Регионален натпревар 1986

I година

1. Два автомобили тргнале од едно исто место но во спротивна насока. Во моментот кога нивното растојание било 18 km, едниот автомобил поминал 3 km помалку од двојниот пат на другиот. Да се одреди патот на двата автомобили што го поминале до тој момент.

Решение. Нека x и y се патиштата што ги поминале автомобилите. Од условот на задачата: $x+y=9$ и $x=2y-3$. Решение на овој cсстем равенки е $x=11$, $y=7$. Значи, едниот автомобил поминал 11 km, а другиот 7 km.

2. Дали може бројот 1986 да се претстави како разлика од квадрати на два цели броја? Одговорот да се образложи.

Решение. Одговорот е не. Образложението е како што следува:

(i) $m=2k$, $n=2t$. Тогаш $m^2-n^2=4(k^2-t^2)$, т.е. 4 е делител на m^2-n^2, а 4 не е делител на 1986.

(ii) $m=2k+1$, $n=2t+1$. Тогаш $m^2-n^2=4(k^2-t^2+k-t)$, т.е. 4 е делител на m^2-n^2, а 4 не е делител на 1986.

(iii) $m=2k$, $n=2t+1$ или $m=2k+1$, $n=2t$. Тогаш $m^2–n^2$ е непарен број, а 1986 е парен број.

3. Весна, Борис и Никола се одлични ученици кои никогаш не лажат. На прашањето што добиле на писмената работа по математика, тие одговориле:

Весна: „Ако Никола и јас добивме 5, тогаш и Борис доби 5“;

Борис: „ Ако јас добив 5, тогаш и Весна доби 5“; и

Никола: „ Ако Борис или јас добивме 5, тогаш и Весна доби 5“

Познато е дека еден од нив добил 4 а другите двајца добиле 5. Кои оценки ги добиле Весна, Борис и Никола?

Решение. Нека p, q и r се исказите “Весна добила 5“, “Борис добил 5“ и „Никола добил 5“, соодветно. Знаејќи дека еден од нив не е точен, а другите два се точни ја правиме следната таблица:

p	q	r	$p\wedge r\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$q\vee r\Rightarrow p$
$\top$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$
$\top$	$\perp$	$\top$	$\perp$	$\top$	$\top$
$\perp$	$\top$	$\top$	$\top$	$\perp$	$\perp$

Бидејќи исказите на Весна, Борис и Никола (т.е. $p \wedge r \Rightarrow q$, $q \Rightarrow p$, $q \vee r \Rightarrow p$) се точни, од таблицата се добива дека Весна и Борис добиле 5, а Никола добил 4).

4. Нека A, B, C, D и E се пет точки, такви што било кои три од нив не се колинеарни. Докажи дека тие определуваат една, седум или десет рамнини.

Решение. Можни се следните случаи:

(i) Точките се компланарни, т.е. сите точки припаѓаат на една рамнина,

(ii) Четири од точките се компланарни, а петтата не припаѓа на рамнината определена со нив.

(iii) Кои било четири од дадените пет точки не се компланарни.

Во случајот (i) точките определуваат единствена (една) рамнина.

Во случајот (ii), нека A, B, C, D се компланарни, т.е. $A, B, C, D \in \Sigma_1$ и $E \notin \Sigma_1$. Тогаш точките A, B, C, D, E ги определуваат рамнините Σ_1; $\Sigma_2 = ABE$, $\Sigma_3 = ACE$, $\Sigma_4 = ADE$, $\Sigma_5 = BCE$, $\Sigma_6 = BDE$ и $\Sigma_7 = CDE$. Потребно е да се докаже дека Σ_1 до Σ_7 се различни рамнини. Јасно е дека $\Sigma_1 \neq \Sigma_i$, за секој $i = 2,3,4,5,6,7$. Ќе докажеме дека $\Sigma_2 \neq \Sigma_3$, а другите нееднаквости се докажуваат на ист начин. Бидејќи $\Sigma_1 \neq \Sigma_2$ и $A, B \in \Sigma_1$ и $A, B \in \Sigma_2$, следува дека $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$ е правата AB. Ако $\Sigma_2 = \Sigma_3$, тогаш од $C \in \Sigma_3 = \Sigma_2$ и $C \in \Sigma_1$ следува дека $C \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = AB$, но тоа е спротивно со претпоставката A, B и C да не се колинеарни.

Во случајот (iii), која било тројка од точките определува една рамнина. Такви тројки има 10. Две различни тројки определуваат две различни рамнини, затоа што кои било четири од дадените пет точки се некомпланарни. Значи, во овој случај точките определуваат 10 рамнини.

II година

1. Реши ја равенката

$$\sqrt{x-9} + \sqrt{x+12} - \sqrt{x-3} - \sqrt{x-4} = 0 .$$

Решение. Со квадрирање на равенката $\sqrt{x-9} + \sqrt{x+12} = \sqrt{x-3} + \sqrt{x-4}$ се добива

$$x - 9 + 2\sqrt{x^2 + 3x - 108} + x + 12 = x - 3 + 2\sqrt{x^2 - 7x + 12} + x - 4,$$

т.е.

$$\sqrt{x^2 + 3x - 108} = \sqrt{x^2 - 7x + 12} - 5.$$

Со повторно квадрирање, се добива

$$x^2 + 3x - 108 = x^2 - 7x + 12 - 10\sqrt{x^2 - 7x + 12} + 25,$$

т.е.

$$2\sqrt{x^2-7x+12}=29-2x\,.$$

Со уште едно квадрирање, се добива

$$4x^2-28x+48=841-116x+4x^2 \text{ т.е. } 88x=793.$$

Бидејќи $\frac{793}{88}-9=\frac{1}{88}>0$, бараното решение е $x=\frac{793}{88}$.

2. Да се пресмета вредноста на изразот

$$(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2})^{1986}+(\tfrac{-1-i\sqrt{3}}{2})^{1986},$$

i е имагинарна единица.

Решение. Лесно се проверува дека

$$(\tfrac{-1+i\sqrt{3}}{2})^3=1=(\tfrac{-1-i\sqrt{3}}{2})^3.$$

Според тоа, дадениот израз има вредност 2, бидејќи 3 е делител на 1986.

3. Дадена е квадратната равенка по x

$$4(p-2)^2x^2-4(p-2)qx+q(4p-3q+4)-(p-1)^2=0,\ \ p,q\in\mathbb{N}\,.$$

Каков услов треба да исполнуваат p и q за равенката да има двоен корен? Да се најде барем еден двоен корен кој е природен број.

Решение. За дадената равенка да биде квадратна, потребно е $p-2\neq 0$. Непосредно се проверува дека дискриминантата на равенката е

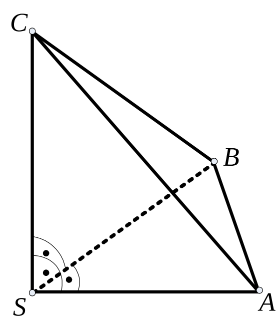
$$D=4(p-2)^2(2q-p-1)^2\,.$$

За равенката да има двоен корен, потребно е $D=0$. Бидејќи $4(p-2)^2\neq 0$, потребно е $2q-p-1=0$, а тоа е и условот кој треба да го задоволуваат p и q за квадратната равенка да има двоен корен. Тој двоен корен е

$$x=\tfrac{2(p-2)q}{4(p-2)^2}=\tfrac{q}{2(p-2)}=\tfrac{p+1}{4(p-2)}\,.$$

За x да биде природен број, потребно е $p\geq 3$ и $p+1\geq 4(p-2)$, од каде следува дека $p=3$ и $x=1$ е еден двоен корен.

4. Бочните рабови на тристрана пирамида се нормални меѓу себе. Плоштините на бочните ѕидови се B_1, B_2, B_3. Да се докаже дека волуменот на пирамидата е $\frac{1}{3}\sqrt{2B_1B_2B_3}$.



Решение. Пирамидата е прикажана на цртежот, при што B_1, B_2, B_3 се плоштините на ѕидовите ABS, BCS и CAS соодветно. Волуменот на пирамидата е

$$V = \tfrac{1}{3} B_3 \cdot \overline{SB} = \tfrac{1}{6} \overline{AS} \cdot \overline{BS} \cdot \overline{CS} .$$

Од тоа што

$$B_1 \cdot B_2 \cdot B_3 = \tfrac{1}{8} \overline{AS} \cdot \overline{BS} \cdot \overline{BS} \cdot \overline{CS} \cdot \overline{CS} \cdot \overline{AS} = \tfrac{1}{8} \overline{AS}^2 \cdot \overline{BS}^2 \cdot \overline{CS}^2$$

следува дека

$$V = \tfrac{1}{6} \sqrt{8B_1 \cdot B_2 \cdot B_3} = \tfrac{1}{3} \sqrt{2B_1 \cdot B_2 \cdot B_3} .$$

III година

1. Реши ја неравенката

$$\tfrac{x^2-4x+4}{x^2-6x+9} + \tfrac{x-2}{x-3} - 12 < 0 ,$$

во множеството реални броеви $\mathbb{R}$

Решение. Неравенката се сведува до неравенката $(\tfrac{x-2}{x-3})^2 - \tfrac{x-2}{x-3} - 12 < 0$, при што мора да биде $x \neq 3$. Ставајќи $y = \tfrac{x-2}{x-3}$ се добива: $y^2 + y - 12 < 0$. Бидејќи нули на полиномот $y^2 + y - 12$ се $y = -4$ и $y = 3$, а коефициентот пред y^2 е 1, т.е. поголем од 0, се добива дека

$$-4 < y < 3 \text{, т.е. } -4 < \tfrac{x-2}{x-3} < 3 .$$

Според тоа, множеството решенија на дадената равенка ќе биде пресекот на решенијата на неравенките:

$$\tfrac{x-2}{x-3} - 3 < 0 \qquad (1)$$

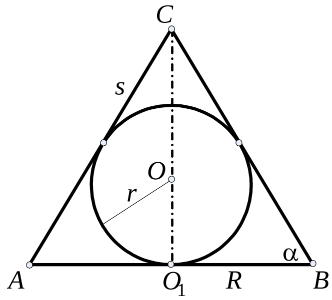
$$\tfrac{x-2}{x-3} + 4 > 0 . \qquad (2)$$

Множеството решенија на неравенката (1) е $(-\infty, 3) \cup (\tfrac{7}{2}, +\infty)$, а множеството решенија на неравенката (2) е $(-\infty, \tfrac{14}{5}) \cup (3, +\infty)$. Значи, множеството решенија на дадената неравенка е $(-\infty, \tfrac{14}{5}) \cup (\tfrac{7}{2}, +\infty)$.

2. Плоштината на впишаната топка во прав кружен конус е двапати помала од плоштината на конусот. Пресметај го аголот α што го зафаќа изводницата со основата на конусот.

Решение. Нека R е радиусот на основата на конусот, r -радиусот на впишаната топка и s изводницата на конусот (види цртеж). Од условот на задачата следува дека $\pi R(s+R) = 8\pi r^2$.

Од триаголниците OBO_1 и BOC се добива дека $r = R\text{tg}\dfrac{\alpha}{2}$ и $\overline{BC} = s = \tfrac{R}{\cos\alpha}$, соодветно. Заменувајќи во (3) и кратејќи со πR^2, добиваме:



$$1+\frac{1}{\cos\alpha}=8\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}$$

Со помош на равенството

$$\cos\alpha=\frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}},$$

равенството (2) се трансформира во

$$\frac{2}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=8\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2},$$

од каде со смената $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=z$ се добива

биквадратната равенка $z^4-z^2+\frac{1}{4}=0$.

Последната равенка има двоен корен $z^2=\frac{1}{2}$, па, значи $\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}$. Од условот на задачата ($0<\alpha<\frac{\pi}{2}$) следува дека $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

3. Реши ја неравенката

$$\log_3 x\ge\log_x 81.$$

Решение. Областа на дефинираност на $\log_3 x$ и $\log_x 81$ е $(0,1)\cup(1,+\infty)$, па множеството решенија на дадената неравенка мора да е подмножество од таа област. Дадената неравенка се трансформира во:

$$\log_3 x\ge\frac{4}{\log_3 x}.$$

Можни се два случаи.

(i) $\log_3 x>0$, т.е. $x>1$. Тогаш неравенката се трансформира во $\log_3 x\ge 2$, а од тука се добива дека $x\ge 3^2=9$. Множеството решенија во овој случај е $[9,+\infty)$.

(ii) $\log_3 x<0$, т.е. $0<x<1$. Тогаш неравенката се трансформира во $\log_3 x\ge -2$, а од тука се добива дека $x\ge\frac{1}{9}$. Множеството решенија во овој случај е $[\frac{1}{9},1)$.

Според тоа, множеството решенија на дадената неравенка е $[\frac{1}{9},1)\cup[9,+\infty)$.

4. Да се најде збирот

$$\log\mathrm{tg}1^\circ+\log\mathrm{tg}2^\circ+...+\log\mathrm{tg}89^\circ.$$

Решение. Имаме

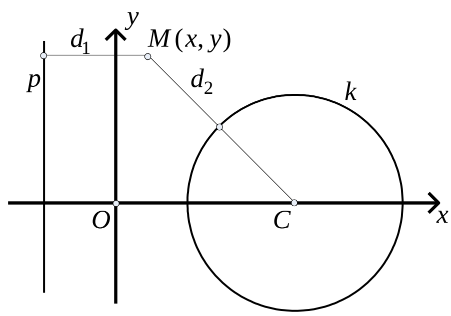
$$\begin{aligned}\log\mathrm{tg}1^\circ+\log\mathrm{tg}2^\circ+...+\log\mathrm{tg}89^\circ&=\log(\mathrm{tg}1^\circ\cdot\mathrm{tg}2^\circ\cdot...\cdot\mathrm{tg}89^\circ)\\&=\log(\mathrm{tg}1^\circ\cdot\mathrm{tg}2^\circ\cdot...\cdot\mathrm{tg}44^\circ\cdot\mathrm{tg}45^\circ\cdot\mathrm{ctg}\,44^\circ\cdot...\cdot\mathrm{ctg}1^\circ)\\&=\log((\mathrm{tg}1^\circ\cdot\mathrm{ctg}1^\circ)\cdot(\mathrm{tg}2^\circ\cdot\cdot\mathrm{ctg}2^\circ)...\cdot(\mathrm{tg}44^\circ\cdot\mathrm{ctg}44^\circ)\cdot\mathrm{tg}45^\circ)\\&=\log(1\cdot1\cdot1\cdot...\cdot1)=\log1=0\end{aligned}$$

IV година

1. Дадени се кружница $(x-5)^2+y^2=9$ и права $x+2=0$. Да се најде геометриското место на точки еднакво оддалечени од кружницата и правата.

Решение. Нека k и p се дадената кружница и права. Нека $M(X,Y)$ е точка од рамнината чии растојанија до p и k се d_1 и d_2 соодветно (види цртеж), при што $d_1=|X+2|$ и

$$d_2=|\overline{MC}-3|=|\sqrt{(X-5)^2+Y^2}-3|.$$



Точката M припаѓа на бараното геометриско место ако и само ако $d_1=d_2$, т.е.

$$|X+2|=|\sqrt{(X-5)^2+Y^2}-3|.$$

Притоа,

$$X+2>0 \text{ и } \sqrt{(X-5)^2+Y^2}-3>0$$

(види цртеж). Значи,

$$X+2=\sqrt{(X-5)^2+Y^2}-3,$$

од каде што се добива дека $Y^2=20X$. Според тоа, бараното геометриско место е параболата $y^2=20x$.

2. Да се реши равенката

$$\sin x+\cos x=\mathrm{tg}x+\mathrm{ctg}x.$$

Решение. Дадената равенка се трансформира во равенка

$$\sin x+\cos x=\frac{1}{\sin x\cos x},$$

т.е. во

$$\sin x+\cos x=\frac{2}{\sin 2x}.$$

Со квадрирање и средување се добива:

$$\sin^2 2x+\sin^3 2x=4.$$

Бидејќи $-1\le\sin 2x\le 1$, следува дека

$$\sin^2 2x+\sin^3 2x\le 2<4,$$

т.е. дадената равенка нема решение.

3. Да се пресмета збирот

$$S_n=(x+\tfrac{1}{x})^2+(x^2+\tfrac{1}{x^2})^2+..+(x^n+\tfrac{1}{x^n})^2,\ n\in\mathbb{N}.$$

Решение. За $x\ne\pm1$,

$$\begin{aligned}S_n &= (x^2+2+\tfrac{1}{x^2})+(x^4+2+\tfrac{1}{x^4})+..+(x^{2n}+2+\tfrac{1}{x^{2n}})\\ &= x^2+x^4+...+x^{2n}+\tfrac{1}{x^2}+\tfrac{1}{x^4}+...+\tfrac{1}{x^{2n}}+2n\\ &= \tfrac{x^2(1-x^{2n})}{1-x^2}+\tfrac{x^{2n}-1}{x^n(x^2-1)}+2n\\ &= \tfrac{(x^{2n}-1)(1+x^{2n+2})}{x^{2n}(x^2-1)}+2n\end{aligned}$$

За $x=\pm1$, имам,е

$$S=2^2+2^2+2^2+...+2^2=4n\,.$$

4. Да се докаже дека производот на k последователни природни броеви е делив со $k!$.

Решение. Нека $n+1, n+2, ..., n+k$ се k последователни природни броеви. Дека нивниот производ е делив со $k!$, следува од тоа што $\binom{n+k}{k}$ е природен број и од тоа што

$$\tfrac{(n+k)(n+k-1)...(n+2)(n+1)}{k!}=\tfrac{(n+k)!}{k!(n+k-k)!}=\binom{n+k}{k}\,.$$