

## Paradoksi: Paradoksi kretanja

Nermin Okičić<sup>1</sup>

<sup>a</sup>*Prirodno-matematički fakultet u Tuzli, Odsjek matematika*

**Sažetak:** Ono što vječito privlači pažnju ljudi, neobično, čudno, neočekivano, ali ipak na neki način moguće, upravo je opisano paradoksom. Te "čudne" stvari i događanja osim što izazivaju nedoumice, bile su i pokretačka snaga u razvoju mnogih naučnih disciplina. U ovom radu su prezentovani neki od paradoksa kretanja, čime je istaknuta i problematika šta je kretanje uopšte.

Riječ "paradoks" poznata je većini. Kada u običnom govoru kažemo da je nešto paradoksalno, podrazumijevamo da je to "nešto" neostvarivo ili da je nemoguće (najčešće kao "skoro nemoguća" stvar). Najlakše za shvatiti, *paradoks* ili *antinomija* predstavlja rasuđivanje koje nas obavezno dovodi do protivrječnosti, bez obzira koliko nam polazne pretpostavke izgledale tačne, a pravila rasuđivanja ispravna. To može biti izuzetno nejasan, nelogičan ili neobičan događaj ili fenomen koji je suprotan umu pojedinca i suprotan smislu značenja (semantike).

Paradoks (grčki  $\pi\alpha\rho\alpha\delta\omicron\xi\omicron\varsigma$ , paradoksos = nevjerovatan; para = protiv, doxa = mišljenje) jest misao ili figura koja u sebi sadrži protivrječnost nekoj tvrdnji koja je opšteprihvaćena, ili nekom ispravnom zaključku. Paradoks je važno sredstvo u govorništvo jer se njime postiže veća uvjerljivost misli koju govornik zastupa. Prema definiciji koju daje Sainsbury<sup>1)</sup> paradoks je: "Jedan naizgled neprihvatljiv zaključak koji proizilazi iz naizgled prihvatljive premise, putem naizgled prihvatljiva zaključka". U filozofiji i ekonomiji termin se koristi kao sinonim za antinomiju.

Paradoks daje snažan poticaj za razmišljanje. On otkriva slabosti naših sposobnosti da sudimo, ali i ograničenja naših intelektualnih instrumenata rasuđivanja. Često su paradoksi na temelju jednostavnih koncepata doveli do velikog intelektualnog napretka. Ponekad je to bilo pitanje otkrivanja novih matematičkih pravila ili otkrivanja novih fizikalnih zakona kako bi se prihvatili zaključci koji su u početku bili "očigledno neprihvatljivi". Još iz doba Stare Grčke poznati su neki od njih, ali što je jako bitno, njihovim razrješavanjem dolazilo je do naglog razvoja određene matematičke discipline. Tako je problem nesamjerljive dijagonale doveo do razvoja čitave matematičke oblasti, tzv. *teorije proporcija*, iz koje će se kasnije razviti teorija iracionalnih brojeva. Takođe, poznati *Zenonov*<sup>2)</sup> *paradoks* o Ahilu i kornjači (i njemu srodni) doveli su do razvoja *teorije ekshaustije*, a koji se zasniva na činjenici da se jedna konačna veličina ne može izgraditi od beskonačno mnogo, beskonačno malih veličina. To će nešto kasnije uzrokovati razvoj integralnog računa.

Od početka pisane povijesti postoje reference na paradokse, od Zenonovih paradoksa, Kantovih antinomija sve do dostizanje paradoksa kvantne mehanike i teorije opšte relativnosti i čovječanstvo je oduvijek bilo zainteresirano za njih. Usto postoji jedno cijelo filozofsko-vjersko strujanje, Zen budizam, kome su povjerena učenje u zen-koanama, paradoksalnim pričama-zagonetkama koje munjevitom brzinom osvjetljavaju teško sagledive duhovne odnose.

---

*Ciljna skupina:* osnovna škola, srednja škola

*Prezentovano na:* Zimska škola matematike 2016

*Rad preuzet:* 12.12.2017.

<sup>1)</sup>Mark Sainsbury, engleski filozof 1943-

<sup>2)</sup>Zenon od Eleje, grčki filozof (oko 490 p.n.e.- oko 430 p.n.e.)

Paradoks se od oksimorona i ironije razlikuje po tome što njegovi pojmovi nisu protivrječni, nego samo neskladni. Besmislica, nesmisao ili (latinizam) apsurd (od lat. absurditas, istog značenja kao absurdus "protivrječno", u prenesenom smislu "nesposobno, nespretno") odnosi se na nešto što je glupost ili nešto što je bez smisla.

*Frano Vukoja [www.vecernji.ba](http://www.vecernji.ba)*

... a paradoks je misao, odnosno sud, koji po nečemu izgleda proturječno onome što je opće usvojeno, neki zaključak koji proturječi ispravnom zaključivanju. Rječnici navode primjer: Nisam dovoljno bogat da kupujem jeftine stvari! Riječ paradoks grčkog je podrijetla, a znači neočekivan. U logici paradoksalne su one tvrdnje koje u pravilno izvedenim i prividno nepobitnim zaključcima dovode do rezultata koji se isključuju i postaju proturječni. Pojedini logičari smatraju da su paradoksi ujedno i sofizmi. Postoje matematički paradoksi, a u retorici paradoks je spajanje u jedan suvisli iskaz takvih pojmova koji po svojoj biti ili zdravom rasuđivanju proturječe jedan drugome. Lažov može reći: Ja uvijek lažem! A ovo što je rekao nepopravljivi lažov istina je!!! Paradoksu su jako skloni autori aforizama, a vezuje se i za baroknu poeziju. Pojedini književni kritičari smatraju da je paradoks obilježje poezije uopće. A kad je paradoks u pitanju, BiH je priča za sebe. BiH mnogi zovu samo Bosnom i kažu da pri tome misle na čitavu BiH. Po istoj "logici" čitava BiH mogla bi se zvati "samo" Hercegovinom. Gle paradoksa, svi koji čitavu BiH zovu Bosnom nasmijali bi se na to. Mnogima je paradoks to da su tri naroda u BiH smještena baš u dva entiteta, kao i to da parlamentarna većina ne može uspostaviti izvršnu vlast. U BiH puno toga suprotno je samom sebi, proturječno. Parada paradoksa!

## 1. Zenonovi paradoksi

Zenonovi paradoksi su zbunjivali, izazivali, utjecali, inspirisali i zadirjavali filozofe, matematičare, fizičare i školsku djecu, preko dvije hiljade godina. Najpoznatiji su takozvani "argumenti protiv kretanja" opisani u Aristotelovoj Fizici. Prva tri navedena su ovdje po redu, s imenima koja im je dao sam Aristotel.

Osnovno pitanje je: da li su prostor i vrijeme kontinuirani, neprekidni? Ako jesu, onda između bilo koje dvije tačke u prostoru postoji i treća tačka. Ili, posmatrano na drugi način, za bilo koju dužinu, postoji takva stvar kao što je polovina te dužine. Primijenjena na vrijeme, ideja bi bila da za bilo koji interval vremena, postoji takva stvar koja je pola tog vremena.

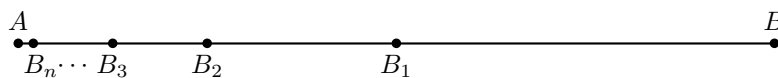
Ako prostor i vrijeme nisu kontinuirani, onda kažemo da su diskretni. Ako je prostor diskretan, onda postoje dužine koje nisu djeljive ili rečeno na drugi način, postoje dvije tačke između kojih ne postoje druge tačke. Ako je vrijeme diskretno, onda postoje nedjeljivi intervali vremena ili da postoje parovi vremenskih trenutaka između kojih ne postoji ništa drugo (niti jedan drugi vremenski trenutak).

Zenonovi paradoksi imaju sljedeću strategiju: on kreće od pretpostavke da su prostor i vrijeme ili kontinuirani ili diskretni. Zatim pokazuje da bilo koja pretpostavka vodi do zaključka da je kretanje nemoguće.

### 1.1. Dihotomija

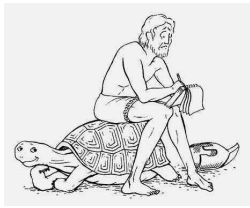
Dihotomija: kretanje je nemoguće jer "ono što je u pokretu mora prvo prijeći pola puta prije nego što stigne do cilja". (Aristotel, Fizika VI:9, 239b10)

Zamislimo objekat koji treba ići od tačke  $A$  do tačke  $B$ . Da bi došao do tačke  $B$ , objekat prvo mora doći do središnje tačke  $B_1$  koja je između tačaka  $A$  i  $B$ . Ali, prije nego što se ovo dogodi, objekat mora doći do tačke  $B_2$ , koja je na sredini između tačaka  $A$  i  $B_1$ . Opet, prije nego što može i uspije, mora prvo doći do tačke  $B_3$ , koja je na sredini između  $A$  i  $B_2$ , i tako dalje. Prema tome, kretanje nikada ne može početi.

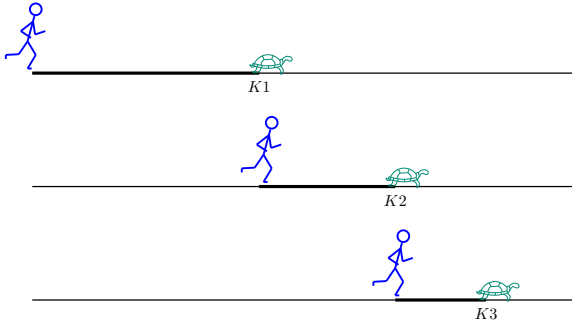


1.2. Ahil i kornjača

”U utrci, najbrži trkač nikada ne može prestići najsporijeg, zato što gonitelj prvo mora doći do tačke odakle je gonjeni pošao, pa prema tome najsporiji uvijek ima prednost.” (Aristotel, Fizika VI:9, 239b15)



**Ahil i kornjača** je priča o trci između kornjače i brzog trkača Ahila. Ahil trči 10 puta brže od kornjače, ali počinje od tačke A, 100 metara iza kornjače, koja je u tački  $K_1$ . Da bi prestigao kornjaču, Ahil mora prvo doći do tačke  $K_1$ . Međutim, dok Ahil stigne do tačke  $K_1$  kornjača je prešla 10 metara i došla do tačke  $K_2$ . Ponovo Ahil trči do tačke  $K_2$ , ali kao i prije, dok on pređe tih 10 metara, kornjača je metar ispred njega, kod tačke  $K_3$ . Prema tome, nastavimo li ovako razmišljati, Ahil nikada neće prestići kornjaču.

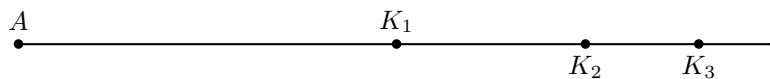


U slučaju Ahila i kornjače, treba zamisliti da kornjača trči konstantnom brzinom od  $v$  metara u sekundi i da ima startnu prednost od  $d$  metara, a da Ahil trči konstantnom brzinom od  $x \cdot v$  ( $x$  puta brže) metara u sekundi za  $x > 1$ . Ahilu je potrebno  $\frac{d}{x \cdot v}$  sekundi da dođe do tačke s koje je kornjača otpočela trku, a za to vrijeme kornjača je prešla novih  $\frac{d}{x}$  metara. Dakle, da bi Ahil sada došao do nove pozicije kornjače potrebno mu je  $\frac{d}{x^2 \cdot v}$  sekundi, a kornjača će za to vrijeme ponovo preći novih  $\frac{d}{x^2}$  metara. Postupak nastavljamo ad continuum (”do u beskonačnost”). Prema tome, vrijeme potrebno Ahilu da stigne kornjaču je:

$$\frac{d}{v} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^k = \frac{d}{v(x-1)} \text{ sekundi .} \tag{1}$$

Vidimo da će Ahil za konačno vrijeme da stigne kornjaču.

Zamislimo da Ahil trči protiv kornjače na stazi dužoj 100 metara. Ahil trči 10 puta brže od kornjače, koja se recimo kreće brzinom od jednog metra u sekundi, ali počinje od tačke A, 50 metara iza kornjače koja je u tački  $K_1$  (kornjači koja je sporija data je prednost). Da bi prestigao kornjaču, Ahil mora prvo doći do tačke  $K_1$ . Međutim, dok Ahil stigne do tačke  $K_1$ , kornjača je prešla 10 metara i došla do tačke  $K_2$ . Ponovo Ahil trči do  $K_2$ . Ali, kao i prije, dok on prijeđe 10 metara, kornjača je metar ispred njega, u tački  $K_3$ , i tako dalje. Prema ovakvom načinu posmatranja, Ahil nikada ne može prestići kornjaču.



Međutim, prema formuli (??) imamo:  $d = 50$ ,  $x = 10$  i  $v = 1 \frac{m}{s}$ ,

$$\frac{d}{v(x-1)} = \frac{50}{1 \cdot (10-1)} = \frac{50}{9} = 5,555... \text{ sekundi ,}$$

to jest, Ahil će stići kornjaču nakon  $5,5 \text{ s}$ , a s obzirom na njegovu brzinu ( $10 \frac{m}{s}$ ) to znači da će je stići na  $55,5 \text{ m}$  staze.

### 1.3. Paradoks strijele

”Ako je sve nepomično što zauzima prostor, i ako sve što je u pokretu zauzima takav prostor u nekom vremenu, onda je leteća strijela nepokretna.” (Aristotel, Fizika VI:9, 239b5)

Zamislimo da strijela leti neprestano naprijed, tokom jednog vremenskog intervala. Posmatrajmo svaki trenutak u tom vremenskom intervalu. Nemoguće je da se strijela miče u takvom trenutku, jer trenutak ima trajanje 0, a strijela ne može biti na dva mjesta u isto vrijeme. Prema tome, u svakom trenutku strijela zauzima komad prostora, a ”Ako je sve nepomično što zauzima prostor”, to je i strijela nepomična tokom čitavog intervala.

Naravno da se problematika paradoksa strijele tiče shvatanja pojma kretanja. U gornjem rezonovanju kretanje, odnosno nekretanje smo shvatili kao ”zauzimanje prostora”. Zamislimo da se nalazimo na pokretnoj traci i da se krećemo u suprotnom pravcu od kretanja trake, istom brzinom kojom se kreće traka. Zar tada ne zauzimamo stalno isti komad prostora? Prema gornjem shvatanju mi se ne krećemo!

Da bismo mogli govoriti o kretanju nekog tijela (npr. automobila, čestice, planete...) prvo moramo da izaberemo jedno tijelo za koje smatramo da miruje (npr. zgrada, jezgro, sunce ...) a zatim da vidimo da li se mijenja uzajamni položaj između ta dva tijela. Ako se njihov uzajamni položaj mijenja, onda možemo da zaključimo da se posmatrano tijelo kreće. Tijela u datom trenutku zauzimaju određena mjesta u prostoru i to se naziva njihov položaj. Kretanje je dakle promjena položaja tijela u odnosu na druga tijela. Ako se položaj tijela ne mijenja u odnosu na druga tijela tokom vremena, onda se ono nalazi u stanju mirovanja. Tijelo u odnosu na koje se posmatra kretanje i za koje smatramo da miruje, naziva se uporedno ili referentno tijelo.

Kada govorimo da tijelo miruje moramo biti obazrivi. Ako se na primjer nalazimo u autobusu koji se kreće, za putnika koji sjedi reći ćemo da miruje, ali ukoliko izađemo iz autobusa i posmatramo istog putnika u autobusu, zaključujemo da se kreće. Zbog toga se u fizici koriste izrazi relativno mirovanje i relativno kretanje.

### Literatura

[1] <https://bs.wikipedia.org/wiki/Paradoks>

[2] [https://en.wikipedia.org/wiki/Zeno27s\\_paradoxes](https://en.wikipedia.org/wiki/Zeno27s_paradoxes)