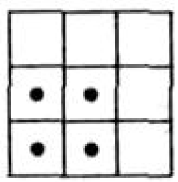
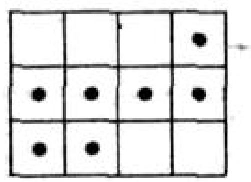
Др Павле Младеновић (Београд)

ЈЕДНА МАТЕМАТИЧКА ИГРА

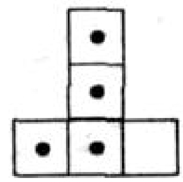
У овом чланку описаћемо једну игру за коју је потребна табла састављена од квадратних поља и фигуре које се у почетном тренутку поставе на нека од поља табле. Табла може бити квадратна, правоугаона, али и неког другог облика. На сликама 1, 2 и 3 приказана су три примера табли са почетним распоредом фигура на пољима.



Сл. 1



Сл. 2



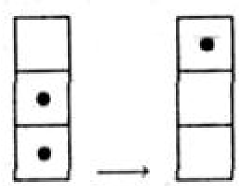
Сл. 3

Два квадратна поља табле (која ћемо у даљем кратко звати пољима) су суседна, ако имају заједничку страницу. За поље на коме се не налази фигура кажемо да је слободно. У току игре дозвољено је премештати и уклањати фигуре са табле, при чему се сваки потез састоји у следећем:

Произвољном фигуром са табле прескаче се фигура која се налази на суседном пољу и доскаче на поље које је слободно, суседно пољу на коме се налази прескочена фигура и налази се у истом реду или колони као и поља на којима су биле две поменуте фигуре. При томе, прескочена фигура се уклања са табле.

На сликама 4 и 5 приказане су промене позиције после одиграног потеза, тј. позиције пре и после одиграног потеза.

Сл. 4



Сл. 5

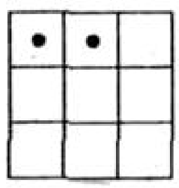
Циљ игре је да на табли остане само једна фигура.

Ако су у почетном тренутку на табли распоређене само две фигуре и то на суседним пољима, онда се игра *завршава* у једном потезу (под условом да табли припада и поље на које фигура доскаче). Ако се у почетном тренутку на табли налазе две фигуре, али су оне постављене на поља која нису суседна, онда се не може одиграти потез, па се игра *не може* завршити са само једном фигуром на табли.

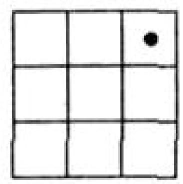
У неким случајевима погодно је сматрати да је табла бесконачна. На пример, раван је подељена на квадратна поља двема фамилијама паралелних правих (при чему су праве прве фамилије нормалне на праве друге фамилије). Такву таблу називамо бесконачна шаховска табла.

Размотрићемо сада неколико конкретних примера ове игре.

Пример 1. Нека је дата табла са фигурама као на слици 1. Ако у прва два потеза фигуре из трећег реда поставимо на први ред и уклонимо са табе фигуре из другог реда, добијамо позицију *представљену на слици 6. Премештајући затим фигуру из горњег* левог у горњи десни угао, добијамо завршну позицију са само једном фигуром на табли (види слику 7).

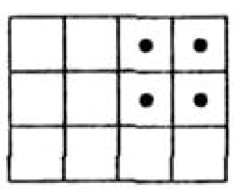


Сл. 6



Сл. 7

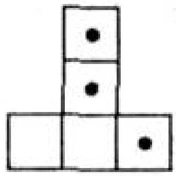
Пример 2. Нека је дата табла са фигурама као на слици 2. Размотримо прво 4 фигуре које се налазе у квадрату 2×2 смештеном у доњем левом углу дате табле. Поступају аналогно као у претходном примеру можемо после три потеза користећи само ове фигуре добити позицију представљену на слици 8.



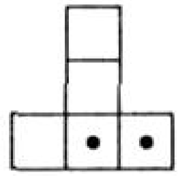
Сл. 8

Позиција на слици 8 је иста као и позиција на слици 1, па са још три потеза можемо постићи да на табли остане само једна фигура.

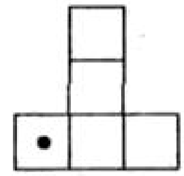
Пример 3. Нека је дата табла са фигурама као на слици 3.



Сл. 9



Сл. 10



Сл. 11

На сликама 9, 10 и 11 показано је како се после три потеза може доћи до позиције са само једном фигуром на табли.

Пример 4. Нека је на бесконачној шаховској табли у свако поље једног квадрата 4 × 4 постављена фигура. На слици 12 је једна од постављених фигура означена симболом •, а остале фигуре су означене цифрама 1, 2, 3, 4, 5 (по три фигуре сваком од тих цифара). Користећи поступак описан у примеру 3 можемо са табле уклонити прво фигуре означене цифром 1. При томе се користи једна од фигура означена цифром 2, која се привремено ставља на поље које је ван квадрата 4 × 4 чија су поља у почетку заузета фигурама. Затим са табле на сличан начин уклањамо фигуре означене цифрама 2, 3, 4, 5. На крају ће на табли остати само фигура означена са •.

	2	2	2	1	
	3	4	5	1	
	3	4	5	1	
	3	4	5	•	

Сл. 12

	3	3	3	2	1	
	4	4	4	2	1	
	5	6	7	2	1	
	5	6	7	•	•	
	5	6	7	•	•	

Сл. 13

Пример 5. Нека је *на бесконачној шаховској табли у свако поље* једног квадрата 5 × 5 постављена фигура. На слици 13 су четири од постављених фигура означене симболом •, а остале фигуре су означене цифрама 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 (по три фигуре сваком од тих цифара). Склањајући са табле тројке фигура означене редом цифрама 1, ..., 7 добијамо позицију са четири фигуре означене симболом •. Другим речима, квадрат 5×5 редуковали смо на квадрат 2×2. Поступајући затим као у примеру 1, постижемо да на табли остане само једна фигура.

Пример 6. Нека је на бесконачној шаховској табли у свако поље једног квадрата 3×3 постављена фигура (види слику 14). Да ли се у овом случају игра може завршити са само једном фигуром на табли?

		•	•	•		
		•	•	•		
		•	•	•		

Сл. 14

1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1
2	3	1	2	3	1	2
3	1	2	3	1	2	3
1	2	3	1	2	3	1

Сл. 15

Предлажемо читаоцима да (на пример, користећи шаховску таблу и шаховске фигуре) покушају да дају одговор на постављено питање пре него што наставе да читају овај текст.

Уколико сте пробали да одиграте игру видећете да вам на табли увек остају бар две фигуре и да више нисте у могућности да одиграте потез. Доказаћемо да се у овом примеру заиста не може играти тако да на табли остане само једна фигура.

Претпоставимо супротно, тј. нека је могућно играти тако да на табли од датих девет остане само једна фигура. Означимо са 1 поље на које остаје та једна фигура, а остала поља у равни нумеришимо као на слици 15. Током игре мења се распоред фигура на табли. Сваки такав распоред кратко ћемо звати *позиција*.

За сваку позицију одредимо њену *карактеристику,* која представља збир бројева којима су нумерисана поља на којима стоји фигура. Карактеристика почетне позиције једнака је

$$3(1 + 2 + 3) = 3 \cdot 6 = 18,$$

а карактеристика завршне позиције једнака је 1, јер у завршној позицији, по претпоставци, стоји само једна фигура и то на пољу које је означено бројем 1.

Размотримо сада како се мења карактеристика позиције после сваког одиграног потеза. Означимо са $1 \to 2 \to 3$ потез код кога *фигура са поља означеног јединицом прескаче поље означено двојком* и доскаче на поље означено тројком. Аналогно означавамо остале потезе. У следећој табели дата је промена карактеристике у зависности од одиграног потеза:

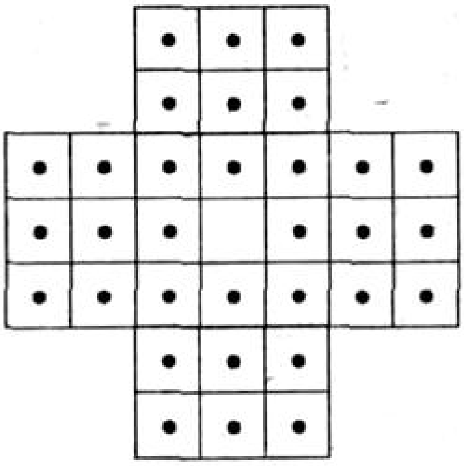
потез	*промена карактеристике*
$1 \to 2 \to 3$	$-1-2+3=\ \ 0$
$1 \to 3 \to 2$	$-1-3+2=-2$
$2 \to 3 \to 1$	$-2-3+1=-4$
$2 \to 1 \to 3$	$-2-1+3=\ \ 0$
$3 \to 1 \to 2$	$-3-1+2=-2$
$3 \to 2 \to 1$	$-3-2+1=-4$

Према томе, после сваког потеза, карактеристика позиције или остаје иста или се смањује за 2 или се смањује за 4. На основу тога и из чињенице да је карактеристика почетне позиције једнака 18 следи да ће карактеристика сваке нове позиције бити паран број. Другим речима, та карактеристика не може бити једнака 1, а тај закључак је *у контрадикцији са уведеном претпоставком. Тиме смо доказали да* у овом примеру није могућно завршити игру са само једном фигуром на табли.

Пример 7. *На слици 16 представљена је табла састављена од 33* квадратна поља. У сва осим централног поља те табле постављена је фигура. Да ли се на тој табли може одиграти игра (према описаним правилима) тако да на табли остане само једна фигура?

У овом случају одговор је потврдан. Међутим, није једноставно пронаћи правилан начин игре који води жељеном циљу. Предлажемо да, пре него што прочитате решење, нацртате на листу папира таблу као на слици 16 и коришћењем 32 фигуре покушате да одиграте игру до завршетка.

Нумеришимо поља дате табле природним бројевима од 1 до 33 као на слици 17. Потез којим се премешта фигура са поља нумерисаног бројем m на поље нумерисано бројем n означаваћемо кратко са $m-n$ (у овом случају не записујемо број прескоченог поља са кога се уклања фигура).



Сл. 16

		1	2	3		
		4	5	6		
7	8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27
		28	29	30		
		31	32	33		

Сл. 17

Један начин играња којим постижемо да на табли остане само једна фигура представља следећи низ потеза: 5–17, 12–10, 3–11, 18–6, 30–18, 27–25, 24–26, 13–27, 27–25, 9–11, 7–9, 22–24, 24–26, 26–12, 12–10, 10–8, 1–3, 3–11, 11–25, 31–23, 16–28, 33–31, 31–23, 21–7, 7–9, 4–16, 16–28, 28–30, 30–18, 18–16, 15–17.

Задатак

1. У свако поље квадрата $n \times n$ на бесконачној шаховској табли постављена је по једна фигура. Да ли се може играти по правилима описане игре тако да на табли остане само једна фигура, ако је:
   (а) $n = 7$,
   (б) $n = 8$,
   (в) $n = 9$,
   (г) n природан број који није дељив са 3,
   (д) n природан број који је дељив са 3?
2. У свако поље правоугаоника 5×4 на бесконачној шаховској табли постављена је по једна фигура. Да ли се може играти по правилима описане игре тако да на табли остане само једна фигура?

Статијата прв пат е објавена во списанието Математички лист на ДМ на Србија