единиците.

Решение. Од условот на задачата следува дека цифрата на стотките може да биде 1, 2, 3 или 4. Со непосредна проверка се добива дека бараните броеви се 122, 133, 144, 155, 166, 177, 188, 199, 224, 236, 248, 326, 339 и 428.

63. Определи го збирот на сите трицифрени броеви кои се запишани со цифрите 0, 5 и 9, и кај кои цифрите не се повторуваат.

Решение. Броевите кои се запишани со цифрите 0, 5 и 9, и кај кои цифрите на се повторуваат се: 509, 590, 905 и 950, а нивниот збир е 2954.

64. Со цифрите 0, 1, 2, 3 и 4 Методиј ги запишал сите двоцифрени броеви со различни цифри, а со цифрите 5, 6, 7, 8 и 9 ги запишал сите двоцифрени броеви на кои цифрата на десетките им е поголема од цифрата на единиците. Колку вкупно броеви запишал Методиј?

Решение. Со цифрите 0, 1, 2, 3 и 4 Методиј ги запишал броевите: 10, 12, 13, 14, 20, 21, 23, 24, 30, 31, 32, 34, 40, 41, 42 и 43, т.е. запишал 16 броеви.

Со цифрите 5, 6, 7, 8 и 9 Методиј ги запишал броевите 58, 59, 67, 68, 69, 75, 76, 78, 79, 84, 85, 86, 89, 94, 95, 96, 97, 98, т.е. запишал 18 броеви.

Конечно, Методиј запишал $16 + 18 = 34$ броеви.

65. а) Што има повеќе, трицифрени броеви чија цифра на единиците е 1 или трицифрени броеви чија цифра на десетките е 1?

б) Што има повеќе, трицифрени броеви чија цифра на десетките е 1 или трицифрени броеви чија цифра на стотките е 1?

Решение. а) Од 100 до 199 има 10 трицифрени броеви чија цифра на единиците е 1 и има 10 трицифрени броеви чија цифра на десетките е 1. Исто важи за броевите од 200 до 299, за броевите

од 300 до 399 ..., за броевите од 900 до 999. Според тоа, имаме $9 \cdot 10 = 90$ трицифрени броеви чија цифра на единиците е 1 и 90 трицифрени броеви чија цифра на десетките е 1. Значи, трицифрени броеви чија цифра на единиците е 1 има исто колку што има трицифрени броеви чија цифра на десетките е 1.

б) Имаме 90 трицифрени броеви чија цифра на десетките е 1, а 100 трицифрени броеви чија цифра на стотките е 1. Според тоа, бројот на трицифрените броеви чија цифра на стотките е 1 е поголем од бројот на трицифрените броеви чија цифра на десетките е 1.

66. Определи го бројот на трицифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4. Испиши ги овие броеви.

Решение. Имаме:

$$4 = 4 + 0 + 0 = 1 + 3 + 0 = 1 + 1 + 2 = 2 + 2 + 0,$$

па затоа бараните броеви се: 400, 301, 310, 103, 130, 112, 121, 211, 220 и 202. Според тоа, постојат 10 трицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 4.

67. Определи го бројот на трицифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на 5. Испиши ги овие броеви.

Решение. Бидејќи

$$5 = 5 + 0 + 0 = 4 + 1 + 0 = 3 + 2 + 0 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1$$

бараните трицифрени броеви се:

$$500,$$

$$410, 401, 140, 104,$$

$$320, 302, 230, 203, 311, 131, 113,$$

$$221, 212, 122.$$

Конечно, има 15 трицифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 5.

68. Во регистарските таблици на моторните возила се содржи четирицифрен број, при што најмалиот број е 0001, а најголемиот број е 9999. Колку различни четирицифрени броеви чиј збир на цифрите е еднаков на 2 се содржат во регистарските таблици на моторните возила?

Решение. Регистарските таблици на моторните возила ги содржат броевите 0002, 0020, 0200, 2000, 0011, 0101, 0110, 1001, 1010 и 1100. Според тоа, регистарските таблици содржат 10 различни броеви чиј збир на цифри е еднаков на 2.

69. Определи го бројот на петцифрените броеви чиј збир на цифри е еднаков на 3. Испиши ги сите такви броеви.

Решение. Ако петцифрен број има збир на цифри еднаков на 3, тогаш можни се следниве случаи:

- една цифра е 3, а останатите четири се 0 и во овој случај единствен број кој го задоволува условот е бројот 30000,
- една цифра е 1, друга е 2, а останатите три се 0 и во овој случај ги добиваме броевите: 12000, 10200, 10020, 10002, 21000, 20100, 20010 и 20001,
- три цифри се еднакви на 1, а две се еднакви на 0 и во овој случај ги добиваме броевите: 11100, 11010, 11001, 10110, 10101 и 10011.

Конечно, имаме $1+8+6=15$ петцифрени броеви чиј збир на цифри е еднаков на 3.

70. За еден трицифрен број ќе велиме дека е *симетричен* ако цифрата на стотките е еднаква на цифрата на единиците, а цифрата на десетките е помала од цифрата на стотките. На пример, броевите 434 и 757 се симетрични. Симетрични. Определи го бројот на симетричните трицифрени броеви.

Решение. Со цифра на стотките 1 има еден симетричен број (101), со цифра на стотките 2 има два симетрични броеви (202 и 212) итн. со цифра на стотките 9 има девет симетрични броеви. Значи, бројот на симетричните трицифрени броеви е еднаков на

$$1+2+3+4+5+6+7+8+9=45.$$

71. Запиши ги сите четирицифрени броеви чиј производ на цифри е еднаков на 4.

Решение. Бидејќи бројот 4 како производ на 4 броја може да се запише само на два начина и тоа: $4=1\cdot 1\cdot 1\cdot 4=1\cdot 1\cdot 2\cdot 2$, бараните броеви се: 4111, 1411, 1141, 1114, 2211, 2121, 2112, 1212, 1221 и 1122.

72. Определи го бројот на двоцифрените броеви чиј производ на цифри е помал или еднаков на 7.

Решение. Производот на цифрите може да биде еднаков на 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 или 7.

Производ на цифрите еднаков на нула имаат само двоцифрените броеви: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80 и 90 и тоа се 9 броеви.

Производ на цифрите еднаков на 1 има само бројот 11, т.е. 1 број.

Производ на цифрите еднаков на 2 имаат броевите 12 и 21, т.е. 2 броја.

Производ на цифрите еднаков на 3 имаат броевите 13 и 31, т.е. 2 броја.

Производ на цифрите еднаков на 4 имаат броевите 14, 22 и 41, т.е. 3 броја.

Производ на цифрите еднаков на 5 имаат броевите 15 и 51, т.е. 2 броја.

Производ на цифрите еднаков на 6 имаат броевите 16, 23, 32 и 61, т.е. 4 броја.

Производ на цифрите еднаков на 7 имаат броевите 17 и 71, т.е. 2 броја.

Според тоа, имаме вкупно $9+1+2+2+3+2+4+2=25$ двоцифрени броеви чиј производ на цифри е помал или еднаков на 7.

73. Определи го бројот на трицифрените броеви такви што цифрата на единиците е еднаква на производот на останатите две цифри.

Решение. Цифрата на единиците може да биде: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9 и 9. Тогаш:

- ако цифрата на единиците е 0, броевите се: 900, 800, 700, 600, 500, 400, 300, 200 и 100, т.е. има 9 броја,
- ако цифрата на единиците е 1, имаме само еден број и тоа 111,
- ако цифрата на единиците е 2, броевите се: 122 и 212, т.е. имаме 2 броја,
- ако цифрата на единиците е 3, броевите се: 133 и 313, т.е. имаме 2 броја,

- ако цифрата на единиците е 4, броевите се: 144, 224 и 414, т.е. имаме 3 броја,
- ако цифрата на единиците е 5, броевите се: 155 и 515, т.е. имаме 2 броја,
- ако цифрата на единиците е 6, броевите се: 166, 236, 326 и 616, т.е. имаме 4 броја,
- ако цифрата на единиците е 7, броевите се: 177 и 717, т.е. имаме 2 броја,
- ако цифрата на единиците е 8, броевите се: 188, 124, 142 и 818, т.е. имаме 4 броја и
- ако цифрата на единиците е 9, броевите се: 199, 339 и 919, т.е. имаме 3 броја.

Конечно, бараниот број броеви е еднаков на

$$9+1+2+2+3+2+4+2+4+3=32.$$

74. Определи го бројот на трицифрените броеви чиј производ на цифри е поголем од 8 и е помал од 12? Испиши ги овие броеви?

Решение. Броеви поголеми од 8 и помали од 12 се 9, 10 и 11. Понатаму, не постојат броеви чиј производ на цифри е 11, па зата можни производи на цифрите на бараните трицифрени броеви се 9 и 10.

Бидејќи $9=1\cdot1\cdot9=1\cdot3\cdot3$, трицифрените броеви чиј производ на цифри е 9 се: 119, 191, 911, 133, 313 и 331.

Бидејќи $10=1\cdot2\cdot5$, трицифрени броеви чиј производ на цифри е 10 се: 125, 152, 215, 251, 512 и 521.

Според тоа, постојат $6+6=12$ трицифрени броеви чиј производ на цифри е поголем од 8 и помал од 12.

75. За роденденската забава Матеј прави сендвичи, при што располага со четири продукти: кашкавал, салама, филе и шунка. Во секој сендвич тој става еден или два продукта. Колку различни видови сендвичи може да направи Матеј?

Решение. Од продуктите кашкавал (К), салама (С), филе (Ф) и шунка (Ш) Матеј може да направи четири вида сендвичи со еден продукт и тоа: К, С, Ф и Ш. Понатаму, тој може да направи шест вида сендвичи со по два продукти и тоа: КС, КФ, КШ, СФ,

СШ и ФШ. Според тоа, Матеј може да направи $4+6=10$ различни видови сендвичи.

76. Елена има праски, банани, јагоди и грозје. Таа подготвува овошни салати така што во секоја салата има најмалку три од четирите видови овошје. Колку различни видови салати може да подготви Елена?

Решение. Овошјата ќе ги означиме со почетните букви на нивните имиња: праски (П), банани (Б), јагоди (Ј) и грозје (Г). Со точно три видови овошје Елена може да ги подготви салатите: БЈГ, ПЈГ, ПБГ и ПБЈ. Бидејќи салатите мора да имаат најмалку три вида овошје, таа различна салата може да подготви уште само со четирите вида овошје, т.е. салатата ПБЈГ. Значи, Елена може да подготви $4+1=5$ видови салати во кои ќе има најмалку три вида овошје.

77. На секој километар од автопат долг 150 km има табла која го покажува изминатиот пат од почетокот на автопатот. Колку табли содржат точно две исти цифри?

Решение. Броеви помали од 150 кои имаат точно две исти цифри се: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 100, 101, 110, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 121, 122, 131, 133, 141 и 144. Според тоа, постојат 26 табли на кои точно две цифри се еднакви.

78. Определи го бројот на двоцифрените броеви во кои едната цифра е 1, 2 или 3, а другата цифра е 3, 4 или 5.

Решение. Ако првата цифра е 1, 2 или 3, а втората цифра е 3, 4 и 5, тогаш имаме $3 \cdot 3 = 9$. Ако цифрите се земат во обратен редослед, тогаш имаме уште 9 можности, при што бројот 33 се јавува двапати. Конечно, бараниот број броеви е $9+9-1=17$.

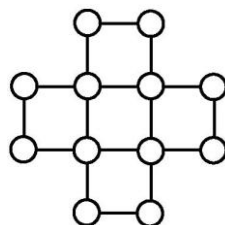
79. Определи го бројот на двоцифрените броеви кај кои и двете цифри се поголеми од 4? Испиши ги овие броеви.

Решение. Цифрите поголеми од 4 се: 5, 6, 7, 8 и 9. Според тоа, за цифрата на единиците имаме 5 можности и за цифрата на десетките имаме 5 можности. Значи, бројот на двоцифрените бро-

еви кај кои цифрите се поголеми од 4 е еднаков на $5 \cdot 5 = 25$. Бараните броеви се:

55, 56, 57, 58, 59,
65, 66, 67, 68, 69,
75, 76, 77, 78, 79,
85, 86, 87, 88, 89,
95, 96, 97, 98, 99.

80. На цртежот десно се прикажани фигура составена од 5 квадрати, чии дванаесет темиња (некои се заеднички) се обележани со кругчиња. Темињата се обоени во сина или црвена боја така што секој квадрат има точно 2 сини и 2 црвени темиња. На колку различни начини може да се направи споменатото боење, ако не е дозволено вртење и превртување на фигурата?



Решение. Темињата на централниот квадрат може да се обојат на шест начин и тоа така што:

- 1) на два начини кога секоја страна лежат темиња обоени во различна боја,
- 2) на четири начини кога на една страна лежат темиња обоени во иста боја, а на другата страна лежат темиња обоени во другата боја.

Во случајот 1) за секое боење на централниот квадрат имаме 16 различни боења на останатите темиња (зошто?). Во случајот 2) за секое боење на темињата на централниот квадрат имаме 4 боења на останатите темиња. Според тоа, темињата на дадената фигура може да се обојат на $2 \cdot 16 + 4 \cdot 4 = 48$ различни начини.

81. За еден шестцифрен број ќе велиме дека е *четиризвезден* ако во неговиот запис се наоѓаат цифрите 1, 0, 2, 3 во овој редослед, при што меѓу нив нема друга цифра. Определи го бројот на четиризвездените броеви.

Решение. Четиризвездените броеви се од видот 1023^{**} , $^{*}1023^{*}$ или $^{**}1023$. Броевите од видот 1023^{**} се добиваат ако на местото на секоја од ѕвездите ставиме произволни цифри, што значи

дека има $10 \cdot 10 = 100$ вакви четиризвездени броеви. За броевите од видовите $*1023*$ и $**1023$ на местото на ѕвездата од лево може да се стави која било цифра освен 0, а на местото на ѕвездата од десно може да се стави која било цифра, па затоа во двата случаја имаме по $9 \cdot 10 = 90$ четиризвездени броеви. Конечно, вкупниот број на четиризвездени броеви е еднаков на $100 + 2 \cdot 90 = 280$.

82. Колку трицифрени броеви може да се запишат со една цифра 2, една цифра 4 и една непарна цифра?

Решение. Цифрата 2 може да биде цифра на единиците, десетките и стотките. Значи, таа може да се постави на три места (можности). Откако ќе ја запишеме цифрата 2, за цифрата 4 ни остануваат две места (можности), а на крајот бидејќи запишуваме непарна цифра, за третата цифра на бројот имаме пет можности. Според тоа, вкупниот број трицифрени броеви е еднаков на $3 \cdot 2 \cdot 5 = 30$.

83. Андријана, Елеонора и Марија се родени во некои од деновите од вторник до недела во една иста седмица, но секои две по возраст се разликуваат за најмалку два дена. Определи го бројот на распоредите на деновите во кои може да се родени девојчињата?

Решение. Деновите на раѓање може да бидат:

В-Ч-С, В-Ч-Н, В-П-Н, С-П-Н.

За секоја од овие можности девојчињата може да бидат распоредени: првото на 3 начини, потоа второто на 2 начини и на крајот третото на 1 начин, односно на $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ начини. Според тоа, бројот на распоредите на деновите во кои може да се родени девојчињата е еднаков на $4 \cdot 6 = 24$.

84. Една кука има неколку простории. Секоја просторија има по две врати. Две од вратите во куќата водат надвор од неа, а останатите водат кон друга просторија во куќата. Куќата има вкупно 10 врати. Колку простории има оваа кука?

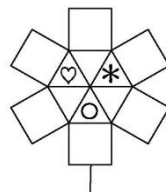
Решение. Од две од вратите се влегува во по една соба, а од секоја од останатите врати се влегува во по две соби. На овој начин добиваме дека куќата има $2 + 8 \cdot 2 = 18$ соби, но притоа секо-

ја соба е броена двапати (по еднаш од секоја врата: влез и излез). Според тоа, куќата има $18:2=9$ соби. Всушност, за оваа куќа има само еден можен распоред на собите: тие треба да се една после друга, при што секои две соседни соби се поврзани со врата, а првата и последната соба имаат по една врата која води надвор од куќата.

85. Борјан прави куќарка за птици. За бојадисување на сидовите на куќарката може да користи сива, сина или зелена боја, а за бојадисување на покривот на куќарката црвена или кафеава боја. На колку различни начини може да ја обои куќарката Борјан?

Решение. За бојадисување на сидовите има 3 можности и за секоја од нив покривот на куќарката може да се обои на 2 начина. Според тоа, Борјан може на $3 \cdot 2 = 6$ различни начини да ја обои куќарката.

86. Во секој квадрат и секој триаголник на цртежот десно треба да се нацрта ѕвезда, кругче и срце, така што фигурите кои имаат заедничка страна содржат различни цртежи? Определи го бројот на начините на кои може да се нацртаат ѕвездата, кругчето и срцето.



Решение. Секој триаголник е соседен со два триаголници во кои веќе се нацртани два различни цртежи, па затоа распоредот на ѕвездата, кругчето и срцето во триаголниците е еднозначно определен. Секој од шесте триаголници е соседен со по еден квадрат во кој може да се нацртаат двата цртежи кои ги нема во триаголникот. Значи, за секој квадрат имаме 2 можности и како има 6 квадрати, заклучуваме дека бројот на начините на кои може да се нацртаат ѕвездата, кругчето и срцето е еднаков на

$$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 64.$$

87. На колку различни начини може една до друга да се наредат:

- а) една златна и две сребрени монети,
- б) една златна и 3 сребрени монети,
- в) две златни и две сребрени монети.

Решение. Со Z и C да означиме златна и сребрена монета.

а) Имаме: 3СС, СЗС и ССЗ, што значи дека една златна и две сребрени монети една до друга може да се наредат на 3 начин.

б) Имаме: 3ССС, СЗСС, ССЗС и СССЗ, што значи дека една златна и три сребрени монети една до друга може да се наредат на 4 начини.

в) Имаме: ССЗЗ, СЗСЗ, СЗЗС, ЗССЗ, ЗСЗС и ЗЗСС, што значи дека две златни и две сребрени монети една до друга може да се наредат на 6 начини.

88. На тениски турнир учествувале 5 тенисери. Секој тенисер со секој од останатите тенисери изиграл по една игра.

а) Колку игри вкупно се изиграле на турнирот?

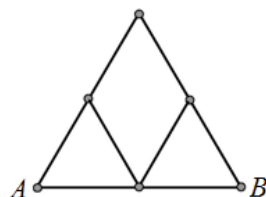
б) Колку игри изиграл секој од тенисерите?

Решение. Играчите да ги означиме со буквите A, B, C, D и E . Играчот A изиграл 4 игри со преостанатите четири играчи: B, C, D и E . Играчот B изиграл 4 игри со играчите A (оваа игра веќе ја броевме), C, D и E . Играчот C изиграл четири игри со играчите A, B (овие игри веќе ги броевме), D и E . Играчот D изиграл четири игри со играчите A, B, C (овие игри веќе ги броевме) и E . Играчот E изиграл четири игри (сите веќе ги броевме).

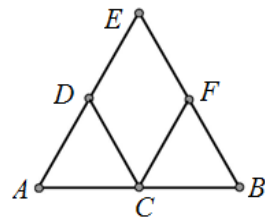
а) На турнирот се изиграни $4+3+2+1=10$ игри.

б) Секој играч изиграл по 4 игри.

89. На цртежот десно се дадени 6 точки, некои од кои се поврзани со отсечки. На колку различни начини може да се стигне од точката A до точката B ако се движиш само по нацртаните отсечки и во секоја точка можеш да поминеш најмногу еднаш?

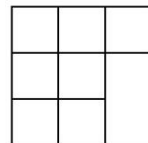


Решение. Да ги означиме останатите четири точки како на цртежот десно. Според условот на задачата од точката A до точката B може да се стигне на седум начини и тоа.



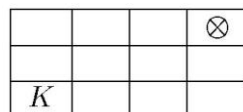
ACB, ACFB, ACDEFB, ADCB,
ADCFB, ADEFB, ADEFCB.

90. На цртежот десно е прикажан план на парк, линиите се патеките. Определи го бројот на најкратките различни патишта од горниот лев до долниот десен агол?



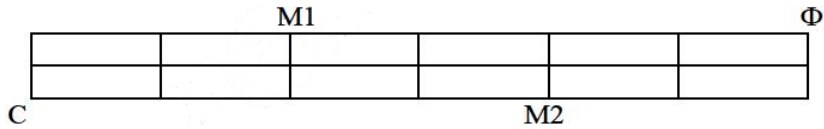
Решение. Најкратките патишта се добиваат ако почнувајќи од горниот десен агол на секоја раскрсница се движиме или надесно (1) или надолу (0). Притоа ги добиваме следниве патишта: 11100, 11010, 110001, 10110, 101001, 100101, 100011, 01110, 011001, 010101, 01001, 001101, 001011, 000111, што значи дека имаме вкупно 14 патишта.

91. На цртежот десно кучето K треба да стигне до чинијата со храна $\otimes$. Тоа може да преминува само во соседно поле кое е одгоре или оддесно на полето во кое се наоѓа. На колку различни може мачето да стигне до храната?

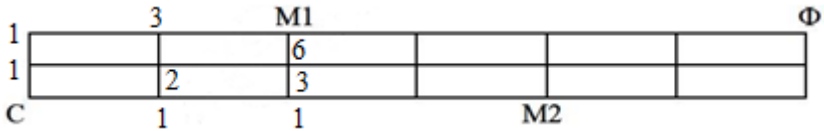


Решение. Во секое квадратче ќе го запишеме бројот на начините на кои кучето може да стигне до тоа квадратче ако го почитува правилото на движење. Така во квадратчињата на долниот ред треба да ги запишеме броевите 1, 1, 1, 1. Во првото квадратче на средниот ред исто така треба да го запишеме бројот 1, во второто бројот 2, во третото бројот 3 и во четвртото бројот 4. На ист начин, во првото квадратче на горниот ред треба да е запишан бројот 1, во второт бројот $1+2=3$, во третото бројот $3+3=6$ и во четвртото бројот $6+4=10$. Според тоа, до чинијата со храна $\otimes$ може да се стигне на 10 начини.

92. На долниот цртеж е дадена мрежа од улици по кои се одвива училишниот кроз. Учениците тргнуваат од раскрсницата С, прво минуваат низ првата контрола (раскрсницата М1), потоа низ втората контрола (раскрсницата М2) и пристигнуваат на целта (раскрсницата Ф). Определи го бројот на најкратките различни патишта по кои можат да поминат натпреварувачите.



Решение. Да ги изброиме најкратките патишта од С до М1. По најкраток пат все движиме само нагоре и надесно. На секоја раскрсница го запишуваме бројот на патиштата од С до неа, кој е еднаков на збирот на броевите запишани во раскрсницата под неа и лево од неа. Така за М1 добиваме 6 патишта (вода цртеж).

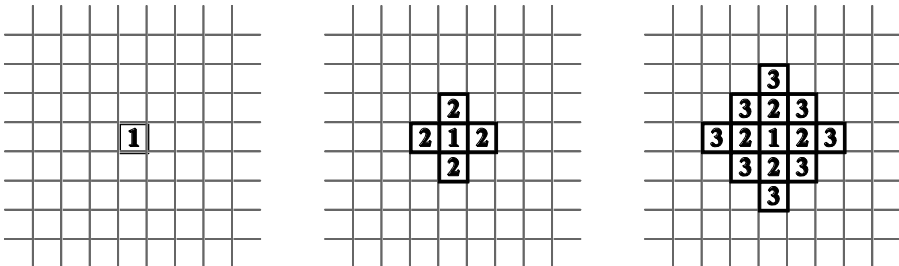


Од М1 до М2 и од М2 до Φ повторно имаме по 6 патишта. Според тоа, вкупниот број најкратки патишта е еднаков на $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$.

93. Во квадратна мрежа ги извршуваме следниве операции: прво поставуваме едно квадратче, кое го означуваме со 1. На секоја од страните на квадратчето залепуваме квадратчиња, кои ги означуваме со 2. После тоа, на слободните страни на квадратчињата со број 2 залепуваме други квадратчиња, кои ги означуваме со 3. Продолжуваме на истиот начин, како што е покажано на шемата, додека не ги поставиме квадратчињата со број 10.

а) Колку вкупно квадратчиња со броевите од 1 до 10 се поставени.

б) Ако страната на едно квадратче е долга 1cm , определи го периметарот на добиената фигура од нумерирани квадратчиња.



Решение. а) Имаме 1 квадратче со број 1, 4 квадратчиња со број 2, 8 квадратчиња со број 3, 12 квадратчиња со број 4 и 16 квадратчиња со број 5. Понатаму, имаме 20 квадратчиња со број 20,

24 квадратчиња со број 7 итн. 36 квадратчиња со број 10. Вкупниот број на квадратчиња со броевите од 1 до 10 е

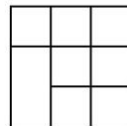
$$\begin{aligned} 1+4+8+12+16+20+24+28+32+36 &= \\ &= 1+(4+8+12+16+20+24+28+32+36) \\ &= 1+180 = 181. \end{aligned}$$

б) Бидејќи имаме 36 квадратчиња со број 10, а во периметарот на фигурата учествуваат 32 квадратчиња со по 2 страни и 4 квадратчиња со по 3 страни, за периметарот на добиената фигура добиваме

$$32 \cdot 2 + 4 \cdot 3 = 64 + 12 = 76 \text{ cm.}$$

IV.4. РАСПОРЕДУВАЊА

94. Во секое од полињата на цртежот десно е запишан по еден од броевите 1, 2 или 3. Определи го најмалиот можен збир на запишаните броеви. (Соседни се полињата кои имаат заедничка страна)



Решение. Најмалиот збир се добива ако во правоаголникот го запишеме бројот 3, а потоа почнувајќи од горното лево аголно поле наизменично ги запишуваме броевите 1 и 2. Така добиваме $3+4 \cdot 1+3 \cdot 2=13$.

95. Во квадратчето на цртежот десно треба да се запишат цифрите 1, 2, 3 или 4, така што во секој ред и во секоја колона запишаните цифри се различни. Некои цифри се веќе запишани.

1		4	
	3		2
	1		
3		*	

Која цифра треба да се запише на местото на ѕвездичката?

Решение. Заради запишаните броеви од вториот ред, во квадратчињата на првиот ред одлево-надесно последователно треба да се запишани броевите 1, 2, 4 и 3. Понатаму, во квадратчињата на вториот ред одлево-надесно последователно треба да се запишани броевите 4, 3, 1 и 2. Сега во втората колона се запишани броевите 4 и 1, а заради последниот ред на местото на ѕвездич-

ката не може да се запише бројот 3. Значи, на местото на свездичката е запишан бројот 2.

96. Во табелата на цртежот десно се запишани броевите 1, 2, 3 и 4 така што во секој ред, во секоја колона и во секоја фигура ограничена со задебелени линии има по еден од овие броеви. Некои броеви се веќе запишани. Определи го збирот на броевите запишани во аголните квадратчиња на табелата.

		1	
		4	
2			

Решение. Имајќи ги предвид условите на задачата го определуваме распоредот на броевите во останатите квадратчиња на табелата. Истиот е прикажан на цртежот десно. Според тоа, Збирот на броевите запишани во аголните квадратчиња на табелата е еднаков на $2+3+4+4=13$.

4	2	1	3
3	4	2	1
1	3	4	2
2	1	3	4

97. Во табелата на цртежот десно се запишани броевите 1, 2, 3 и 4 така што во секој ред, во секоја колона и во секоја фигура ограничена со задебелени линии има по еден од овие броеви. Некои броеви се веќе запишани. Определи го збирот на броевите запишани во аголните квадратчиња на табелата.

2		1	
		4	
	3		

Решение. Имајќи ги предвид условите на задачата го определуваме распоредот на броевите во останатите квадратчиња на табелата. Истиот е прикажан на цртежот десно. Според тоа, Збирот на броевите запишани во аголните квадратчиња на табелата е еднаков на $1+1+4+4=10$.

1	2	3	4
2	4	1	3
3	1	4	2
4	3	2	1

98. Во секое поле на табелата прикажана на цртежот десно запиши по еден од броевите од 1 до 5 така што во секој ред, секоја колона и во секоја од петте означени фигури се запишани сите пет броја.

5				
				3
				5
	2	1		
			1	

Решение. Полињата во редовите и колоните ќе ги броиме од лево-надесно и одгоре-надолу, соодветно.

Во четвртиот и петтиот ред не може да се запише бројот 1, па затоа бројот 1 го запишуваме во првото поле на петтата колона. Сега во петтата колона бројот 2 го запишуваме во петтото поле, а во четвртото поле го запишуваме бројот 4. Сега во првото поле на четвртиот ред не може да се запише бројот 5, па затоа во ова поле треба да се запише бројот 3, а во преостанатото поле е бројот 5. Во крстот бројот 5 не може да се запише во третиот ред, па затоа треба да го запишеме во полето од вториот ред. Јасно во третото поле на петтиот ред треба да се запише бројот 3. Понатаму, досега бројот 5 е запишан четири пати, па затоа петтиот број 5 треба да го запишеме во заедничкото поле на втората колона и петтиот ред. Сега е јасно дека во првото поле на петтиот ред треба да се запише бројот 4, а во првото поле на третиот ред треба да се запише бројот 1. Значи, во првото поле на вториот ред треба да се запише бројот 2. Досега бројот 1 е запишан четири пати, па затоа петтиот број 1 мора да се запише во заедничкото поле на вториот ред и втората колона, што значи во четвртото поле на вториот ред треба да се запише бројот 4. Јасно, во првото поле на четвртата колона е бројот 2, па затоа во третото поле на оваа колона е бројот 3. Понатаму, во централното поле на крстот е бројот 2, во преостанатото поле на третиот ред е бројот 4, а во празните полиња на првиот ред редоследно се броевите 3 и 4. На цртежот десно е прикажана пополнетата табела.

5	3	4	2	1
2	1	5	4	3
1	4	2	3	5
3	2	1	5	4
4	5	3	1	2

99. Во полињата на табелата дадена на цртежот десно треба да се запишат буквите A, B, C и D , така што сите четири букви треба да се запишани во секој ред и во полињата кои имаат заедничка страна или заедничко теме да се запишани различни букви. Три букви се веќе запишани. Дополни ја табелата.

C	A	B	

Решение. Согласно условите на задчата на долните цртежи е прикажано како редоследно треба да се пополнуваат редовите на табелата.

C	A	B	D
	D		

C	A	B	D
B	D	C	A

C	A	B	D
B	D	C	A
	A	B	

C	A	B	D
B	D	C	A
C	A	B	D

C	A	B	D
B	D	C	A
C	A	B	D
B	D	C	A

100. Шеснаесет празни квадратчиња се поставени во форма на квадрат со димензии 4×4 (цртеж десно). Во секое квадратче запиши 0 или 1 така што зборовите на броевите запишани во редовите се еднакви, а зборовите на броевите запишани во колоните се различни.

Решение. Имаме четири колони, па бидејќи зборовите по колони треба да се различни истите мора да се еднакви на некои од броевите 0, 1, 2, 3 или 4. Ако во зборовите не се јавува бројот 1 или бројот 3, тогаш збирот на останатите броеви е непарен. Но тоа не е можно, бидејќи збирот на четири исти броја е парен број. Ако во зборовите во колоните не се јавува бројот 0, тогаш збирот на останатите четири збира е $1+2+3+4=10$, но бројот 10 не може да се запише како збир на четири исти броја. Слично се добива ако збирот во ниту една колона не е 0. Значи, зборовите на броевите броевите по колони е 0, 1, 3 и 4, во некој редослед. Според тоа, збирот на сите броеви е еднаков на

$$0+1+3+4=8,$$

па затоа зборовите на броевите запишани во редиците се еднакви на $8:4=2$. Според тоа, во секоја редица треба да има 2 единици и 2 нули, при што во една колона треба да има 4 нули, а во друга колона треба да има 4 единици. Останатите две колони ги пополнуваме така што во едната одгоре-надолу има три единици, а во другата одгоре-надолу има 3 нули (цртеж десно).

1	1	0	0
1	1	0	0
1	1	0	0
1	0	1	0

101. На масата се наредени 16 кутии (цртеж десно). Во секоја кутија има или круша или јаболко или кутијата е празна. Во секој ред и во секоја колона има по една круша и по

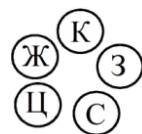
	K		K	
J				K
J				K
K				J
J				K
	J		J	

едно јаболко. На цртежот е означено кое овошје е поблиску до секој од краевите на некој ред или некоја колона. Горјан открил дека една кутија е празна и истата ја обоил. Определи во која кутија каков плод има и кои кутии се празни.

Решение. Полињата во редовите и колоните ќе ги броиме одлево и одгоре, соодветно. Долното десно аголно поле мора да е празно, бидејќи до краевите на четвртиот ред и четвртата колона најблиску се различни плодови. Сега во четвртиот ред крушата не може да биде во второто поле, бидејќи најблиску до долниот крај на втората колона е јаболко. Затоа во третото поле на четвртиот ред има круша, па останува во второто поле да има јаболко, а првото поле да е празно. Понатаму, во првите две полиња на четвртата колона не може да има јаболко, па затоа јаболкото во оваа колона е во третото поле. Сега во втората колона веќе има јаболко, па затоа во заединичкото поле со вториот ред не може да има јаболко, што значи дека во првото поле на вториот ред има јаболко. Јасно, за да во првиот ред и третата колона има јаболко тоа мора да е во заединичкото поле, па затоа во четвртото поле на првиот ред има круша. Конечно, првите две полиња на првиот ред се празни, и второто поле четвртата колона е празно, па затоа третата круша е во второто поле на вториот ред, а четвртата круша е во првото поле на третиот ред (види цртеж).

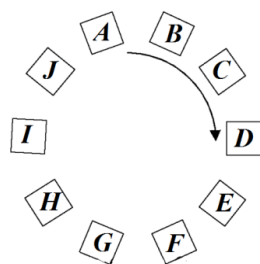
		К	К	
J			J	К
J	J	К		К
К	К			J
J		J	К	К
	J		J	

102. Баба Елисавета има 5 чоколади со различна боја на опаковката: кафена (К), жолта (Ж), сина (С), црвена (Ц) и зелена (З). Нејзините пет внуци застанале во круг и Елисавета ги поделила чоколадите при делењето прескокнувајќи по едно дете. Во кој редослед се поделени чоколадите, ако последното дадено чоколадо е со жолта опаковка и внуците добиле чоколади како што е прикажано на цртежот десно.



Решение. Ако чоколадите се делени во насока спротивна на насоката на движењето на стрелките на часовникот, тогаш редо-

следот е обратен од редоследот ЖЗЦКС, т.е. редоследот е СКЦЗЖ. Ако чоколадите се делени во насока на движењето на стрелките на часовникот, тогаш редоследот е обратен од редоследот ЖСКЦЗ, т.е. редоследот е ЗЦКСЖ.



103. Десет картончиња се поставени во круг и на нив се напишани последователно буквите $A, B, \dots, J$ (види цртеж). Марија започнува од картончето со буквата A и следејќи ја покажаната насока го зема секое второ картонче. Прво го зема картончето со буквата B , потоа со буквата D итн. се додека не остане едно картонче. Која буква е напишана врз последното картонче.

Решение. Во првото вртење ќе бидат земени картончињата со буквите B, D, F, H, J . Потоа картончињата со буквите C, G, A, I , што значи дека последно ќе остане картончето со буквата E .

104. Во круг има 12 деца. Секое момче е меѓу две девојчиња, а секое девојче е меѓу момче и девојче. Колку момчиња има во кругот?

Решение. Ако починиме да броиме од момче, тогаш распоредот мора да биде:

$M1, D1, D2, M2, D3, D4, M3, D5, D6, M4, D7, D8.$

Првите 11 броења се јасни, а на крајот мора да биде $D8$ за да $M1$ е меѓу $D8$ и $D1$. Значи, во кругот има 4 момчиња и 8 девојчиња.

105. Во една редица застанале 25 луѓе. Ниту еден маж не стои до маж и ниту една жена не е меѓу двајца мажи. Определи го најмалиот можен број жени во редицата.

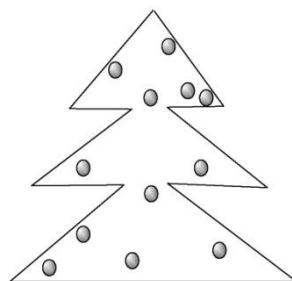
Решение. Имаме најмал број жени во редицата ако таа започнува со маж, па потоа има две жени, па повторно маж, па две жени итн. Според тоа, редицата е:

$MЖЖ MЖЖ MЖЖ MЖЖ MЖЖ MЖЖ MЖЖ MЖЖ M.$

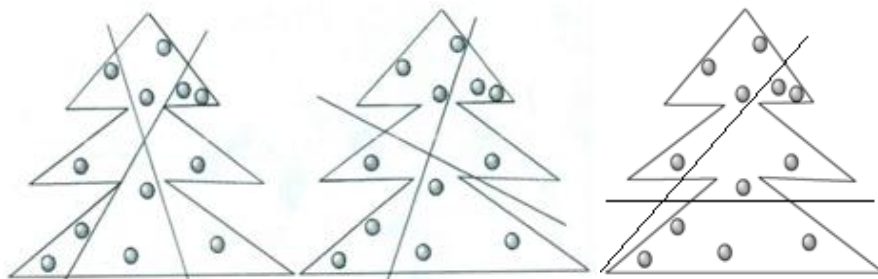
Значи, најмалиот број жени во редицата е еднаков на $8 \cdot 2 = 16$.

III.5. ДОПОЛНИТЕЛНИ ЗАДАЧИ

106. На цртежот десно е прикажана украсена новогодишна елка. Со помош на две прави подели ја елката на неколку делови така што во секој дел ќе има еднаков број украси.



Решение. Елката е украсена со 12 украси. Бидејќи $12 = 2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$ правите треба да ги повлечеме така што во секој дел ќе има еднаков број украси и тоа: 2, 3, 4 или 6 украси. Три вакви поделби се дадени на долните цртежи, првата на 6 дела со по 2 украси, а втората 4 дела со по 3 украси и третата на 3 дела со по 4 украси.



Два дела со по шест украси не може да се добијат со две повлечени прави. Зошто?

107. Секоја вечер Гроздан пред спиење може да ги гледа цртаните филмови кои се означени со броевите 1, 2, 3, 4 и 5. Но, ако Гроздан направи грешки неговата мајка му забранува да гледа некои од филмовите и тоа:

- за покажување јазик – филмовите 1, 2 и 3,
- за цртање по сид – филмовите 2, 4 и 5,
- за газење во цвеќињата – филмовите 1 и 5,
- за играње со топка во соба – филмовите 1 и 4,
- за удирање на кучето – филмот 5.

Денес Гроздан реши да гледа само еден цртан филм. Кој е најголемиот број различни грешки од дадената листа што Гроздан може да ги направи?

Решение. Ако Гроздан покаже јазик, тогаш му се забранети филмовите 1, 2 и 3, па со било која друга грешка ќе му бидат забранети четири или сите пет филма. Притоа, ако покаже јазик, гази во цвеќињата и го удри кучето ќе му бидат забранети филмовите 1, 2, 3 и 5. Значи, во случајов може да направи најмногу три грешки.

Ако црта по сид, тогаш му се забранети филмовите 2, 4 и 5. Понатаму, тој не смее да го покаже јазикот бидејќи во тој случај ќе му бидат забранети сите филмови, но може да гази во цвеќињата, да игра со топка во соба и да го удри кучето, бидејќи тогаш ќе му бидат забранети филмовите 1, 2, 4 и 5, а ќе може да го гледа филмот 3. Значи, најголемиот број различни грешки кои може да ги направи Гроздан е четири.

108. Ѓорѓи, Петар и Тодор ја играат „Не лути се човече“. Секој од нив на почетокот на играта има определен број жетони. Играчот кој ја губи играта на другите двајца играчи им ги удвојува жетоните. Ѓорѓи, Петар и Тодор изиграле три игри. Првата игра изгубил Ѓорѓи, втората – Петар, а третата Тодор. По третата игра секој имал по 24 жетони. Колку жетони имал на почетокот секој од нив?

Решение. Задачата ќе ја решиме одејќи одназад-нанапред. Ја составувае следнава табела:

	Ѓорѓи	Петар	Тодор
После третата игра (губи Тодор)	24	24	24
После третата игра (губи Петар)	12	12	48
После третата игра (губи Ѓорѓи)	6	42	24
На почетокот	39	21	12

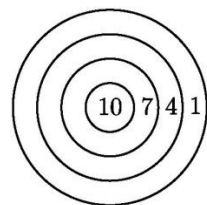
Значи, на почетокот Ѓорѓи имал 39 жетони, Петар имал 21 жетон и Тодор имал 12 жетони.

109. Во девет купчиња има 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 и 9 топчиња. Имаме право од две различни купчиња да земеме по земеме еднаков број топчиња и да ги префрлиме во трето купче. Дали може за помалку од 6 префрлања сите топчиња да ги собереме во едно купче?

Решение. Одговорот на прашањето е потврден и тоа може да се направи на следниот начин:

$$\begin{aligned}(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) &\rightarrow (1, 1, 3, 3, 7, 6, 7, 8, 9) \rightarrow (0, 0, 3, 3, 7, 8, 7, 8, 9) \\ &\rightarrow (0, 0, 0, 0, 7, 8, 7, 8, 15) \rightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 8, 0, 8, 29) \\ &\rightarrow (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 45).\end{aligned}$$

110. Горјан фрлил четири еднави стрелички во метата прикажана на цртежот десно и освоил 22 поени. Определи го бројот на начините на кои Горјан може да ја погоди метата?



Решение. Метата може да биде погодена со 2, 1 или 0 стрелички со кои се освојуваат 10 поени.

Во долната табела се прикажани можните погодоци за секој од овие случаи,

Погодоци во 10	2	1	1	0	0
Погодоци во 7	0	1	0	3	2
Погодоци во 4	0	1	3	0	2
Погодоци во 1	2	1	0	1	0

Според тоа, постојат 5 начини на кои метата може да биде погодена и да се освојат 22 поени.

111. На колку начини може да се плати сума од 450 денари, ако располагаме со 10 монети од 50 денари, и 10 банкноти од 100 и 10 банкноти од 200 денари?

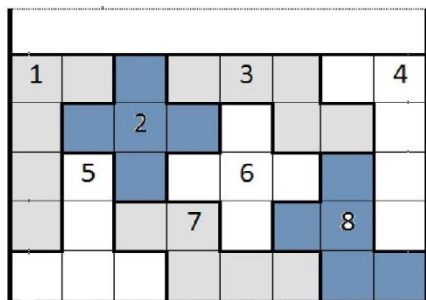
Решение. Задачата ќе ја решиме со помош на следнава табела:

200 денари	0	0	0	0	0	1	1	1	2
100 денари	0	1	2	3	4	0	1	2	0
50 денари	9	7	5	3	1	5	3	1	1

Според тоа, со расположливите монети и банкноти сума од 450 денари може да се плати на $5+3+1=9$ начини.

112. По кој редослед во играта паѓале фигурите пентонима ако истите се распоредени како на цртежот десно?

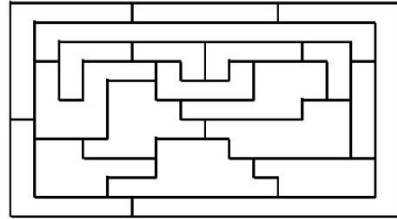
Решение. Од фигурите 5, 7 и 8 прва мора да падне фигурата



5, потоа фигурата 7 и на крајот фигурата 8. Понатаму, фигурата 6 мора да падне пред останатите фигури, а по неа мора да падне фигурата 2. Значи, првите пет фигури мора да паднат во редослед: $5 - 7 - 8 - 6 - 2$. За последните три фигури можни се следниве распореди: или $3 - 4 - 1$ или $3 - 1 - 4$ или $1 - 3 - 4$.

113. Сопственикот на една уметничка

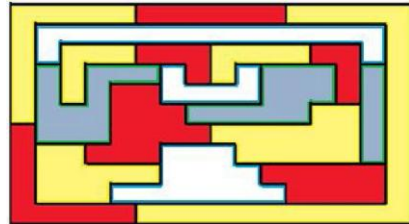
галерија решиле да ги бојадисаат изложбените сали во 4 бои така што соседните сали да се бојадисани во различни бои. На цртежот десно е прикажан планот на галеријата.



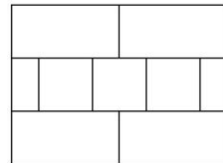
Покажи како може да се бојадисаат салите за да се исполни барањето на сопственикот на галеријата.

Решение. Задачата има повеќе решенија. Едно од нив е прикажано на цртежот десно.

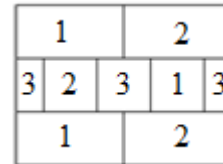
Обиди се да најдеш барем уште едно решение.



114. Колку бои се потребни најмалку за да се обојат правоаголниците на фигурата дадена на цртежот десно така што секои два соседни правоаголници се обоени во различни бои?



Решение. Саканото боење може да се постигне со помош на три бои. На цртежот десно е показано како тоа може да се направи со помош на боите 1, 2 и 3.



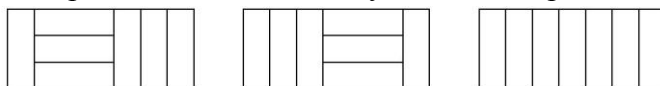
115. Вељан има книга од 60 страници. Тој решил да ги обои броевите на страниците така што во различни бои ги боел кругчињата на цифрите 0, 6, 8 и 9, што значи дека за секои две кругчиња на цифрата 8 користи две бои. Колку различни боици искористил Вељан ако не ги повторувал боите?

Решение. Броевите од 1 до 60 содржат шест цифри 0, шест цифри 9 и седум цифри 6 и шест цифри 8.

Значи, за да не ги повторува боите Вељан искористил

$$6+6+7+6\cdot 2=31 \text{ боици.}$$

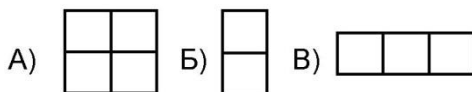
116. На долните цртежи се прикажани три различни начини за покривање на правоаголен под со седум еднакви правоаголници.



На колку други начини може да се покрие подот со седумте еднакви правоаголници?

Решение. Подот може да се покрие на 1 начин со 7 исправени правоаголници, на 5 начини со 4 исправени правоаголници и на 3 начини со 1 исправен правоаголник. Значи, вкупно со $1+5+3=9$ начини, од кои 3 се веќе прикажани, па остануваат уште $9-3=6$ начини.

117. Во еден автомат има чоколади од три вида А, Б и В (цртеж десно). Марија сака да купи неколку чоколади и



да направи квадрат 3×3 . Видела дека во автоматот има 1 чоколадо од видот А, 3 чоколади од видот Б и 7 чоколади од видот В. Едно чоколадо чини 10 денари. Колку денари треба да потроши Марија за да може да го направи саканиот квадрат?

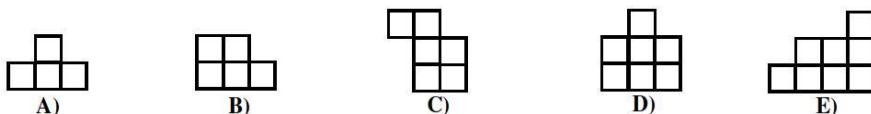
Решение. Да се состави квадрат 3×3 може на три начини: 1) од три фигури В; 2) од три различни фигури – А, Б, В; 3) три фигури од видот Б и една фигура од видот В. Ќе докажеме дека не е доволно Марија да извлече 4 фигури, но дека ако извлече 5 фигури може да состави 3×3 квадрат.

При четири фигури може да се случу тоа да е 1 фигура од типот А и 3 фигури од типот Б и тогаш не може да се состави 3×3 квадрат.

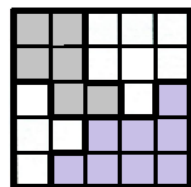
Ако извлече 5 фигури, тогаш една од нив сигурно е од типот В и четири други фигури. Ако меѓу овие четири фигури има две фигури од типот В, тогаш може да се состави квадрат. Ако има само една фигура од типот В, тогаш остануваат уште три фигури. Можни се два случаја: или сите три фигури се од типот Б и

тогаш може да се состави квадрат, или една фигура е од типот А и 2 фигури се од типот Б и повторно може да се состави квадрат. Конечно, Марија треба да извлече 5 чоколади и притоа ќе потроши 50 денари.

118. Со четири од петте фигури прикажани на долниот цртеж состави квадрат. Која фигура нема да се употреби?



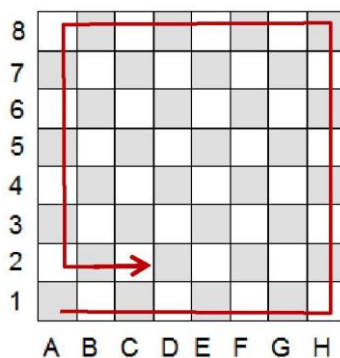
Решение. Дадените фигури имаат: *A*– 4 квадратчиња, *B*– 5 квадратчиња, *C*– 6 квадратчиња, *D*– 7 квадратчиња и *E*– 8 квадратчиња. Најмалиот број квадратчиња содржани во четири од петте фигури е еднаков на $4+5+6+7=22$ квадратчиња, а најголемиот е еднаков на $5+6+7+8=26$ квадратчиња. Бидејќи $22 < 5 \cdot 5 < 26$, треба да составиме квадрат со страна 5, што значи дека треба да ги искористиме фигурите *A*, *C*, *D* и *E*. Квадратот составен од овие четири фигури е прикажан на цртежот десно. Значи, нема да се искористи фигурата *B*.



119. Горјан, како што е прикажано на цртежот десно, на шаховска табла наредил по една од сите домино плочки со точки од 0 до 6. На кои полиња го поставил последното домино?

Решение. Плочки со 0 точки на една половина од плочката има во комбинација со 0, 1, 2, 3, 4, 5 и 6 точки, т.е. има 7 плочки. Понатаму, плочки со 1

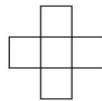
точка на една половина при што не ја земаме предвид плочката со 0 точки има во комбинација со 1, 2, 3, 4, 5 и 6 точки, т.е. 6 плочки. Сега плочки со 2 точки на едната половина, при што не ги земаме предвид веќе броените плочки има во комбинација со 2, 3, 4, 5 и 6, т.е. 5 плочки итн. На крајот има 1 плочка на која има две половинки со по 6 точки. Значи, Горјан наредил



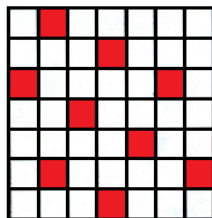
$$7+6+5+4+3+2+1=28$$

плочки, со кои покрил $2 \cdot 28 = 56$ полиња на таблата. Конечно, ако во правецот на спиралата изброиме 56 полиња, добиваме дека последното домино е поставено на полињата E6 и F6.

120. Нацртежот десно е прикажан крст составен од единечни квадратчиња. Дали може на табла со димензии 7×7 да се обојат неколку полиња така што при секое поставување на крстот врз таблата (полињата се преклопуваат) од крстот да биде покриено точно едно поле.

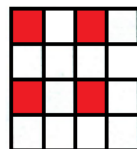


Решение. При секое поставување на крстот врз таблата тој покрива три хоризонтални и три вертикални полиња. Затоа меѓу три последователни полиња (хоризонтални или вертикални) не треба да има две обоени. Понатаму, ако во еден ред (колона) има обоено поле, тогаш во редот под него и над него (лево и десно) трите полиња кои имаат најмалку една заедничка точка со ова поле не смее да бидат обоени (Зошто?). На цртежот десно е прикажано едно боене кое ги задоволува условите на задачата. Обиди се да најдеш барем уште едно вакво боене.



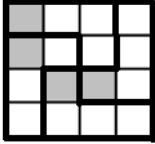
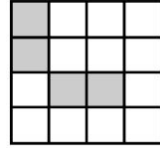
121. Определи го најголемиот можен број полиња кои во квадрат со димензии 4×4 можат да се обојат со црвена боја, но така што да не постојат две обоени полиња кои имаат заедничка страна или заедничко теме.

Решение. Ако е обоено аголно поле, тогаш бидејќи тоа се допира со три полиња тие не смее да бидат обоени. Значи, следно поле кое може да биде обоено е или третото поле во првиот ред или третото поле во првата колона (овие полиња имаат најмалку соседни со страна и со теме полиња). Но, тогаш може да се обои само уште една поле (види цртеж). Значи најголемиот број полиња кои при дадените услови може да се обојат е 4.



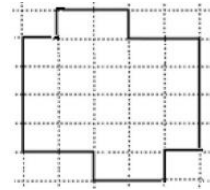
Постојат повеќе начини да се обојат четири полиња. Најди некои од нив.

122. Подели го на четири еднакви делови квадратот прикажан на цртежот десно така што во секој дел ќе има по едно сиво квадратче. Деловите може да се вртат, но не и да се превртуваат.



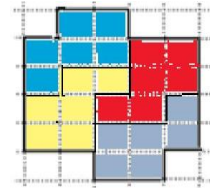
Решение. Квадратот е составен од 16 квадратчиња, што значи дека во секој дел треба да има по $16:4=4$ квадратчиња. Бараната поделба е прикажана на цртежот лево.

123. Подели ја фигурата дадена на цртежот десно на четири еднакви делови. Деловите може да се вртат и превртуваат.

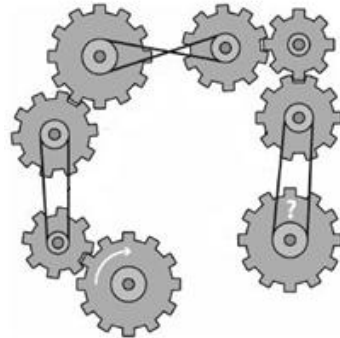


Решение. Дадената фигура е составена од 24 еднакви квадратчиња, па затоа секој од четирите има $24:4=6$ квадратчиња.

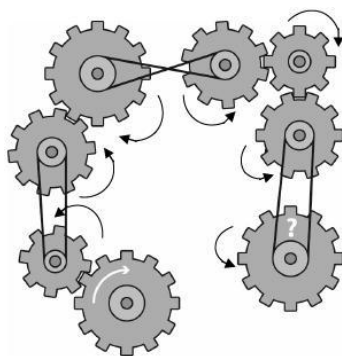
Бараната поделба е дадена на цртежот десно.



124. Осум запчаници се поврзани како на цртежот десно и се вртат. Левиот долен запчаник се врти во насока спротивно од движењето на стрелките на часовникот. Во која насока се врти долниот десен запчаник?

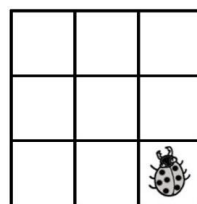


Решение. Ако запчаниците се непосредно поврзани, тогаш тие се вртат во спротивни насоки. Ако запчаниците обично се поврзани со ремен, тогаш тие се врта во иста насока. Ако запчаниците се поврзани со ремен кој се прекрстува, тогаш тие се вртат во спротивни насоки. Со 1 да ја означиме насоката на вртење на стрелките на часовникот, а со 2 спротивната насока. Тогаш редоследно почнувајќи од првиот до осмиот запчаник ги имаме насоките: 1, 2, 2, 1, 2, 1, 2, 2 (цртеж десно). Значи, долниот десен запчаник се врти во насока спротивна од насоката на движење на стрелките на часовникот.

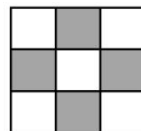


125. Во долното десно поле на табла со димензии

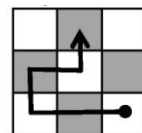
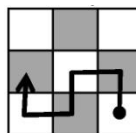
3×3 се наоѓа бубамара. Таа минува преку четири различни квадратчиња и застанува да се одмори на петтото квадратче, при што не смее двапати да помине преку исто квадратче. Од положбата во која се наоѓа бубамарата во секое квадратче може да се срвти налево или надесно. Во кое квадратче застанала бубамарата ако при патувањето направила еднаков број леви и десни свртувања?



Решение. Таблата да ја обоиме како на цртежот десно. Јасно, по секое преминување на соседно поле се менува бојата на полето. Последното значи дена боите на полињата се менуваат според редоследот ЦБЦБЦ, т.е. бубамарата мора да застане на црно поле.

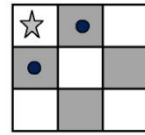


Има 4 црни полиња. На цртежот десно е прикажано како бубамарата може да стигне на две од овие четири полиња при што ќе направи еднаков



број свртувања налево и надесно. Во првиот случај имаме ЛЛДД, а во вториот случај имаме ЛДДЛ (првото свртување е во почетното поле).

Ќе докажеме дека во другите две сиви полиња бубамарата не може да стигне. Навистина, ако бубамарата минува низ полето означено со ѕвездичка или, тогаш таа минува низ двете полиња означени со точки, па затоа поминува низ повеќе од 5 полиња. Значи, ако таков пат постои, тогаш тој мора да се содржи во правоаголник со димензии 2×3 или 3×2 . Но во секој од овие правоаголници постојат само по два пата кои минуваат низ различни полиња и ниту еден од нив не ги задоволува условите на задачата (нацртај ги!).



ЛИТЕРАТУРА

1. Andrić, V.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja, DMS, Beograd, 1991
2. Andrić, V.; Ilić, V.; Lazarević, B.; Tomić, I.: Pripremni zadaci za matematička takmičenja za učenike osnovnih škola, DMS, Beograd, 1988
3. Ilić, N. V.: Odabrani zadaci sa matematičkih takmičenja 5. i 6. razred, DMS, Beograd, 1991
4. Stojanović, V.: Vodič za šampione (pripreme takmičenja za IV, V i VI razred), Matematiškop, Beograd, 1999
5. Андрић, В.: Математика X (приручник за припремање за такмичење ученика основних школа од IV до VIII разред), Круг, Београд, 1996
6. Аневска, К., Гоговска, В. Пресметување плоштини со броење, Нумерус, Скопје, 2015
7. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 1, Математилка искра 1, Скопје, 2020
8. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 2, Математилка искра 2, Скопје, 2020
9. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 3, Математилка искра 3, Скопје, 2020
10. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 4, Математилка искра 4, Скопје, 2020
11. Аневска, К.: Кинеска игра танграм 5, Математилка искра 5, Скопје, 2020
12. Главче, М., Малчески, Р.: Движење по патеки и лавиринти, Нумерус, Скопје, 2015
13. Главче, М.: Забавни кибритчиња, Нумерус, Скопје, 2014
14. Главче, М.: Пет квадрати, а многу задачи, Нумерус, Скопје, 2016
15. Главче, М.: Пополнуваме тоа што недостасува, Нумерус, Скопје, 2014

16. Главче, М.: Пресметуваме зборови, Нумерус, Скопје, 2016
17. Главче, М.: Споредуваме и пресметуваме, Математичка искра, Скопје, 2020
18. Главче, М.: Цртаме без да го подигнеме моливот, Нумерус, Скопје, 2018
19. Главче, М.: Движење во лавиринти, Математичка искра 3, Скопје, 2020
20. Главче, М.: Прошетки по лавиринти, Математичка искра 5, Скопје, 2020
21. Златилов, В.; Тонова, Т.; Цветкова, И.; Пендалиева, В.: Математическа читанка (4 клас), Труд & прозорец, София, 2000
22. Косев, К.: Сборник от задачи по математика за изјавени ученици в 4 клас, Модул, София, 1993
23. Косев, К.: Сборник от задачи по математика за изјавени ученици в 5 клас, Модул, София, 1994
24. Лазаревић, Б.: Припремни задаци за математичка такмичења за ученике IV разреда основне школе, ДМС, Београд, 1990
25. Малчески, Р., Главче, М.: Занимливи броења, Нумерус, Скопје, 2019
26. Малчески, Р., Главче, М.: Решаваме бројни ребуси, Нумерус, Скопје, 2017
27. Малчески, Р.: Да размислуваме со „здрав разум“, Математичка искра 2, Скопје, 2020
28. Малчески, Р.: Нестандардни мерки за должина, Математичка искра 3, Скопје, 2020
29. Малчески, Р.: Право, лево и десно, Математичка искра 2, Скопје, 2020
30. Малчески, Р.: Редослед на случување на настани, Математичка искра 1, Скопје, 2020
31. Малчески, Р.: Решаваме задачи со броење коцки, Нумерус, Скопје, 2016
32. Малчески, Р.: Решавање задачи со Венови дијаграми, Нумерус, Скопје, 2003
33. Малчески, Р.: Редици од броеви, Математичка искра 4, Скопје, 2020

34. Малчески, Р.: Црвенкапа и загатките на волкот, Математичка искра 1, Скопје, 2020
35. Малчески, Р.: Малчку поинакви пресметувања, Математичка искра 5, Скопје, 2020
36. Малчески, С.: Броиме коцки, Математичка искра 1, Скопје, 2020
37. Малчески, С.: Дополнуваме тоа што недостасува, Математичка искра 2, Скопје, 2020
38. Малчески, С.: Математика во правоаголна мрежа, Математилка искра 3, Скопје, 2020
39. Малчески, С., Главче, М.: Броиме патишта, Математичка искра 4, Скопје, 2020
40. Малчески, С.: Времето е важно, Математичка искра 5, Скопје, 2020
41. Раковска, Д.; Тонов, И. и др.: Математически състезания 4-7 клас, Регалия 6, София, 1993
42. Раковска, Д.; Тонов, И. и др.: Математически състезания 4-7 клас, Втора част, Регалия 6, София, 1995
43. Тюфекчиев, И.; Лесов, Х.: Задачи за извънкласна работа по математика в VI и V клас, СМБ, София, 1985
44. Христова, М.; Витанов, Т.; Миланова, Д.; Лозанов, Ч.: Клуб математика за всеки (5. клас), Анубис, София, 1998